2ª Edición

Matemáticas para Ciencias

PEARSON Prentice Hall

Claudia Neuhauser

Álgebra

Función de segundo grado

La solución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Notación factorial

Para todo entero positivo n,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

por definición, $0! = 1$.

Radicales

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{m/n}$$

Exponentes

$$(ab)^r = a^r b^r \qquad a^r a^s = a^{r+s} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Binomio de Newton

$$(x+y)^2 = x^2 = 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 = 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

En general, $(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n,$

donde el coeficiente binomial $\binom{n}{m}$ es el entero $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

Factores especiales

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$
$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$$
$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$
$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$$

Geometría

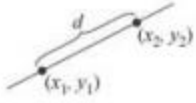
Fórmulas de distancias

Distancia en la recta de los números reales

$$d = |a - b|$$

Distancia en el plano

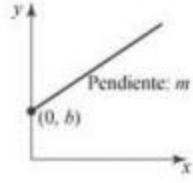
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Ecuaciones de rectas y círculos

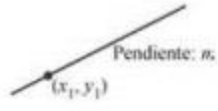
Ecuación pendiente-ordenada en el origen

$$y = mx + b$$



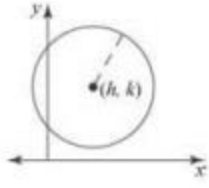
Ecuación punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Círculo de centro (h, k) y radio r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Área del triángulo:

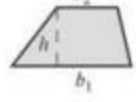
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Área del rectángulo:

$$A = bh$$

Área del trapecio:

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2}h$$



Área del círculo:

$$A = \pi r^2$$

Circunferencia:

$$C = 2\pi r$$

Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

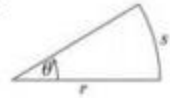
Área de la superficie:

$$A = 4\pi r^2$$

Sector circular (θ en radianes)

$$\text{Área} = \frac{\theta r^2}{2}$$

$$s = r\theta$$



Volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Área de la superficie curva

$$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

Área de la superficie curva:

$$A = 2\pi rh$$

Trigonometría

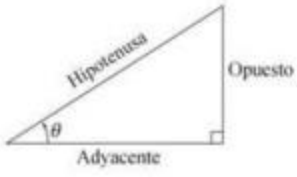
Definición de seis funciones trigonométricas

Definiciones según triángulo, con $0 < \theta < \pi/2$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opp.}}{\text{hyp.}} \quad \csc\theta = \frac{\text{hyp.}}{\text{opp.}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj.}}{\text{hyp.}} \quad \sec\theta = \frac{\text{hyp.}}{\text{adj.}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opp.}}{\text{adj.}} \quad \cot\theta = \frac{\text{adj.}}{\text{opp.}}$$

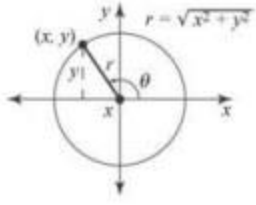


Definiciones de funciones circulares, siendo θ cualquier ángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$



DERIVADAS E INTEGRALES

Reglas básicas de derivación

1. $\dfrac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\dfrac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\dfrac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\dfrac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
7. $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}$
8. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$
9. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}$
10. $\dfrac{d}{dx}a^x = (\ln a)\,a^x$
11. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$
12. $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$
13. $\dfrac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$
14. $\dfrac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$
15. $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
16. $\dfrac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$
17. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
18. $\dfrac{d}{dx}[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
19. $\dfrac{d}{dx}[\arctan x] = \dfrac{1}{1 + x^2}$
20. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} x] = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Fórmulas básicas de integración

1. $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int dx = x + C$
4. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
6. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
8. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
9. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
10. $\displaystyle\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
11. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
12. $\displaystyle\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
13. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
14. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
15. $\displaystyle\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
16. $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|x|}{a} + C$

MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS

Segunda Edición

CLAUDIA NEUHAUSER
University of Minnesota

Traducción
ANA TORRES SUÁREZ
Licenciada en Ciencias Físicas

PEARSON
Prentice Hall

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS. Segunda Edición
Neuhauser, C.

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2004

ISBN: 978-84-832-2705-3

MATERIA: Matemáticas, 51

Formato 195 × 270 mm Páginas: 1016

Todos los derechos reservados.
Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual *(arts. 270 y sgts. Código Penal).*

DERECHOS RESERVADOS
© 2004 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS. Segunda Edición
Neuhauser, C.

ISBN: 84-205-4253-9
Depósito legal: M.

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Authorized translation from the English language edition, entitled CALCULUS FOR BIOLOGY AND MEDICINE, 2nd Edition, by NEUHAUSER, CLAUDIA, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2004.
ISBN 0-13-045516-4

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission form Pearson Education, Inc.

Equipo editorial:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: Diego Marín

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

CONTENIDO

PROLOGO xv

1 PRESENTACIÓN Y REPASO 1

1.1 Preliminares 2
- 1.1.1 Los números reales 2
- 1.1.2 Rectas en el plano 5
- 1.1.3 Ecuación del círculo 7
- 1.1.4 Trigonometría 7
- 1.1.5. Exponenciales y logaritmos 9
- 1.1.6. Números complejos y ecuaciones cuadráticas 12
- 1.1.7. *Problemas* 14

1.2 Funciones elementales 17
- 1.2.1 ¿Qué es una función? 17
- 1.2.2 Funciones polinómicas 21
- 1.2.3 Funciones racionales 24
- 1.2.4 Funciones potenciales 25
- 1.2.5 Funciones exponenciales 28
- 1.2.6 Funciones inversas 32
- 1.2.7 Funciones logarítmicas 35
- 1.2.8 Funciones trigonométricas 39
- 1.2.9 *Problemas* 43

1.3 Representaciones gráficas 48
- 1.3.1 Representación gráfica y transformaciones básicas de funciones 48
- 1.3.2 La escala logarítmica 51
- 1.3.3 Transformaciones en funciones lineales 54
- 1.3.4 De una descripción verbal a una gráfica (opcional) 64
- 1.3.5. *Problemas* 69

1.4 Términos clave 77

1.5 Problemas de repaso 77

2 MODELOS EN TIEMPO DISCRETO, SUCESIONES Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS 81

2.1 Crecimiento y decrecimiento exponencial 81
2.1.1 Modelado en tiempo discreto del crecimiento de una población 81
2.1.2 Ecuaciones recursivas 85
2.1.3 *Problemas* 87

2.2 Sucesiones 89
2.2.1 ¿Qué son las sucesiones? 89
2.2.2 Límites 91
2.2.3 Ecuaciones recursivas 96
2.2.4 *Problemas* 99

2.3 Más modelos de poblaciones 102
2.3.1 Crecimiento de poblaciones restringido: curva de reclutamiento de Beverton-Holt 102
2.3.2 Ecuación logística discreta 104
2.3.3 Curva de Ricker 109
2.3.4 Sucesiones de Fibonacci 110
2.3.5 *Problemas* 112

2.4 Términos clave 114

2.5 Problemas de repaso 114

3 LÍMITES Y CONTINUIDAD 116

3.1 Límites 116
3.1.1 Presentación informal de los límites 117
3.1.2 Leyes de los límites 124
3.1.3 *Problemas* 127

3.2 Continuidad 128
3.2.1 ¿Qué es la continuidad? 128
3.2.2 Combinación de funciones continuas 133
3.2.3 *Problemas* 137

3.3 Límites en el infinito 138
3.3.1 *Problemas* 142

3.4 El teorema del sándwich y algunos límites trigonométricos 143
3.4.1 *Problemas* 148

3.5 Propiedades de las funciones continuas 149
3.5.1 El teorema del valor intermedio 149
3.5.2 Una nota final acerca de las funciones continuas 152
3.5.3 *Problemas* 152

3.6 Definición formal de límite (opcional) 153
3.6.1 *Problemas* 159

3.7 Términos clave 160

3.8. Problemas de repaso 160

4 DERIVACIÓN 163

4.1 Definición formal de derivada 165
4.1.1 Interpretación geométrica y uso de la definición 166
4.1.2 La derivada como velocidad de variación instantánea: un primer vistazo a las ecuaciones diferenciales 171
4.1.3 Derivabilidad y continuidad 174
4.1.4 *Problemas* 177

4.2 La regla de la potencia, reglas básicas de derivación y derivadas de polinomios 179
4.2.1 *Problemas* 183

4.3 Reglas del producto y del cociente y derivadas de funciones potenciales y racionales 186
4.3.1 Regla del producto 186
4.3.2 Regla del cociente 188
4.3.3 *Problemas* 192

4.4 Regla de la cadena y derivadas de orden superior 195
4.4.1 Regla de la cadena 195
4.4.2 Funciones implícitas y derivación implícita 200
4.4.3 Variaciones relacionadas 203
4.4.4 Derivadas de orden superior 206
4.4.5 *Problemas* 208

4.5 Derivadas de funciones trigonométricas 211
4.5.1 *Problemas* 215

4.6 Derivadas de funciones exponenciales 216
4.6.1 *Problemas* 221

4.7 Derivadas de la función inversa y de la función logarítmica 223
4.7.1 Derivada de la función inversa 223
4.7.2 Derivada de la función logarítmica 229
4.7.3 Derivación logarítmica 231
4.7.4 *Problemas* 233

4.8 Aproximación y linealidad local 235
4.8.1 *Problemas* 241

4.9 Términos clave 243
4.10 Problemas de repaso 243

5 APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN 245

5.1 Extremos y teorema del valor medio 245
5.1.1 El teorema de los valores extremos 245
5.1.2 Extremos locales 247

5.1.3 Teorema del valor medio 254
5.1.4 *Problemas* 259

5.2 Monotonía y concavidad 261
5.2.1 Monotonía 263
5.2.2 Concavidad 265
5.2.3 *Problemas* 270

5.3 Extremos, puntos de inflexión y gráficas de funciones 273
5.3.1 Extremos 273
5.3.2 Puntos de inflexión 280
5.3.3 Gráficas y asíntotas 282
5.3.4 *Problemas* 287

5.4. Optimización 289
5.4.1 *Problemas* 296

5.5 Regla de L'Hôpital 298
5.5.1 *Problemas* 307

5.6 Ecuaciones en diferencias: estabilidad (opcional) 308
5.6.1 Crecimiento exponencial 308
5.6.2 Estabilidad: caso general 310
5.6.3 *Ejemplos* 315
5.6.4 *Problemas* 317

5.7 Métodos numéricos: el método de Newton-Raphson (opcional) 318
5.7.1 *Problemas* 324

5.8 Primitivas 325
5.8.1 *Problemas* 330

5.9 Términos clave 332

5.10 Problemas de repaso 332

6 INTEGRACIÓN 335

6.1 La integral definida 335
6.1.1 El problema del área 336
6.1.2 Integrales de Riemann 341
6.1.3 Propiedades de la integral de Riemann 349
6.1.4 *Problemas* 355

6.2 El teorema fundamental del cálculo 358
6.2.1 El teorema fundamental del cálculo (Parte I) 359
6.2.2 Primitivas e integrales indefinidas 364
6.2.3 El teorema fundamental del cálculo (Parte II) 367
6.2.4 *Problemas* 371

6.3 Aplicaciones de la integración 374
6.3.1 Áreas 374
6.3.2 Cambio acumulativo 380
6.3.3 Valores medios 382
6.3.4 Volumen de un sólido (opcional) 385
6.3.5 Rectificación de curvas (opcional) 389
6.3.6 *Problemas* 392

6.4 Términos clave 395

6.5 Problemas de repaso 395

7 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y MÉTODOS COMPUTACIONALES 397

7.1 Método del cambio de variable 397
7.1.1 Integrales indefinidas 397
7.1.2 Integrales definidas 401
7.1.3 *Problemas* 406

7.2 Integración por partes 408
7.2.1 *Problemas* 414

7.3 Práctica del cambio de variable y de la descomposición en fracciones simples 415
7.3.1 Práctica del cambio de variable 415
7.3.2 Funciones racionales y descomposición en fracciones simples 418
7.3.3 *Problemas* 424

7.4 Integrales impropias 425
7.4.1 Tipo 1: intervalos no limitados 425
7.4.2 Tipo 2: integrando no acotado 434
7.4.3 Un resultado de comparación de utilidad en integrales impropias 440
7.4.4 *Problemas* 442

7.5 Integración numérica 444
7.5.1 Regla del punto medio 445
7.5.2 Regla del trapecio 449
7.5.3 *Problemas* 451

7.6 Tablas de integrales 452
7.6.1. *Problemas* 457

7.7 La aproximación de Taylor 457
7.7.1 Polinomios de Taylor 458
7.7.2 El polinomio de Taylor en $x = a$ 464
7.7.3 ¿Cuál es la exactitud de la aproximación? (opcional) 465
7.7.4 Problemas 469

7.8 Términos clave 470

7.9 Problemas de repaso 471

8 ECUACIONES DIFERENCIALES 473

8.1 Solución de ecuaciones diferenciales 474
8.1.1 Ecuaciones diferenciales puramente temporales 475
8.1.2 Ecuaciones diferenciales autónomas 476
8.1.3 Crecimiento alométrico 488
8.1.4 *Problemas* 491

8.2 Equilibrios y estabilidad 493
8.2.1 Un primer vistazo a la estabilidad 494
8.2.2 Modelo de un solo compartimiento o depósito 501
8.2.3 El modelo de Levins 503
8.2.4 El efecto Allee 506
8.2.5 *Problemas* 507

8.3 Sistemas de ecuaciones autónomas (opcional) 510
8.3.1 Un modelo epidémico simple 510
8.3.2 Un modelo de compartimientos 513
8.3.3 Un modelo jerárquico de competición 516
8.3.4 *Problemas* 518

8.4 Términos clave 519

8.5 Problemas de repaso 519

9 ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 523

9.1. Sistemas lineales 523
9.1.1. Solución gráfica 523
9.1.2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 529
9.1.3. *Problemas* 536

9.2 Matrices 537
9.2.1 Operaciones básicas con matrices 537
9.2.2 Multiplicación de matrices 539
9.2.3 Matrices inversas 544
9.2.4 Cálculo de matrices inversas (opcional) 550
9.2.5 Una aplicación: la matriz de Leslie 554
9.2.6 *Problemas* 560

9.3 Aplicaciones lineales, autovectores y autovalores 563
9.3.1 Representación gráfica 564
9.3.2 Autovalores y autovectores 569
9.3.3 Aplicaciones iterativas (necesario para la Sección 10.7) 578
9.3.4 *Problemas* 584

9.4 Geometría analítica 587
9.4.1 Puntos y vectores en dimensiones superiores 587
9.4.2 El producto escalar 592
9.4.3 Ecuación paramétrica de la recta 597
9.4.4 *Problemas* 599

9.5 Términos clave 601

9.6 Problemas de repaso 601

10 CÁLCULO MULTIVARIABLE 603

10.1 Funciones de dos o más variables independientes 604
10.1.1 *Problemas* 614

10.2 Límites y continuidad 616
10.2.1 Definición informal de límite 616
10.2.2 Definición formal de límite (opcional) 619
10.2.3 Continuidad 621
10.2.4 *Problemas* 622

10.3 Derivadas parciales 623
10.3.1 Funciones de dos variables 623
10.3.2 Funciones de más de dos variables 628
10.3.3 Derivadas parciales de orden superior 629
10.3.4 *Problemas* 631

10.4 Planos tangentes, funciones derivables y linealización 632
10.4.1 Funciones de dos variables 632
10.4.2 Funciones vectoriales 639
10.4.3 *Problemas* 642

10.5 Conceptos adicionales sobre derivadas (opcional) 643
10.5.1 Regla de la cadena para funciones de dos variables 643
10.5.2 Derivación implícita 645
10.5.3 Derivadas direccionales y vectores gradiente 647
10.5.4 *Problemas* 653

10.6 Aplicaciones (opcional) 654
10.6.1 Máximos y mínimos 654
10.6.2 Extremos con restricciones 669
10.6.3 Difusión 679
10.6.4 *Problemas* 683

10.7 Sistemas de ecuaciones en diferencias (opcional) 686
10.7.1 Un ejemplo biológico 686
10.7.2 Equilibrio y estabilidad en sistemas de ecuaciones en diferencias lineales 689

10.7.3. Equilibrios y estabilidad de sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales 691
10.7.4 *Problemas* 697

10.8 Términos clave 700

10.9 Problemas de repaso 700

11 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES 702

11.1 Sistemas lineales: teoría 703
11.1.1 El campo direccional 704
11.1.2 Solución de sistemas lineales 706
11.1.3 Equilibrios y estabilidad 715
11.1.4 *Problemas* 725

11.2 Sistemas lineales: aplicaciones 731
11.2.1 Modelos de compartimientos 731
11.2.2 El oscilador armónico (opcional) 736
11.2.3 *Problemas* 738

11.3 Sistemas autónomos no lineales: teoría 739
11.3.1 Método analítico 740
11.3.2 Método gráfico para sistemas 2 × 2 748
11.3.3 *Problemas* 751

11.4 Sistemas no lineales: aplicaciones 752
11.4.1 El modelo de competencia interespecífica de Locka-Volterra 752
11.4.2 Un modelo depredador-presa 760
11.4.3 La matriz comunitaria 763
11.4.4 Un modelo matemático de la actividad neuronal 767
11.4.5 Un modelo matemático de las reacciones enzimáticas 771
11.4.6 *Problemas* 777

11.5 Términos clave 782

11.6 Problemas de repaso 783

12 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 785

12.1 Conteo 785
12.1.1 El principio de multiplicación 785
12.1.2 Permutaciones 787
12.1.3 Combinaciones 789
12.1.4 Combinación de los principios de conteo 790
12.1.5 *Problemas* 793

12.2 ¿Qué es la probabilidad? 794
12.2.1 Definiciones básicas 794
12.2.2 Resultados equiprobables 799
12.2.3. *Problemas* 805

12.3 Probabilidad condicional e independencia 806
12.3.1 Probabilidad condicional 807
12.3.2 La ley de la probabilidad total 808
12.3.3 Independencia 810
12.3.4 Fórmula de Bayes 813
12.3.5 *Problemas* 817

12.4 Variables aleatorias discretas y distribuciones discretas 818
12.4.1 Distribuciones discretas 819
12.4.2 Media y varianza 822
12.4.3 La distribución binomial 832
12.4.4 La distribución multinomial 836
12.4.5 La distribución geométrica 837
12.4.6 La distribución de Poisson 842
12.4.7 *Problemas* 848

12.5 Distribuciones continuas 853
12.5.1 Funciones de densidad 853
12.5.2 La distribución normal 862
12.5.3 La distribución uniforme 872
12.5.4 La distribución exponencial 875
12.5.5 *Problemas* 884

12.6 Teoremas sobre límites 887
12.6.1 La ley de los grandes números 887
12.6.2 El teorema central del límite 891
12.6.3 *Problemas* 896

12.7 Herramientas estadísticas 898
12.7.1 Recogida y descripción de datos 898
12.7.2 Estimación de medias y proporciones 901
12.7.3 Regresión lineal 908
12.7.4 *Problemas* 914

12.8 Términos clave 916

12.9 Problemas de repaso 916

APÉNDICE A 918

APÉNDICE B 920

SECCIÓN DE RESPUESTAS 921

REFERENCIAS 982

ÍNDICE ALFABÉTICO 985

PRÓLOGO

Cuando apareció hace tres años la primera edición de este libro, inmediatamente empecé a pensar en una segunda edición. Había temas ausentes de la primera edición que son necesarios en un libro de cálculo para estudiantes de ciencias de la vida: ecuaciones diferencias, extremos de funciones de dos variables, optimización con restricciones, y teoría de la probabilidad. También deseaba añadir más ejemplos biológicos, en particular en la primera mitad del libro, y añadir más problemas (el número de problemas en muchas secciones es el doble o el triple de los que había en la primera edición).

A pesar de estos cambios, los objetivos de la primera edición permanecen: modelar y analizar fenómenos de las ciencias de la vida utilizando el cálculo. En un curso tradicional de cálculo, los estudiantes de biología no ven claramente por qué el contenido es relevante en su educación. Este libro está escrito exclusivamente para estudiantes de ciencias médicas y biológicas. Se ha hecho un esfuerzo para demostrarles desde el principio cómo el cálculo puede ayudar a entender los fenómenos de naturaleza.

Este libro es diferente de los libros tradicionales de cálculo. **Primero**, está escrito en un contexto de ciencias de la vida. Los conceptos se motivan con ejemplos biológicos para recalcar que el cálculo es una herramienta importante en las ciencias de la vida. La segunda edición tiene muchos más ejemplos biológicos que la primera, particularmente en la primera mitad del libro. **Segundo**, se da un amplio tratamiento a las ecuaciones en diferencias. Se presentan en el Capítulo 2, donde se hacen accesibles a estudiantes sin conocimientos de cálculo, y así se proporciona un punto de entrada más fácil a los modelos de población que utilizando ecuaciones diferenciales. Se consideran de nuevo en los Capítulos 5 y 10, donde reciben un tratamiento más formal utilizando el cálculo. **Tercero**, las ecuaciones diferenciales, una de las herramientas de modelado más importantes en las ciencias de la vida, se presentan pronto, inmediatamente después de la definición formal de derivadas del Capítulo 4. Hay dos capítulos que tratan exclusivamente de ecuaciones diferenciales y de sistemas de ecuaciones diferenciales. Ambos capítulos contienen numerosas aplicaciones actualizadas. **Cuarto**, las aplicaciones biológicas de la derivación y la integración están integradas en el texto. **Quinto**, se estudia el cálculo multivariable, ya que muchos estudiantes de ciencias de la vida no seguirán un segundo año de cálculo, y el cálculo multivariable es necesario para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias que

los estudiantes encontrarán en cursos posteriores. El capítulo sobre cálculo multivariable contiene ahora un tratamiento de los extremos y de los multiplicadores de Lagrange.

En este libro no se enseña modelado ya que el objetivo es enseñar cálculo. El modelado es un arte que se debe enseñar en un curso separado. Sin embargo, a lo largo del texto, los estudiantes encontrarán modelos matemáticos de fenómenos biológicos. Esto facilitará la transición al modelado real y permitirá ver cómo el cálculo proporciona útiles herramientas en las ciencias de la vida.

Ejemplos Cada concepto se motiva con ejemplos biológicos. Sigue después una amplia discusión fuera del contexto de las ciencias de la vida para facilitar a los estudiantes su familiarización con el significado y la mecánica del concepto. Finalmente, se dan ejemplos biológicos para enseñar a los estudiantes cómo utilizar el material en un contexto de ciencias de la vida.

Los ejemplos del texto están completamente resueltos y los pasos de los cálculos se explican frecuentemente con palabras.

Problemas El cálculo no se puede aprender viendo como lo aplica otro. Por eso este libro contiene ejercicios y problemas. Los problemas son una parte fundamental en aprendizaje del cálculo en un contexto de ciencias de la vida. Se encuentran actualizados y son adaptaciones bien de otros textos estándar en biología o de trabajos de investigación originales. En la segunda edición se han añadido muchos problemas nuevos. Como el libro está escrito para estudiantes de primer curso, los ejemplos se escogen de forma que no se necesite un conocimiento formal de biología.

Tecnología En el libro se aprovechan las calculadoras gráficas. Esto permite a los estudiantes desarrollar una comprensión visual mucho mejor de los conceptos del cálculo. Aparte de esto, no se requiere software especial.

RESUMEN DE LOS CAPÍTULOS

Capítulo 1 En la Sección 1.1 se resumen las herramientas básicas del álgebra y la trigonometría. La Sección 1.2 contiene las funciones básicas utilizadas en el libro, incluyendo las funciones exponencial y logarítmica. Se resaltan especialmente sus propiedades gráficas y su importancia biológica. La Sección 1.3 se ocupa de las gráficas logarítmicas y semilogarítmicas. Se trata de herramientas gráficas que se utilizan frecuentemente en las ciencias de la vida. Además, hay una sección para aprender a trasladar descripciones verbales de fenómenos biológicos a gráficas que proporcionarán a los estudiantes habilidades muy necesarias cuando lean literatura biológica.

Capítulo 2 Este capítulo se ha añadido a la segunda edición. Se ocupa de las ecuaciones en diferencias (o modelos en tiempo discreto) y de las sucesiones. Se proporciona así una forma natural explicar la necesidad de los límites. Los modelos clásicos de crecimiento de poblaciones aparecen a lo largo del capítulo y así se da a los estudiantes una primera visión sobre la utilidad del uso de modelos en la comprensión de los fenómenos biológicos.

Capítulo 3 Los límites y la continuidad son conceptos clave para entender la parte conceptual del cálculo. Se da inicialmente una visión intuitiva antes de presentar la teoría. La definición formal de límite está ahora al final del capítulo y se puede omitir.

Capítulo 4 Se presenta la definición geométrica de derivadas como pendiente de la tangente antes de pasar a un tratamiento formal. Tras la definición formal de derivadas, se presentan las ecuaciones diferenciales como modelos de fenómenos biológicos. Se consideran las reglas de derivación. Estas secciones dan a los estudiantes tiempo para familiarizarse con las reglas básicas de la derivación antes de considerar las aplicaciones. Las variaciones relacionadas y la propagación de errores, además de las ecuaciones diferenciales, son las principales aplicaciones.

Capítulo 5 Este capítulo presenta aplicaciones biológicas y más tradicionales de la derivación. Muchas de las aplicaciones son consecuencia del teorema del valor medio. Se han adaptado muchos problemas reales bien de libros de texto de biología o de artículos de investigación originales. De esta forma las aplicaciones tradicionales (como extremos, monotonía y concavidad) se ponen en un contexto biológico. Se ha añadido una sección sobre análisis de ecuaciones en diferencias.

Capítulo 6 La integración se motiva geométricamente. El teorema fundamental del cálculo y sus consecuencias se estudia en profundidad. Tanto las aplicaciones tradicionales como las aplicaciones biológicas de la integración se consideran antes de estudiar las técnicas de integración.

Capítulo 7 Este capítulo contiene técnicas de integración. Sin embargo, sólo se consideran las técnicas más importantes. Se utilizan tablas de integrales para resolver integrales más complicadas. El uso de software no se considera en el libro, aunque se reconoce su utilidad en el cálculo de integrales. Este capítulo contiene también una sección sobre polinomios de Taylor.

Capítulo 8 Este capítulo proporciona una introducción a las ecuaciones diferenciales. El tratamiento no es completo, pero proporcionará a los estudiantes herramientas analíticas y gráficas para analizar ecuaciones diferenciales. Se presentan los autovalores para facilitar el tratamiento analítico de sistemas de ecuaciones diferenciales que se estudiarán en el Capítulo 11. Muchas de las ecuaciones diferenciales que se presentan en el libro son modelos importantes en biología. Aunque este libro no es un libro de modelado, los estudiantes verán cómo se pueden utilizar las ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos biológicos y serán capaces de interpretar ecuaciones diferenciales. El Capítulo 8 contiene un gran número de aplicaciones actualizadas sobre las ecuaciones diferenciales en biología.

Capítulo 9 El álgebra matricial es una herramienta indispensable para todo científico de la vida. El material de este capítulo cubre los conceptos más básicos y está adaptado a los Capítulos 10 y 11, donde se utiliza frecuentemente el álgebra matricial. Se resalta especialmente el tratamiento de los autovalores y los autovectores debido a su importancia en el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 10 Este capítulo es una introducción al cálculo multidimensional. El tratamiento es breve y está adaptado al Capítulo 11, donde se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales. Los temas principales son las derivadas parciales y la linealización de funciones vectoriales. El estudio del gradiente y de la difusión no es necesario para Capítulo 11. Se ha añadido una sección sobre extremos y multiplicadores de Lagrange, que tampoco se requiere para el Capítulo 11. Si las ecuaciones en diferencias se impartieran pronto en el curso, la sección final este capítulo proporciona una introducción a los sistemas de ecuaciones en diferencias con muchos ejemplos biológicos.

Capítulo 11 Este capítulo contiene material muy importante para los estudiantes de ciencias de la vida. Se desarrollan herramientas gráficas y analíticas para permitir a los estudiantes analizar sistemas de ecuaciones diferenciales. El capítulo se divide en sistemas lineales y no lineales. La comprensión de la estabilidad de sistemas lineales en términos de campos vectoriales, autovectores y autovalores sirve de ayuda a los estudiantes para abordar el análisis más difícil de los sistemas no lineales. Se explica la teoría antes de dar aplicaciones, de forma que los estudiantes se puedan familiarizar con la mecánica antes de profundizar en las aplicaciones. Un amplio conjunto de problemas permite a los estudiantes experimentar la potencia esta herramienta de modelado en un contexto biológico.

Capítulo 12 Este capítulo contiene algunas herramientas básicas de probabilidad y estadística y se ha ampliado considerablemente comparado con la primera edición. En particular, el Capítulo 8 de la primera edición se incorporado ahora al Capítulo 12. No se trata de sustituir a un curso completo de un semestre sobre probabilidad y estadística, pero permite que los estudiantes vean algunos de los conceptos necesarios en genética de poblaciones y diseño de experimentos.

CÓMO USAR ESTE LIBRO

Este libro contiene más material que el que se puede impartir en un año. De esta forma se tiene más flexibilidad en la selección de secciones del material. Las secciones etiquetadas como opcionales se pueden omitir y su contenido no se necesita en las secciones posteriores.

El material se puede organizar para ser impartido en cursos de un semestre, dos cuatrimestres, dos semestres, cuatro cuatrimestres, o tres semestres. Los Capítulos 1 al 4 se deben impartir en ese orden antes de pasar a impartir cualquiera de las otras secciones. Además de los Capítulos 1 al 4, se pueden escoger las siguientes secciones:

Un semestre 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.8, 6.1, 6.2, 6.3 (sin 6.3.4 ni 6.3.5).

Un semestre 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.8, 6.1, 6.2, 8.2 (sin resolver ninguna de las ecuaciones diferenciales).

Dos cuatrimestres 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.8, 6.1, 6.2, 6.3 (sin 6.3.4 ni 6.3.5), Capítulo 7, Capítulo 8.

