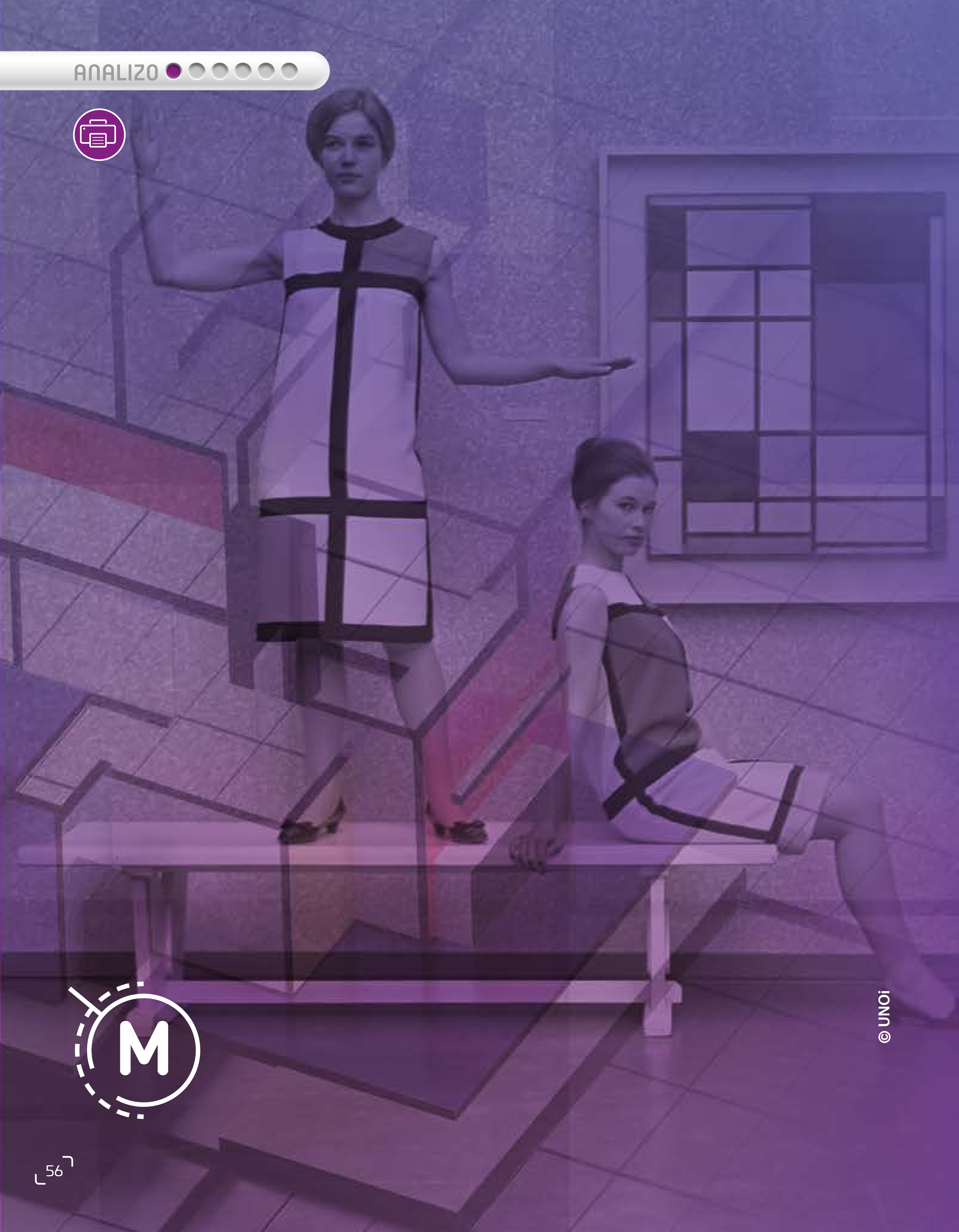


Esfera 2

¿Por qué la misma superficie puede tener distinta área?

¿Los artistas saben de geometría?

¿Por qué las abejas “saben” de matemáticas?

El arte es tan dulce como la miel

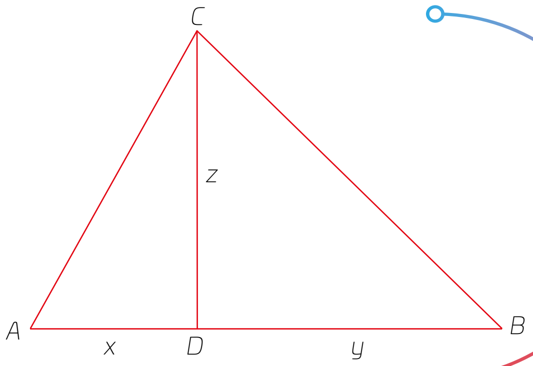
Calcula el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando fórmulas.

RECONOZCO

Comienza esta Esfera de Exploración identificando cuáles de estas actividades puedes contestar con base en lo que ya sabes y registra en la lista de cotejo cuántos puntos obtuviste. Al terminarla, responde de nuevo las actividades en tu cuaderno para que reconozcas cuánto avanzaste.

Kazimir Malevich, *Red Square. Painterly Realism of a Peasant Woman in Two Dimensions* (1915)

01 **Expresa el área de los triángulos siguientes. Considera que el segmento *CD* es una altura del Δ*ABC*.** +3

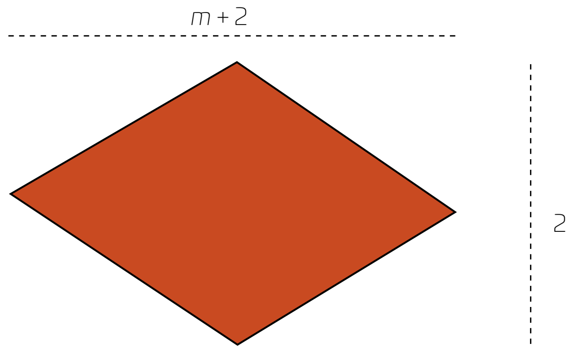


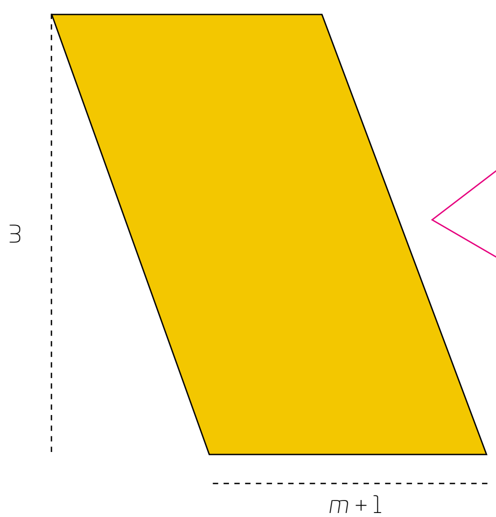
Área del $\Delta ADC = \frac{xz}{2}$ unidades cuadradas (u^2)

Área del $\Delta CDB = \frac{yz}{2}$ u^2

Área del $\Delta ABC = \frac{z(x+y)}{2}$ u^2

1.1 Relaciona cada figura con las expresiones que permiten calcular su área. +3

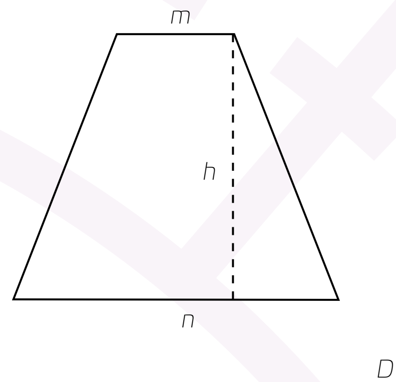




- $3m + 1$
- $2m + 4$
- $3(m + 1)$
- $\frac{2(m+2)}{2}$
- $m + 2$
- $3m + 3$

1.2 Haz lo que se indica. +2

› Colorea las expresiones que permiten calcular el área del trapecio.



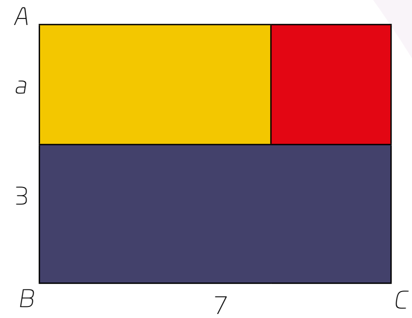
$m + \frac{nh}{2}$ $\frac{mnh}{2}$ $(m + n)\,\frac{h}{2}$

$\frac{m + n}{2} \times h$ $2(m + n)h$ $\frac{(m + n)h}{2}$

› Rodea la expresión con la que se puede calcular el área del trapecio cuando $m = 3$, $n = 10$ y $h = 8$.

$A = \frac{(10 + 8) \times 3}{2}$ $A = \frac{10 \times 3 + 8}{2}$ $A = \frac{(10 + 3) \times 8}{2}$ $A = \frac{(8 + 3) \times 10}{2}$

1.3 Identifica los rectángulos que se forman en la figura de la derecha. Luego, anota las expresiones que permiten calcular el área de cada uno. Considera que el cuadrilátero rojo es un cuadrado. +2



Área del rectángulo de tres colores: $7(a + 3)$ u²;

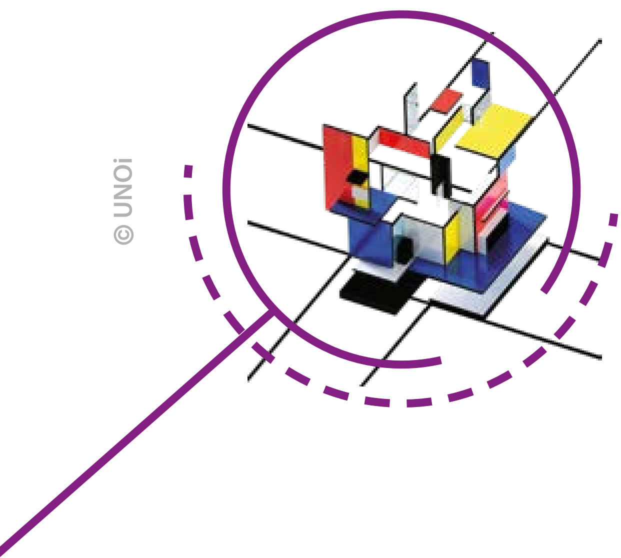
Área del rectángulo amarillo: $a(7 - a)$ u²;

Área del rectángulo azul: $3 \times 7 = 21$ u²; Área del rectángulo amarillo y rojo: $7a$ u²

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Calculo áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando fórmulas.				
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO



Aprendizaje esperado

› Calcula el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando fórmulas.