Dos semestres 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.8, 6.1, 6.2, 6.3, Capítulos 7, 8 y 9, 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.7, 11.1, 11.2, 11.3, 11.4 (dos de las subsecciones).

Cuatro cuatrimestres o tres semestres Todas las secciones no etiquetadas como opcionales. Las secciones opcionales se pueden escoger si el tiempo lo permite.

Un semestre con énfasis en probabilidad Capítulo 1, sólo las Secciones 2.2.1 y 2.2.2 del Capítulo 2, Capítulo 3 (excepto 3.6), Capítulo 4, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.8, 6.1, 6.2, 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6.

AGRADECIMIENTOS

Este libro no habría sido posible sin la ayuda de numerosa gente. Además, el libro se ha beneficiado grandemente de las revisiones críticas de un primer manuscrito.

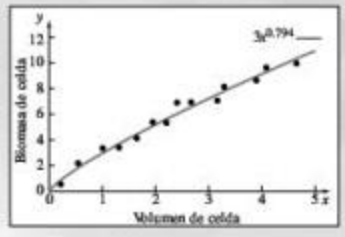
Andrea Brose
University of California, Los Ángeles
Shandelle Henson
Andrews University
Yang Kuang
Arizona State University
En-Bing Lin
University of Toledo
Jennifer Mueller
Colorado State University
Bruce Peckham
University of Minnesota, Duluth
Scott Rimbey
University of South Florida
Roberto Schonmann
University of California, Los Ángeles
Christopher Sogge
Johns Hopkins University
Glenn Tesler
University of California, San Diego
Paul Van Steenberghe
University of Maine
Nathaniel Whitaker
University of Massachusetts, Amherst
Sarah Witherspoon
Amherst College

Gracias a todos los estudiantes que han seguido este curso a lo largo de los años en la universidad de Minnesota y en la universidad de California - Davis por sus constructivas críticas y su entusiasmo. Estoy especialmente en deuda con George Lobell, mi anterior editor de matemáticas en Prentice-Hall, que hizo posible este libro la primera vez; Eric Frank, mi actual editor de matemáticas; Dawn Murrin, editor asociado y Jeanne Audino, el editor de producción en matemáticas. Todos ellos merecen mi agradecimiento por conseguir la segunda edición haya sido posible. Finalmente, deseo dar las gracias a mi marido Maury Bramson, por soportar mis largas horas de trabajo en la segunda edición del libro.

Claudia Neuhaser
cneuhaus@cbs.umn.edu
Minneapolis, Saint Paul, Minnesota

CAPÍTULO 1

PRESENTACIÓN Y REPASO



Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) son conocidos por la invención del cálculo. No sólo fueron sus inventores, sino también los primeros en desarrollarlo sistemáticamente.

El cálculo está dividido en dos partes: cálculo diferencial y cálculo integral. Históricamente, el cálculo diferencial se ocupa de encontrar tangentes a curvas y extremos (es decir, máximos y mínimos) de dichas curvas. Por otra parte, el cálculo integral se basa en intentar determinar el área de regiones limitadas por curvas, o el volumen de cuerpos sólidos. Las dos partes del cálculo están estrechamente relacionadas. La operación básica en una de ellas es la inversa de la operación básica en la otra. Este resultado se conoce como teorema fundamental del cálculo y se remonta a Newton y Leibniz. Ellos fueron los primeros en comprender el significado de esta relación inversa y en llevarla a la práctica para resolver problemas complejos.

El cálculo de tangentes, extremos y áreas es un problema geométrico básico, por lo que resulta algo sorprendente que la solución a dicho problema haya conducido al desarrollo de métodos que son de utilidad en un conjunto muy amplio de problemas científicos. El motivo principal es que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado está relacionada con la velocidad de cambio de dicha función en ese punto. El conocimiento de esta velocidad de cambio abre las posibilidades al estudio de fenómenos dinámicos en biología, como el crecimiento de poblaciones, la velocidad a la que se produce una reacción química, la velocidad de disparo de las neuronas, o la velocidad a la que las especies invasoras ocupan un nuevo hábitat. Por estos motivos, el cálculo ha sido una de las herramientas más poderosas en la formulación matemática de conceptos científicos. Las aplicaciones del cálculo no se limitan a la biología. De hecho, la física fue el motor del desarrollo original del cálculo. En este texto, sin embargo, nuestro principal interés será el uso del cálculo en biología.

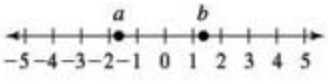
Además de desarrollar la teoría del cálculo diferencial e integral, presentaremos muchos ejemplos en los que el cálculo se utiliza para describir o modelar situaciones en las ciencias biológicas. El uso del razonamiento cuantitativo está cobrando más importancia en biología, por ejemplo, para modelar las interacciones entre especies en una comunidad, para describir las actividades de las neuronas, para explicar la diversidad genética de las poblaciones, o para predecir el impacto del calentamiento global sobre la vegetación. El cálculo (Capítulos 1-11), y la probabilidad y estadística (Capítulo 12) se cuentan entre las herramientas cuantitativas más importantes del biólogo.

1.1 PRELIMINARES

Daremos un breve repaso a algunos conceptos y técnicas previas que se utilizan frecuentemente en cálculo. Los problemas que se presentan al final de la sección servirán para volver a familiarizarse con este material.

1.1.1 Los números reales

Los **números reales** se pueden visualizar fácilmente en la **recta de los números reales** (*véase* la Figura 1.1).



▲ **Figura 1.1**
La recta de los números reales

Los números de dicha recta están ordenados, de forma que si $a < b$, entonces a está a la izquierda de b. Los conjuntos (colecciones) de números reales se denotan mediante letras mayúsculas, como A, B, etc. Para definir el conjunto A, escribiremos

$$A = \{x : \text{condición}\}$$

donde «condición» sirve para indicar qué números pertenecen al conjunto A. El conjunto más importante en cálculo es el **intervalo**. Se utilizan las siguientes notaciones: si $a < b$, entonces

$$\text{el intervalo } \textbf{abierto } (a, b) = \{x : a < x < b\}$$

y

$$\text{el intervalo } \textbf{cerrado } [a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$$

Se utilizan también intervalos **semiabiertos**

$$[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\} \qquad \text{y} \qquad (a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$$

Los intervalos **no acotados** son conjuntos de la forma $\{x : x > a\}$. Ahora los posibles casos son:

$$[a, \infty) = \{x : x \geqslant a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x : x \leqslant a\}$$
$$(a, \infty) = \{x : x > a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}$$

Los símbolos «∞» y «$-\infty$» significan «más infinito» y «menos infinito». No son números reales y se utilizan únicamente por conveniencia de notación. La recta de los números reales, que se denomina $\mathbf{R}$, no tiene extremos, y puede definirse de las siguientes formas equivalentes:

$$\mathbf{R} = \{x : -\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty)$$

La posición del número 0 en la recta de los números reales se denomina **origen**, y se puede medir la distancia de un número x al origen. Por ejemplo, -5 está 5 unidades a la izquierda del origen. Existe una notación conveniente para medir distancias al origen de la recta de los números reales, que se denomina valor absoluto de un número real.

Definición El **valor absoluto** de un número real a, que se indica por $|a|$, es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|-7| = -(-7) = 7$. El valor absoluto se puede utilizar para obtener la distancia entre dos números cualesquiera x_1 y x_2:

$$\text{distancia entre } x_1 \text{ y } x_2 = |x_1 - x_2|$$

Nótese que $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Para obtener la distancia entre -2 y 4, podemos calcular $|-2 - 4| = |-6| = 6$ o también $|4 - (-2)| = |4 + 2| = 6$.

Con frecuencia será necesario resolver ecuaciones que contengan valores absolutos, para lo que la siguiente propiedad será útil. Sea $b \geqslant 0$.

1. Si $a \geqslant 0$, $|a| = b$ es equivalente a $a = b$.

2. Si $a < 0$, $|a| = b$ es equivalente a $-a = b$.

Ejemplo 1 Resuelva $|x - 4| = 2$.

Solución

Si $x - 4 \geqslant 0$, entonces $x - 4 = 2$ y por tanto $x = 6$. Si $x - 4 < 0$ entonces $-(x - 4) = 2$ y por tanto $x = 2$. Las soluciones son por tanto $x = 6$ y $x = 2$. La Figura 1.2 ilustra gráficamente la solución. Los puntos de intersección de $y = |x - 4|$ e $y = 2$ están en $x = 6$ y $x = 2$. La resolución de $|x - 4| = 2$ se puede interpretar también como encontrar los dos números que están a una distancia de 2 del número 4. ◀

Si se necesita resolver una ecuación de la forma $|a| = |b|$ se puede escribir como $a = b$ o $a = -b$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Resuelva $|\frac{3}{2}x - 1| = |\frac{1}{2}x + 1|$.

Solución

O bien

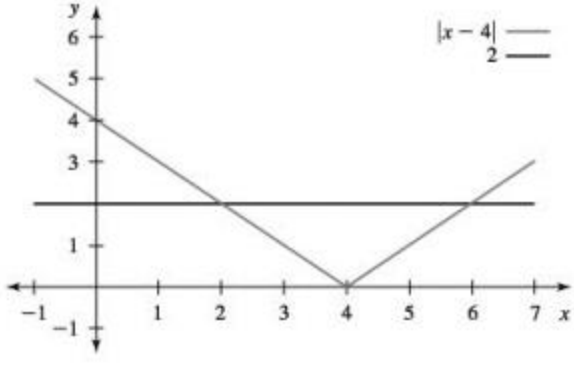
$$\frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x + 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{3}{2}x - 1 = -\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$\frac{3}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x - 1$$

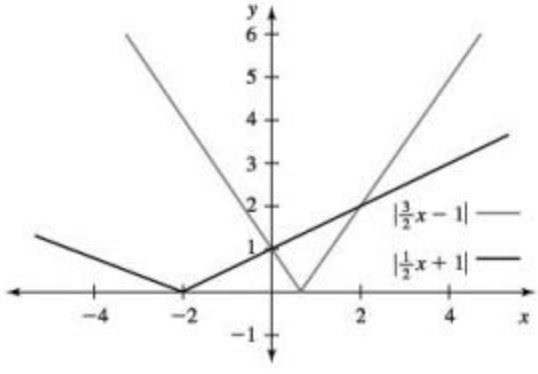
$$x = 2 \qquad\qquad 2x = 0$$

$$x = 0$$

La Figura 1.3 muestra la solución gráfica de este ejemplo. ◀



◀ **Figura 1.2**
Las gráficas de $y = |x - 4|$ e $y = 2$. Los puntos de intersección están en $x = 6$ y $x = 2$



◀ **Figura 1.3**
Las gráficas de $y = |\frac{3}{4}x - 1|$ e $y = |\frac{1}{2}x + 1|$. Los puntos de intersección están en $x = 0$ y $x = 2$

Volviendo al Ejemplo 1, donde se encontraron los dos puntos cuya distancia al número 4 es igual a 2, podemos intentar obtener ahora aquellos puntos cuya distancia a 4 es menor que (o mayor que) 2. Esto requiere resolver inecuaciones con valores absolutos. Volviendo a la Figura 2.1, se puede ver que el conjunto de valores x cuya distancia al número 4 es menor que 2 (es decir, $|x - 4| < 2$) es el intervalo $(2, 6)$. De forma similar, el conjunto de valores x cuya distancia al número 4 es mayor que 2 (es decir, $|x - 4| < 2$) es la unión de intervalos $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$.

En general, para resolver inecuaciones con valores absolutos, son de utilidad las dos propiedades siguientes. Sea $b > 0$.

1. $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$.

2. $|a| > b$ es equivalente a $a > b$ o $a < -b$.

Ejemplo 3 (a) Resuelva $|2x - 5| < 3$. (b) Resuelva $|3x - 4| \geqslant 2$.

Solución

(a) Si se escribe $|2x - 5| < 3$ como

$$-3 < 2x - 5 < 3$$

Sumando 5 a los tres miembros, resulta

$$2 < 2x < 8$$

Dividiendo el resultado por 2, se obtiene

$$1 < x < 4$$

La solución es por tanto el conjunto $\{x : 1 < x < 4\}$. En notación de intervalos, la solución se puede expresar como el intervalo abierto $(1, 4)$.

(b) Para resolver $|3x - 4| \geqslant 2$, deben seguirse estos pasos:

$$\begin{array}{rcl} 3x - 4 \geqslant 2 & & 3x - 4 \leqslant -2 \\ 3x \geqslant 6 & \text{o} & 3x \leqslant 2 \\ x \geqslant 2 & & x \leqslant \dfrac{2}{3} \end{array}$$

La solución es el conjunto $\{x : x \geqslant 2 \text{ o } x \leqslant \frac{2}{3}\}$ o bien, en notación de intervalos, $(-\infty, \frac{2}{3}] \cup [2, \infty)$. ◀

1.1.2 Rectas en el plano

Frecuentemente se encuentran situaciones donde la relación entre diversas cantidades se puede expresar mediante una **ecuación lineal**. Por ejemplo, cuando se cuelga un peso de un muelle helicoidal hecho de algún material elástico (y el peso no es excesivamente grande), la relación entre la longitud y del muelle y el peso x es

$$y = y_0 + kx \tag{1.1}$$

donde y_0, indica la longitud del muelle cuando no cuelga ningún peso y k es una constante positiva. La Ecuación (1.1) es un ejemplo de ecuación lineal, y se dice que x e y satisfacen una ecuación lineal.

La forma **estándar** de una ecuación lineal se expresa como

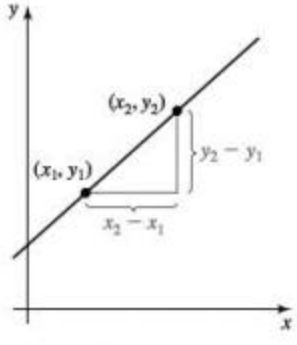
$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes, A y B no pueden valer simultáneamente 0, y x e y son dos variables. En álgebra se demuestra que la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta.

Si se conocen dos puntos de una línea recta, (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la **pendiente** de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esto se ilustra en la Figura 1.4. Dos puntos (o un punto y la pendiente) son suficientes para determinar la ecuación de una línea recta.



▲ **Figura 1.4**
Pendiente de una línea recta

Si se conocen un punto y la pendiente se puede emplear la forma **punto-pendiente** de la ecuación de una recta. Está dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde m es la pendiente y (x_0, y_0) es un punto de la recta. Si se conocen dos puntos, se calcula primero la pendiente, y después se usa uno de los puntos y la pendiente para expresar la ecuación de la recta en la forma anterior.

Por último, la expresión utilizada más frecuentemente para una ecuación lineal es la forma **pendiente-ordenada en el origen**

$$y = mx + b$$

donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen, que es el punto de intersección de la recta con el eje y, cuyas coordenadas son $(0, b)$.

En el recuadro que sigue resumimos las tres formas de expresar las ecuaciones lineales.

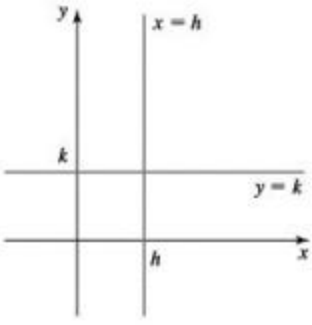
$Ax + By + C = 0$	(Forma estándar)
$y - y_0 = m(x - x_0)$	(Forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(Forma pendiente-ordenada en el origen)

Ejemplo 4 Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(3, -\frac{1}{2})$ en la forma pendiente-ordenada en el origen.

Solución

La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{3 - (-2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{5} = -\frac{3}{10}$$



▲ **Figura 1.5**
La línea horizontal $y = k$ y la línea vertical $x = h$.

Utilizando la forma punto-pendiente con el punto $(-2, 1)$, se obtiene

$$y - 1 = -\frac{3}{10}(x - (-2))$$

o en forma pendiente-ordenada en el origen

$$y = -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}$$

Se podría haber utilizado el otro punto $(3, -\frac{1}{2})$, obteniéndose el mismo resultado. ◀

Hay dos casos especiales que se muestran en la Figura 1.5:

$y = k$	Línea horizontal (pendiente 0)
$x = h$	Línea vertical (pendiente indefinida)

En el siguiente ejemplo se muestra cómo determinar la pendiente y la ordenada en el origen de una recta dada.

▶ **Ejemplo 5** Determine la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3y - 2x + 9 = 0$.

Solución

Se resuelve el valor de y que cumple que $3y = 2x - 9$, que es $y = \frac{2}{3}x - 3$. En esta ecuación se pueden leer directamente la pendiente $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada en el origen $b = -3$. ◀

Cuando dos cantidades x e y están relacionadas linealmente, de forma que

$$y = mx$$

se dice que y es **proporcional** a x, siendo m la **constante de proporcionalidad**, lo que se escribe como

$$y \propto x$$

El símbolo $\propto$ se lee «proporcional a». Si se escribe la Ecuación (1.1) en la forma

$$y - y_0 = kx$$

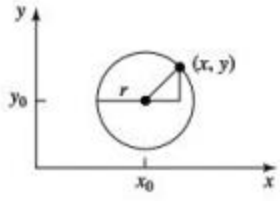
se puede decir que el cambio en la longitud $y - y_0$ es proporcional al peso que cuelga del muelle con una constante de proporcionalidad k, y se puede escribir

$$y - y_0 \propto x$$

Hay dos propiedades más de las rectas que se deben mencionar. Cuando dos rectas l_1 y l_2 en el plano no tienen puntos en común se denominan **paralelas**, y se indica como $l_1 \parallel l_2$. El siguiente criterio es de utilidad para decidir si dos rectas son paralelas: dos rectas no coincidentes l_1 y l_2 son paralelas ($l_1 \parallel l_2$) si y sólo si sus pendientes son iguales. Dadas dos rectas l_1 y l_2 no coincidentes ni verticales con pendientes respectivas m_1 y m_2, el criterio se puede expresar como

$$l_1 \parallel l_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 = m_2$$

Se dice que dos rectas l_1 y l_2 son **perpendiculares** ($l_1 \perp l_2$) si su intersección forma un ángulo de 90°. El criterio que sigue resulta de utilidad para decidir si dos rectas son perpendiculares: dos líneas verticales son perpendiculares si y sólo si la



◀ **Figura 1.6**
Círculo de radio r centrado en (x_0, y_0)

pendiente de una de ellas es el inverso negativo de la otra. Es decir, si l_1 y l_2 son dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2, entonces

$$l_1 \perp l_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 m_2 = -1$$

Este resultado se demuestra en el Problema 54 al final de esta sección.

1.1.3 Ecuación del círculo

Un **círculo** es el conjunto de puntos que están a una distancia dada, denominada **radio**, de un punto llamado **centro**. Sea r la distancia de un punto (x_0, y_0) a un punto (x, y) (*véase* la Figura 1.6). Utilizando el teorema de Pitágoras,

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Si $r = 1$ y $(x_0, y_0) = (0, 0)$ el círculo se denomina **círculo unidad**.

Ejemplo 6 Obtenga la ecuación del círculo centrado en (2, 3) que pasa por (5, 7).

Solución

Utilizando el teorema de Pitágoras, se puede calcular la distancia en el plano entre los puntos (2, 3) y (5, 7),

$$\sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Por tanto el círculo tiene de radio 5 y está centrado en (2, 3), y su ecuación es la siguiente

$$25 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$ ◀

1.1.4 Trigonometría

Serán necesarios algunos resultados procedentes de la trigonometría. Los ángulos pueden medirse en grados o en radianes, y una revolución completa al círculo unidad corresponde a 360° o 2π. Por razones que se aclararán posteriormente, en cálculo se prefieren las medidas en radianes. Para realizar conversiones de medidas en grados y en radianes se utiliza la fórmula

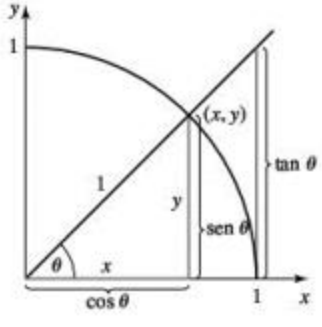
$$\frac{\theta \text{ medida en grados}}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ medida en radianes}}{2\pi}$$

Por ejemplo, para convertir 23° en radianes, se calcula

$$\theta = 23^\circ \frac{2\pi}{360^\circ} = 0.401$$

Para convertir $\frac{\pi}{6}$ en grados, se calcula

$$\theta = \frac{\pi}{6} \frac{360^\circ}{2\pi} = 30^\circ$$



▲ **Figura 1.7**
Las funciones trigonométricas en el círculo unidad

Existen seis funciones trigonométricas con las que hay que familiarizarse: seno, coseno, tangente y secante (las otras dos, cotangente y cosecante, se usan más raramente). Se definen en el círculo unidad (*véase* la Figura 1.7), y se abrevian como sen, cos, tan, sec, cot y csc. Recordamos también que los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del eje x positivo, y que los ángulos negativos se miden en el sentido de las agujas del reloj.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} = y \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$$

Las siguientes igualdades trigonométricas se utilizan con frecuencia. Como $\theta = y/x$, siendo $y = \operatorname{sen}\theta$ y $x = \cos\theta$, se deduce que

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la Figura 1.7 se obtiene [utilizando la notación $\operatorname{sen}^2\theta = (\operatorname{sen}\theta)^2$]

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Merece la pena memorizar esta igualdad. Utilizando algo de álgebra se puede obtener otra igualdad útil. Dividiendo la igualdad anterior por $\cos^2\theta$ resulta

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Utilizando $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ y $\sec\theta = 1/\cos\theta$ se puede escribir como

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

En el siguiente ejemplo se resuelve una ecuación trigonométrica.

Ejemplo 7 Resuelva

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos\theta \quad \text{en} \quad [0, 2\pi)$$

Solución

No se debe simplificar $\cos\theta$ en los dos miembros de la ecuación, ya que esto causaría la pérdida de soluciones. Llevando $\cos\theta$ al lado izquierdo de la ecuación y sacando factor común $\cos\theta$ se obtiene

$$\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$$

es decir

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

Resolviendo $\cos\theta = 0$ resulta

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Resolviendo la ecuación $2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$ se obtiene

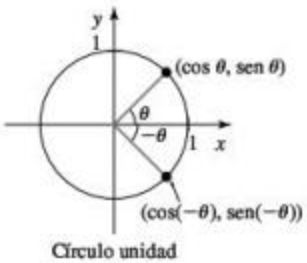
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

El conjunto solución es por tanto $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$. ◀

Las dos igualdades siguientes se desprenden de la Figura 1.8 al comparar los ángulos θ y $-\theta$ (los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las agujas



Círculo unidad

▲ **Figura 1.8**
Uso del circulo unidad para definir igualdades trigonométricas

TABLA 1.1 Algunos valores trigonométricos exactos

Ángulo θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	(0°)	(30°)	(45°)	(60°)	(90°)
$\operatorname{sen}\theta$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

del reloj desde el eje x positivo y los ángulos negativos se miden en el sentido de las agujas del reloj).

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Conviene memorizar ciertos valores trigonométricos, que se recogen en la Tabla 1.1. Por supuesto, $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$, $\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$, debiendo memorizarse los valores simplificados. El escribirlos como se indica en la Tabla 1.1 hace más fácil reconstruir la tabla en caso de olvidar valores concretos. Utilizando la expresión $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ se obtienen inmediatamente los valores de $\tan\theta$.

1.1.5 Exponenciales y logaritmos

Las exponenciales y los logaritmos son particularmente importantes en contextos biológicos.

Una exponencial es una expresión de la forma

$$a^r$$

donde a se denomina **base** y r **exponente**. Se supone que a es positivo, a menos que r sea entero o racional en la forma p/q, siendo p un entero y q un entero impar. A continuación se resumen algunas propiedades de la exponencial

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Ejemplo 8 Evalúe las siguientes expresiones exponenciales

(a)
$$3^2 3^{5/2} = 3^{2+5/2} = 3^{9/2}$$

(b)
$$\frac{2^{-4}2^3}{2^2} = \frac{2^{-1}}{2^2} = 2^{-1-2} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(c)
$$\frac{a^k a^{3k}}{a^{5k}} = a^{k+3k-5k} = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

Los logaritmos permiten resolver ecuaciones de la forma

$$2^x = 8$$

La solución de esta ecuación es $x = 3$, que podemos escribir como

$$x = \log_2 8 = 3$$

En otras palabras, un logaritmo es un exponente. La expresión

$$\log_a y$$

es el exponente que aplicado a la base a produce el número y (se supone que la base es positiva y distinta de 1). Existe la siguiente correspondencia entre logaritmos y exponenciales:

$$x = \log_a y \quad \text{es equivalente a} \quad y = a^x$$

Ejemplo 9 ¿Qué número real satisface

(a) $\log_3 x = -2$?

(b) $\log_{1/2} 8 = x$?

Solución

(a) Se puede expresar en la forma equivalente:

$$x = 3^{-2}$$

y por tanto

$$x = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

(b) Se puede expresar en la forma equivalente:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

$$2^{-x} = 2^3$$

$$2^x = 2^{-3}$$

igualando los exponentes se obtiene $x = -3$. Nótese que para poder comparar los exponentes las bases deben ser iguales. ◀

A continuación se expresan algunas propiedades importantes de los logaritmos:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

El tipo de logaritmo más importante es el **logaritmo natural**, cuya base es el número e. El número e es un número irracional cuyo valor aproximado es 2.7182818. El logaritmo natural se escribe $\ln x$. Es decir, $\log_e x = \ln x$.

Ejemplo 10 Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\log_3 (9x^2) = \log_3 9 + \log_3 x^2 = 2 + 2\log_3 x$

(b) $\log_5 \frac{x^2+3}{5x} = \log_5 (x^2 + 3) - \log_5 5 - \log_5 x = \log_5 (x^2 + 3) - 1 - \log_5 x$

(Nótese que $\log_5 (x^2 + 3)$ no se puede simplificar más.)

(c) $-\ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \ln 2$

(d) $\ln\frac{3x^2}{\sqrt{y}} = \ln 3 + \ln x^2 - \ln\sqrt{y} = \ln 3 + 2\ln x - \frac{1}{2}\ln y$

(En el último paso se ha utilizado que $\sqrt{y} = y^{1/2}$.) ◀

En álgebra se explica cómo resolver ecuaciones de la forma $e^{2x} = 3$ o $\ln(x + 1) = 5$. Es algo que habrá que hacer frecuentemente. La clave para resolver esas ecuaciones son las dos igualdades siguientes:

$$\log_a a^x = x \quad \text{y} \quad a^{\log_a x} = x$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar esas igualdades.

Ejemplo 11 Obtenga x.

(a) $e^{2x} = 3$

(b) $\ln(x + 1) = 5$

(c) $5^{2x-1} = 2^x$

Solución

(a) Para resolver $e^{2x} = 3$ tomaremos en ambos miembros el logaritmo en base e

$$\ln e^{2x} = \ln 3$$

Pero $\ln e^{2x} = 2x$, y por tanto,

$$2x = \ln 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2}\ln 3$$

(b) Para resolver $\ln(x + 1) = 5$ se escribe la ecuación en forma exponencial,

$$e^{\ln(x+1)} = e^5$$

que se simplifica como

$$x + 1 = e^5 \quad \text{o} \quad x = e^5 - 1$$

(c) Para resolver en x la ecuación $5^{2x-1} = 2^x$ hay que tener en cuenta que las dos bases son diferentes. Por tanto no se pueden comparar directamente los exponentes. Se pueden tomar logaritmos en ambos miembros. Puede utilizarse el logaritmo en cualquier base positiva (distinta de 1), por lo que escogeremos la base e, ya que es la más comúnmente utilizada en cálculo. Entonces

$$\ln 5^{2x-1} = \ln 2^x$$

o, tras simplificar

$$(2x - 1)\ln 5 = x\ln 2$$

Despejando x,

$$2x\ln 5 - x\ln 2 = \ln 5$$
$$x(2\ln 5 - \ln 2) = \ln 5$$

Y finalmente,

$$x = \frac{\ln 5}{2\ln 5 - \ln 2}$$ ◀

1.1.6 Números complejos y ecuaciones cuadráticas

El cuadrado de un número real nunca es negativo. Sin embargo, existen situaciones en las que es necesario obtener la raíz cuadrada de un número negativo. Como el resultado no puede ser un número real, para tratar este caso se introduce un nuevo símbolo, que se denota por i. Sea

$$i^2 = -1$$

El símbolo i se denomina **unidad imaginaria**. Por ejemplo, en lugar de escribir $\sqrt{-17}$ se puede escribir $i\sqrt{17}$.

El uso del símbolo i nos permite presentar un nuevo sistema de números, el conjunto de los **números complejos**.

Un **número complejo** es de la forma

$$z = a + bi$$

siendo a y b números reales. El número real a se denomina **parte real** de $a + bi$, y el número real b se denomina **parte imaginaria**.

Por ejemplo, el número $-3 + 7i$ tiene como parte real -3 y como parte imaginaria 7. El número $2 - 5i$ tiene como parte real 2 y como parte imaginaria -5. Como $a + 0i = a$, el conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números complejos. Los números complejos de la forma bi se denominan **números imaginarios puros**.

Dos números complejos son iguales si lo son sus respectivas partes real e imaginaria, es decir

$$a + bi = c + di \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Para sumar dos números complejos, se utiliza la siguiente regla:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Es decir, las partes real e imaginaria se suman separadamente. Para calcular el producto de dos números complejos, se procede como sigue:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

No es necesario memorizar la expresión anterior ya que siempre se puede calcular aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo 12 Obtenga (a) $(2 + 3i) - (5 - 6i)$, (b) $(5 - 3i)(1 + 2i)$.

Solución

(a) $(2 + 3i) - (5 - 6i) = 2 + 3i - 5 + 6i = -3 + 9i$

(b) $(5 - 3i)(1 + 2i) = 5 + 10i - 3i - 6i^2 = 5 + 7i - (6)(-1) = 11 + 7i.$ ◀

Si $z = a + bi$ es un número complejo, su **conjugado**, que se expresa como $\bar{z}$, se define como

$$\bar{z} = a - bi$$

Dados los números complejos z y w, se puede demostrar (*véanse* los Problemas 113-115) que

$$\overline{(\bar{z})} = z$$
$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$
$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

Además, si se multiplica un número complejo por su conjugado se obtiene

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Es decir,

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Ejemplo 13 Sea $z = 3 + 2i$. (a) Obtenga $\bar{z}$, (b) Calcule $z\bar{z}$.