Key

Cálculo del área de polígonos: triángulos y cuadriláteros.

¿Cuántos centímetros cuadrados mide la pantalla de tu tableta? ¿Crees que para cubrir una superficie lo más adecuado es usar unidades cuadradas? ¿Sabías que hay una figura que funciona mejor para cubrir superficies? ¡Sí, la hay! Pero, primero, recordemos la diferencia entre superficie y área.

El suelo del salón es una superficie y la cantidad de piezas necesarias para cubrirlo es el área, y, claro, esta depende de la unidad de medida que se use. Medir una superficie es calcular cuántas unidades cuadradas caben en ella, así que el área de una figura depende de la forma y el tamaño de la unidad usada.

Esa necesidad de conocer el tamaño de una superficie ha existido desde hace miles de años: medir áreas ha sido una actividad muy importante en todas las culturas. Los primeros registros que se tienen sobre este trabajo son las tablillas de Mesopotamia, de hace 5 000 años, aproximadamente, y los papiros egipcios, de hace unos 3 600 años. Medir de manera correcta las áreas era tan importante que la profesión de agrimensor era muy reconocida; en Egipto, las personas que la ejercían se conocían como "tiradores de cuerdas", pues su trabajo lo realizaban tensando cuerdas en los terrenos para marcarlos y dividir figuras complejas en otras más sencillas, cuyas áreas, fáciles de calcular, sumaban para obtener el área total del terreno; ¡parecido a lo que has hecho tú al calcular áreas! Incluso en la pintura, el área y las superficies son piezas clave para crear obras.

Una conjetura es una proposición que se considera verdadera, pero que aún no se prueba o refuta; cuando se prueba, se le conoce como teorema.

Los egipcios desarrollaron técnicas muy buenas para medir la tierra —de ahí la palabra "geometría"— porque el río Nilo provocaba inundaciones que borraban los límites de los terrenos. Estas técnicas están registradas en el papiro de Ahmes y el papiro de Moscú, y alrededor del año 600 a. n. e., Tales de Mileto, matemático griego, viajó a Egipto y las aprendió. Posteriormente, Tales las compartió con varios matemáticos griegos, entre ellos Pitágoras, quienes las convirtieron en una nueva rama de las matemáticas.

Con los griegos se desarrolló la geometría y se demostró que cualquier polígono puede descomponerse en triángulos ▲▼, se estableció que la fórmula del área de un polígono puede expresarse como la suma de las áreas de los triángulos en los que se descompone. Algo muy interesante es que los únicos polígonos regulares con los que se puede cubrir el plano, sin que se encimen y sin dejar huecos, son los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos regulares. ¿Te imaginas por qué? Si cubrimos tres superficies idénticas solo con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares, respectivamente, el recubrimiento con menor perímetro total será el de los hexágonos. Esto se conoce como la "Conjetura del panal de abejas", y su origen es muy viejo: se piensa que por el año 36 a. n. e., Marco Terencio, un sabio romano, fue el primero en afirmar la conjetura. De hecho, podemos pensar que las abejas "saben mucha geometría", pues al construir sus panales usan menos cera con hexágonos regulares que con otras figuras.

Las inundaciones del río Nilo borraban los límites de los terrenos de los antiguos egipcios.

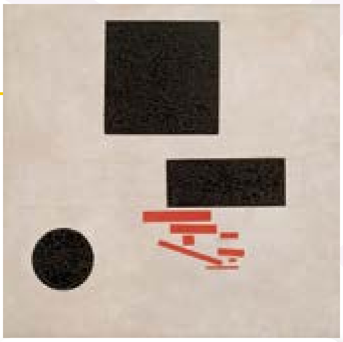
Tres siglos más tarde, Pappus de Alejandría, matemático griego, trabajó muchos años intentando demostrar esa conjetura, pero, aunque para los matemáticos de esa época era evidente, no pudo explicar el porqué, es decir, no pudo demostrarlo. La humanidad tuvo que esperar más de diecisiete siglos para conocer la demostración, pues fue en 1999 cuando el matemático norteamericano Thomas C. Hales logró dar la explicación formal de la maravilla de los hexágonos.

¿Te imaginas cuánto trabajo matemático hay detrás de lo que parece el simple cálculo de un área? ¿Qué otras figuras se te ocurren usar para calcular? ¿Vale la pena comenzar a usar unidades hexagonales? ¿Cómo usan los artistas las superficies para pintar?

Concha Ruiz Ruiz-Funes

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y representa tus conclusiones.

Dibuja, resume, pega, ¡lo que quieras! R. L.



Kazimir Malevich, *Suprematist Composition* (1915)

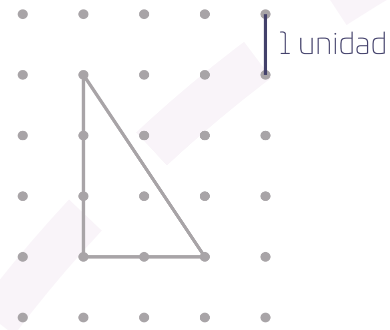
Kazimir Malevich (1879-1935): pintor vanguardista ruso y creador del suprematismo.

Pieter Cornelis "Piet Mondrian" Mondriaan (1872-1944): pintor vanguardista holandés y uno de los principales representantes del arte abstracto.

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

01 Observa la figura de la derecha y escribe cuál es el área del triángulo considerando la unidad de medida que se indica.

El área es de tres unidades cuadradas.

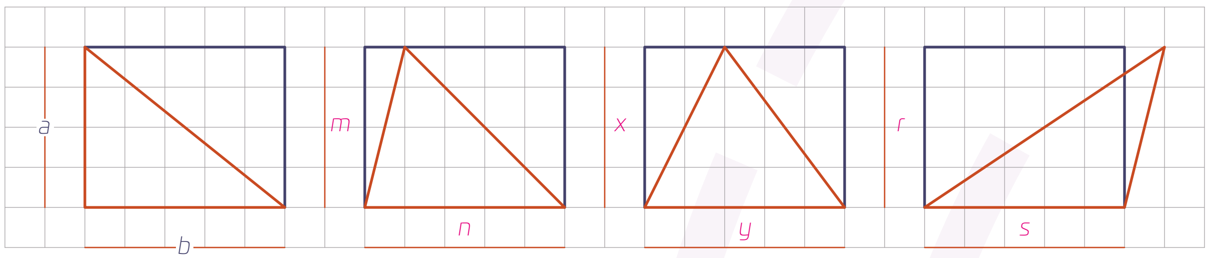


Considera que la distancia entre dos puntos horizontales seguidos es de tres unidades en lugar de una unidad y completa.

El área de un “cuadrito” sería de nueve unidades cuadradas.

El área del triángulo sería de 27 unidades cuadradas.

02 Indica con literales la base y la altura de cada rectángulo, y úsalas para expresar el área de los triángulos. Observa y continúa el ejemplo. R. M.



Área: $\frac{b \times a}{2}$ Área: $\frac{n \times m}{2}$ Área: $\frac{y \times x}{2}$ Área: $\frac{s \times r}{2}$

Reúnete con un compañero y comparen las literales que usaron y sus fórmulas. Después, contesten.

¿Qué tienen en común las literales que eligieron? Todas representan los mismos valores, ya sea la base o la altura de los rectángulos o de los triángulos.

¿Por qué las fórmulas anteriores son equivalentes? Son equivalentes porque todas representan el área de triángulos que tienen la misma base y la misma altura.

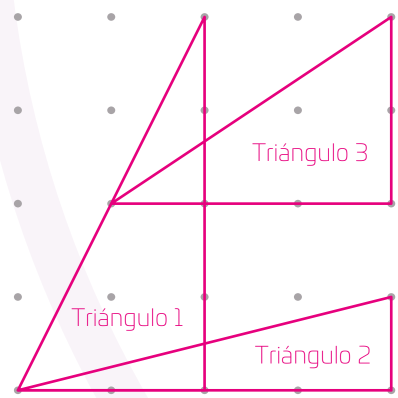
Kazimir Malevich, *Eight Red Rectangles* (1915)

03 Construye en la retícula tres triángulos rectángulos que tengan distinta área y exprésalas con la literal *h*. Considera que la distancia entre dos puntos horizontales seguidos es de *h* unidades. R. M.

Triángulo 1: $\frac{2h \times 4h}{2} = 4h^2$

Triángulo 2: $\frac{4h \times h}{2} = 2h^2$

Triángulo 3: $\frac{3h \times 2h}{2} = 3h^2$



Explica si tuviste alguna dificultad para resolver la actividad anterior y cómo la superaste 💪. R. L.

04 Expresa el área de los triángulos en términos de las medidas indicadas. Luego, haz lo que se pide.

En la pintura, considera que los triángulos negros del centro tienen, cada uno, una altura de n unidades y una base, respectivamente de arriba hacia abajo, de $a + 1$, x y $3 + m$ unidades.

Wassily Kandinsky, *Molle rudesse* (1927)

Área triángulo 1: $\frac{(a + 1)n}{2}$ u^2

Área triángulo 2: $\frac{xn}{2}$ u^2

Área triángulo 3: $\frac{(3 + m)n}{2}$ u^2

Calcula el área de los triángulos para los valores indicados. Considera que $n = 3$ en cada caso.

Para $a = 2$: $\frac{(a + 1)n}{2} = \frac{(2 + 1)3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ u^2

Para $x = 5$: $\frac{xn}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$ u^2

Para $m = -1$: $\frac{(3 + m)n}{2} = \frac{(3 - 1)3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ u^2

05 Lee y contesta. Explica tus respuestas.

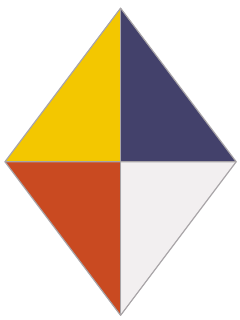
Lucía empleará un rombo para crear una pieza suprematista. Tiene planeado usar la forma y los colores que se muestran. Las diagonales medirán 30 cm y 40 cm, respectivamente.