Solución

(a) $\bar{z} = 3 - 2i$.

(b) $z\bar{z} = (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$. ◀

Los números complejos aparecen principalmente al resolver ecuaciones cuadráticas. Para resolver

$$ax^2 + bx + c = 0$$

siendo $a \neq 0$ se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde el término $x_{1,2}$ indica las dos soluciones x_1 (signo «+») y x_2 (signo «−»).

Ejemplo 14 Resuelva

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Solución

Utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado se obtiene

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - (4)(1)(5)}}{(2)(1)}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Si sólo se admiten soluciones reales, se concluye que la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$ no tiene solución. Pero si se admiten soluciones complejas, se obtiene

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i$$

Es decir, $x_1 = -2 + i$ y $x_2 = -2 - i$. ◀

El término $b^2 - 4ac$ bajo la raíz cuadrada en la solución de la ecuación de segundo grado se denomina **discriminante**. Si el discriminante no es negativo, las dos soluciones de la ecuación son reales (cuando el discriminante vale cero, las dos soluciones son iguales). Si el discriminante es negativo, las dos soluciones son números complejos conjugados entre sí.

Ejemplo 15 Sin resolver

$$2x^2 - 3x + 7 = 0$$

¿Qué puede decirse sobre la solución?

Solución

Se calcula el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - (4)(2)(7) = 9 - 56 = -47 < 0$$

Como el discriminante es negativo, la ecuación $2x^2 - 3x + 7$ tiene dos soluciones complejas, conjugadas entre sí. ◀

1.1.7. Problemas

(1.1.1)

1. Obtenga los dos números que están a distancia 3 del -1:
(a) midiendo las distancias en la recta de los números reales y
(b) resolviendo la ecuación de valor absoluto adecuada.

2. Obtenga todas las parejas de distancias entre los números -5, 2 y 7:
(a) midiendo las distancias en la recta de los números reales y
(b) calculando las distancias mediante valores absolutos.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones.
(a) $|2x - 4| = 6$
(b) $|x - 3| = 2$
(c) $|2x + 3| = 5$
(d) $|7 - 3x| = -2$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones.
(a) $|2x + 4| = |5x - 2|$
(b) $|5 - 3u| = |3 + 2u|$
(c) $|4 + \frac{t}{2}| = |\frac{3}{2}t - 2|$
(d) $|2s - 3| = |7 - s|$

5. Resuelva las siguientes inecuaciones.
(a) $|5x - 2| \leqslant 4$
(b) $|1 - 3x| > 8$
(c) $|7x + 4| \geqslant 3$
(d) $|6 - 5x| < 7$

6. Resuelva las siguientes inecuaciones.
(a) $|2x + 3| < 6$
(b) $|3 - 4x| \geqslant 2$
(c) $|x + 5| \leqslant 1$
(d) $|7 - 2x| < 0$

(1.1.2)

En los problemas 7-42, determine las ecuaciones en forma estándar de las rectas que satisfacen las ecuaciones requeridas.

7. La recta que pasa por el punto (2, 4) con pendiente $-\frac{1}{3}$.
8. La recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ con pendiente 2.
9. La recta que pasa por el punto $(0, -2)$ con pendiente -3.
10. La recta que pasa por el punto $(-3, 5)$ con pendiente 1/2.
11. La recta que pasa por el punto $(-2, -3)$ y por el punto $(1, 4)$.
12. La recta que pasa por el punto $(-1, -4)$ y por el punto $(2, -\frac{1}{2})$.
13. La recta que pasa por el punto (0, 4) y por el punto (3, 0).
14. La recta que pasa por el punto $(1, -1)$ y por el punto (4, 5).
15. La recta horizontal que pasa por el punto $(3, \frac{3}{2})$.
16. La recta horizontal que pasa por el punto $(0, -1)$.
17. La recta vertical que pasa por el punto $(-1, \frac{7}{2})$.
18. La recta vertical que pasa por el punto $(2, -3)$.
19. La recta de pendiente 3 y ordenada en el origen (0, 2).
20. La recta de pendiente -1 y ordenada en el origen $(0, -3)$.
21. La recta de pendiente 1/2 y ordenada en el origen (0, 2).
22. La recta de pendiente $-1/3$ y ordenada en el origen $(0, -1)$.
23. La recta de pendiente -2 y abscisa en el origen (1, 0).
24. La recta de pendiente 1 y abscisa en el origen $(-2, 0)$.
25. La recta de pendiente $-1/4$ y abscisa en el origen (3, 0).
26. La recta de pendiente $-1/5$ y abscisa en el origen $(-1/2, 0)$.
27. La recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta

$$x + 2y - 4 = 0$$

28. La recta que pasa por el punto (1, 2) y es paralela a la recta

$$x - 3y - 6 = 0$$

29. La recta que pasa por el punto $(-1, -1)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0).
30. La recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, -1)$ y (2, 1).
31. La recta que pasa por el punto (1, 4) y es perpendicular a la recta

$$2y - 5x + 7 = 0$$

32. La recta que pasa por el punto $(-1, -1)$ y es perpendicular a la recta

$$x - y + 3 = 0$$

33. La recta que pasa por el punto $(5, -1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(1, -2)$.

34. La recta que pasa por el punto $(4, -1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 1)$.

35. La recta que pasa por el punto $(4, 2)$ y es paralela a la recta horizontal que pasa por el punto $(1, -2)$.

36. La recta que pasa por el punto $(-1, 5)$ y es paralela a la recta horizontal que pasa por el punto $(2, -1)$.

37. La recta que pasa por el punto $(-1, 1)$ y es paralela a la recta vertical que pasa por el punto $(2, -1)$.

38. La recta que pasa por el punto $(3, 1)$ y es paralela a la recta vertical que pasa por el punto $(-1, -2)$.

39. La recta que pasa por el punto $(1, -3)$ y es perpendicular a la recta horizontal que pasa por el punto $(-1, -1)$.

40. La recta que pasa por el punto $(4, 2)$ y es perpendicular a la recta horizontal que pasa por el punto $(3, 1)$.

41. La recta que pasa por el punto $(7, 3)$ y es perpendicular a la recta vertical que pasa por el punto $(-2, 4)$.

42. La recta que pasa por el punto $(-2, 5)$ y es perpendicular a la recta vertical que pasa por el punto $(1, 4)$.

43. Para convertir una longitud medida en pies en una longitud medida en centímetros, se utiliza el hecho de que la longitud medida en pies es proporcional a la longitud medida en centímetros y que un pie corresponde a 30.5 centímetros. Si x indica la longitud medida en pies e y la longitud medida en centímetros, entonces

$$y = 30.5x$$

(a) Explique cómo se utiliza esa relación.

(b) Utilice dicha relación y el hecho de que 1 pulgada equivale a 2.54 centímetros para transformar en centímetros las siguientes medidas en pies y pulgadas

(i) 6 pies **(ii)** 3 pies y 2 pulgadas **(iii)** 1 pie y 7 pulgadas.

(c) Utilice la relación anterior para transformar en pies las siguientes medidas en centímetros

(i) 173 cm **(ii)** 75 cm **(iii)** 48 cm.

44. (a) Para convertir el peso de un objeto de kilogramos (kg) en libras (Lb) se utiliza el hecho de que un peso medido en kilogramos es proporcional a un peso medido en libras y que 1 kg corresponde a 2.20 Lb. Obtenga la ecuación que relaciona el peso medido en kilogramos con el peso medido en libras.

(b) Utilice la respuesta al apartado (a) para convertir las siguientes medidas

(i) 63 Lb. **(ii)** 150 Lb. **(iii)** 2.5 kg. **(iv)** 140 kg.

45. Suponga que la distancia que recorre un coche es proporcional al tiempo que emplea en recorrer dicha distancia. Obtenga la ecuación que relaciona la distancia con el tiempo si el coche emplea 15 minutos en viajar 25 km. ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad si la distancia se mide en kilómetros y el tiempo en horas?

46. Suponga que el número de semillas que produce una planta es proporcional a su biomasa no enterrada. Obtenga la ecuación que relaciona el número de semillas y la biomasa no enterrada si una planta que pesa 217 g tiene 17 semillas.

47. Las parcelas de estudios experimentales son a menudo cuadrados de 1 metro de lado. Si un pie equivale a 0.305 metros, calcule el área en pies cuadrados de una parcela cuadrada de un metro de lado.

48. Las áreas grandes se miden a menudo en hectáreas o en acres. Si una hectárea equivale a 10 000 metros cuadrados y un acre a 4046.86 metros cuadrados, ¿cuántos acres tiene una hectárea?

49. Para transformar el volumen de un líquido medido en onzas en un volumen medido en litros se utiliza el hecho de que un litro equivale a 33.81 onzas. Denomine x al volumen medido en onzas e y al volumen medido en litros. Suponga una relación lineal entre las dos unidades de medida.

(a) Obtenga la ecuación que relaciona x e y.

(b) Un vaso normal de soda contiene 12 onzas de líquido. ¿A cuántos litros equivale?

50. Para transformar una distancia medida en millas en una distancia medida en kilómetros, se sabe que 1 milla equivale a 1.609 kilómetros. Denomine x a la distancia medida en millas e y a la distancia medida en kilómetros. Asuma una relación lineal entre las dos unidades de medida.

(a) Obtenga la ecuación que relaciona x e y.

(b) La distancia entre Minneapolis y Madison es de 261 millas. ¿A cuántos kilómetros equivale?

51. La velocidad de los coches se mide en muchos países en kilómetros por hora. En los Estados Unidos la velocidad de los coches se mide en millas por hora. Para realizar conversiones de una unidad en la otra, se aplica que una milla equivale a 1.609 kilómetros.

(a) El límite de velocidad en muchas autopistas de Estados Unidos es de 55 millas por hora. Convierta este límite a kilómetros por hora.

(b) El límite de velocidad recomendado en las autopistas alemanas es de 130 kilómetros por hora. Convierta este límite a millas por hora.

Para medir temperaturas se utilizan normalmente tres escalas: Fahrenheit, Celsius y Kelvin. Estas escalas están relacionadas linealmente. Los Problemas 52 y 53 tratan sobre estas escalas.

52. (a) La escala Celsius se establece de forma que 0 °C corresponde a la temperatura de congelación del agua (a una atmósfera de presión), y 100 °C corresponde al punto de ebullición del agua (a una atmósfera de presión). Las personas más familiarizadas con la escala Fahrenheit saben que el agua se congela a 32 °F y hierve a 212 °F. Obtenga la ecuación lineal que relaciona la temperatura medida en la escala Celsius y en la escala Fahrenheit.

(b) La temperatura normal del cuerpo humano varía entre 97.6 °F y 99.6 °F. Convierta este intervalo de temperaturas en grados Celsius.

53. (a) La escala Kelvin (K) es una escala **absoluta** de temperaturas. El punto cero de la escala (0 °K) se denomina **cero absoluto**, y corresponde a la temperatura más fría posible. Es decir, ningún cuerpo puede tener una temperatura más baja que 0 K. Se ha determinado experimentalmente que 0 °K equivale a -273.15 °C. Si 1 °K expresa la misma diferencia de temperaturas que 1 °C, obtenga la ecuación que relaciona las escalas de temperatura Kelvin y Celsius.

(b) El nitrógeno y el oxígeno puros se pueden producir de forma poco costosa licuando aire purificado y después haciendo que la temperatura del aire líquido se eleve lentamente. Como el nitrógeno y el oxígeno tienen diferentes puntos de ebullición, se destilan a temperaturas diferentes. El punto de ebullición del nitrógeno es de 77.4 K y el del oxígeno, 90.2 K. Convierta estas temperaturas de ebullición a grados Celsius. Si ha resuelto el Problema 52(**a**), convierta también dichas temperaturas a grados Fahrenheit. Utilizando la técnica descrita para destilar nitrógeno y oxígeno ¿Cuál de ellos se destilará primero?

54. Siguiendo los pasos que se indican a continuación, demuestre que si dos rectas no verticales l_1 y l_2 con pendientes respectivas m_1 y m_2 son perpendiculares, entonces $m_1m_2 = -1$. Suponga que $m_1 < 0$ y $m_2 > 0$.

(a) Utilice un gráfico para demostrar que si θ_1 y θ_2 son respectivamente los ángulos de inclinación de las rectas l_1 y l_2, entonces $\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$ (el ángulo de inclinación de una recta es el valor del ángulo $\theta \in [0, \pi)$ entre la recta y el eje x).

(b) Demuestre que $m_1 = \tan\theta_1$ y $m_2 = \tan\theta_2$. [Utilice la relación $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.]

(c) Utilizando que $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot(x)$ y que $\cot(-x) = -\cot(x)$, demuestre que $m_1 = -\cot\theta_2$. Utilizando este hecho, complete la demostración.

(1.1.3)

55. Obtenga la ecuación del círculo centrado en (-1, 4) y de radio 3.

56. Obtenga la ecuación del círculo centrado en (2, 3) y de radio 4.

57. **(a)** Obtenga la ecuación del círculo centrado en (2, 5) y de radio 3.

(b) ¿Dónde corta este círculo al eje y?

(c) ¿Corta este círculo al eje x? Justifique su respuesta.

58. **(a)** Obtenga posibles radios de un círculo centrado en (3, 6) de forma que dicho círculo corte sólo a un eje.

(b) Obtenga posibles radios de un círculo centrado en (3, 6) de forma que dicho círculo corte a ambos ejes.

59. Obtenga el centro y el radio del círculo dado por la ecuación

$$(x-2)^2 + y^2 = 16$$

60. Obtenga el centro y el radio del círculo dado por la ecuación

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

61. Obtenga el centro y el radio del círculo dado por la ecuación

$$0 = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11$$

(Para resolver este caso debe completar primero los cuadrados.)

62. Obtenga el centro y el radio del círculo dado por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

(Para resolver este caso debe completar primero los cuadrados.)

(1.1.4)

63. **(a)** Transforme 75^0 en radianes.

(b) Transforme radianes en grados.

64. **(a)** Transforme -15^0 en radianes.

(b) Transforme $\frac{3}{4}\pi$ en grados.

65. Evalúe las siguientes expresiones sin ayuda de calculadora.

(a) $\operatorname{sen}(-\frac{5\pi}{4})$

(b) $\cos(\frac{5\pi}{6})$

(c) $\tan(\frac{\pi}{3})$

66. Evalúe las siguientes expresiones sin ayuda de calculadora.

(a) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4})$

(b) $\cos(-\frac{13\pi}{6})$

(c) $\tan(\frac{4\pi}{3})$

67. **(a)** Obtenga los valores de $\alpha \in [0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

(b) Obtenga los valores de $\alpha \in [0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\tan\alpha = \sqrt{3}$$

68. **(a)** Obtenga los valores de $\alpha \in [0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

(b) Obtenga los valores de $\alpha \in [0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\sec\alpha = 2$$

69. Demuestre que la igualdad

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

se deduce de

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

70. Demuestre que la igualdad

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

se deduce de

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

71. Resuelva $2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$ en $[0, 2\pi)$.

72. Resuelva $\sec^2 x = \sqrt{3}\tan x + 1$ en $[0, \pi)$.

(1.1.5)

73. Evalúe las siguientes expresiones exponenciales

(a) $4^3 4^{-2/3}$

(b) $\dfrac{3^2 3^{1/2}}{3^{-1/2}}$

(c) $\dfrac{5^k 5^{2k-1}}{5^{1-k}}$

74. Evalúe las siguientes expresiones exponenciales

(a) $(2^4 2^{-3/2})^2$

(b) $\left(\dfrac{6^{5/2}6^{2/3}}{6^{1/3}}\right)^3$

(c) $\left(\dfrac{3^{-2k+3}}{3^{4+k}}\right)^3$

75. Obtenga los números reales que satisfacen las siguientes ecuaciones

(a) $\log_4 x = -2$

(b) $\log_{1/3} x = -3$

(c) $\log_{10} x = -2$

76. Obtenga los números reales que satisfacen las siguientes ecuaciones

(a) $\log_{1/2} x = -4$

(b) $\log_{1/4} x = 2$

(c) $\log_5 x = 3$

77. Obtenga los números reales que satisfacen las siguientes ecuaciones

(a) $\log_{1/2} 32 = x$

(b) $\log_{1/3} 81 = x$

(c) $\log_{10} 0.001 = x$

78. Obtenga los números reales que satisfacen las siguientes ecuaciones

(a) $\log_4 64 = x$

(b) $\log_{1/5} 625 = x$

(c) $\log_{10} 10\,000 = x$

79. Simplifique las siguientes expresiones

(a) $-\ln \frac{1}{3}$

(b) $\log_4 (x^2 - 4)$

(c) $\log_2 4^{3x-1}$

80. Simplifique las siguientes expresiones

(a) $-\ln \frac{1}{3}$

(b) $\ln \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x}}$

(c) $\log_3 3^{2x+1}$

81. Obtenga x

(a) $e^{3x-1} = 2$

(b) $e^{-2x} = 10$

(c) $e^{x^2-1} = 10$

82. Obtenga x

(a) $3^x = 81$

(b) $9^{2x+1} = 27$

(c) $10^{5x} = 1000$

83. Obtenga x

(a) $\ln(x - 3) = 5$

(b) $\ln(x + 2) + \ln(x - 2) = 1$

(c) $\log_3 x^2 - \log_3 2x = 2$

84. Obtenga x

(a) $\ln(2x - 3) = 0$

(b) $\log_2(1 - x) = 3$

(c) $\ln x^3 - 2 \ln x = 1$

(1.1.6)

En los Problemas 85-92 simplifique y escriba las expresiones en la forma estándar $a + bi$.

85. $(3 - 2i) - (-2 + 5i)$

86. $(7 + i) - 4$

87. $(4 - 2i) + (9 + 4i)$

88. $(6 - 4i) + (2 + 5i)$

89. $3(5 + 3i)$

90. $(2 - 3i)(5 + 2i)$

91. $(6 - i)(6 + i)$

92. $(-4 - 3i)(4 + 2i)$

En los Problemas 93-98, sean $z = 3 - 2i$, $u = -4 + 3i$, $v = 3 + 5i$ y $w = 1 - i$. Calcule las siguientes expresiones.

93. $\bar{z}$

94. $z + u$

95. $\overline{z + v}$

96. $\overline{v - w}$

97. $\overline{vw}$

98. $\overline{uz}$

99. Si $z = a + bi$, calcule $z + \bar{z}$ y $z - \bar{z}$.

100. Si $z = a + bi$, calcule $\bar{z}$. Utilice su respuesta para obtener $\overline{(\bar{z})}$ y compare su respuesta con z.

En los Problemas 101-106, resuelva las ecuaciones de segundo grado en el sistema de los números complejos.

101. $2x^2 - 3x + 2 = 0$

102. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

103. $-x^2 + x + 2 = 0$

104. $-2x^2 + x + 3 = 0$

105. $4x^2 - 3x + 1 = 0$

106. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

En los Problemas 107-112, determine en primer lugar sin resolverlas si las soluciones de las ecuaciones de segundo grado son reales o complejas. Seguidamente resuélvalas.

107. $3x^2 - 4x - 7 = 0$

108. $3x^2 - 4x + 7 = 0$

109. $-x^2 + 2x - 1 = 0$

110. $4x^2 - x + 1 = 0$

111. $3x^2 - 5x + 6 = 0$

112. $-x^2 + 7x - 2 = 0$

113. Demuestre que $\overline{(\bar{z})} = z$.

114. Demuestre que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

115. Demuestre que $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

1.2 FUNCIONES ELEMENTALES

1.2.1 ¿Qué es una función?

Las investigaciones científicas requieren frecuentemente estudiar relaciones entre magnitudes, como por ejemplo la dependencia de la densidad de semillas con la distancia a la planta adulta, o la dependencia de la anchura del los anillos de un árbol con la cantidad de luz disponible. Para describir matemáticamente esas relaciones, es útil el concepto de función.

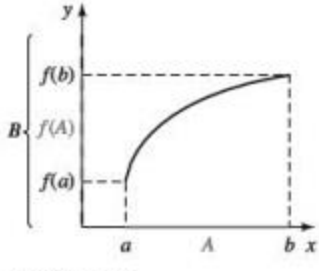
Parece ser que la palabra función (o más exactamente su equivalente latino *functio*, que significa «ejecución»), fue introducido por Leibniz en 1694 para describir curvas. Más tarde, Euler (1707-1783) lo utilizó para denominar a cualquier ecuación que involucrara variables y constantes. La definición moderna es mucho más amplia y enfatiza la idea básica de expresar relaciones entre dos conjuntos.

Definición Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B. El elemento y se denomina **imagen** (o **valor**) de x mediante f, y se indica como $f(x)$ (se lee: «f de x»). El conjunto A se denomina **dominio** de f, el conjunto B se denomina **codominio** de f y el conjunto $f(A)$ se denomina **recorrido** de f.

Para definir una función se emplea la notación

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

donde A y B son subconjuntos del conjunto de los número reales. Es frecuente escribir simplemente $y = f(x)$ y denominar a x variable **independiente** y a y variable **dependiente**. Las funciones se pueden representar gráficamente en el plano $x - y$. En la Figura 1.9 puede verse la gráfica de $y = f(x)$ con dominio A, codominio B y recorrido $f(A)$.



▲ **Figura 1.9**
Una función $f(x)$ con dominio A, codominio B y recorrido $f(A)$

Por supuesto, $f(x)$ se debe especificar: por ejemplo, $f(x) = x^2$. Nótese que $f(A) \subset B$, pero no todos los elementos del codominio B deben estar en $f(A)$. Por ejemplo, sea

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

El dominio de f es $\mathbf{R}$, pero el recorrido es sólo $[0, \infty)$, ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Es decir, $f(\mathbf{R}) = [0, \infty) \neq \mathbf{R}$. Además, el dominio de una función no tiene por qué ser el conjunto más grande posible en el que se puede definir la función, que sería $\mathbf{R}$ en el anterior ejemplo. Es decir, podríamos haber definido f sobre un conjunto más pequeño, como el $[0, 1]$, llamando g a la nueva función

$$\begin{aligned} g: \quad & [0, 1] \to \mathbf{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

Aunque f y g utilizan la misma regla, las dos funciones son distintas ya que sus dominios respectivos son diferentes.

Dos funciones f y g son **iguales** si y sólo si
1. f y g están definidas en el mismo dominio y
2. $f(x) = g(x)$ para todos los elementos x del dominio.

Ejemplo 1 Sea

$$\begin{aligned} f_1: \quad & [0, 1] \to R \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2: \quad & [0, 1] \to \mathbf{R} \\ & x \to \sqrt{x^4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_3: \quad & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

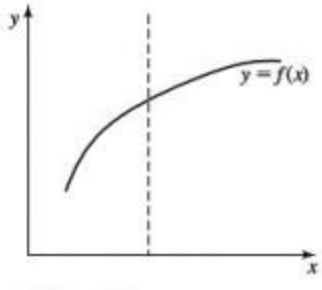
Determine qué funciones son iguales.

Solución

Como f_1 y f_2 están definidas en el mismo dominio, y $f_1(x) = f_2(x) = x^2$ para todo $x \in [0, 1]$, se deduce que f_1 y f_2 son iguales.

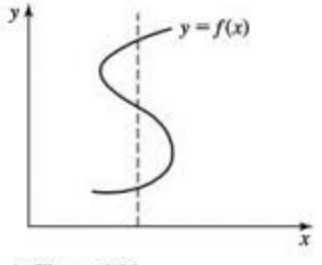
Pero ni f_1 ni f_2 son iguales a f_3 ya que el dominio de f_3 es diferente de los dominios de f_1 y f_2. ◀

Las elecciones de los dominios de las funciones que se han considerado pueden parecer algo arbitrarias (y de hecho lo son en los ejemplos que se han visto hasta ahora). Sin embargo, es frecuente que en las aplicaciones reales surja el dominio de forma natural. Por ejemplo, si se mide una respuesta de una planta (como su biomasa total o la proporción de masa enterrada y no enterrada) en función de la concentración de nitrógeno del suelo, dado que la concentración de nitrógeno no puede ser negativa, el dominio de esta función sería el conjunto de los números reales no negativos. Por poner otro ejemplo, supóngase que se define una función que depende de la fracción de una población infectada por un cierto virus. Una selección natural del dominio de esta función sería el intervalo [0, 1], debido a que la fracción de una población debe ser un número entre 0 y 1.



▲ **Figura 1.10**
La prueba de la recta vertical demuestra que la gráfica de $y = f(x)$ es una función

En la definición de función se ha dicho que es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ *exactamente* un elemento $y \in B$. Cuando se dibuja $y = f(x)$ en el plano $x - y$, hay una prueba sencilla para decidir si $f(x)$ es o no una función: toda recta vertical debe cortar a la gráfica de $y = f(x)$ como máximo una vez. La Figura 1.10 muestra la gráfica de una función: toda recta vertical corta a la gráfica de $y = f(x)$ como máximo una vez. La gráfica $y = f(x)$ de que se muestra en la Figura 1.11 no es una función, ya que hay valores de x a los que se les asigna más de un valor de y, como se muestra en la recta vertical que corta a la gráfica varias veces.

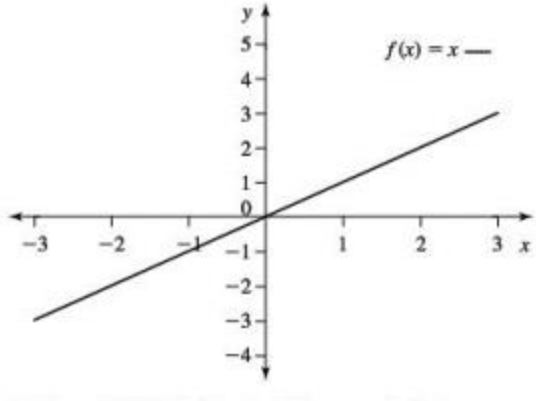


▲ **Figura 1.11**
La prueba de la recta vertical demuestra que la gráfica de $y = f(x)$ no es una función

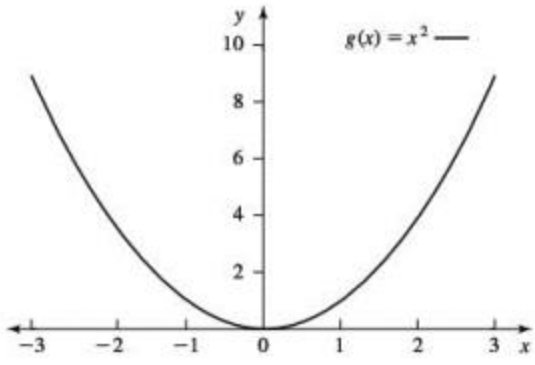
Algunas veces las funciones muestran ciertas simetrías. Por ejemplo, observando la Figura 1.12, puede verse que $f(x) = x$ es simétrica respecto al origen: es decir, $f(x) = -f(-x)$. Si se observa la Figura 1.13, puede verse que la función $g(x) = x^2$ es simétrica respecto al eje y: es decir, $g(x) = g(-x)$. En el primer caso, se dice que f es impar, y en el segundo caso que g es par. Para comprobar si una función es par o impar, se usa la siguiente definición.

Una función $f: A \to B$ se dice que es

1. **par** si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$, o
2. **impar** si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in A$.



▲ **Figura 1.12** El gráfico de $f(x) = x$ es simétrico respecto al origen



◀ **Figura 1.13** El gráfico de $g(x) = x^2$ es simétrico respecto al eje y

Utilizando este criterio, se puede comprobar si la función $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$, es impar,

$$-f(-x) = -(-x) = x = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbf{R}$$

Asimismo, para comprobar que $g(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, es una función par se calcula

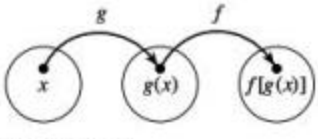
$$g(-x) = (-x^2) = x^2 = g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbf{R}$$

Hay casos en los que una cantidad viene dada como función de otra cantidad que a su vez se puede escribir como función de otra cantidad. Para ilustrar esto, supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Se puede expresar f como función de x sustituyendo u por $g(x)$. Es decir, $y = f[g(x)]$. Las funciones definidas de esta forma se denominan funciones compuestas.

Definición La **función compuesta** $f \circ g$ (también denominada **composición** de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

para todo x perteneciente al dominio de g para el que $g(x)$ pertenezca al dominio de f.



▲ **Figura 1.14**
Composición de funciones

La Figura 1.14 ilustra la composición de funciones. La función g se denomina función interna y la función f se denomina función externa. La frase «para todo x perteneciente al dominio de g para el que $g(x)$ pertenezca al dominio de f» se entiende mejor observando la figura. Para que se pueda calcular $f(u)$, u debe pertenecer al dominio de f. Pero como $u = g(x)$, lo que realmente se requiere es que $g(x)$ pertenezca al dominio de f para los valores de x que se utilizan al calcular $g(x)$.

Ejemplo 2 Si $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ y $g(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$, obtenga (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$.

Solución

(a) Para obtener $(f \circ g)(x)$ sea $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Entonces

$$y = f(u) = f[g(x)] = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Para determinar el dominio de $f \circ g$, se observa que el dominio de g es $\mathbf{R}$ y su recorrido es $[1, \infty)$. Como el recorrido de g está incluido en el dominio de $f([1, \infty) \subset [0, \infty))$, el dominio de $f \circ g$ es $\mathbf{R}$.

(b) Para obtener $(g \circ f)(x)$, sea $g(u) = u^2 + 1$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces

$$y = g(u) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

Para determinar el dominio de $g \circ f$, se observa que el dominio de f es $[0, \infty)$ y su recorrido es $[0, \infty)$. El recorrido de f está incluido en el dominio de $g([0, \infty) \subset \mathbf{R})$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es $[0, \infty)$. ◀

En el último ejemplo debe notarse que $f \circ g$ es distinta de $g \circ f$, lo que implica que el orden en el que se realiza la composición de funciones es importante. La notación $f \circ g$ indica que primero se aplica g y después f. Además, hay que poner atención al dominio de funciones compuestas. En el ejemplo que sigue el dominio es más difícil de obtener.