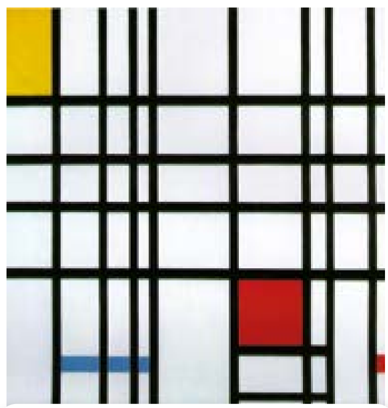
¿Cuánta pintura de cada color necesitará?

Para cada color necesitará 150 cm^2 de pintura porque cada triángulo mide 15 cm de base y 20 cm de altura, y $\frac{15 \times 20}{2} = \frac{300}{2} = 150$.

El rombo será parte de un lienzo rectangular que medirá 57 cm de largo por 62.5 cm de alto, ¿cuánta pintura necesitará para el resto de la obra?

Para toda la obra necesita 57 cm × 62.5 cm = 3 562.5 cm^2 de pintura, de los cuales 600 cm^2 corresponden a la figura que se muestra, entonces, para el resto de la obra necesitará 3 562.5 cm^2 – 600 cm^2 = 2 962.5 cm^2 de pintura.





Piet Mondrian, *Composition with Yellow, Blue and Red* (1942)

AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

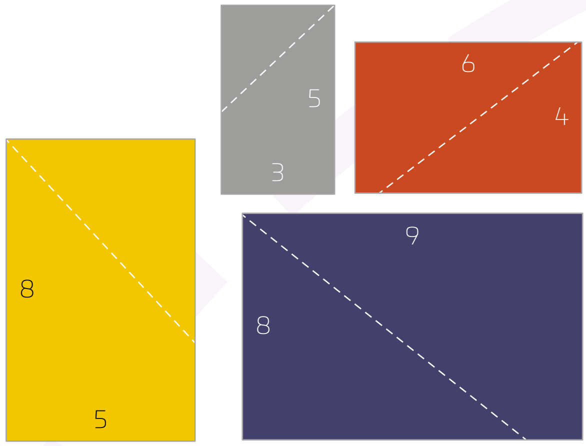
SALUD

¿Cuánto mide la superficie de tu clóset? ¿Podrías vivir ahí con tu familia? Se estima que en el futuro **las casas serán cada vez más pequeñas** (hasta alcanzar departamentos completos de 20 m^2). Y, aunque **los diseñadores de espacios** trabajan para que sea cómodo y funcional vivir así, diversos especialistas en salud mental consideran esto como un **riesgo para la salud**.

El área óptima para una casa varía alrededor del mundo, y las familias tienden a ser más pequeñas. Sin embargo, habitar espacios muy chicos **implica menos actividades físicas y recreativas, privacidad y concentración**, lo que genera **estrés**. Pese a esto, la **demanda de viviendas** es tan alta que la tendencia a construir espacios reducidos va en aumento, y se estima que en el futuro podríamos incluso asistir a **mini escuelas y oficinas**, si no se llevan a cabo acciones para contrarrestar esta tendencia.

Imagina cómo cambiaría el mundo si **todos los espacios para vivir fueran reducidos**. ¿Cuáles problemas de salud pueden originarse? ¿Qué se puede hacer para evitar esta situación? ¿Cuál crees que es la mínima superficie que una familia necesita para vivir cómodamente?

06 Construye en una hoja cuadriculada los rectángulos y haz lo que se indica.



› Considera un cuadrado de la hoja como la unidad cuadrada (u^2) y calcula el área de cada rectángulo.

Rectángulo amarillo: $40\ u^2$ Rectángulo azul: $72\ u^2$

Rectángulo rojo: $24\ u^2$ Rectángulo gris: $15\ u^2$

› Recorta el triángulo marcado por la línea punteada de cada rectángulo y trasládalo horizontal o verticalmente para que uno de sus lados coincida con un lado de la parte que no recortaste. Luego, responde.

¿Qué figura obtuviste en cada caso? Obtuve romboides.

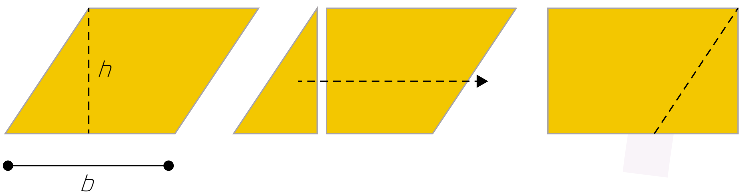
¿Cuál es el área de cada una de las figuras que obtuviste? ¿Por qué?

El área es la misma que la de los rectángulos porque las figuras solo se transformaron.