Ejemplo 3 Si $f(x) = 2x^2$, $x \geq 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, obtenga $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

Solución

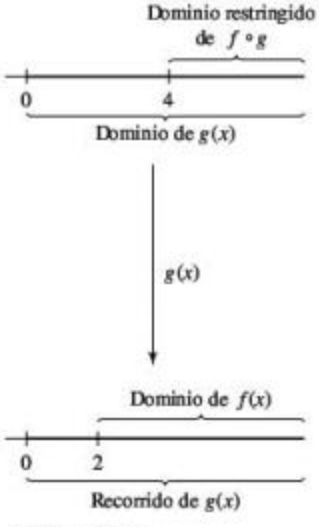
Se calcula

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x})^2 = 2x$$

Esta parte no es difícil. Sin embargo, obtener el dominio de $f \circ g$ es más complicado. El dominio de la función interna g es el intervalo $[0, \infty)$, y su recorrido es también el intervalo $[0, \infty)$. El dominio de f es sólo $[2, \infty)$, lo que implica que el recorrido de g *no* está incluido en el dominio de f. Es necesario por tanto restringir el dominio de g para asegurar que su recorrido está incluido en el dominio de f. Sólo se pueden escoger valores de x que garanticen que $g(x) \in [2, \infty)$. Como $g(x) = \sqrt{x}$, hay que restringir los valores de x a $[4, \infty)$. Para todo $x \in [4, \infty)$, se cumple que $g(x) \in [2, \infty)$, que es igual al dominio de f. Por tanto,

$$(f \circ g)(x) = 2x, \quad x \geq 4$$

(*véase* la Figura 1.15). ◀



▲ **Figura 1.15**
Obtención del dominio de una función compuesta. En el Ejemplo 3, el dominio de $g(x)$ debe restringirse

En las subsecciones siguientes se presentan las funciones básicas que se utilizarán en el resto del libro.

1.2.2 Funciones polinómicas

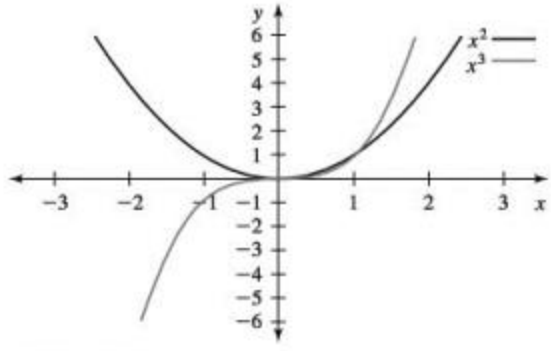
Las funciones polinómicas son las funciones elementales más simples.

Definición Una **función polinómica** es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes (reales, $a_n \neq 0$). El coeficiente a_n se denomina **primer coeficiente** y el valor de n es el **grado** de la función polinómica. El mayor dominio posible de f es $\mathbf{R}$.

Ya han aparecido polinomios, concretamente la función constante $f(x) = c$, la función lineal $f(x) = mx + b$ y la función cuadrática $f(x) = ax^2$. La función constante distinta de cero es de grado 0, la función lineal es de grado 1 y la función cuadrática es de grado 2. Otros ejemplos pueden ser $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbf{R}$, que es un polinomio de grado 3, y $f(x) = 2 - x^7$, $x \in \mathbf{R}$, que es un polinomio de grado 7. En la Figura 1.16 se muestra la función $y = x^n$ para $n = 2$ y 3. Observando la figura puede verse que $y = x^n$ es una función par (es decir, simétrica respecto al eje y) para $n = 2$ y es una función impar (es decir, simétrica respecto al origen) cuando $n = 3$. Esto se mantiene en general, es decir, $y = x^n$ es una función



▲ **Figura 1.16**
Gráficas de $y = x^n$ para $n = 2$ y 3

par cuando n es par y es una función impar cuando n es impar, lo que se puede demostrar algebraicamente utilizando el criterio de la Sección 1.2.1 (*véase* el Problema 28 al final de esta sección).

Los polinomios surgen de forma natural en muchas situaciones. Presentaremos dos ejemplos.

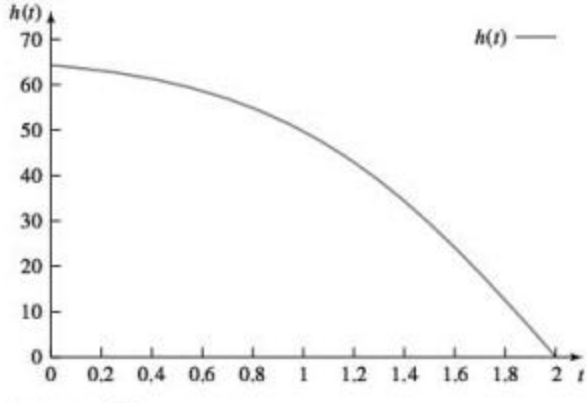
Ejemplo 4 Supongamos que en instante 0 una manzana comienza a caer de un árbol de una altura de 64 pies. Ignorando la resistencia del aire, se puede demostrar que en el instante t (medido en segundos), la manzana está a una altura $h(t)$ (medida en pies) que viene dada por

$$h(t) = 64 - 16t^2$$

Se asume que la altura a nivel de tierra es cero. Explique que $h(t)$ es un polinomio y determine su grado ¿Cuánto tardará la manzana en llegar al suelo? Obtenga el dominio aproximado de $h(t)$.

Solución

La función $h(t)$ es un polinomio de grado 2 con $a_0 = 64$, $a_1 = 0$ y $a_2 = -16$. Su gráfica se muestra en la Figura 1.17. La manzana alcanzará el suelo cuando



▲ **Figura 1.17**
Gráfica de $h(t) = 64 - 16t^2$ para $0 \leqslant t \leqslant 2$ en el Ejemplo 4

$h(t) = 0$. Es decir, hay que resolver

$$0 = 64 - 16t^2$$

$$t^2 = \frac{64}{16} = 4$$

$$t = 2 \quad (\text{o } t = -2)$$

Como $t = -2 < 0$ y la manzana empieza a caer en el instante $t = 0$, se puede ignorar esta solución. Se obtiene entonces que la manzana tarda 2 segundos en llegar al suelo (ignorando la resistencia del aire). Nótese que como $h(t) \geqslant 0$ [siendo $h(t)$ la altura sobre el suelo y la altura del suelo igual a 0], el recorrido es [0, 64]. Como $t \geqslant 0$, el dominio de $h(t)$ es el intervalo [0, 2]. ◀

Ejemplo 5 **(Una reacción química)** Considérese la velocidad de reacción de la reacción química

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{AB}$$

donde los reactivos moleculares A y B forman el producto molecular AB. La velocidad a la que procede esta reacción depende de la frecuencia de colisión de las moléculas A y B. La **ley de acción de masas** establece que la velocidad a la que procede esta reacción es proporcional al producto de las respectivas concentraciones de los reactivos. Por *concentración* se entiende el número de moléculas existentes en un volumen dado. Si denominamos R a la velocidad de reacción y [A] y [B] a las concentraciones respectivas de A y de B, la ley de acción de masas establece que

$$R \propto [\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{B}]$$

Introduciendo el factor de proporcionalidad k, se obtiene

$$R = k[\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{B}]$$

Nótese que $k > 0$ porque [A], [B] y R son positivos. Se supone ahora que la reacción se produce en un recipiente cerrado. Es decir, se añaden cantidades específicas de A y B al recipiente al principio de la reacción y se deja que la reacción se desarrolle sin añadir nada más.

Se puede expresar la concentración de los reactivos A y B durante la reacción en función de sus concentraciones iniciales a y b y la concentración del producto molecular [AB]. Si $x = [\mathrm{AB}]$, entonces

$$[\mathrm{A}] = a - x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{y} \quad [\mathrm{B}] = b - x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant b$$

La concentración de AB no puede exceder a las concentraciones de A o de B (supongamos que pueden reaccionar 5 moléculas de A con siete de B, como máximo pueden resultar cinco moléculas de AB, y en ese momento se han utilizado todas las moléculas de A, con lo que la reacción se interrumpe, ya que las dos moléculas de B no tienen moléculas de A para reaccionar). Por tanto, se obtiene

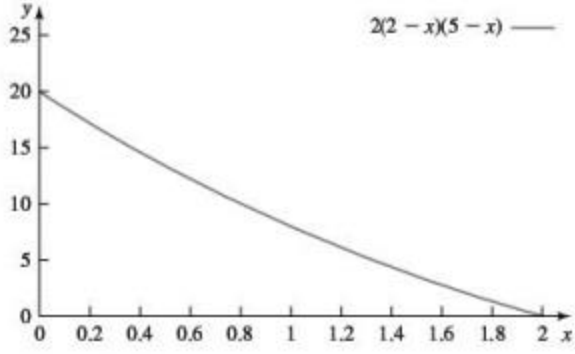
$$R(x) = k(a - x)(b - x) \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{y } 0 \leqslant x \leqslant b$$

La condición «$0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant x \leqslant b$» se puede expresar como $0 \leqslant x \leqslant \min(a, b)$, siendo el mínimo de a y b. Para ver que $R(x)$ es de hecho una función polinómica, se puede desarrollar su expresión

$$\begin{aligned} R(x) &= k(ab - ax - bx + x^2) \\ &= kx^2 - k(a + b)x + kab \end{aligned}$$

para $0 \leqslant x \leqslant \min(a, b)$. Puede verse entonces que $R(x)$ es un polinomio de grado 2.

La Figura 1.18 muestra la gráfica de $R(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, para el caso $a \leqslant b$ (los valores de la figura son $k = 2$, $a = 2$ y $b = 5$). Nótese que cuando $x = 0$ (es decir,



▲ **Figura 1.18**
Gráfica de $R(x) = 2(2 - x)(5 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 2$

cuando todavía no se han formado moléculas de AB), la reacción procede a velocidad máxima. A medida que se van formando más y más moléculas de AB y, en consecuencia, las concentraciones de los reactivos disminuyen, la velocidad de la reacción se reduce. Esto debe resultar intuitivamente claro: a medida que van quedando menos moléculas de A y de B en el recipiente, se va haciendo menos probable que colisionen para formar el producto molecular AB. Cuando $x = a = \min(a, b)$, la velocidad de reacción $R(a) = 0$. En ese punto las moléculas de A se han consumido y la reacción necesariamente se interrumpe. ◀

1.2.3 Funciones racionales

Las funciones racionales se forman a partir de funciones polinómicas.

Definición Una función **racional** es el cociente de dos funciones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{para } q(x) \neq 0$$

Como la división por 0 no está permitida, deben excluirse los valores de x para los que $q(x) = 0$. He aquí una pareja de ejemplos de funciones racionales junto con sus mayores dominios posibles:

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

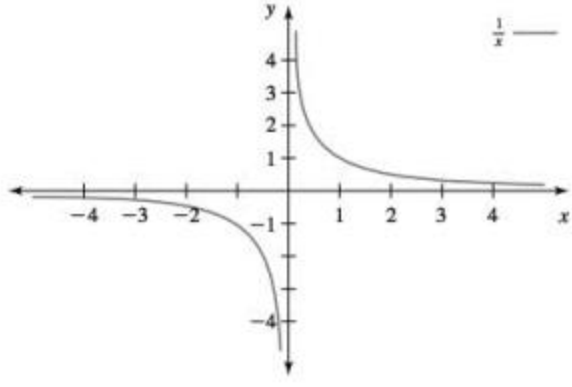
$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3}, \quad x \neq 3$$

Un ejemplo importante de función racional es la hipérbola, junto a su mayor dominio posible:

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

La Figura 1.19 muestra su gráfica.

A lo largo de este texto aparecerán poblaciones cuyo tamaño varía con el tiempo. El cambio del tamaño de la población está descrito por su **velocidad de crecimiento**. De forma sencilla, la velocidad de crecimiento indica cuánto cambia la población en un intervalo de tiempo pequeño (es análogo a la velocidad de un



▲ **Figura 1.19**
Gráfica de $y = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$

coche: la velocidad también indica cuánto cambia la posición en un pequeño intervalo de tiempo. En la Sección 4.1 definiremos las velocidades de forma más precisa). La velocidad de crecimiento **per cápita** es la velocidad de crecimiento dividida por el tamaño de la población. La velocidad de crecimiento per cápita se denomina también velocidad de crecimiento **específica**. El ejemplo siguiente presenta una función que se utiliza frecuentemente para describir velocidades de crecimiento.

▶ Ejemplo 6

(Función de crecimiento de Monod) La función que vamos a considerar se utiliza frecuentemente para describir la velocidad de crecimiento per cápita de un organismo, cuando la velocidad de crecimiento depende de la concentración de algún nutriente y se satura para concentraciones de nutriente suficientemente grandes. Si se denota por N la concentración del nutriente, la velocidad de crecimiento $r(N)$ está dada por la función de crecimiento de Monod

$$r(N) = \frac{aN}{k + N}, \quad N \geqslant 0$$

siendo a y k constantes positivas. La Figura 1.20 muestra la gráfica de $r(N)$, que corresponde a un segmento de hipérbola. Muestra una velocidad de crecimiento que decrece a medida que se aproxima al nivel de saturación a, que es la máxima velocidad de crecimiento específica. Cuando $N = k$, entonces $r(N) = a/2$: por este motivo, k se denomina constante de semisaturación. La velocidad de crecimiento se incrementa con la concentración del nutriente N, pero doblar la concentración del nutriente tiene un efecto mucho mayor sobre la velocidad de crecimiento para valores pequeños de N que cuando N es muy grande. Este tipo de función se utiliza también en bioquímica para describir las reacciones enzimáticas. Allí se denomina función de Michaelis-Menten. ◀

1.2.4 Funciones potenciales

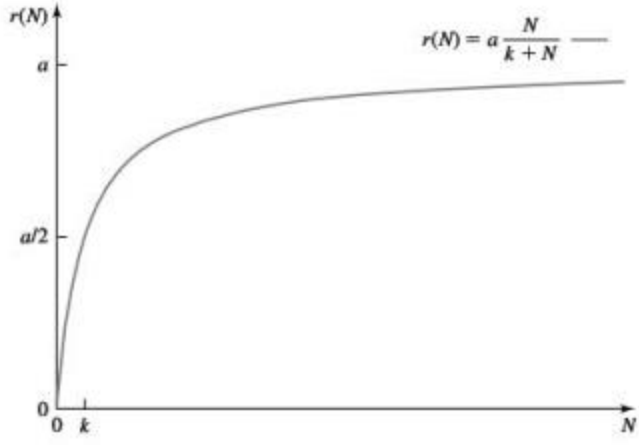
Definición Una función **potencial** es de la forma

$$f(x) = x^r$$

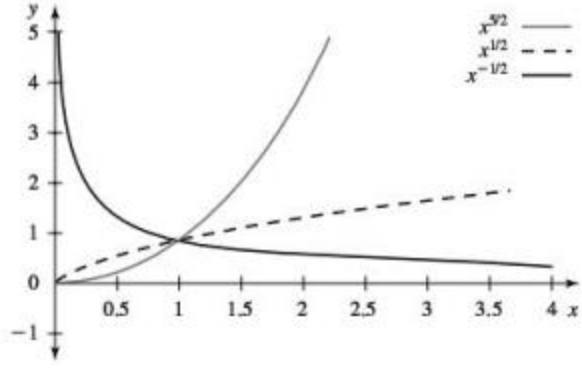
siendo r un número real.

Ejemplos de funciones potenciales, junto con sus mayores dominios posibles, pueden ser

$$y = x^{1/3}, \quad x \in \mathbf{R}$$
$$y = x^{5/2}, \quad x \geqslant 0$$



▲ **Figura 1.20**
Gráfica de la función de Monod $r(N) = a\,\frac{N}{k+N}$ para $N \geqslant 0$



▲ **Figura 1.21**
Algunas funciones potenciales con exponentes racionales

$$y = x^{1/2}, \quad x \geqslant 0$$
$$y = x^{-1/2}, x > 0$$

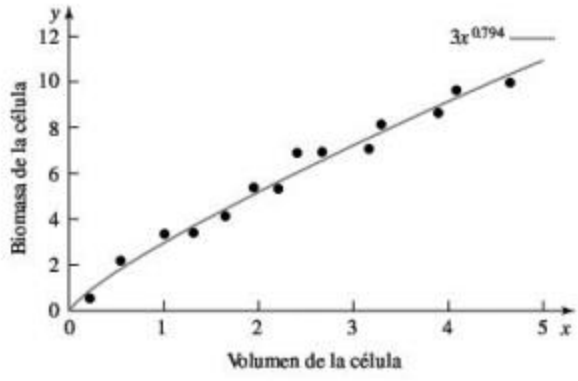
Los polinomios de la forma $y = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ son un caso especial de funciones potenciales. Como las funciones potenciales pueden tener raíces pares, como en $y = x^{3/2} = (\sqrt{x})^3$, frecuentemente será necesario restringir su dominio.

En la Figura 1.21 se comparan algunas funciones potenciales para $x > 0$, concretamente $y = x^{5/2}$, $y = x^{1/2}$ e $y = x^{-1/2}$. Hay que prestar atención a la forma en la que el exponente determina la ordenación de acuerdo con el valor de x entre 0 y 1 y para $x > 1$. Para $0 < x < 1$ resulta que $x^{5/2} < x^{1/2} < x^{-1/2}$, pero para $x > 1$, $x^{5/2} > x^{1/2} > x^{-1/2}$.

Ejemplo 7 Las funciones potenciales aparecen frecuentemente en las «relaciones de escala» entre variables biológicas (por ejemplo, tamaños de órganos). Son relaciones de la forma

$$y \propto x^r$$

donde r es un número real distinto de cero. Es decir, y es proporcional a alguna potencia de x. La ecuación anterior se puede expresar en forma de igualdad si se



▲ **Figura 1.22**
Una serie de puntos de datos y la curva de ajuste del Ejemplo 7 (*Nota:* los «puntos de datos» no corresponden a datos reales)

introduce el factor de proporcionalidad k. Concretamente,

$$y = kx^r$$

La búsqueda de esas relaciones es el objetivo de la **alometría**. En un estudio realizado sobre 45 especies de algas unicelulares, se encontró que la relación entre el volumen y la biomasa de la célula era [*véase*, por ejemplo, Niklas (1994)]

$$\text{biomasa de la célula} \propto (\text{volumen de la célula})^{0.794}$$

La mayoría de estas relaciones de escala deben ser interpretadas en un sentido estadístico, ya que se obtienen ajustando una curva a una serie de puntos de datos. Los puntos de datos se encuentran generalmente dispersos alrededor de la curva de ajuste dada por la relación de escala (*véase* la Figura 1.22). ◀

El ejemplo siguiente relaciona el volumen y el área de la superficie de un cubo. No debe ser interpretado en un sentido estadístico, ya que es una relación exacta que resulta de consideraciones puramente geométricas.

Ejemplo 8 Suponga que se desea conocer la relación de escala existente entre el área de superficie S y el volumen V de un cubo. Para las dos cantidades anteriores, se conoce la relación de escala respectiva con la longitud L de la arista del cubo

$$S \propto L^2 \quad \text{o} \quad S = k_1 L^2$$
$$V \propto L^3 \quad \text{o} \quad V = k_2 L^3$$

En las expresiones anteriores, k_1 y k_2 indican las constantes de proporcionalidad (llevan subíndices diferentes para indicar que pueden ser diferentes). Para expresar S en función de V, se puede despejar primero L en función de V y después sustituirlo en la ecuación de S. Como $L(V/k_2)^{1/3}$,

$$S = k_1\left[\left(\frac{V}{k_2}\right)^{1/3}\right]^2 = \frac{k_1}{k_2^{2/3}} V^{2/3}$$

Introduciendo la constante de proporcionalidad $k = k_1/k_2^{2/3}$, se obtiene

$$S = kV^{2/3} \quad \text{o simplemente} \quad S \propto V^{2/3}$$

En otras palabras, el área de superficie de un cubo cambia con el volumen en una proporción de $V^{2/3}$. Ahora se puede saber, por ejemplo, por qué factor se incre-

menta el área de la superficie cuando se dobla el volumen. Al doblarse el volumen, se obtiene que el área de la superficie resultante, S', es

$$S' = k(2V)^{2/3} = 2^{2/3}\underbrace{kV^{2/3}}_{S}$$

Es decir, si se dobla el volumen de un cubo, el área de su superficie se incrementa en un factor de $2^{2/3} \approx 1.587$. ◀

1.2.5 Funciones exponenciales

Se presenta en primer lugar un ejemplo que ilustra cuándo pueden aparecer funciones exponenciales.

Ejemplo 9 **(Crecimiento exponencial)** Las bacterias se reproducen asexualmente por división celular. La célula madre se divide en dos células hijas tras la duplicación de su material genético. La división puede ocurrir tan a menudo como cada 20 minutos; es decir, bajo condiciones ideales, una colonia bacteriana puede doblar su tamaño en ese intervalo de tiempo.

Sea la unidad de medida temporal el tiempo que tarda la colonia en doblar su tamaño. Si se denota el tamaño de la población en el instante t como $N(t)$, el tamaño de la población en el instante $t + 1$ es el doble del tamaño de la población en el instante t. Es decir,

$$N(t + 1) = 2N(t) \tag{1.2}$$

La función

$$N(t) = 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

satisface la Ecuación (1.2):

$$N(t + 1) = 2^{t+1} = 2 \cdot 2^t = 2N(t)$$

La función $N(t) = 2^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ es una función exponencial ya que la variable t está en el exponente. El número 2 es la base de la función exponencial $N(t) = 2^t$. Se escoge como dominio de la función $t = 0, 1, 2, \ldots$ porque $t = 0$ es el instante donde se empieza a medir el tamaño de la población y dicho tamaño se mide cada unidad temporal.

Cuando $t = 0$, se obtiene que $N(0) = 1$. Es decir, en el instante $t = 0$ la población consta sólo de un individuo. Si en el instante $t = 0$ hubiera cuarenta individuos en la población, tendríamos que $N(0) = 40$ y

$$N(t) = 40 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Puede comprobarse que la función $N(t)$ de (1.3) satisface también la Ecuación (1.2).

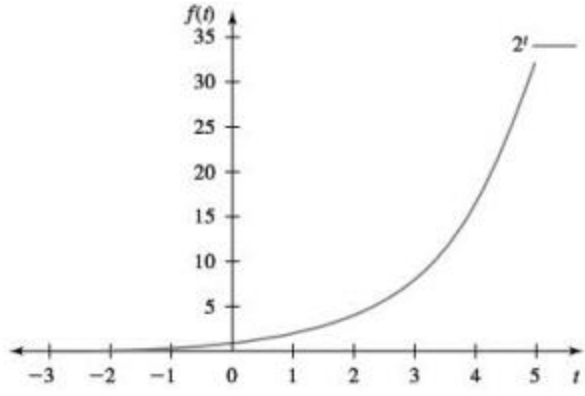
A menudo es deseable no especificar el número inicial de individuos en la ecuación que describe el comportamiento de $N(t)$. Esto tiene la ventaja de que dicha ecuación describe entonces una situación más general, en el sentido de que podemos utilizar la misma ecuación para tamaños iniciales de la población diferentes. Es habitual indicar por N_0 (leído «N sub 0»), en vez de por $N(0)$, el tamaño de la población en el instante 0. La ecuación de $N(t)$ se escribe entonces así:

$$N(t) = N_0 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Puede comprobarse que $N(0) = N_0 2^0 = N_0$, y que $N(t + 1) = N_0 2^{t+1} = 2(N_0 2^t) = 2N(t)$. En el Capítulo 2 se comentará este ejemplo con más detalle.

La función $f(t) = 2^t$ se puede definir para todo $t \in \mathbf{R}$. Su gráfica se muestra en la Figura 1.23.

Se presenta a continuación la definición de función exponencial.



▲ **Figura 1.23**
La función $f(t) = 2^t$, $t \in \mathbf{R}$

Definición Una función f se denomina función **exponencial** de base a si

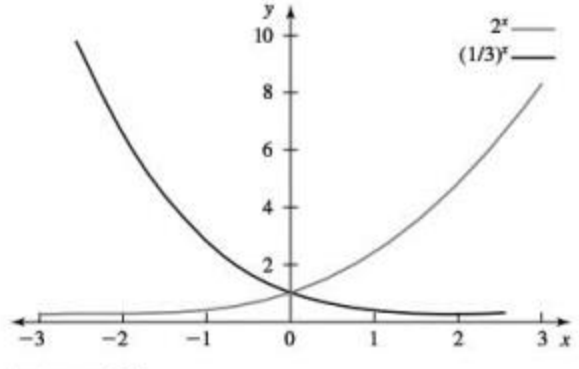
$$f(x) = a^x$$

siendo a una constante positiva distinta de 1. El dominio más grande posible de f es $\mathbf{R}$.

Cuando $a = 1$, $f(x) = 1$ para todos los valores de x. Este caso aparece en ejemplos biológicos, pero se excluye de la definición ya que entonces resulta simplemente la función constante.

La forma básica de la función exponencial $f(x) = a^x$ depende de la base a. En la Figura 1.24 se muestran dos ejemplos. A medida que x crece, la gráfica de $f(x) = 2^x$ muestra un rápido incremento, mientras que la gráfica de $f(x) = (1/3)^x$ muestra un rápido decrecimiento hacia 0. El incremento rápido se produce siempre que $a > 1$, y el decremento cuando $0 < a < 1$. Por tanto, cuando $a > 1$ se dice que hay crecimiento exponencial, y cuando $0 < a < 1$ se dice que hay decrecimiento exponencial.

No debe olvidarse que $a^0 = 1$ y que $a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$, siendo k un entero positivo. En la Subsección 1.1.5 resumimos las propiedades de las exponenciales. Como son



▲ **Figura 1.24**
Crecimiento y decrecimiento exponencial

muy importantes, se presentan aquí una vez más:

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

En muchas aplicaciones, la función exponencial se expresa en función de la base e, donde $e = 2.718...$, que ya apareció en al Subsección 1.1.5. El número e se denomina **base exponencial natural**. La función exponencial con base e se puede escribir alternativamente como $\exp(x)$. Es decir,

$$\exp(x) = e^x$$

La ventaja de esta alternativa es inmediata cuando se intenta escribir algo como $e^{x^2/\sqrt{x^3+1}}$. La expresión $\exp(x^2/\sqrt{x^3+1})$ es más legible. De forma más general, si $g(x)$ es una función de x, se puede escribir indistintamente

$$\exp[g(x)] \quad \text{o} \quad e^{g(x)}$$

Las bases 2 y 10 se utilizan también frecuentemente. Sin embargo, en cálculo, la base e resulta ser la más común. ◀

Los dos ejemplos que siguen muestran una aplicación importante de las funciones exponenciales.

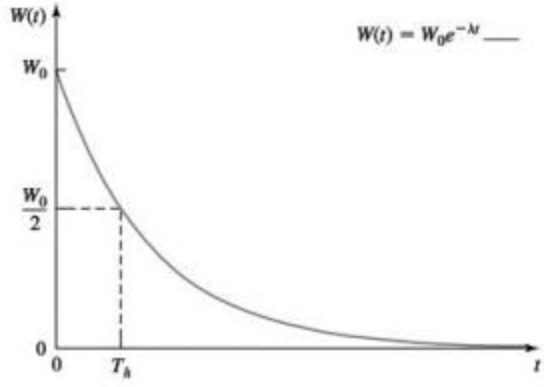
Ejemplo 10 **(Desintegración radioactiva)** Los isótopos radioactivos como el carbono 14 se utilizan para determinar la edad absoluta de los fósiles o de los minerales, estableciendo así una cronología absoluta de la escala de tiempo geológico. Esta técnica fue descubierta en los primeros años del siglo XX y se basa en la propiedad que tienen ciertos átomos de transformarse espontáneamente emitiendo protones, neutrones o electrones. El fenómeno se denomina desintegración radioactiva, y se produce con una velocidad constante, independiente de las condiciones ambientales. Este método se ha utilizado, por ejemplo, para realizar el trazado de la emersión de las Islas Hawai, desde la más antigua Kauai, a la más joven, Hawai (que tiene unos 100 000 años de antigüedad).

El carbono 14 se forma en lo alto de la atmósfera. Es radioactivo y se transforma en nitrógeno (N^{14}). Existe un equilibrio entre el carbono 12 (C^{12}) y el carbono 14 (C^{14}) en la atmósfera. Es más, la relación de C^{14} a C^{12} de la atmósfera se ha mantenido relativamente constante durante un gran periodo de tiempo. Cuando las plantas absorben las moléculas de dióxido de carbono (CO_2) de la atmósfera y las transforman en un producto como la celulosa, la relación inicial de C^{14} a C^{12} es la misma que la de la atmósfera. Cuando las plantas mueren su absorción de CO_2 cesa y la desintegración radioactiva de C^{14} hace que la relación de C^{14} a C^{12} disminuya. Como la ley de la desintegración radioactiva es conocida, la modificación de dicha relación proporciona una medida exacta del momento de la muerte de la planta.

Si la cantidad de C^{14} en el instante t se denomina $W(t)$, con $W(0) = W_0$, la ley de la desintegración radioactiva establece que

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0$$

donde $\lambda > 0$ es la **velocidad de desintegración** (λ es la letra griega lambda minúscula). La función $W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$ es otro ejemplo de función exponencial, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.25.