07 Haz lo que se indica.

R. M.

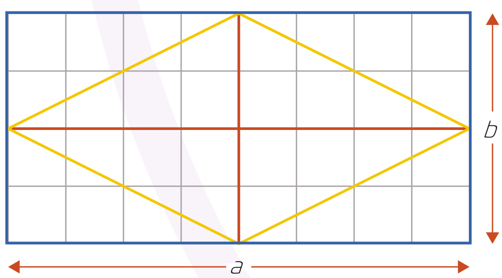
› Con base en el diagrama, escribe y justifica la fórmula para calcular el área de un romboide.



La fórmula es $A = hb$. Al recortar del romboide el triángulo formado por una altura del romboide y desplazarlo hacia la derecha hasta que coincida con un lado del romboide, se forma un rectángulo, que tiene la misma base y altura. Y como la fórmula para calcular el área de un rectángulo es base por altura, también lo es para el área del romboide.

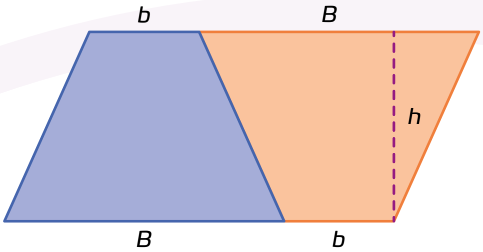
Kazimir Malevich, *Suprematism. Two-Dimensional Self-Portrait* (1915)

› Justifica la fórmula para calcular el área de un rombo, $A = \frac{ab}{2}$, con apoyo de la imagen.



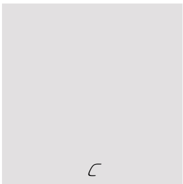
El área del rombo es la mitad de la del rectángulo azul porque cada uno de los triángulos en los que se divide el rombo, con las líneas rojas, es la mitad de los rectángulos que se forman con esas líneas. Además, la diagonal mayor es igual a la base del rectángulo azul y la menor, a la altura, entonces $A = \frac{ab}{2}$.

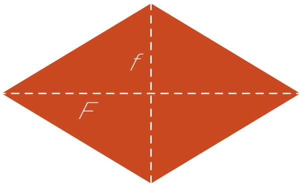
› El trapecio anaranjado se obtuvo al reproducir el azul, girarlo y colocarlos juntos. A partir de ello, escribe y justifica la fórmula para calcular el área de un trapecio. R. M.



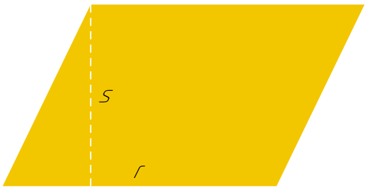
La fórmula es $A = \frac{(B + b)h}{2}$. Los dos trapecios tienen la misma área porque son iguales. Además, juntos forman un romboide, con base $B + b$ y altura h, y como la fórmula para calcular el área de un romboide es base por altura, entonces, para el área del trapecio basta con dividir entre 2, es decir, $A = \frac{(B + b)h}{2}$.

08 **Reúnete con un compañero y escriban dos expresiones equivalentes para calcular el área de cada figura.** R. M.



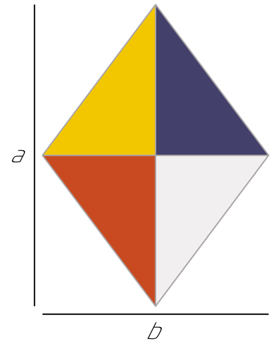


$cc = c^2$	$yz = zy$	$\frac{Ff}{2} = \frac{fF}{2}$



$rs = sr$	$\frac{(M + m)n}{2} = (M + m)\frac{n}{2}$

09 **Observa el papalote y contesta.**



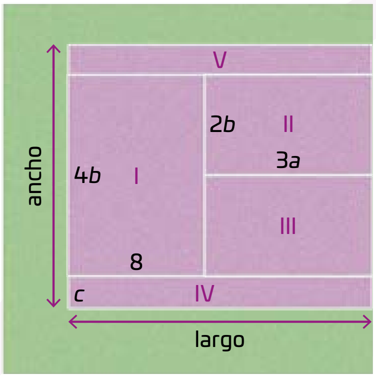
¿Cuál es el área de uno de los triángulos? $\frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{2}$

¿Cómo se obtiene, a partir del resultado anterior, la fórmula para calcular el área de todo el papalote? Explica y haz los cálculos.

La fórmula anterior se suma cuatro veces, pues el papalote está formado de cuatro triángulos: $\frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{2} + \frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{2} + \frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{2} + \frac{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}}{2} = \left(\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}\right) = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2}$

Comenten en grupo por qué la fórmula anterior permite calcular el área de cualquier rombo. Úsenla para calcular el área cuando a = 5 m y b = 2 m; a = 3 dm y b = 1.2 dm; y a = 2.25 cm y b = 1.5 cm.

10 La figura representa la mitad de una cancha de tenis. Las medidas se representan con variables. Observa y escribe lo que se pide.



Escribe una expresión que represente el ancho y largo de la figura.

Largo: $8 + 3a$ Ancho $= 4b + 2c$

Escribe las expresiones de las áreas de los rectángulos I, II y IV.