▲ **Figura 1.25**
La función $W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$

Con frecuencia, la velocidad de desintegración se expresa en función de la **vida media** del material, que se define como el periodo de tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de dicho material. Si se denomina T_m a ese tiempo, entonces (*véase* la Figura 1.25)

$$W(T_m) = \frac{1}{2} W_0 = W_0 e^{-\lambda T_m}$$

de donde se obtiene

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_m}$$
$$2 = e^{\lambda T_m}$$

Recordando los conceptos de álgebra (o la Subsección 1.1.5), para despejar el exponente λT_m hay que tomar logaritmos en los dos miembros de la ecuación. Como el exponente tiene base e, se utiliza el logaritmo natural:

$$\ln 2 = \lambda T_m$$

Despejando T_m o λ,

$$T_m = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_m}$$

Se sabe que la vida media del C^{14} es de 5730 años. Por tanto,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}}$$

Nótese la unidad de «años» que aparece en el denominador. Es importante tener en cuenta las unidades. Al calcular el producto λt en el exponente de $e^{-\lambda t}$ y utilizar esta expresión para obtener λ, es necesario medir t en unidades de años para que las unidades se cancelen adecuadamente. Por ejemplo, si $t = 2000$ años, entonces

$$\lambda t = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} 2000 \text{ años} = \frac{(\ln 2)(2000)}{5730} \approx 0.2419$$

y puede verse que «años» aparece en el numerador y en el denominador, por lo que se cancelan. ◀

El siguiente ejemplo muestra una aplicación del método de fechado basado en el C^{14}

Ejemplo 11 Suponga que las muestras de madera encontradas en una excavación arqueológica contienen aproximadamente un 23% de C^{14} (en relación a su contenido de C^{12}). Determine cuándo se cortó la madera.

Solución

$$0{,}23 = \frac{W(t)}{W(0)} = e^{-\lambda t}$$

$$\lambda t = \ln \frac{1}{0.23}$$

siendo $\lambda = \ln 2/(5730 \text{ años})$, valor establecido en el Ejemplo 10,

$$t = \frac{5730 \text{ años}}{\ln 2} \ln \frac{1}{0.23}$$

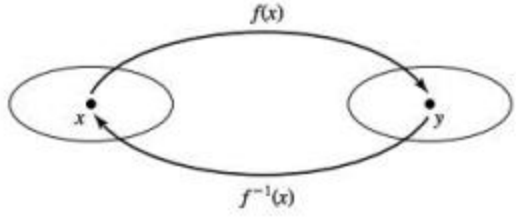
Utilizando una calculadora para obtener el resultado, se encuentra que la madera se cortó hace unos 12,150 años. ◀

1.2.6 Funciones inversas

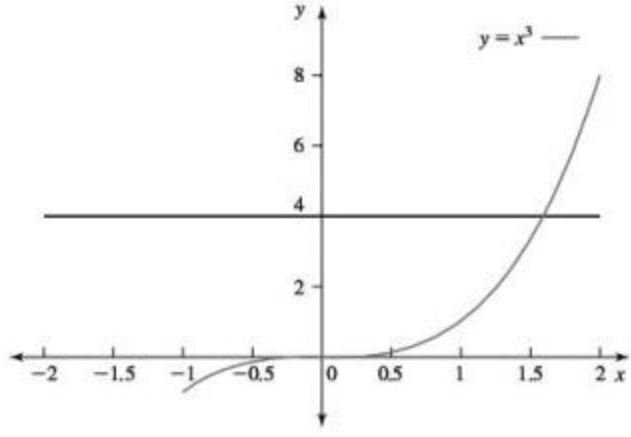
Antes de presentar las funciones logarítmicas, es necesario considerar el concepto de función inversa. De forma aproximada puede decirse que la inversa de una función f revierte el efecto de f. Es decir, si f transforma x en $y = f(x)$, la función inversa, que se indica como f^{-1} (y se lee «f inversa»), toma y, y lo transforma de nuevo en x (*véase* la Figura 1.26). No toda función tiene inversa. Como la función inversa es a su vez una función, es necesario que todo valor y en el recorrido de f se transforme sólo en un valor x. En otras palabras, debe cumplirse que siempre que $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, o lo que es lo mismo, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ (recuérdese la definición de función, en la que se requiere que se asigne a cada elemento del dominio *exactamente un* elemento del recorrido).

Las funciones que tienen la propiedad «$x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$» [o, de forma equivalente, «$f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$»] se denominan **inyectivas**. Si se sabe el aspecto de la gráfica de una función en su dominio es sencillo determinar si la función es inyectiva o no. Concretamente, si ninguna recta horizontal corta la gráfica de la función f más de una vez, f es inyectiva. Esto se denomina prueba de la recta horizontal. Las Figuras 1.27 y 1.28 ilustran el uso de esta prueba.

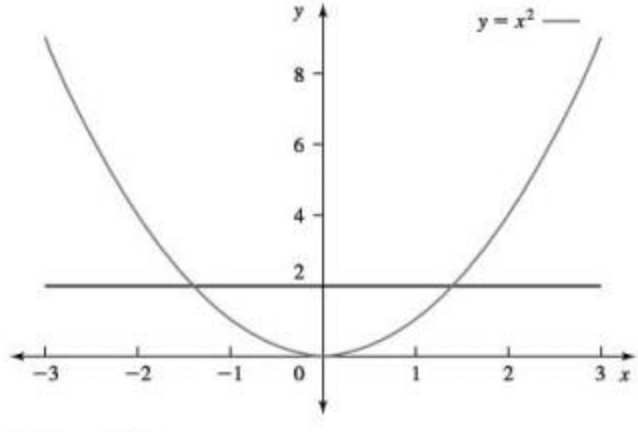
Considérense las funciones $y = x^3$ e $y = x^2$, para $x \in \mathbf{R}$. La función $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ tiene función inversa ya que $x_1^3 \neq x_2^3$ siempre que $x_1 \neq x_2$ (*véase* la Figura 1.27). La función $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ no tiene inversa ya que $x_1 \neq x_2$ no implica necesariamente que $x_1^2 \neq x_2^2$ (o, de forma equivalente, $x_1^2 = x_2^2$ no implica que $x_1 = x_2$) (*véase* la Figura 1.28). La ecuación $x_1^2 = x_2^2$ sólo implica que $|x_1| = |x_2|$. Como x_1 y x_2 pueden ser positivas o negativas, hay que tener en cuenta el signo. Por ejemplo,



◀ **Figura 1.26**
La función $y = f(x)$ y su inversa



▲ **Figura 1.27**
La prueba de la recta horizontal tiene éxito



▲ **Figura 1.28**
La prueba de la recta horizontal no tiene éxito

-2 y 2 se transforman en 4, y $f(-2) = f(2)$, pero $-2 \neq 2$ (nótese que $|-2| = |2|$). Para invertir esta función, deberíamos transformar 4 en -2 y 2, pero ya no sería por definición una función. Si se limita el dominio de $y = x^2$, por ejemplo a $x \geqslant 0$, sí es posible definir la función inversa de $y = x^2$, $x \geqslant 0$.

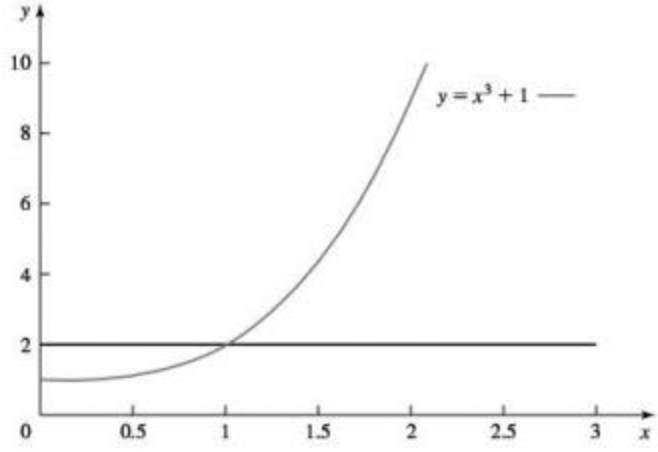
He aquí la definición formal de función inversa.

Definición Sea $f: A \to B$ una función inyectiva con recorrido $f(A)$. La función **inversa** f^{-1} tiene como dominio $f(A)$ y recorrido A, y se define por

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{si y sólo si} \quad y = f(x)$$

para todo $y \in f(A)$.

Ejemplo 12 Obtenga la función inversa de $f(x) = x^3 + 1$, $x \geqslant 0$.



▲ **Figura 1.29**
Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 1$ del Ejemplo 12. La prueba de la recta horizontal tiene éxito

Solución

Debe notarse en primer lugar que f es inyectiva. Para ver esto de forma rápida se dibuja la función y se aplica la prueba de la recta horizontal (*véase* la Figura 1.29). Para demostrarlo algebraicamente, sea $f(x_1) = f(x_2)$. Se puede demostrar que esto implica que $x_1 = x_2$:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 + 1 = x_2^3 + 1$$
$$x_1^3 = x_2^3$$

Tomando la raíz cúbica en ambos miembros se obtiene que $x_1 = x_2$, lo que indica que $f(x)$ tiene inversa. Se obtiene ahora f^{-1}.

Para obtener la función inversa, se siguen estos tres pasos:

1. Se escribe $y = f(x)$:

$$y = x^3 + 1$$

2. Se despeja x:

$$x^3 = y - 1$$
$$x = \sqrt[3]{y - 1}$$

El recorrido de f es $[1, \infty)$, que se convierte en el dominio de f^{-1}, con lo que se obtiene

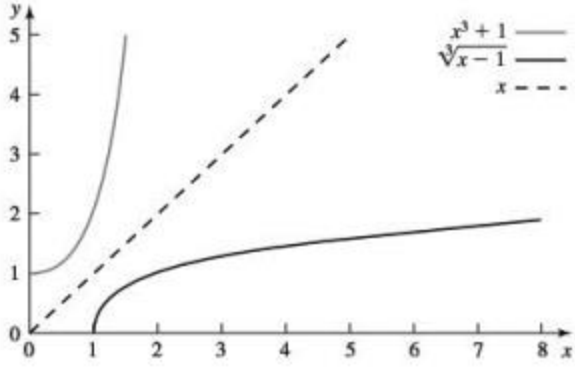
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1}, \quad y \geqslant 1$$

En general, las funciones se escriben con la variable x. Para hacer esto, se intercambian los papeles de x e y en $x = f^{-1}(y)$. Este es el tercer paso.

3. Intercambiar x e y:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}, x \geqslant 1$$

Nótese que el intercambio de x e y del paso 3 corresponde a reflejar la gráfica de $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$. Las gráficas de f y de f^{-1} se muestran



▲ **Figura 1.30**
Funciones inversas

en la Figura 1.30. Observe esas gráficas cuidadosamente para ver que se encuentran realmente relacionadas mediante una reflexión sobre la recta $y = x$. ◀

Como se mencionó al principio de esta subsección, la inversa de una función f revierte su efecto. Si se aplica en primer lugar la función f a x y después la función f^{-1} a $f(x)$, se obtiene el valor original x. Asimismo, si se aplica la función f^{-1} a x y después la función f a $f^{-1}(x)$ se obtiene el valor original x. Es decir, si f: $A \to B$ tiene como función inversa f^{-1}, entonces

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad \text{para todo} \quad x \in A$$
$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{para todo} \quad x \in f(A)$$

Un aviso: el superíndice de f^{-1} *no* significa el inverso de un número f (es decir, $1/f$). La diferencia se explica en el Problema 74 al final de esta sección.

1.2.7 Funciones logarítmicas

De acuerdo con el álgebra (o con lo explicado en la Subsección 1.1.5) para despejar x en la ecuación

$$e^x = 3$$

deben tomarse logaritmos en los dos miembros:

$$x = \ln 3$$

En otras palabras, el logaritmo natural deshace la operación de elevar e a la potencia x, y por tanto es la función inversa de la función exponencial (y, en consecuencia, la función exponencial es la inversa de la función logarítmica).

Se define a continuación la inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. La base de a puede ser cualquier número positivo, excepto 1.

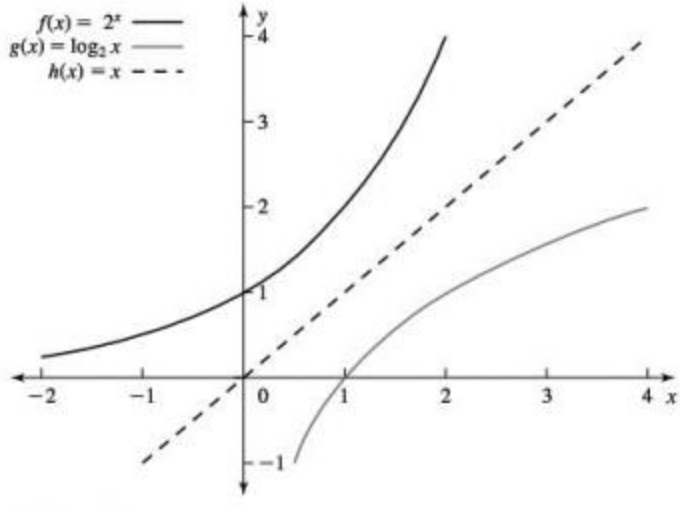
Definición La inversa de $f(x) = a^x$ se denomina **logaritmo en base a** y se escribe como $f^{-1}(x) = \log_a x$.

El dominio de $f(x) = a^x$ es el conjunto de los números reales, y su recorrido es el conjunto de todos los números positivos. Como el recorrido de f es el dominio de f^{-1}, se obtiene que el dominio de $f^{-1}(x) = \log_a x$ es el conjunto de los números positivos.

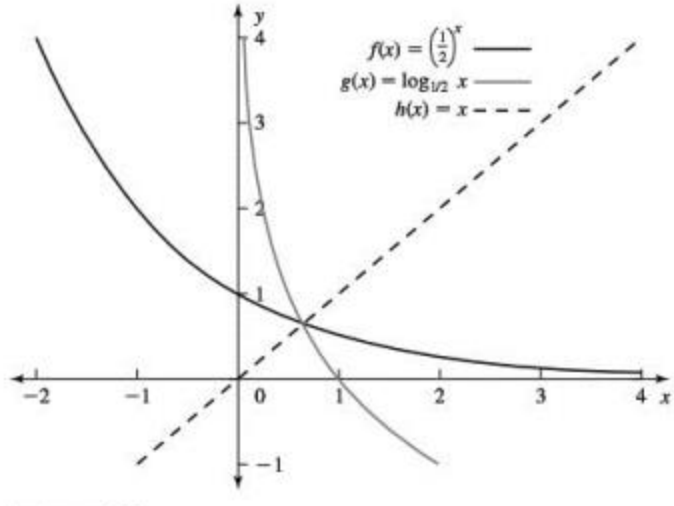
Como $y = \log_a x$ es la función inversa de $y = a^x$, se puede dibujar la gráfica de $y = \log_a x$ reflejando sobre la recta $y = x$ la gráfica de $y = a^x$. Recuérdese que la gráfica de $y = a^x$ presenta dos formas básicas, en función de si $0 < a < 1$ o si $a > 1$ (*véase* la Figura 1.24). La Figura 1.31 ilustra las gráficas de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ cuando $a > 1$.

La Figura 1.32 muestra las gráficas de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ cuando $0 < a < 1$.

A continuación se resume la relación entre las funciones exponencial y logarítmica.



▲ **Figura 1.31**
Gráfica de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ para $a > 1$ (en esta gráfica $a = 2$)



▲ **Figura 1.32**
Gráfica de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ para $0 < a < 1$ (en esta gráfica $a = 1/2$)

1. $a^{\log_a x} = x$ para $x > 0$
2. $\log_a a^x = x$ para $x \in \mathbf{R}$

Es importante recordar que el logaritmo sólo está definido para números positivos. Es decir, $y = \log_a x$ sólo está definida para $x > 0$. El logaritmo satisface las siguientes propiedades:

$$\log_a (st) = \log_a s + \log_a t$$

$$\log_a \left(\frac{s}{t}\right) = \log_a s - \log_a t$$

$$\log_a s^r = r \log_a s$$

La inversa de la función exponencial con la base natural e se indica como $\ln x$ y se denomina logaritmo natural de x. La Figura 1.33 muestra las gráficas de $y = e^x$ e $y = \ln x$. Nótese que tanto e^x como $\ln x$ son funciones crecientes. Sin embargo, mientras que la función e^x crece muy rápidamente para valores grandes de x, $\ln x$ crece muy despacio para valores grandes de x. Observando ambas gráficas puede verse de nuevo que una de ellas se obtiene reflejando la otra respecto al de la recta $y = x$.

El logaritmo en base 10 se escribe frecuentemente como $\log x$ (es decir, la base 10 en $\log_{10} x$ se omite).

Ejemplo 13 Simplifique las siguientes expresiones: (a) $\log_2 [8(x - 2)]$, (b) $\log_3 9^x$, (c) $\ln e^{3x^2+1}$.

Solución

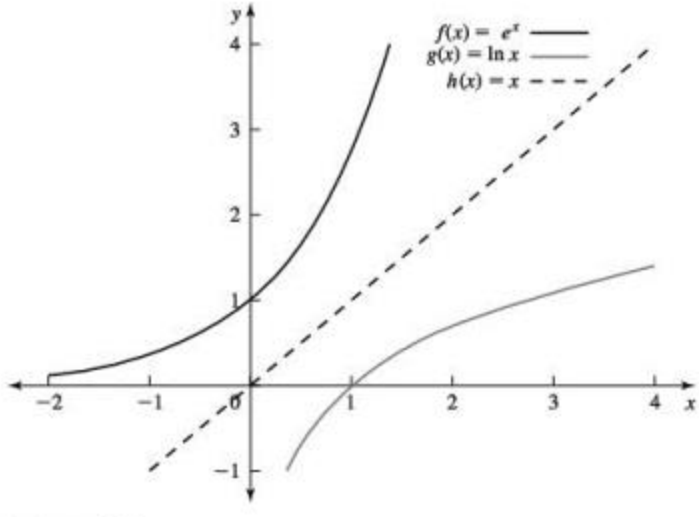
(a) Simplificando

$$\log_2 [8(x - 2)] = \log_2 8 + \log_2 (x - 2) = 3 + \log_2 (x - 2)$$

que ya no se puede simplificar más.

(b) Simplificando

$$\log_3 9^x = x \log_3 9 = x \log_3 3^2 = 2x$$



▲ **Figura 1.33**
Gráficas de $y = e^x$ y de $y = \ln x$

El hecho de que $\log_3 9 = 2$ se puede ver de dos formas. Se puede escribir $9 = 3^2$ y argumentar que $\log_3$ deshace la operación de elevar 3 a la segunda potencia (como hicimos previamente), o se puede decir que $\log_3 9$ indica el exponente al que hay que elevar 3 para obtener 9.

(c) Se utiliza el hecho de que las funciones e^x y $\ln x$ son inversas y se obtiene que

$$\ln e^{3x^2+1} = 3x^2 - 1$$ ◀

Cualquier función exponencial de base a se puede escribir como una función exponencial de base e. Así mismo, cualquier logaritmo en base a se puede escribir en función del logaritmo natural. Las dos igualdades que siguen indican cómo

$$a^x = \exp[x \ln a]$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

La primera igualdad se deduce del hecho de que exp y ln están relacionadas inversamente, lo que implica que $a^x = \exp[\ln a^x]$ y del hecho de que $\ln a^x = x \ln a$. Para explicar la segunda igualdad, nótese que

$$y = \log_a x \quad \text{significa que} \quad a^y = x$$

Tomando logaritmos en base e en ambos miembros de $a^y = x$, se obtiene

$$\ln a^y = \ln x$$

o

$$y \ln a = \ln x$$

De aquí,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Ejemplo 14 Escriba las siguientes expresiones en función de la base e: (a) 2^x, (b) 10^{x^2+1}, (c) $\log_3 x$, (d) $\log_2(3x - 1)$.

Solución

(a)

$$2^x = \exp(\ln 2^x) = \exp(x \ln 2)$$
$$= e^{x \ln 2}$$

(b)

$$10^{x^2+1} = \exp(\ln 10^{x^2+1}) = \exp[(x^2 + 1)\ln 10]$$
$$= e^{(x^2+1)\ln 10}$$

(c)

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

(d)

$$\log_2(3x - 1) = \frac{\ln(3x - 1)}{\ln 2}$$ ◀

Ejemplo 15 Las secuencias de ADN evolucionan en el tiempo mediante varios procesos. Uno de esos procesos es la sustitución de un nucleótido por otro. El esquema de sustitución más simple es el de Jukes y Cantor (1969), que asume que las sustituciones son igualmente probables para los cuatro tipos de nucleótidos. Al comparar dos

secuencias de ADN que tengan un origen común es posible estimar el número de sustituciones por posición. Como en cada posición puede producirse más de una sustitución, el número de sustituciones observadas puede ser menor que el número de sustituciones reales, particularmente cuando el tiempo de divergencia es grande. Para corregir estas diferencias se utilizan modelos matemáticos. La proporción p de diferencias de nucleótidos observadas entre dos secuencias que comparten un antepasado común se puede emplear para obtener un estimador del número real K de sustituciones por posición desde el momento de la divergencia. Utilizando el esquema de sustitución de Jukes y Cantor, K y p se relacionan por

$$K = -\frac{3}{4}\ln\left(1 - \frac{4}{3}p\right)$$

supuesto que p no es demasiado grande. Suponga que dos secuencias de 150 nucleótidos de longitud se diferencian entre sí en 23 nucleótidos. Obtenga K.

Solución

La variable p indica la proporción de diferencias observadas en los nucleótidos, que es de $23/150 \approx 0.1533$ en este ejemplo. Por tanto se obtiene

$$K = -\frac{3}{4}\ln\left(1 - \frac{4}{3}\frac{23}{150}\right) \approx 0.1715$$ ◀

1.2.8 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son ejemplos de funciones periódicas.

Definición Una función $f(x)$ es **periódica** si existe una constante positiva a tal que

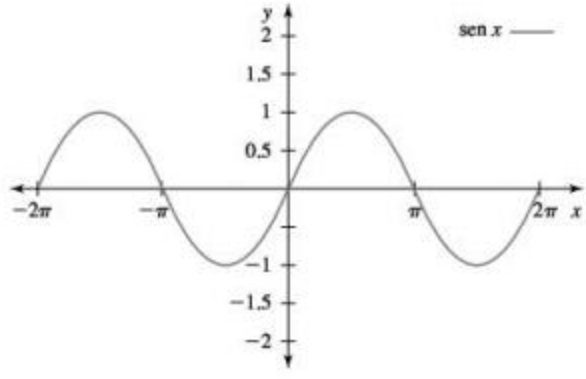
$$f(x + a) = f(x)$$

para todo x en el dominio de f. Si a es el número más pequeño que cumple esta propiedad se denomina **periodo** de $f(x)$.

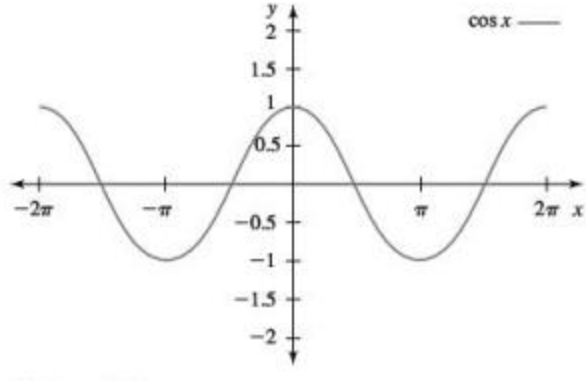
Comenzaremos con las funciones seno y coseno. En la Subsección 1.1.4 se definieron el seno y el coseno en el círculo unidad. Allí $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ representaban funciones trigonométricas de ángulos y θ se medía en grados o en radianes. Ahora se definirán las funciones trigonométricas como funciones de números *reales*. Por ejemplo, se define $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbf{R}$. El valor de $\operatorname{sen} x$ es *por definición* el seno de un ángulo de x radianes (la definición es similar para todas las demás funciones trigonométricas).

Las Figuras 1.34 y 1.35 muestran respectivamente las gráficas de las funciones seno y coseno.

La función seno $y = \operatorname{sen} x$ está definida para todo $x \in \mathbf{R}$. Su recorrido es $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Similarmente, la función coseno $y = \cos x$ está definida para todo $x \in \mathbf{R}$ y su recorrido es también $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Ambas funciones son periódicas de periodo 2π. Es decir, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ y $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ [también se cumple que $\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(x + 6\pi) = \operatorname{sen} x$, ..., y que $\cos(x + 4\pi) = \cos x$, $\cos(x + 6\pi) = \cos x$, ..., pero por convenio para especificar el periodo se utiliza el valor más pequeño posible]. Las Figuras 1.34 y 1.35 muestran que la gráfica de la función coseno se puede obtener desplazando la gráfica del seno una distancia de $\pi/2$ unidades a la izquierda (en la sección siguiente comentaremos con más detalle los desplazamientos horizontales de las gráficas).



▲ **Figura 1.34**
Gráfica de $y = \operatorname{sen} x$



▲ **Figura 1.35**
Gráfica de $y = \cos x$

Para definir la función tangente, $y = \tan x$, hay que recordar que

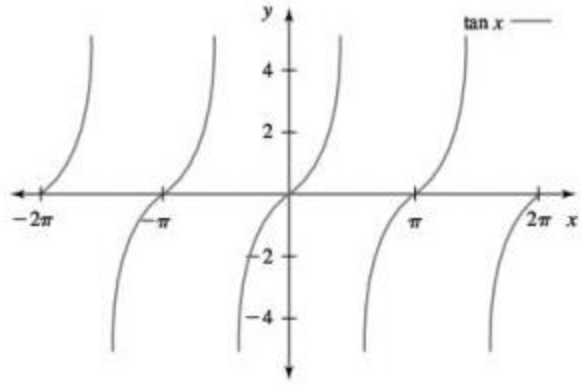
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Como $\cos x = 0$ para valores de x que sean un múltiplo entero impar de $\pi/2$, el dominio de $\tan x$ está formado por todos los números reales con excepción de los múltiplos enteros impares de $\pi/2$. El recorrido de $y = \tan x$ es $-\infty < y < \infty$. La Figura 1.36 muestra la gráfica de $y = \tan x$, donde puede verse que es una función periódica de periodo π.

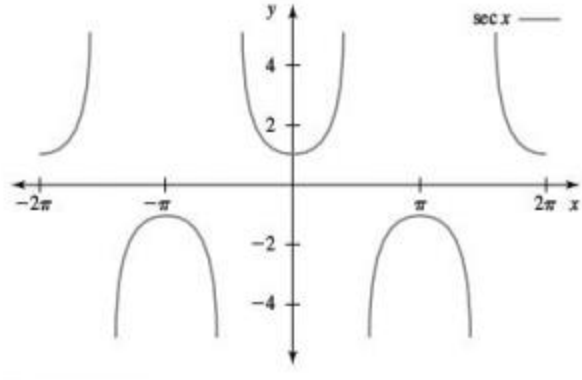
Las Figuras 1.37 a 1.39 muestran las gráficas de las tres funciones trigonométricas restantes. El dominio de la función secante $y = \sec x$ está formado por todos los números reales excepto los múltiplos enteros impares de $\pi/2$. Su recorrido es $|y| \geqslant 1$. El dominio de la función cosecante $y = \csc x$ está formado por todos los números reales excepto los múltiplos enteros de π, y su recorrido es $|y| \geqslant 1$. El dominio de la función cotangente $y = \cot x$ está formado por todos los números reales con excepción de los múltiplos enteros de π, y su recorrido es $-\infty < y < \infty$.

Como las funciones seno y coseno son de particular importancia, se describirán a continuación con más detalle. Considérese la función

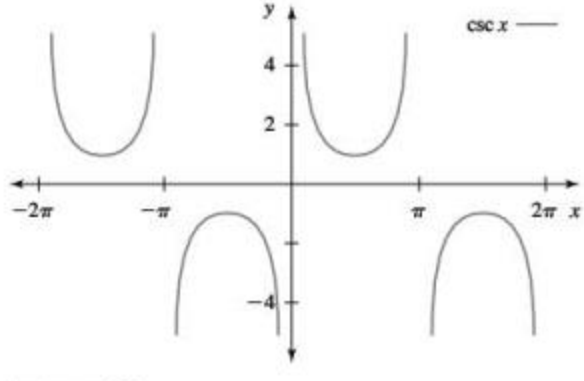
$$f(x) = a \operatorname{sen}(kx) \qquad \text{para } x \in \mathbf{R}$$



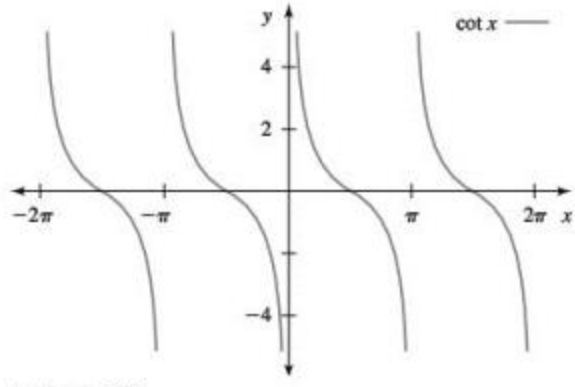
▲ **Figura 1.36**
Gráfica de $y = \tan x$



▲ **Figura 1.37**
Gráfica de $y = \sec x$



▲ **Figura 1.38**
Gráfica de $y = \csc x$



▲ **Figura 1.39**
Gráfica de $y = \cot x$

siendo a un número real y $k \neq 0$. La función $f(x)$ toma valores entre $-a$ y a. $|a|$ se denomina **amplitud**. Esta función es periódica. Para obtener su periodo p,

$$|k|p = 2\pi \quad \text{o} \quad p = \frac{2\pi}{|k|}$$

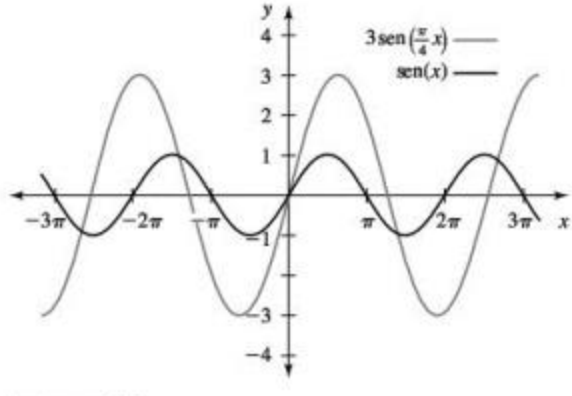
Como la función coseno se puede obtener a partir de la función seno mediante un desplazamiento horizontal, las definiciones de amplitud y periodo son análogas para el caso del coseno. Es decir, la función $f(x) = a\cos(kx)$ tiene de amplitud $|a|$ y de periodo $p = 2\pi/|k|$.

Ejemplo 16 Compare

$$f(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad \text{y} \quad g(x) = \text{sen}\,x$$

Solución

La amplitud de $f(x)$ es 3, y la amplitud de $g(x)$ es 1. El periodo p de $f(x)$ satisface la expresión $\frac{\pi}{4}p = 2\pi$, o $p = 8$. El periodo de $g(x)$ es 2π. En la Figura 1.40 se muestran las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. ◀



▲ **Figura 1.40**
Gráficas de $f(x) = 3\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{4}x)$ y de $g(x) = \text{sen}\,x$ en el Ejemplo 16

Observación. Se dice que un número es **algebraico** cuando es solución de una ecuación polinómica de coeficientes racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número algebraico ya que satisface la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Los números no algebraicos se denominan **trascendentales**. Por ejemplo π y e son números trascendentales.

Se puede hacer una definición similar para funciones. Se dice que una función $y = f(x)$ es algebraica si es solución de una ecuación de la forma

$$P_n(x)y^n + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$$

en la que los coeficientes son funciones polinómicas de x con coeficientes racionales. Por ejemplo, la función $y = 1/(1 + x)$ es algebraica porque satisface la ecuación $(x + 1)y - 1 = 0$. En este caso $P_1(x) = x + 1$ y $P_0(x) = -1$. Entre otros ejemplos de funciones algebraicas podemos citar los polinomios y las funciones racionales con coeficientes racionales.

Las funciones que no son algebraicas se denominan trascendentales. Todas las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas presentadas en esta sección son ejemplos de funciones trascendentales.

1.2.9. Problemas

(1.2.1)

En los Problemas 1-4, indique el recorrido de las funciones dadas. Dibuje dichas funciones.

1. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$

2. $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$

3. $f(x) = x^2$, $-1 < x \leqslant 0$

4. $f(x) = x^2$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

5. **(a)** Demuestre que para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

(b) ¿Son las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

y

$$g(x) = x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

iguales?

6. **(a)** Demuestre que

$$2|x - 1| = \begin{cases} 2(x - 1) & \text{para } x \geqslant 1 \\ 2(1 - x) & \text{para } x \leqslant 1 \end{cases}$$

(b) ¿Son las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 2 & \text{para } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

y

$$g(x) = 2|x - 1|, x \in [0, 2]$$

iguales?

En los Problemas 7-12, dibuje aproximadamente la gráfica de cada función, y decida en cada caso si la función es (i) par, (ii) impar o (iii) no muestra ninguna simetría obvia. Compruebe después sus respuestas utilizando el criterio de la Subsección 1.2.1.

7. $f(x) = 2x$

8. $f(x) = 3x^2$

9. $f(x) = |3x|$

10. $f(x) = 2x + 1$

11. $f(x) = -|x|$

12. $f(x) = 3x^3$

13. Sean

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

y

$$g(x) = 3 + x, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Demuestre que

$$(f \circ g)(x) = (3 + x)^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

(b) Demuestre que

$$(g \circ f)(x) = 3 + x^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

14. Sean

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbf{R}$$

y

$$g(x) = 1 - x, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Demuestre que

$$(f \circ g)(x) = (1 - x)^3, \quad x \in \mathbf{R}$$

(b) Demuestre que

$$(g \circ f)(x) = 1 - x^3, \quad x \in \mathbf{R}$$

15. Demuestre que

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

y

$$g(x) = 2x, \quad x \geqslant 0$$

(a) Obtenga

$$(f \circ g)(x)$$

junto con su dominio.

(b) Obtenga

$$(g \circ f)(x)$$

junto con su dominio.

16. Demuestre que

$$f(x) = \frac{1}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

y

$$g(x) = 2x^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Obtenga $(f \circ g)(x)$.

(b) Obtenga $(g \circ f)(x)$

Tanto en **(a)** como en **(b)**, calcule el dominio.

17. Sean

$$f(x) = 3x^2, \quad x \geq 3$$

y

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

Obtenga $(f \circ g)(x)$, y su dominio.

18. Sean

$$f(x) = x^4, \quad x \geq 3$$

y

$$g(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \geq 3$$

Obtenga $(f \circ g)(x)$, y su dominio.

19. Sean $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. En general, $f \circ g \neq g \circ f$, pero este es un ejemplo donde el orden de la composición no importa. Demuestre que en este ejemplo $f \circ g = g \circ f$.

20. Sea $f(x) = x^4$, $x \geq 0$. Obtenga $g(x)$ de forma que $f \circ g = g \circ f$.

(1.2.2)

21. Utilice una calculadora gráfica para dibujar simultáneamente $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y $g(x) = x^4$, $x \geq 0$. ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$, y para qué valores de x es $f(x) < g(x)$?

22. Utilice una calculadora gráfica para dibujar simultáneamente $f(x) = x^3$, $x \geq 0$ y $g(x) = x^5$, $x \geq 0$. ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$, y para qué valores de x es $f(x) < g(x)$?

23. Dibuje $y = x^n$, $x \geq 0$, para $n = 1, 2, 3$ y 4 en un solo sistema de coordenadas. ¿Dónde se cortan las curvas?

24. (a) Dibuje simultáneamente, en un mismo sistema de coordenadas $f(x) = x$, $x \geq 0$ y $g(x) = x^2$, $x \geq 0$.

(b) ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x) \geq g(x)$, y para qué valores de x es $f(x) \leq g(x)$?

25. (a) Dibuje simultáneamente en una misma gráfica $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ para $x \geq 0$.

(b) Demuestre algebraicamente que

$$x^2 \geq x^3$$

para $0 \leq x \leq 1$.

(c) Demuestre algebraicamente que

$$x^2 \leq x^3$$

para $x \geq 1$.

26. Demuestre algebraicamente que si $n \geq m$

$$x^n \leq x^m \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

y

$$x^n \geq x^m \quad \text{para } x \geq 1$$

27. (a) Demuestre que $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ es una función par.

(b) Demuestre que $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ es una función impar.

28. Demuestre que

(a) $y = x^n$, $x \in \mathbf{R}$ es una función par cuando n es un entero par.

(b) $y = x^n$, $x \in \mathbf{R}$ es una función impar cuando n es un entero impar.

29. En el Ejemplo 5 de esta sección se consideró la reacción química

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{AB}$$

Suponga que inicialmente en el recipiente de la reacción sólo existen A y B y que las concentraciones iniciales son $a = [\mathrm{A}] = 3$ y $b = [\mathrm{B}] = 4$.

(a) Se obtuvo que la velocidad de reacción $R(x)$, siendo x la concentración de AB venía dada por

$$R(x) = k(a - x)(b - x)$$

siendo a la concentración inicial de A, b la concentración inicial de B y k la constante de proporcionalidad. Suponga que la velocidad de reacción $R(x)$ es igual a 9 cuando la concentración de AB es igual a 1. Utilice este dato para obtener la velocidad de reacción $R(x)$.

(b) Determine el dominio apropiado para $R(x)$, y utilice una calculadora gráfica para dibujar la función $R(x)$.

30. Una reacción autocatalítica utiliza el producto resultante para la formación de nuevo producto, como por ejemplo la reacción

$$\mathrm{A} + \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}$$

Si se asume que esta reacción se produce en un recipiente cerrado, la velocidad de reacción está dada por

$$R(x) = kx(a - x)$$

para $0 \leq x \leq a$, siendo a la concentración inicial de A y x la concentración inicial de X.

(a) Demuestre que $R(x)$ es un polinomio y determine su grado.

(b) Dibuje $R(x)$ para $k = 2$ y $a = 6$. Obtenga el valor de x para el que la velocidad de reacción es máxima.

31. Suponga que un escarabajo sube por un árbol en línea recta a una velocidad constante de 1 metro por hora. ¿Qué distancia habrá recorrido transcurridas 1 hora, 2 horas y 3 horas? Escriba una ecuación que exprese la distancia (en metros) en función del tiempo (en horas), y demuestre que esta función es un polinomio de grado 1.

32. Suponga que una enfermedad por hongos se origina en medio de un huerto, y afecta inicialmente sólo a un árbol. La enfermedad se extiende radialmente a una velocidad constante de 10 pies al día. ¿Qué área habrá afectado transcurridos 2 días, 4 días y 8 días? Escriba una ecuación que exprese el área afectada en función del tiempo medido en días, y demuestre que esta función es un polinomio de grado 2.

(1.2.3)

En los Problemas 33-36, para cada función, obtenga el mayor dominio posible y determine el recorrido.

33. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

34. $f(x) = \frac{2x}{(x-2)(x+3)}$

35. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$

36. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

37. Compare $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ para $x > 0$ dibujando las dos funciones. ¿Dónde se cortan las curvas? ¿Qué función es mayor para valores pequeños de x? ¿Y para valores grandes de x?

38. Sean n y m dos enteros positivos con $m \leqslant n$. Conteste a las siguientes preguntas sobre las funciones $y = x^{-n}$ e $y = x^{-m}$ para $x > 0$. ¿Dónde se cortan las curvas? ¿Qué función es mayor para valores pequeños de x? ¿Y para valores grandes de x?

39. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x > -1$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $f(x)$.

(b) Basándose en la gráfica de (a), determine el recorrido de $f(x)$.

(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 2$?

(d) Basándose en la gráfica del apartado (a), determine cuántas soluciones tiene $f(x) = a$, siendo a un valor perteneciente al recorrido de $f(x)$.

40. Sea

$$f(x) = \frac{2x}{3+x}, \quad x \geqslant 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $f(x)$.

(b) Determine el recorrido de $f(x)$.

(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?

(d) Basándose en la gráfica del apartado (a), explique con palabras por qué para cada valor de a perteneciente al recorrido de $f(x)$ sólo hay un valor $x \geqslant 0$ tal que $f(x) = a$. Determine a resolviendo la ecuación $f(x) = a$.

41. Sea

$$f(x) = \frac{3x}{1+x}, \quad x \geqslant 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $f(x)$.

(b) Determine el recorrido de $f(x)$.

(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 2$?

(d) Basándose en la gráfica del apartado (a), explique con palabras por qué para cada valor de a perteneciente al recorrido de $f(x)$ sólo hay un valor $x \geqslant 0$ tal que $f(x) = a$. Determine a resolviendo la ecuación $f(x) = a$.

Los Problemas 42-44 consideran la función de crecimiento de Monod, que se presentó en el Ejemplo 6 de esta sección.

42. Utilice una calculadora gráfica para estudiar la función de crecimiento de Monod

$$r(N) = \frac{aN}{k+N}, \quad N \geqslant 0$$

siendo a y k constantes positivas.

(a) Dibuje $r(N)$ para (i) $a = 5$ y $k = 1$, (ii) $a = 5$ y $k = 3$ y (iii) $a = 8$ y $k = 1$. Dibuje las tres gráficas en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Basándose en las gráficas realizadas en el apartado (a), describa con palabras qué sucede cuando se cambia a.

(c) Basándose en las gráficas realizadas en el apartado (a), describa con palabras qué sucede cuando se cambia k.

43. La función de crecimiento de Monod modela el crecimiento como función de la concentración de nutrientes N. Suponga que

$$r(N) = 5\frac{N}{1+N}, \quad N \geqslant 0$$

Obtenga el incremento de porcentaje cuando se dobla la concentración de nutrientes desde $N = 0.1$ hasta $N = 0.2$. Compare esto con lo que haya descubierto al doblar la concentración de nutrientes de $N = 10$ a $N = 20$. Esto es un ejemplo de lo que se conoce como *retorno en disminución*.

44. La función de crecimiento de Monod $r(N)$ modela el crecimiento como una función de la concentración de nutrientes N. Suponga que

$$r(N) = a\frac{N}{k+N}, \quad N \geqslant 0$$

siendo a y k constantes positivas.

(a) ¿Qué le sucede a $r(N)$ cuando N crece? Utilizando esa idea, explique por qué a se denomina nivel de saturación.

(b) Demuestre que k es la constante de semisaturación. Es decir, demuestre que si $N = k$, entonces $r(N) = a/2$.

45. Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{4+x^2}, \quad x \geqslant 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $f(x)$.

(b) Basándose en la gráfica de (a), determine el recorrido de $f(x)$.

(c) ¿Qué le sucede a $f(x)$ cuando x crece?

46. La siguiente función se utiliza en bioquímica para modelar las velocidades de reacción en función de la concentración de algunos reactivos.

$$f(x) = \frac{x^n}{b^n + x^n}, \quad x \geqslant 0$$

siendo n un entero positivo y b un número real positivo.

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar en un único sistema de coordenadas $f(x)$ para $n = 1$, 2 y 3 , para $b = 2$.

(b) ¿Dónde se cortan las tres gráficas de (a)?

(c) ¿Qué le sucede a $f(x)$ cuando x crece?

(d) Dado un valor positivo arbitrario de b, demuestre que $f(b) = 1/2$. Basándose en esto y en su respuesta al apartado (c), explique por qué b se denomina constante de semisaturación.

(1.2.4)

En los Problemas 47-50, utilice una calculadora gráfica para dibujar las funciones

47. $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$

48. $y = x^{1/3}$, $x \geqslant 0$

49. $y = x^{-1/4}$, $x > 0$

50. $y = 2x^{-7/8}$, $x > 0$

51. (a) Dibuje $y = x^{-1/2}$, $x > 0$, e $y = x^{1/2}$, $x \geqslant 0$ en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Demuestre algebraicamente que

$$x^{-1/2} \geqslant x^{1/2}$$

para $0 < x \leqslant 1$.

(c) Demuestre algebraicamente que

$$x^{-1/2} \leqslant x^{1/2}$$

para $x \geqslant 1$.

52. (a) Dibuje $y = x^{5/2}$, $x \geqslant 0$, e $y = x^{1/2}$, $x \geqslant 0$ en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Demuestre algebraicamente que

$$x^{5/2} \leqslant x^{1/2}$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$. (*Sugerencia*: Demuestre que $x^{1/2}/x^{-1/2} = x \leqslant 1$ para $0 < x \leqslant 1$.)

(c) Demuestre algebraicamente que

$$x^{5/2} \geqslant x^{1/2}$$

para $x \geqslant 1$.

En los Problemas 53-56, razona sobre las relaciones de escala.

53. En una muestra basada en 46 especies, se ha observado que el área de las hojas es proporcional a (diámetro del tallo)$^{1.84}$. Basándose en una representación gráfica, indique si a medida que el diámetro del tallo crece, el área de las hojas crece o decrece.

54. En una muestra basada en 24 especies, se ha observado que la fracción de volumen de mesofila esponjosa es proporcional a (espesor de la hoja)$^{-0.49}$ (la mesofila esponjosa es parte del tejido interno de una hoja). Basándose en una representación gráfica, indique si a medida que el espesor de la hoja crece, la fracción de volumen de mesofila esponjosa crece o decrece.

55. En una muestra de 60 especies de árboles, se ha observado que la densidad de la madera es proporcional a (fuerza de rotura)$^{0.82}$. Basándose en una representación gráfica, indique cuándo se incrementa la fuerza de rotura: ¿al crecer o al disminuir la densidad de la madera?

56. Suponga que un cubo de longitud de arista L y volumen V tiene masa M, y que $M = 0.35V$. ¿Cómo varía la longitud de la arista del cubo con su masa?

(1.2.5)

57. Suponga que el tamaño de una población en un instante t es $N(t)$ y que

$$N(t) = 2^t, \quad t \geqslant 0$$

(a) Obtenga el tamaño de la población para $t = 0, 1, 2, 3$ y 4.

(b) Dibuje $N(t)$ para $t \geqslant 0$.

58. Suponga que el tamaño de una población en un instante t es $N(t)$ y que

$$N(t) = 40 \cdot 2^t, \quad t \geqslant 0$$

(a) Obtenga el tamaño de la población en el instante $t = 0$.

(b) Demuestre que

$$N(t) = 40e^{t \ln 2}, \quad t \geqslant 0$$

(c) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el tamaño de la población alcance el valor de 1000? (*Ayuda*: Obtenga el valor de t para el que $N(t) = 1000$.)

59. La vida media del C^{14} es de 5730 años. Si una muestra de C^{14} tiene una masa de 20 microgramos en el instante $t = 0$, ¿cuánto quedará después de 2000 años?

60. La vida media del C^{14} es de 5730 años. Si una muestra de C^{14} tiene una masa de 20 microgramos en el instante 0, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que queden (a) 10 microgramos y (b) 5 microgramos?

61. Una sustancia radioactiva determinada tarda 5 días en desintegrarse a la mitad de la cantidad original. Obtenga su velocidad de desintegración.

62. Una sustancia radioactiva determinada tarda 7 días en desintegrarse al 37% de la cantidad original. Obtenga su vida media.

63. El polonio 210 (Po^{210}) tiene una vida media de 140 días.

(a) Si una muestra de Po^{210} tiene una masa de 300 microgramos, obtenga una fórmula para el valor de la masa tras t días.

(b) ¿Cuánto tiempo debería transcurrir para que esta muestra se desintegre al 20% de su cantidad original?

(c) Dibuje la gráfica de la cantidad de masa al cabo de t días.

64. La vida media del C^{14} es de 5730 años. Suponga que la madera encontrada en una excavación arqueológica contiene un 35% de C^{14} (en relación al C^{12}) con respecto al que contienen las plantas vivas. Determine cuándo se cortó la madera.

65. La vida media del C^{14} es de 5730 años. Suponga que la madera encontrada en una excavación arqueológica tiene 15 000 años de antigüedad. ¿Cuánto C^{14} (en relación con el C^{12}) contiene la madera con respecto al que contienen las plantas vivas?

66. La edad de las rocas de origen volcánico se puede estimar utilizando isótopos de argón 40 (Ar^{40}) y potasio 40 (K^{40}). El K^{40} se desintegra en Ar^{40} con el transcurso del tiempo. Si un material que contiene potasio es enterrado en las circunstancias correctas, se forma argón y queda atrapado. Como el argón se libera cuando el mineral se calienta a temperaturas muy altas, las rocas de origen volcánico no contienen argón cuando se forman. La cantidad de argón encontrada en esas rocas se puede utilizar para determinar su edad. Suponga que una muestra de roca volcánica contiene 0.00047% de K^{40}. La muestra contiene también 0.000079% de Ar^{40}. ¿Qué edad tiene la roca? (La velocidad de desintegración del K^{40} en Ar^{40} es de 5.335/año.)

67. (*Adaptado de Moss, 1980*) Hall (1964) estudió el cambio del tamaño de la población de las especies de zooplancton *Daphnia galeata mendota* en Base Line Lake, Michigan. El tamaño de la población en el instante t, $N(t)$, se modeló mediante la ecuación

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

siendo N_0 el tamaño de la población en el instante 0. La constante r se denomina **velocidad de crecimiento intrínseca**.

(a) Dibuje $N(t)$ en función de t si $N_0 = 100$ y $r = 2$. Compare la gráfica con la resultante cuando $N_0 = 100$ y $r = 3$. ¿Qué población crece más deprisa?

(b) La constante r es una cantidad importante ya que describe la velocidad de cambio de la población. Suponga que se determina el tamaño de la población al principio y al final de un periodo de tiempo de longitud 1, y se obtiene que al comienzo había 200 individuos y tras una unidad de tiempo hay 250 individuos. Determine r. [*Sugerencia*: Considere la razón $N(t+1)/N(t)$.]

68. Los peces crecen indefinidamente durante toda su vida. Su crecimiento se puede modelar mediante la función de von Bertalanffy

$$L(x) = L_\infty(1 - e^{-kx})$$

para $x \geqslant 0$, siendo $L(x)$ la longitud a la edad x, con k y L_∞ constantes positivas.

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $L(x)$ para $L_\infty = 0$, y para (i) $k = 1$, y (ii) $k = 0.1$.

(b) Para $k = 1$, obtenga el valor de x para que la longitud sea el 90% de L_∞. Repita el cálculo para el 99% de L_∞. ¿Puede el pez alcanzar alguna vez la longitud L_∞? Interprete el sentido de L_∞.

(c) Compare las gráficas obtenidas en (a). ¿Cuál de las curvas de crecimiento alcanza el 90% de L_∞ más rápido? ¿Puede explicar lo que le sucede a la curva $L(x)$ cuando varía k (para L_∞ fijo)?

(1.2.6)

69. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? (utilice la prueba de la recta horizontal).

(a) $f(x) = x^2, x \geqslant 0$

(b) $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

(d) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x > 0$

70. **(a)** Demuestre que $f(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbf{R}$ es inyectiva y obtenga su inversa junto con su dominio.

(b) Dibuje las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo sistema de coordenadas, junto con la recta $y = x$ y observe que la gráfica de $f^{-1}(x)$ se puede obtener reflejando la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje $y = x$.

71. **(a)** Demuestre que $f(x) = x^2 + 1$, $x \geqslant 0$, es inyectiva y obtenga su inversa junto con su dominio.

(b) Dibuje las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo sistema de coordenadas, junto con la recta $y = x$ y observe que la gráfica de $f^{-1}(x)$ se puede obtener reflejando la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje $y = x$.

72. **(a)** Demuestre que $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ es inyectiva y obtenga su inversa junto con su dominio.

(b) Dibuje las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo sistema de coordenadas, junto con la recta $y = x$ y observe que la gráfica de $f^{-1}(x)$ se puede obtener reflejando la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje $y = x$.

73. Demuestre que $f(x) = 1/x^3$, $x > 0$ es inyectiva y obtenga su inversa junto con su dominio.

(b) Dibuje las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo sistema de coordenadas, junto con la recta $y = x$ y observe que la gráfica de $f^{-1}(x)$ se puede obtener reflejando la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje $y = x$.

74. El inverso de una función $f(x)$ se puede expresar como $1/f(x)$ o $[f(x)]^{-1}$. El objetivo de este problema es clarificar que el inverso de una función no tiene nada que ver con la función inversa. Por ejemplo, sea $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbf{R}$. Obtenga $[f(x)]^{-1}$ y $f^{-1}(x)$, y compare las dos funciones. Dibuje las tres funciones juntas.

(1.2.7)

75. Obtenga la inversa de $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbf{R}$, junto con su dominio, y dibuje ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

76. Obtenga la inversa de $f(x) = 5^x$, $x \in \mathbf{R}$, junto con su dominio, y dibuje ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

77. Obtenga la inversa de $f(x) = (\frac{1}{4})^x$, $x \in \mathbf{R}$, junto con su dominio, y dibuje ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

78. Obtenga la inversa de $f(x) = (\frac{1}{3})^x$, $x \in \mathbf{R}$, junto con su dominio, y dibuje ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

79. Obtenga la inversa de $f(x) = 2^x$, $x \geqslant 0$, junto con su dominio, y dibuje ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

80. Obtenga la inversa de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $x \geqslant 0$, junto con su dominio, y dibuje ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

81. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $2^{5\log_2 x}$

(b) $3^{4\log_3 x}$

(c) $5^{5\log_{1/5} x}$

(d) $4^{-2\log_2 x}$

(e) $2^{3\log_{1/2} x}$

(f) $4^{-\log_{1/2} x}$

82. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\log_4 16^x$

(b) $\log_2 16^x$

(c) $\log_3 27^x$

(d) $\log_{1/2} 4^x$

(e) $\log_{1/2} 8^{-x}$

(f) $\log_3 9^{-x}$

83. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\ln x^2 + \ln x^3$

(b) $\ln x^4 - \ln x^{-2}$

(c) $\ln(x^2 - 1) - \ln(x + 1)$

(d) $\ln x^{-1} + \ln x^{-3}$

84. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $e^{3\ln x}$

(b) $e^{-\ln(x^2+1)}$

(c) $e^{-2\ln(1/x)}$

(d) $e^{-2\ln x}$

85. Escriba las siguientes expresiones en función de la base e y simplifíquelas.

(a) 3^x

(b) 4^{x^2-1}

(c) 2^{-x-1}

(d) 3^{-4x+1}

86. Escriba las siguientes expresiones en función de la base e.

(a) $\log_2(x^2 - 1)$

(b) $\log_3(5x + 1)$

(c) $\log(x + 2)$

(d) $\log_2(2x^2 - 1)$

87. Demuestre que la función $y = (1/2)^x$ se puede expresar de la forma $y = e^{-\mu x}$, siendo μ una constante positiva. Determine μ.

88. Demuestre que si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ se puede expresar de la forma $y = e^{-\mu x}$, siendo μ una constante positiva. Exprese μ en función de a.

89. Suponga que dos secuencias de ADN de un origen común, cada una con 300 nucleótidos de longitud, se diferencian en 47 nucleótidos. Utilice la corrección de Jukes y Cantor del Ejemplo 15 para estimar el número de sustituciones por posición, K.

90. Una medida de comunidad que tiene en cuenta tanto la abundancia como la riqueza de especies es el índice de diversidad de Shannon, H. Para calcularlo, se utiliza la proporción p_i de especies i en la comunidad. Suponga que la comunidad consta de S especies. Entonces

$$H = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + \cdots + p_S \ln p_S)$$

(a) Suponga que $S = 5$ y que todas las especies son igualmente abundantes. Es decir, $p_1 = p_2 = \cdots = p_5$. Calcule H.

(b) Suponga que $S = 10$ y que todas las especies son igualmente abundantes. Es decir, $p_1 = p_2 = \cdots = p_{10}$. Calcule H.

(c) Se puede definir una medida de equidad en la distribución de las especies dividiendo en índice de diversidad H por $\ln S$. Calcule esta medida para $S = 5$ y $S = 10$.

(d) Demuestre que, en general, si hay N especies y todas ellas son igualmente abundantes, entonces

$$\frac{H}{\ln S} = 1$$

(1.2.8)

En los Problemas 91-96, utilice una calculadora gráfica para comparar las siguientes parejas de funciones. Describa lo que observe.

91. $y = \operatorname{sen} x$, y $y = 2\operatorname{sen} x$

92. $y = \operatorname{sen} x$, y $y = \operatorname{sen}(2x)$

93. $y = \cos x$, y $y = 2\cos x$

94. $y = \cos x$, y $y = \cos(2x)$

95. $y = \tan x$, y $y = 2\tan x$

96. $y = \tan x$, y $y = \tan(2x)$

97. Sea

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(4x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

98. Sea

$$f(x) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

99. Sea

$$f(x) = 4\operatorname{sen}(2\pi x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

100. Sea

$$f(x) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

101. Sea

$$f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{4}\right), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

102. Sea

$$f(x) = 7\cos(2x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

103. Sea

$$f(x) = -3\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

104. Sea

$$f(x) = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3x}{\pi}\right), \quad x \in \mathbf{R}$$

Obtenga la amplitud y el periodo de $f(x)$.

1.3 REPRESENTACIONES GRÁFICAS

En la sección precedente se han presentado las funciones más importantes para nuestro estudio. Deben poderse dibujar, sin ayuda de calculadora, las siguientes funciones: $y = c$, x, x^2, x^3, $1/x$, e^x, $\ln x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sec x$ y $\tan x$. Esto servirá de ayuda para dibujar funciones rápidamente de forma aproximada y a intuir la descripción analítica de una función observando su representación gráfica. En esta sección se va a aprender a obtener nuevas funciones basándose en las funciones anteriores y a dibujar esas nuevas funciones. Además se presentarán transformaciones importantes que se utilizan frecuentemente para representar datos gráficamente.

1.3.1 Representación gráfica y transformaciones básicas de funciones

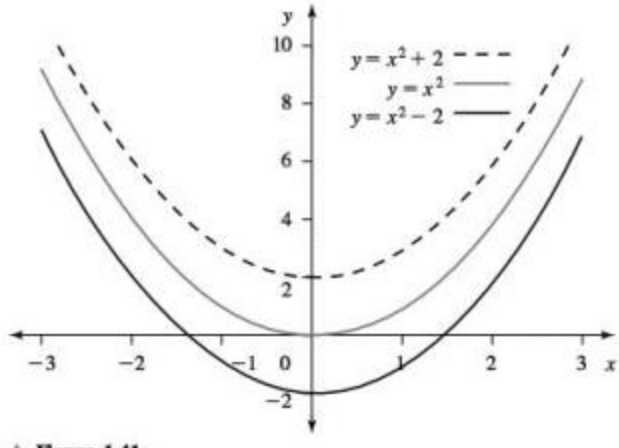
En esta subsección se considerarán algunas transformaciones básicas: traslaciones horizontales y verticales, reflexiones respecto a $x = 0$ e $y = 0$, compresión y expansión.

Definición La gráfica de

$$y = f(x) + a$$

es una **traslación vertical** de $y = f(x)$. Si $a > 0$, la gráfica de $y = f(x)$ se desplaza hacia arriba a unidades. Si $a < 0$, se desplaza hacia abajo $|a|$ unidades.

Esto se ilustra en la Figura 1.41, donde se muestran las funciones $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$.



▲ **Figura 1.41**
Gráficas de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$

Definición La gráfica de

$$y = f(x - c)$$

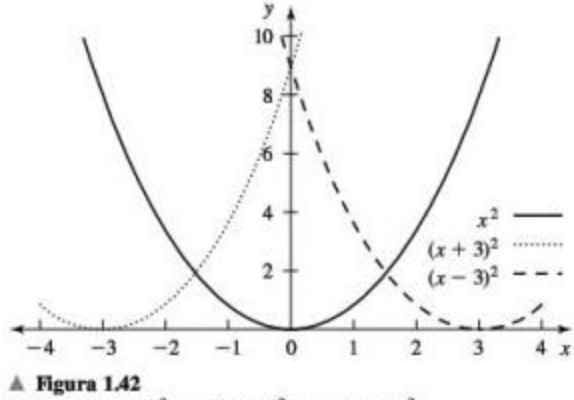
es una **traslación horizontal** de $y = f(x)$. Si $c > 0$, la gráfica de $y = f(x)$ se desplaza hacia la derecha c unidades. Si $c < 0$, se desplaza hacia la izquierda $|c|$ unidades.