área I $= 4b \times 8 = 32b$; área II $= 3a \times 2b = 6ab$
área IV $= (8 + 3a)\,c$

Rodea la expresión algebraica que **no** representa el área total de la figura.

$(8 + 3a)(4b + 2c)$ $c(8) + 2b(4b + c)$ $4b(8 + 3a) + 2c(3a + 8)$

11 Analiza las figuras y completa la tabla de acuerdo con la información.

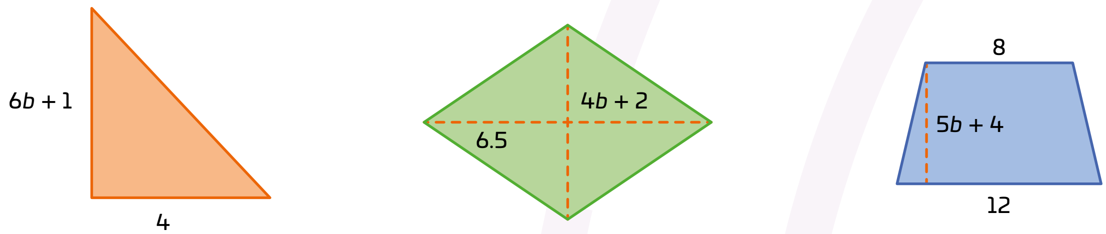
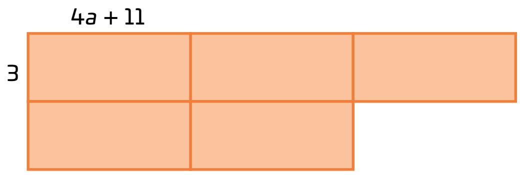


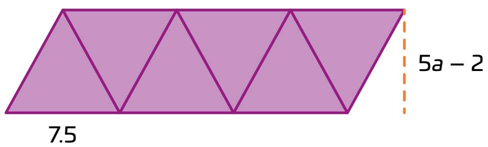
Figura	Expresión del área	Valor numérico cuando $b = 3$
Triángulo rectángulo	$\frac{4(6b+1)}{2} = \frac{24b+4}{2} = 12b + 2$	$12(3) + 2 = 38$
Rombo	$\frac{6.5(4b+2)}{2} = \frac{26b+13}{2} = 13b + 6.5$	$13(3) + 6.5 = 45.5$
Trapecio	$\frac{(12+8)(5b+4)}{2} = \frac{20(5b+4)}{2} = 50b + 40$	$50(3) + 40 = 150 + 40 = 190$

12 Escribe una expresión para calcular el área de las siguientes figuras.



El área de un rectángulo es $3(4a + 11) = 12a + 33$

Como son 5 rectángulos, la expresión se multiplica por 5:
$5(12a + 33) = 60a + 165$

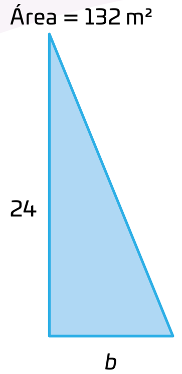


El área de un triángulo es: $\frac{7.5\,(5a-2)}{2} = \frac{37.5a - 15}{2} = 18.75a - 7.5$

Como son 6 triángulos, multiplicamos el resultado por 6:
$6(18.75a - 7.5) = 112.5a - 45$

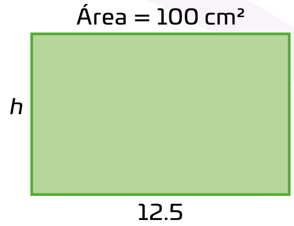
13 Analiza los enunciados y responde. Comprueba tu respuesta.

a. Una estructura triangular tiene un área de 132 m^2; si la altura es de 6 m, ¿cuánto mide su base (b)?



$$\frac{24b}{2} = 132$$
$$12b = 132$$
$$b = \frac{132}{12} = 11$$
Comprobación:
$$\frac{24(11)}{2} = 132$$
$$\frac{264}{2} = 132$$
$$132 = 132$$

b. El ancho de una caja rectangular mide 12.5 cm y su área total es de 100 cm^2. ¿Cuánto mide su altura (h)?



$$100 = 12.5 \times h$$
$$h = \frac{100}{12.5}$$
$$h = 8$$
Comprobación:
$$12.5\ (8) = 100$$
$$100 = 100$$

14 Resuelve los problemas.

a. El papá de Nancy cambiará el azulejo del baño, por lo que necesita cubrir una superficie en forma de rectángulo con una medida de 90 m^2. Si de ancho esta mide 12 m, ¿cuánto mide de largo (b)?

El área es: $90 = b \times 12$

Por tanto, $b = \frac{90}{12} = 7.5$

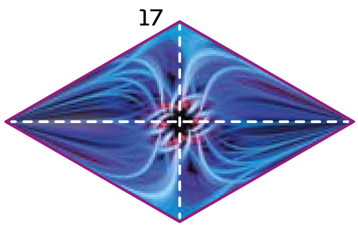
El rectángulo tiene de largo 7.5 metros.

b. El área de una pintura de madera como la de la imagen es de 255 cm^2. Calcula la longitud de la diagonal mayor.