Esto se ilustra en la Figura 1.42, donde se muestran $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$ e $y = (x + 3)^2$. Nótese que $y = (x + 3)^2$ está desplazada hacia la izquierda ya que se puede expresar como $y = (x - (-3))^2$ y entonces $c = -3 < 0$.

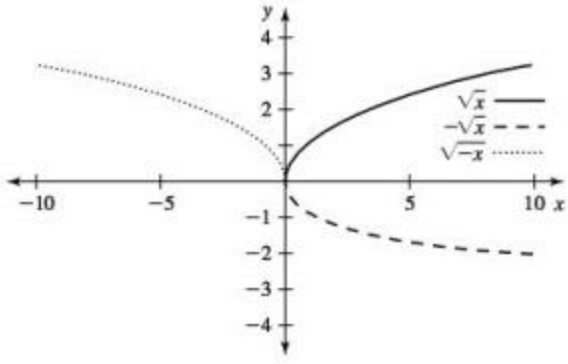
Las reflexiones con respecto al eje $x (y = 0)$ se ilustran en la Figura 1.43. Se dibuja su reflexión respecto al eje x, $y = -\sqrt{x}$ y su reflexión respecto al eje y, $y = \sqrt{-x}$.

La Figura 1.43 ilustra las reflexiones respecto al eje x $(y = 0)$ y al eje y $(x = 0)$. Se dibuja $y = \sqrt{x}$, su reflexión respecto al eje x, $y = -\sqrt{x}$, y su reflexión respecto al eje y, $y = \sqrt{-x}$.

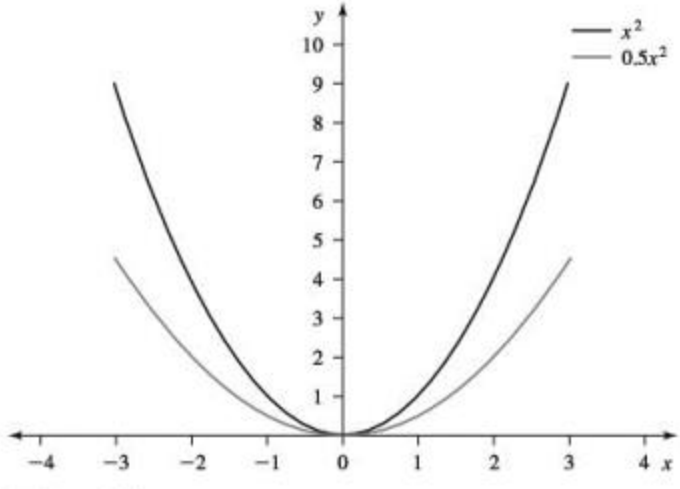
Al multiplicar una función por un factor entre 0 y 1 su gráfica se comprime, y al multiplicarla por un factor mayor que 1 se expande. Esto se ilustra en la Figura 1.44, donde se muestran las gráficas de $y = x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$, y en la Figura 1.45, donde se muestran las gráficas de $y = x^2$ e $y = 2x^2$.



▲ **Figura 1.42**
Gráficas de $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$ e $y = (x + 3)^2$



▲ **Figura 1.43**
Reflexiones respecto al eje x y al eje y.



▲ **Figura 1.44**
Gráficas de $y = x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$

Los siguientes dos ejemplos ilustran estas transformaciones.

Ejemplo 1 Explique cómo se puede obtener la gráfica de

$$y = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{para } x \in \mathbf{R}$$

a partir de la de $y = \text{sen}\,x$, $x \in \mathbf{R}$.

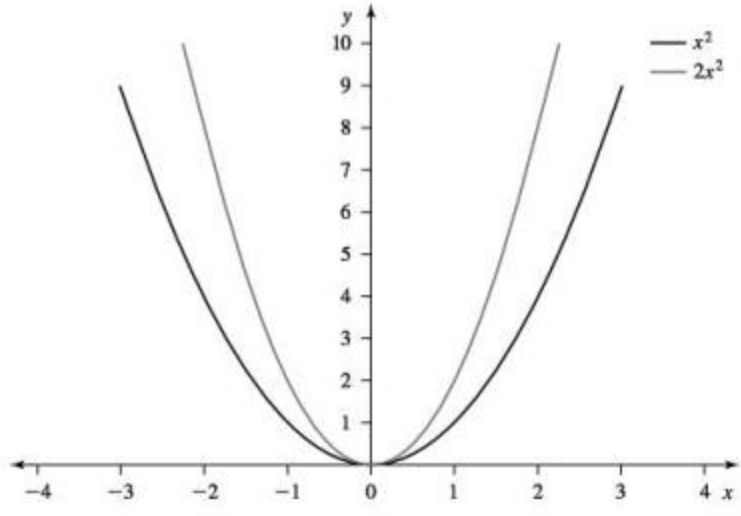
Solución

Se transforma $y = \text{sen}\,x$ mediante los dos pasos siguientes, que se muestran en la Figura 1.46. Primero se desplaza $y = \text{sen}\,x$ a la derecha $\frac{\pi}{4}$ unidades. Esto produce como resultado $y = \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{4})$. Seguidamente se multiplica $y = \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{4})$ por 2, lo que tiene como consecuencia expandir $y = \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{4})$ en un factor de 2. ◀

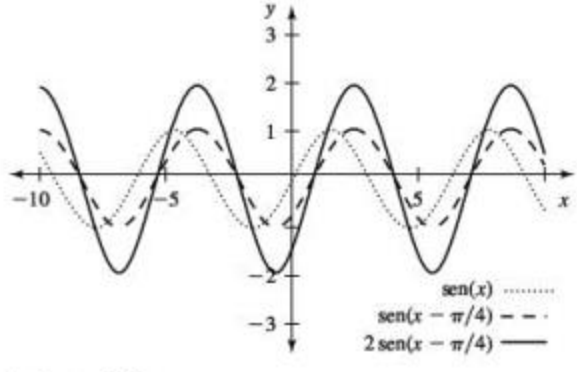
Ejemplo 2 Explique cómo se puede obtener la gráfica de

$$y = -\sqrt{x - 3} - 1, \quad x \geqslant 3$$

a partir de la de $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.



▲ **Figura 1.45**
Gráficas de $y = x^2$ e $y = 2x^2$



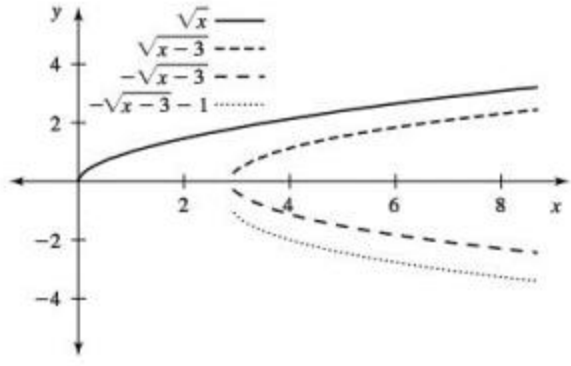
▲ **Figura 1.46**
Gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$ e $y = 2\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$

Solución

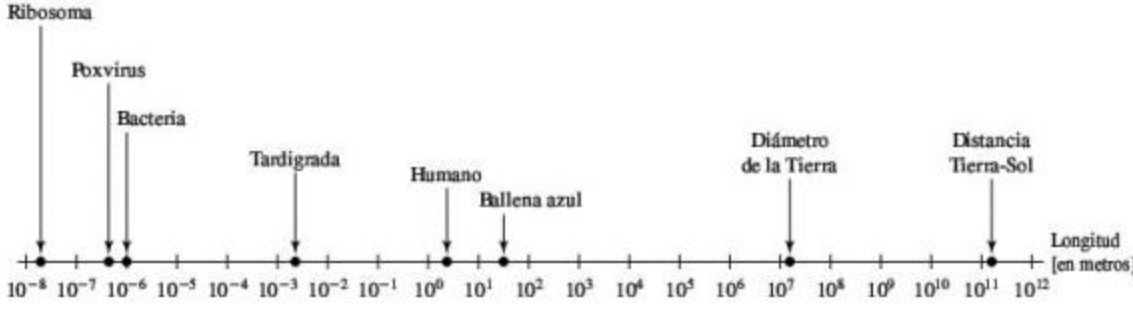
Se transforma $y = \sqrt{x}$ aplicando los tres pasos siguientes, que se ilustran en la Figura 1.47. Primero se desplaza $y = \sqrt{x}$ tres unidades a la derecha obteniéndose $y = \sqrt{x-3}$. Seguidamente se refleja $y = \sqrt{x-3}$ con respecto al eje x, con lo que se obtiene $y = -\sqrt{x-3}$. Finalmente, se desplaza $y = -\sqrt{x-3}$ una unidad hacia abajo, con lo que resulta la gráfica de $y = -\sqrt{x-3} - 1$. ◀

1.3.2 La escala logarítmica

Es frecuente encontrar magnitudes cuyo valor puede variar en un margen muy amplio. Las longitudes en el sistema métrico decimal se miden en metros (m) (un metro un poco mayor que una yarda: 1 metro equivale a 1.0936 yardas). Comúnmente se utiliza una unidad mayor, que es el kilómetro (km), equivalente a 1000 m. Otras unidades métricas que también se utilizan son el milímetro (mm), que es 1/1000 de metro, la micra (μm), que es 1/1 000 000 (una millonésima) de metro y el nanómetro (nm), que es 1/1 000 000 000 (una milmillonésima) de metro. He



▲ **Figura 1.47**
Gráficas del Ejemplo 2

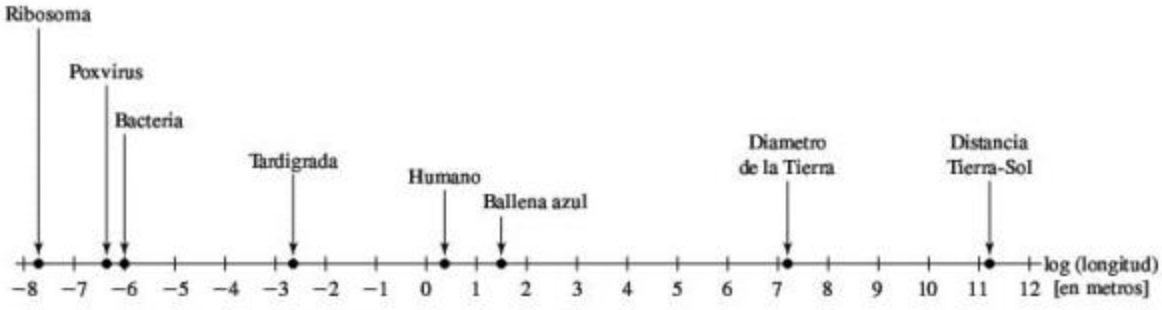


▲ **Figura 1.48**
Órdenes de magnitud

aquí algunos ejemplos de longitudes de diversos organismos. Un ribosoma mide unos 20 nm ($= 2 \times 10^{-8}$ m), un poxvirus mide unos 400 nm (4×10^{-7} m), una bacteria mide aproximadamente 1 μm ($= 10^{-6}$), los tardigrada (u «osos de agua») miden sobre 1.2 mm ($= 1.2 \times 10^{-3}$ m), un humano adulto mide unos 1.8 m, una ballena azul mide entre 25 y 35 m, el diámetro de la Tierra es de 12 755 km ($\approx 1.3 \times 10^{7}$ m) y la distancia media de la Tierra al Sol es de unos 150 millones de km ($= 1.5 \times 10^{11}$ m). Esta variabilidad de tamaños se puede manejar adecuadamente haciendo uso de una **escala logarítmica**, que es una escala en la que las potencias de 10 son equidistantes (*véase* la Figura 1.48).

Al tomar logaritmos en base 10 de las cantidades que se muestran en la Figura 1.48, se obtiene que esta escala transformada se transforma en una escala aritmética, que estamos acostumbrados a utilizar (*véase* la Figura 1.49). Los números en la escala logarítmica de la Figura 1.49 corresponden a los exponentes.

Si se observan con más detalle las dos líneas numeradas de las Figuras 1.48 y 1.49, puede verse que el origen en la línea de la Figura 1.49 corresponde al número 1 en la Figura 1.48, ya que $\log 1 = 0$. Al moverse hacia la izquierda del 1 en la línea de la Figura 1.48 se obtienen números cada vez más pequeños, pero *todos* positivos (como $\log x$ sólo está definido para $x > 0$, no se pueden transformar logarítmicamente los números negativos). Desplazarse a la izquierda de 1 en la Figura 1.48 corresponde a desplazarse a la izquierda de 0 en la Figura 1.49. Los números negativos en la línea de la Figura 1.49 corresponden a exponentes negativos. Por ejemplo, el valor -8 de la Figura 1.49 significa $\log x = -8$ o $x = 10^{-8}$. Se puede hacer una interpretación similar al desplazarse a la derecha de 1 en la Figura 1.48 (o a la derecha de 0 en la Figura 1.49). Las escalas logarítmicas se



▲ **Figura 1.49**
Órdenes de magnitud

basan generalmente en logaritmos en base 10, ya que así se facilitan las conversiones entre las dos representaciones de las Figuras 1.48 y 1.49.

Las longitudes de los ejemplos anteriores difieren en muchas potencias de 10. En lugar de expresarlo así, se dice que difieren en muchos **órdenes de magnitud**. Es decir, si dos cantidades difieren en un factor de 10, se dice que difieren en un orden de magnitud (asimismo, si se diferencian en un factor de 100, se dice que difieren en dos órdenes de magnitud, y así sucesivamente). Los órdenes de magnitud representan comparaciones aproximadas: un ser humano que mide 1.8 m y una ballena azul que mide 25 m. difieren en su longitud aproximadamente en un orden de magnitud.

Ejemplo 3 Escriba los números 0.003, 0.1, 0.5, 6, 200 y 4000 en una escala logarítmica.

Solución

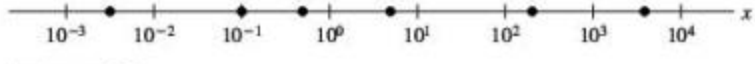
Para escribirlos, es necesario tomar primero logaritmos:

x	0.003	0.1	0.5	6	200	4000
$\log x$	−2.5229	−1	−0.3010	0.7782	2.3010	3.6021

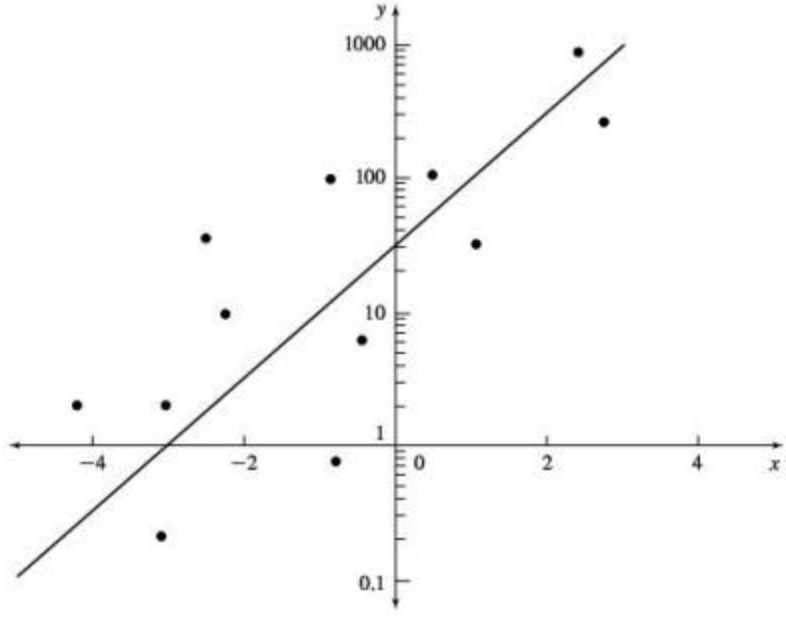
Como $\log 0.003 = -2.5229$, este número se representará en al escala logarítmica 2.5229 unidades a la izquierda del 0. Análogamente, como $\log 0.1 = -1$, este número se representará una unidad a la izquierda del 0, y $\log 200 = 2.3010$ estará 2.3010 unidades a la derecha del 0 (*véase* la Figura 1.50).

En la literatura biológica, se utiliza x y no $\log x$ para etiquetar los números en la escala logarítmica. Las posiciones de los números son las mismas; sólo cambian las etiquetas. Es decir, 0.003 estaría −2.5229 unidades a la izquierda del origen de la línea (que ahora es 1). La línea de la Figura 1.50 se convertiría entonces en la de la Figura 1.51. ◀

▲ **Figura 1.50**
Ejemplo 3



▲ **Figura 1.51**
Ejemplo 3



▲ **Figura 1.52**
Una línea recta con el eje vertical en escala logarítmica

1.3.3 Transformaciones en funciones lineales

Al utilizar libros de texto de biología, muy probablemente habremos encontrado gráficas como la de las Figuras 1.52 y 1.53. En ambas podemos ver una línea recta con puntos de datos dispersos a su alrededor. En la Figura 1.52 el eje vertical está en escala logarítmica y el horizontal en escala lineal, mientras que en la Figura 1.53, ambos ejes están en escala logarítmica. ¿Por qué se muestran datos de esta forma, y qué significan estas gráficas?

La primera pregunta se puede responder rápidamente: las líneas rectas (o relaciones lineales) son fáciles de reconocer visualmente. Si al transformar los datos éstos se sitúan en una línea recta, es conveniente efectuar la transformación. Esto permitirá obtener una relación funcional entre las cantidades. Ahora, la segunda pregunta: ¿qué significan las gráficas?

Funciones exponenciales Obsérvese la Figura 1.52. La Figura 1.54 muestra sólo la línea recta utilizando $\log y$ (en lugar de y) en el eje vertical y x en el eje horizontal. Sea $Y = \log y$ y no consideremos de momento de dónde proviene la gráfica. Se observa una relación lineal entre Y y x, que es de la forma

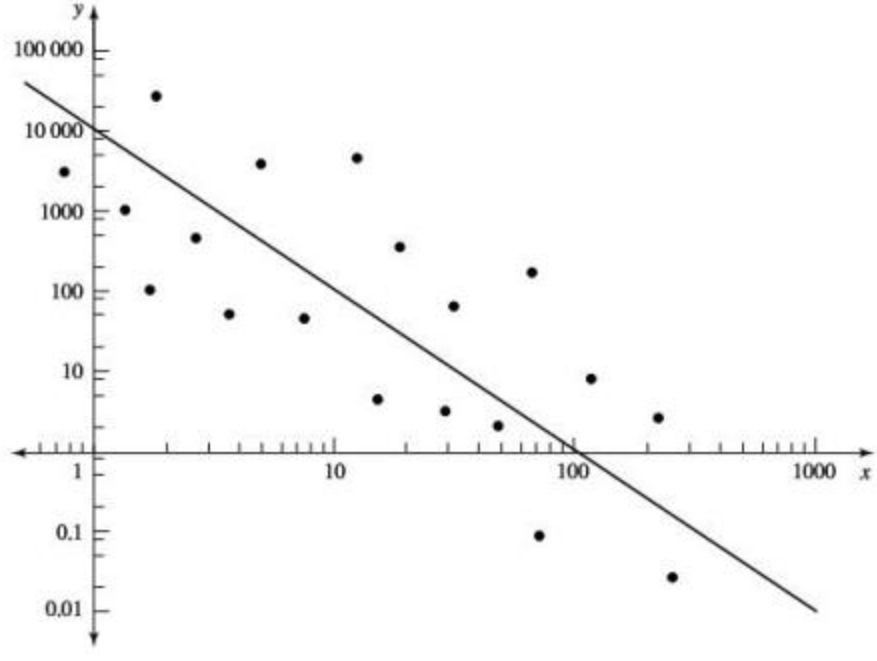
$$Y = c + mx$$

siendo c la ordenada en el origen y m la pendiente. Estas dos cantidades se pueden obtener de la gráfica de la Figura 1.54.

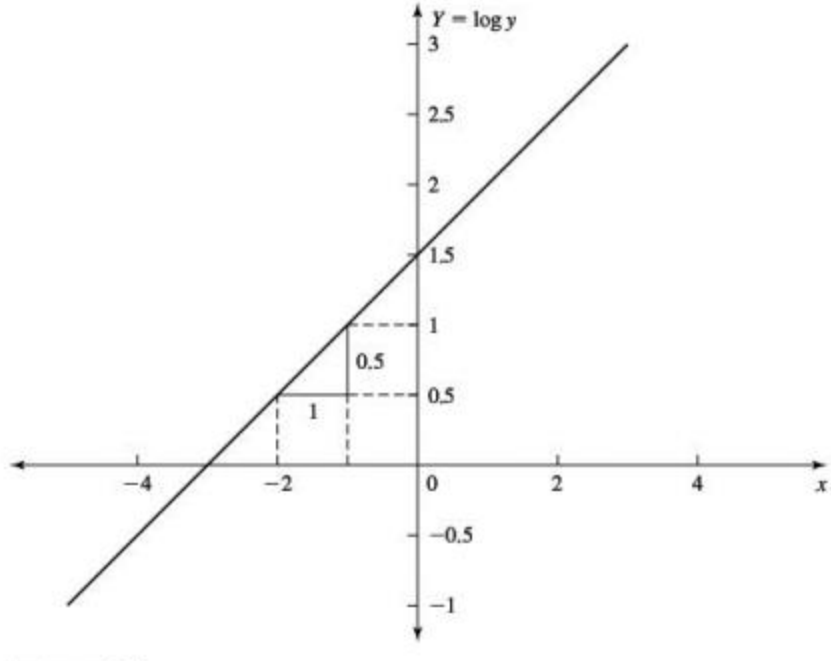
$$c = 1.5 \quad m = 0.5$$

Es decir, tenemos

$$Y = 1.5 + 0.5x$$



▲ **Figura 1.53**
Una línea recta con ambos ejes en escala logarítmica



▲ **Figura 1.54**
Ahora el eje vertical se etiqueta log (y)

Ahora $Y = \log y$ y entonces

$$\log y = 1.5 + 0.5x$$

Tomando exponenciales en ambos miembros, se obtiene

$$y = 10^{1.5+0.5x} = 10^{1.5}(10^{0.5})^x$$

Como $10^{1.5} \approx 31.62$ y $10^{0.5} \approx 3.162$, le relación se puede escribir como

$$y = 31.62 \times 3.162^x \tag{1.4}$$

Observando la Expresión 1.4, se concluye que se trata de una función exponencial.

Los gráficos en los que el eje vertical está en escala logarítmica y el eje horizontal está en escala lineal se denominan **log-lineales** o **semilogarítmicos**. Si se dibuja una función exponencial de la forma $y = ba^x$ en un gráfico semilogarítmico, se obtiene una línea recta. Para ver que esto es así, si se toman logaritmos en base 10 en los dos miembros de la ecuación $y = ba^x$,

$$\log y = \log(ba^x) \tag{1.5}$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, el miembro derecho de la ecuación se puede simplificar,

$$\log(ba^x) = \log b + \log a^x = \log b + x \log a$$

Haciendo $Y = \log y$, la Expresión (1.5) se transforma en

$$Y = \log b + (\log a)x \tag{1.6}$$

Comparando esta expresión con la forma general de una función lineal $Y = c + mx$, se puede ver que la ordenada en el origen es $\log b$ y que la pendiente es $\log a$. No es necesario memorizar esto, ya que siempre se puede repetir el cálculo que conduce a (1.6). Sí es conveniente memorizar, no obstante, que una función exponencial produce una línea recta en una gráfica semilogarítmica. Si $a > 1$, la pendiente de la recta es positiva, y si $a < 1$, la pendiente es negativa.

Ejemplo 4 Dibuje

$$y = 2.5 \times 3^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

en una gráfica semilogarítmica.

Solución

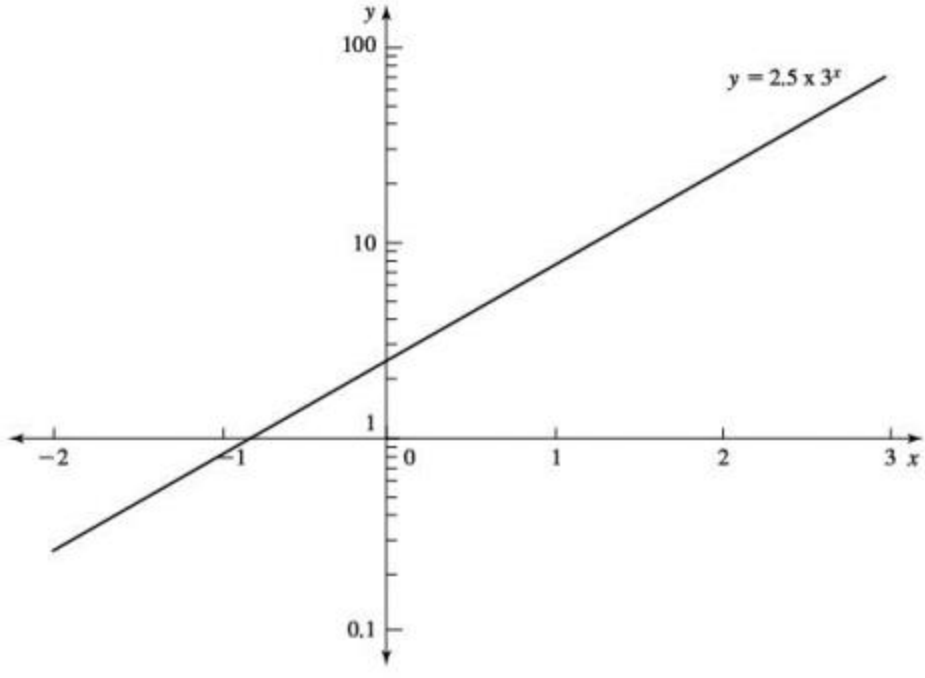
Tomando en primer lugar logaritmos

$$\log y = \log(2.5 \times 3^x)$$

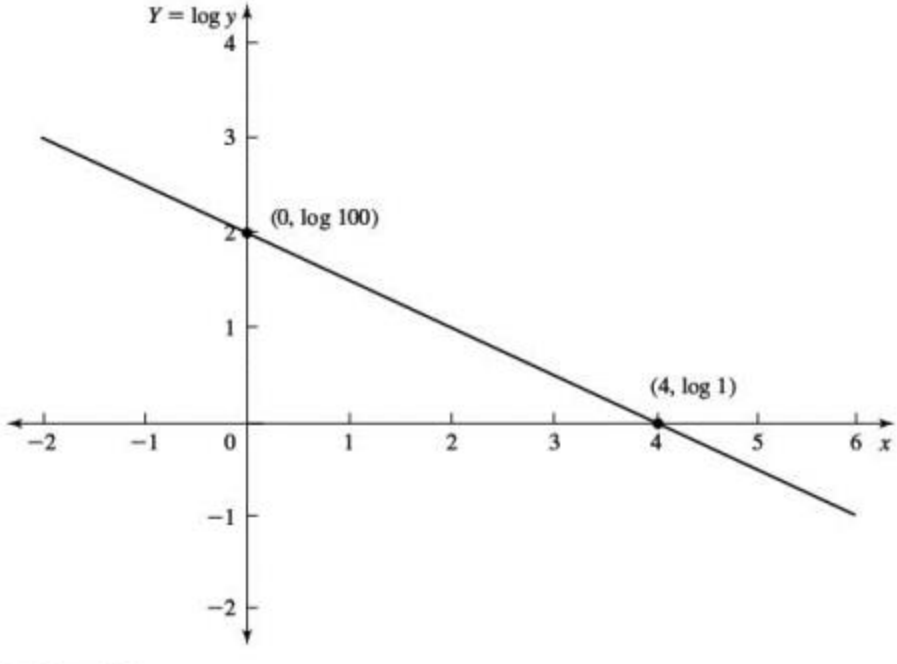
$$= \underbrace{\log 2.5}_{\approx 0.3979} + x \underbrace{\log 3}_{\approx 0.4771}$$

La gráfica se muestra en la Figura 1.55. Nótese que el origen del sistema de coordenadas de la Figura 1.55 está en $x = 0$ e $y = 1$ (o $\log y = 0$). La etiqueta del eje vertical es y, y puede observarse que las etiquetas de los valores corresponden a múltiplos de 10. Para obtener el valor de 2.5 en el eje vertical, se utiliza que $\log 2.5 = 0.3979$ y que por tanto 2.5 está 0.3979 unidades por encima del eje x, como ilustra la Figura 1.55. (Una unidad en el eje vertical corresponde a un factor de 10.) ◀

Ejemplo 5 Obtenga la relación funcional entre x e y basándose en la gráfica de la Figura 1.56.



▲ **Figura 1.55**
Gráfica semilogarítmica de 2.5×3^x



▲ **Figura 1.56**
Gráfica del Ejemplo 5. La recta pasa por los puntos (0, 2) y (4, 0)

Solución

La Figura 1.56 muestra una gráfica semilogarítmica. Al hacer $Y = \log y$, en la gráfica $x - Y$, la ordenada en el origen es $\log 100 = 2$, y utilizando los dos puntos $(0, \log 100)$ y $(4, \log 1)$ se obtiene que la pendiente de la recta es $(\log 1 - \log 100)/(4 - 0) = (0 - 2)/(4 - 0) = -0.5$. Por tanto,

$$Y = c + mx = 2 - 0.5x$$

Como $Y = \log y$, tras aplicar exponenciación en la ecuación lineal,

$$y = 10^{2-0.5x} = 10^2(10^{-0.5})^x = 100 \times (0.3162)^x$$ ◀

Funciones potenciales Si volvemos a la Figura 1.53 puede verse que ambos ejes están en escala logarítmica. Si se dibuja de nuevo la línea recta utilizando $Y = \log y$ en el eje vertical y $X = \log x$ en el eje horizontal se obtiene la Figura 1.57.