El área es: $255 = \frac{D \times d}{2} = \frac{D \times 17}{2}$

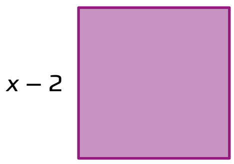
Por tanto, $D = \frac{255 \times 2}{17} = 30$

La diagonal mayor mide 30 cm.



15 Analiza y responde.

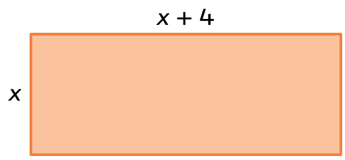
a. El perímetro del cuadrado es de 18 u. Calcula su área.



El perímetro es $4(x - 2) = 18$
$$4x - 8 = 18$$
$$4x = 18 + 8$$
$$x = \frac{26}{4}$$
$$x = 6.5$$
Cada lado mide $6.5 - 2 = 4.5$ u

Por tanto, el área es $4.5 \times 4.5 = 20.25$ u^2

b. El perímetro del siguiente rectángulo es de 58 u. Calcula la medida de su base, su altura y su área.



El perímetro es
$$2(x) + 2(x + 4) = 58$$
$$2x + 2x + 8 = 58$$
$$4x = 58 - 8$$
$$x = \frac{50}{4}$$
$$x = 12.5$$
La altura es de 12.5 u y la base de 16.5 u

Por tanto, su área total mide 206.25 u^2

Sube nivel

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Para el ejercicio 02, obtén la mayor cantidad de expresiones equivalentes que puedas 🤓.

01 **Observa la pintura, lee y calcula el área de la región blanca. Justifica tu respuesta.**

Kazimir Malevich, *Suprematism with Blue Triangle and Black Square* (1915)

La pintura anterior mide 57 cm × 66.5 cm; el rectángulo negro mide aproximadamente 50 cm × 34 cm, el triángulo azul tiene una base de 33 cm y una altura de 32 cm, y el triángulo que se forma entre la parte negra y la azul, tiene 20 cm de base y 20 cm de altura.

Área de la región blanca: 1762.5 centímetros cuadrados.

Justificación: Área total: 57 cm × 66.5 cm = 3790.5 cm^2;

Área del rectángulo negro: 50 cm × 34 cm = 1700 cm^2;

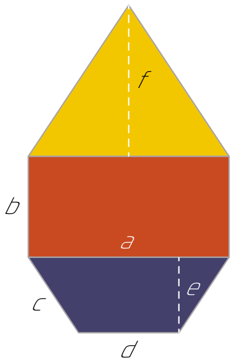
Área del triángulo azul: 33 cm × 32 cm ÷ 2 = 528 cm^2;

Área del triángulo pequeño: 20 cm × 20 cm ÷ 2 = 200 cm^2;

Área de la región blanca: 3790.5 – 1700 – 528 + 200 = 1762.5 cm^2

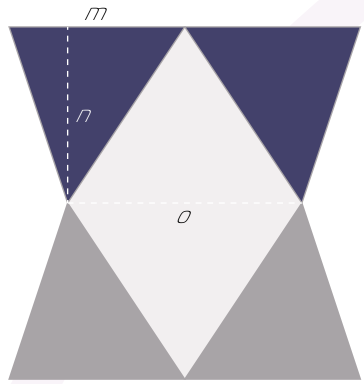
02 **Expresa con las literales dadas el área total de las siguientes figuras.** R. M.

a.



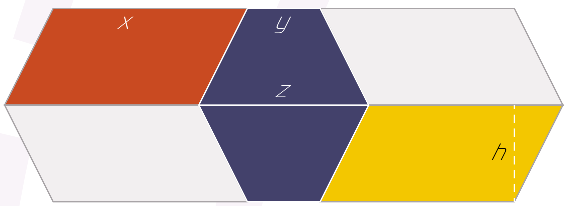
Área total: $\frac{af}{2} + ab + \frac{(a+d)e}{2} = ab + \frac{af + (a+d)e}{2}$

b.



Área total: $4\left(\frac{mn}{2}\right) + no = \frac{mn}{2} + \frac{mn}{2} + \frac{mn}{2} + \frac{mn}{2} + 2\,\frac{no}{2}$

c.



Área total: $4(xh) + (y+z)h = xh + xh + xh + xh + 2\,\frac{(y+z)h}{2}$

Calcula tus puntos en cada ejercicio.

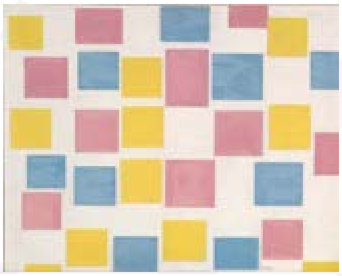
- Ejercicio 01 sin errores: 15 puntos
- Ejercicio 01 con uno o dos errores: 5 puntos
- En el ejercicio 02, para cada figura:
  Una expresión correcta: 1 punto
  Dos expresiones equivalentes correctas: 3 puntos
  Tres o más expresiones equivalentes correctas: 4 puntos

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.



Piet Mondrian, *Composition with Color Fields* (1915)

Yves Saint Laurent, *Mondrian dress* (1965)

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa de nuevo a la página 61 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!