Utilizando la ecuación lineal $Y = c + mX$, siendo Y la ordenada en el origen y m la pendiente, a partir de la Figura 1.57 se obtiene

$$c = 4 \quad \text{y} \quad m = -2$$

Haciendo $Y = \log y$ y $X = \log x$, la ecuación lineal se transforma en

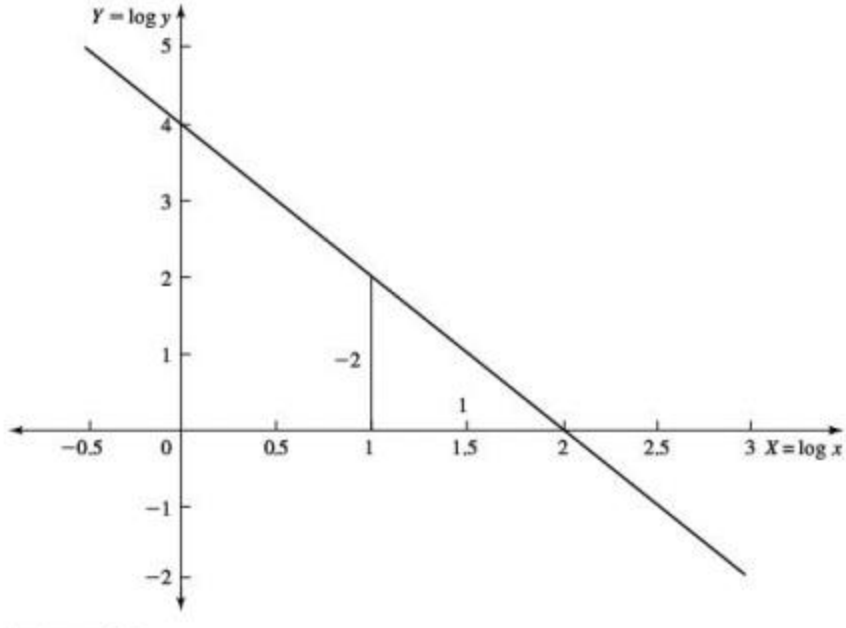
$$\log y = 4 - 2\log x$$

Tomando exponenciales en ambos miembros, se obtiene

$$y = 10^{4-2\log x} = 10^4(10^{\log x^{-2}}) = 10^4 x^{-2}$$

La función $y = 10^4 x^{-2}$ es una función potencial.

Las gráficas donde los ejes horizontales y verticales están en escala logarítmica se denominan **log-log** o **logarítmicas**. Si se dibuja una función potencial $y = bx^r$ en una gráfica logarítmica, se obtiene una línea recta. Para demostrarlo, se toman



▲ **Figura 1.57**
Ahora el eje vertical se etiqueta log (y) y el eje horizontal log (x)

logaritmos en base 10 en ambos miembros de $y = bx^r$:

$$\log y = \log(bx^r) \tag{1.7}$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos en el miembro derecho de la Ecuación (1.7) se obtiene

$$\log(bx^r) = \log b + \log x^r = \log b + r \log x$$

Si se hace $Y = \log y$, y $X = \log x$, entonces (1.7) se convierte en

$$Y = \log b + rX$$

Si se compara esto con la forma general de una ecuación lineal, $Y = c + mX$, puede verse que la ordenada en el origen es $\log b$ y la pendiente es r. Si $r > 0$, la pendiente es positiva. Si $r < 0$, la pendiente es negativa.

Ejemplo 6 Dibuje

$$y = 100x^{-2/3}, \quad x > 0$$

en una gráfica logarítmica.

Solución

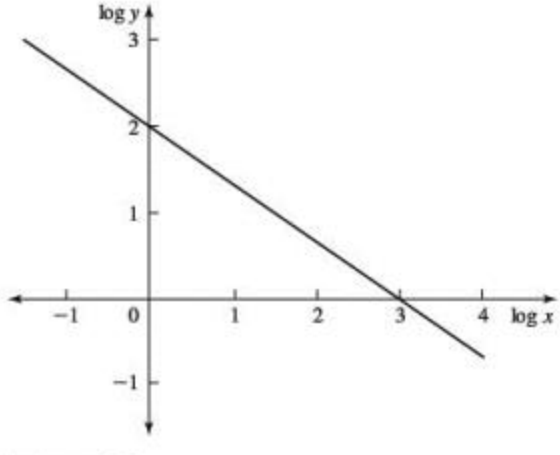
Primero se toman logaritmos:

$$\log y = \log(100x^{-2/3}) = \log 100 - \frac{2}{3}\log x$$

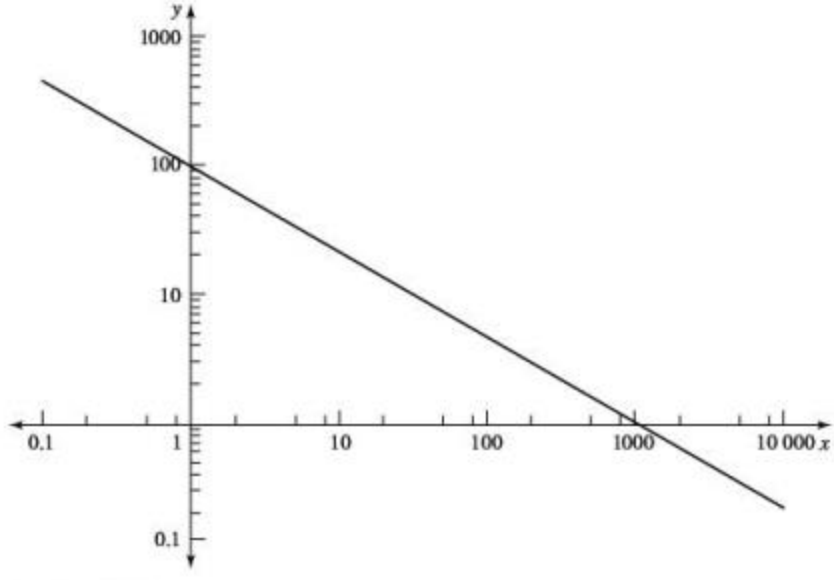
Haciendo $Y = \log y$ y $X = \log x$ y teniendo en cuenta que $\log 100 = 2$, se obtiene

$$Y = 2 - \frac{2}{3}X$$

que es la ecuación de una línea recta de ordenada en el origen 2 y que corta al eje x en 3 (y por tanto de pendiente $-2/3$). La Figura 1.58 muestra está función, con X e Y en los dos ejes. Si se usan los ejes x e y (Figura 1.59), las cosas cambian: la ordenada en el origen vale ahora 100 (ya que $\log 100 = 2$) y la recta corta al eje X en 1000 (ya que $\log 1000 = 3$). Nótese que el origen en la Figura 1.58 está en $X = 0$ e $Y = 0$; el origen en la Figura 1.59 está en $x = 1$ e $y = 1$. ◀



▲ **Figura 1.58**
Gráfica de $y = 100x^{-2/3}$ en ejes logarítmicos. Los ejes están etiquetados como $X = \log x$ e $Y = \log y$



▲ **Figura 1.59**
Gráfica de $y = 100x^{-2/3}$ en ejes logarítmicos. Los ejes están etiquetados como x e y

Ejemplo 7 Obtenga la relación funcional entre x e y basándose en la gráfica de la Figura 1.60.

Solución

Si $Y = \log y$ y $X = \log x$, entonces en una gráfica $X - Y$, la ordenada en el origen está en $\log 0.01 = -2$ y, usando los puntos $(\log 1, \log 0.01)$ y $(\log 1000, \log 1)$, la pendiente es

$$\frac{\log 1 - \log 0.01}{\log 1000 - \log 1} = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

por tanto, la ecuación es

$$Y = -2 + \frac{2}{3}X$$

Siendo $Y = \log y$ y $X = \log x$ se obtiene

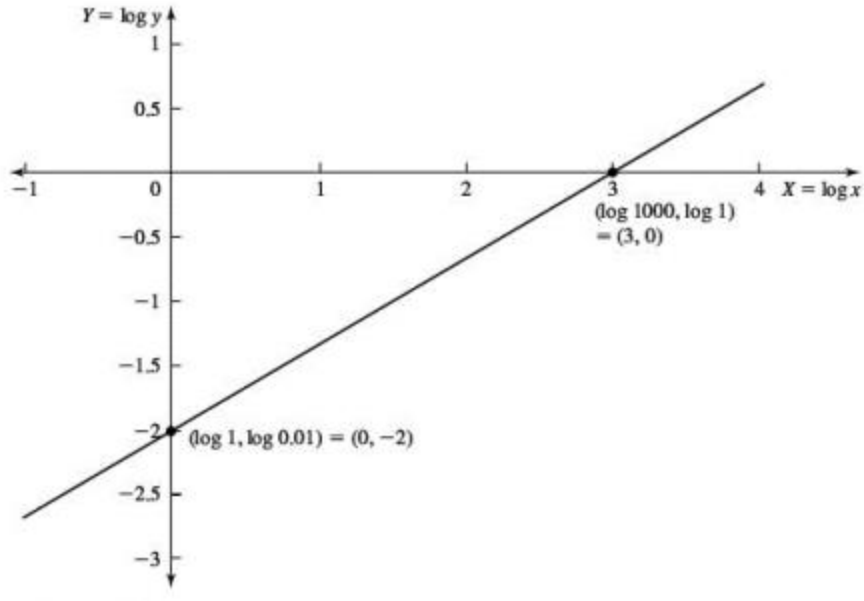
$$\log y = -2 + \frac{2}{3}\log x$$

Y, tras exponenciar ambos miembros de esta ecuación, resulta

$$y = 10^{-2+\frac{2}{3}\log x} = 10^{-2}10^{\log x^{2/3}} = (0.01)x^{2/3}$$

Por tanto, la relación funcional entre x e y es una función potencial con la forma

$$y = (0.01)x^{2/3}$$ ◀



▲ **Figura 1.60**
Gráfica de la función del Ejemplo 7. Los dos puntos utilizados en la gráfica logarítmica para obtener la relación son (log 1, log 0.01) y (log 1000, log 1)

Aplicaciones

Ejemplo 8 Cuando crecen plantas con densidades iniciales suficientemente altas, se observa a menudo que el número de plantas disminuye y el tamaño de las plantas aumenta. Esto se denomina autodisminución. Si se dibuja el peso por planta en seco de la biomasa no enterrada en función de la densidad de supervivientes en una gráfica logarítmica, frecuentemente se obtiene que los datos se sitúan en una línea recta de pendiente $-3/2$. Suponga que, para una planta particular, esta relación se mantiene para valores de densidades de plantas entre 10^2 y 10^4 por metro cuadrado y que, para un valor de densidad de 100 plantas por metro cuadrado, el peso por planta en seco es de unos 10 gramos. Obtenga la relación funcional entre el peso en seco y la densidad de plantas y dibuje esta función en una gráfica logarítmica.

Solución

Como la relación entre la densidad x y el peso en seco y sigue una línea recta de pendiente $-3/2$ en una gráfica logarítmica, tenemos que

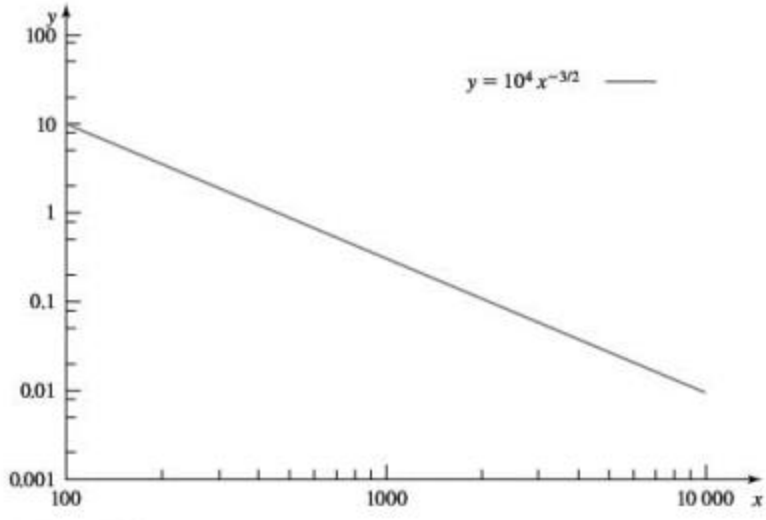
$$\log y = C - \frac{3}{2}\log x \quad \text{para } 10^2 \leqslant x \leqslant 10^4$$

siendo C una constante. Para obtener C, se aplica que cuando $x = 100$, $y = 10$. Por tanto,

$$\log 10 = C - \frac{3}{2}\log 100$$

o

$$1 = C - \frac{3}{2}\cdot 2, \quad \text{lo que implica} \quad C = 4$$



▲ **Figura 1.61**
Gráfica de la función del Ejemplo 8. La recta tiene una pendiente de $-3/2$ y pasa por el punto (log 100, log 10), en una escala logarítmica.

Por tanto,

$$\log y = 4 - \frac{3}{2}\log x$$

Tomando exponenciales en ambos miembros (y recordando que log es el logaritmo en base 10), se obtiene que

$$y = 10^4 x^{-3/2} \quad \text{para} \quad 10^2 \leqslant x \leqslant 10^4$$

La gráfica de esta función en escala logarítmica se muestra en la Figura 1.61. ◀

Ejemplo 9 El Polonio 210 (Po^{210}) es un material radiactivo. Para determinar su vida media experimentalmente, se mide la cantidad de material radiactivo que queda después de un tiempo t para varios valores de t. Si dibujamos esos datos en un gráfico semilogarítmico, se ve que es posible ajustar una línea recta a los puntos. La pendiente de esa línea recta es -0.0022/día. Obtenga la vida media del Po^{210}.

Solución

La desintegración radioactiva obedece a la ecuación

$$W(t) = W(0)e^{-\lambda t} \quad \text{para } t \geqslant 0$$

Siendo $W(t)$ la cantidad de material radiactivo restante tras un tiempo t. Si se toman logaritmos en esta ecuación se obtiene

$$\log W(t) = \log W(0) - \lambda t \log e$$

Nótese que se usan logaritmos en base 10. Si se dibuja $W(t)$ en función de t en una gráfica semilogarítmica, se obtiene una línea recta de pendiente $-\lambda \log e$. Igualando esta pendiente al número dado en el ejemplo se obtiene

$$\lambda \log e = 0.0022/\text{día}$$

Despejando se obtiene

$$\lambda = \frac{1}{\log e}\, 0.0022/\text{día}$$

Para obtener la vida media T_h se puede usar la fórmula (*véase* la Subsección 1.2.5)

$$T_h = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0.0022}\,(\log e)\ \text{días}$$

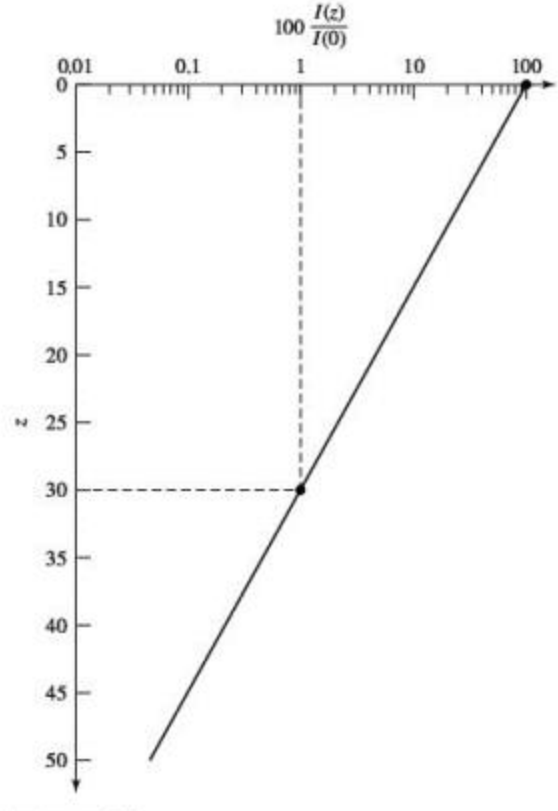
$$\approx 136.8\ \text{días}$$ ◀

Nótese que en el ejemplo anterior, utilizamos logaritmos en base 10 para realizar la transformación logarítmica. La ley radioactiva se expresa en función del exponente natural e. Por tanto la pendiente debe contener el factor $e \approx 0.4343$.

Ejemplo 10 La intensidad de la luz en los lagos disminuye con la profundidad. Si se denomina $I(z)$ a la intensidad de luz a la profundidad z, siendo $z = 0$ la superficie, el porcentaje de radiación a profundidad z con respecto a la superficie, denominado PSR(z), se calcula como

$$\text{PSR}(z) = 100\,\frac{I(z)}{I(0)}$$

Cuando se dibuja en una gráfica semilogarítmica el porcentaje de radiación con respecto a la superficie en función de la profundidad, resulta una línea recta. La Figura 1.62 muestra un ejemplo, donde el sistema de coordenadas se ha rotado 90^0



▲ **Figura 1.62**
Gráfica del porcentaje de radiación con respecto a la superficie en función de la profundidad

en el sentido de las agujas del reloj, de forma que el eje de profundidad apunta hacia abajo. Obtenga la ecuación de $I(z)$ a partir de esa gráfica.

Solución

Puede verse que la variable dependiente, $100I(z)/I(0)$, se transforma logarítmicamente, mientras que la variable independiente, z, está en escala lineal. La gráfica es una línea recta. Por tanto

$$\log 100 \frac{I(z)}{I(0)} = c + mz$$

siendo c el valor de la intersección con el eje y del porcentaje de radiación con respecto la superficie y m la pendiente. Puede verse que

$$c = \log 100$$

y, utilizando los puntos (0, 100) y (30, 1) se obtiene

$$m = \frac{\log 100 - \log 1}{0 - 30} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}$$

Por tanto,

$$\log 100 \frac{I(z)}{I(0)} = \log 100 - \frac{1}{15} z$$

El miembro izquierdo se puede simplificar como $\log 100 + \log \frac{I(z)}{I(0)}$. Restando $\log 100$ en ambos miembros y tomando exponenciales se obtiene

$$\frac{I(z)}{I(0)} = 10^{-(1/15)z} = \exp\left[\ln 10^{-(1/15)z}\right]$$

Por tanto

$$I(z) = I(0)e^{-(\frac{1}{15}\ln 10)z}$$

El número $\frac{1}{15}\ln 10$ se denomina coeficiente de atenuación vertical. El módulo ese número nos indica la velocidad con la que la luz se absorbe en el lago. ◀

1.3.4 De una descripción verbal a una gráfica (opcional)

Poder esbozar una gráfica basándose en explicación verbal de algún fenómeno es algo extremadamente útil ya que la gráfica puede resumir una situación compleja que puede ser así más fácil de comunicar y de recordar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 11 La siguiente cita de Rosenzweig y Abramsky (1993) relaciona la productividad primaria (es decir, la velocidad a la que los autótrofos convierten la luz o la energía química inorgánica en energía química de componentes orgánicos) con la diversidad de especies (es decir, el número de especies):

> La relación entre la productividad primaria con la diversidad de las especies a escala regional (10^6 km^2) no es simple. No obstante, en tales regiones, y quizá incluso en regiones más grandes, surge un patrón: al crecer la productividad, primero crece la diversidad y después decrece.

Si se desea trasladar esta descripción verbal a una gráfica, primero hay que determinar la variable dependiente y la independiente. Aquí se considera la diversidad de las especies como función de la productividad primaria. Por tanto, la productividad primaria es la variable independiente y la diversidad de las especies es la variable dependiente. Se utilizará por tanto un sistema de coordenadas cuyo

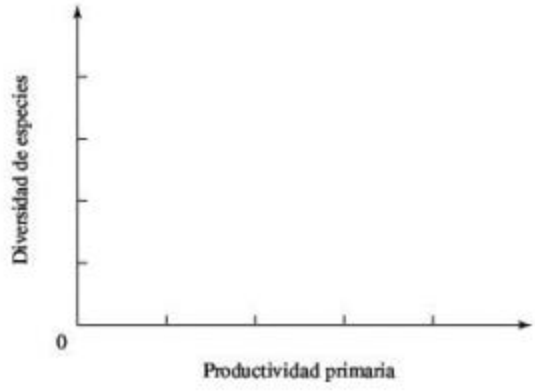


Figura 1.63
El sistema de coordenadas de la diversidad de especies en función de la productividad primaria se puede restringir al primer cuadrante

eje horizontal indique la productividad primaria y cuyo eje vertical indique la diversidad de las especies. Como ambas magnitudes son no negativas, sólo se necesita dibujar el primer cuadrante (*véase* la Figura 1.63).

De acuerdo con la cita, cuando la productividad aumenta, la diversidad primero decrece y después se incrementa. La gráfica de la Figura 1.64 ilustra este comportamiento.

La forma exacta de la curva no se puede deducir de la cita y dependerá del sistema bajo estudio. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 1.65 es el resultado de un estudio en los bosques de Costa Rica. A medida que la productividad aumenta, la curva de la diversidad de especies crece inicialmente para después decrecer. La forma de la curva de la Figura 1.65 es cuantitativamente diferente de la de la Figura 1.64, pero ambas presentan las mismas características cualitativas: un incremento inicial seguido de un decrecimiento. ◀

En el ejemplo siguiente, consideraremos la *respuesta funcional* de un depredador a la densidad de presas.

Ejemplo 12

La respuesta funcional de un depredador a la densidad de presas relaciona el número de presas consumidas por depredador (variable dependiente) con la densidad de presas (variable independiente). Holling (1959) presentó tres tipos básicos. El tipo 1 describe una respuesta en la que el número de presas devoradas por depredador en función de la densidad de presas crece inicialmente hasta llegar a un valor constante. La respuesta funcional de tipo 2 se incrementa con velocidad decreciente. La respuesta funcional de tipo 3 tiene forma de S o sigmoidal. Expresemos ahora estos tres tipos en forma gráfica. Todas las gráficas estarán situadas en un

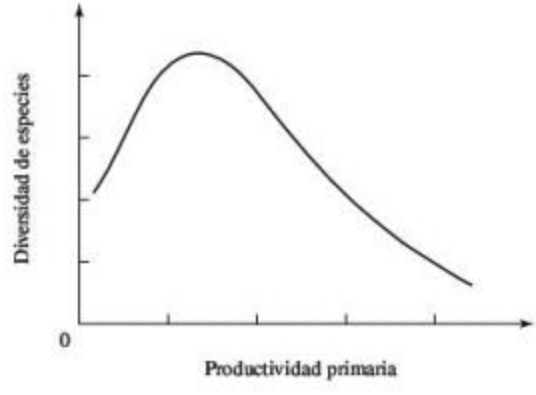
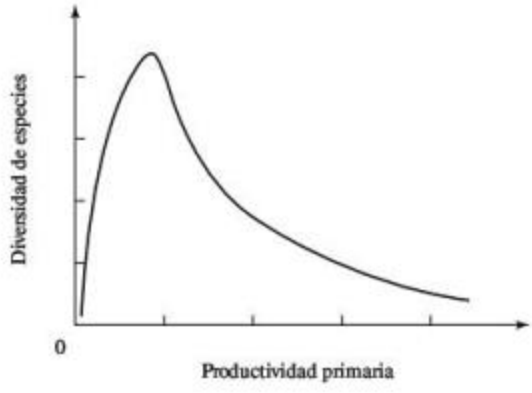


Figura 1.64
La gráfica de la diversidad de especies en función de la productividad primaria tiene forma de joroba



◀ **Figura 1.65**
Gráfica de la diversidad de especies en función de la productividad primaria en los bosques de Costa Rica (Holdrige *et al.*, 1971)

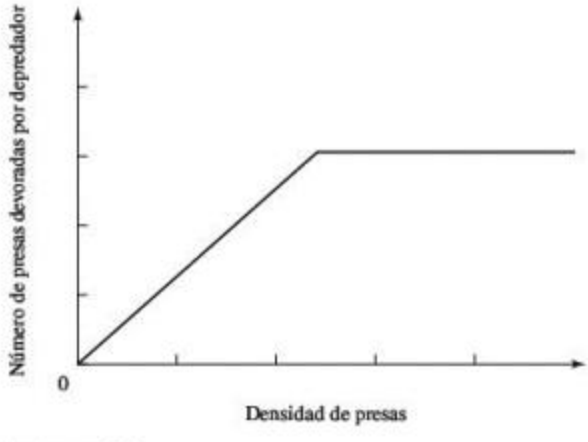
sistema de coordenadas con la densidad de presas en el eje horizontal y el número de presas devoradas por depredador en el eje vertical. Tanto la densidad de presas como el número de presas devoradas por depredador son variables no negativas, por lo que sólo es necesario dibujar el primer cuadrante.

Aunque no se ha mencionado, se supone que cuando la densidad de presas es igual a cero, el número de presas devoradas por depredador será también cero, y cuando la densidad de presas sea positiva el número de presas devoradas por depredador será también positivo. Esto significa que las tres curvas correspondientes a las respuestas funcionales pasarán por el origen.

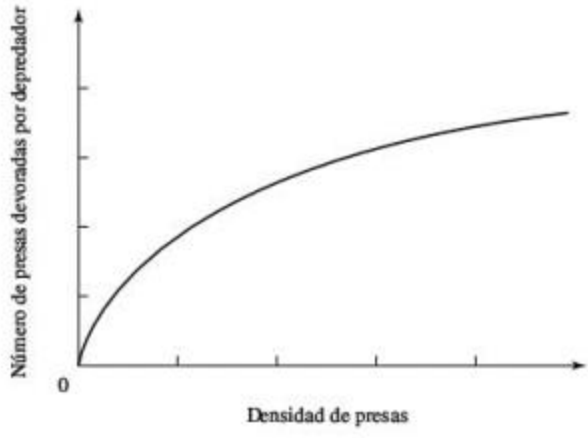
La respuesta funcional de tipo 1 primero se incrementa linealmente, y después alcanza una meseta. El incremento lineal produce una línea recta. Alcanzar una meseta significa que el valor permanece constante una vez se alcanza dicha meseta (*véase* la Figura 1.66).

La respuesta funcional de tipo 2 se describe como una función que se incrementa con velocidad decreciente. Esto quiere decir que la función se incrementa más lentamente a medida que la densidad de presas aumenta (*véase* en la Figura 1.67). A diferencia de la respuesta funcional de tipo 1, la función de tipo 2 continuará incrementándose y aproximándose a una meseta pero no alcanzará un valor constante para valores finitos de densidad de presas.

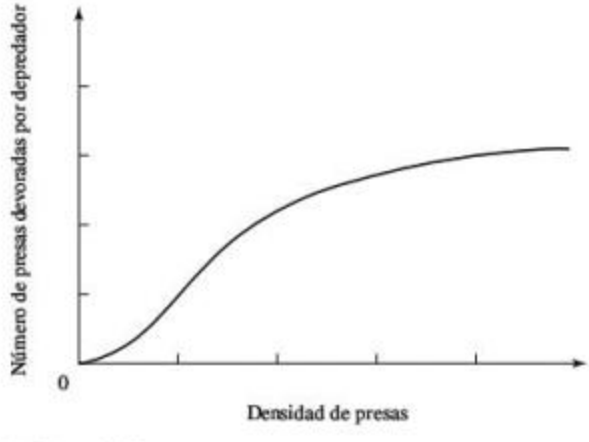
La respuesta funcional de tipo 3 se describe como sigmoidal. Las curvas sigmoidales se caracterizan por un incremento inicial acelerado seguido por otro incremento con velocidad decreciente (*véase* la Figura 1.68). De forma similar a la



▲ **Figura 1.66**
La respuesta funcional de tipo 1



▲ **Figura 1.67**
La respuesta funcional de tipo 2



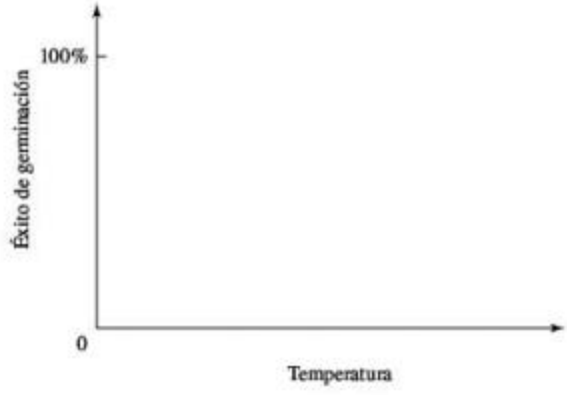
▲ **Figura 1.68**
La respuesta funcional de tipo 3

curva de la respuesta funcional de tipo 2, la curva de la respuesta funcional de tipo 3 se aproxima a una meseta a medida que la densidad de presas aumenta pero no alcanza dicha meseta para valores finitos de la densidad de presas. ◀

En los ejemplos presentados hasta ahora la densidad funcional depende sólo de una variable, como en el caso del número de presas devoradas por depredador en función de la densidad de presas. En muchas ocasiones, aparecen respuestas que dependen de más de una variable independiente. El siguiente ejemplo presenta una respuesta que depende de dos variables independientes y muestra cómo dibujar una gráfica para esta relación más compleja.

▶ Ejemplo 13 El éxito de la germinación de las semillas depende de la temperatura y de la humedad. Cuando la humedad es demasiado baja las semillas tienden a no germinar en absoluto, independientemente de la temperatura. El éxito en la germinación es máximo para valores intermedios de temperatura. Finalmente, las semillas tienden a germinar mejor cuando los niveles de humedad son mayores.

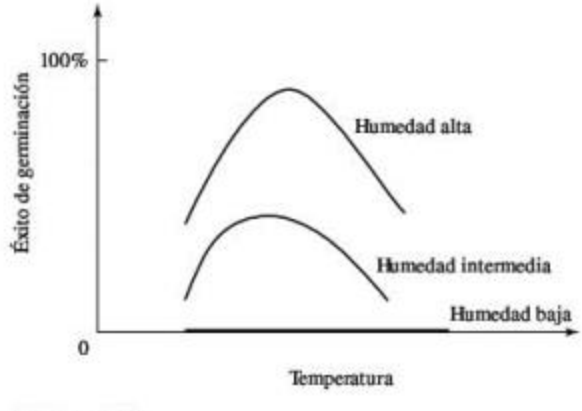
Una forma de trasladar esta información a una gráfica es dibujar el éxito de germinación en función de la temperatura para diferentes valores de humedad. Si



▲ **Figura 1.69**
El sistema de coordenadas del éxito de la germinación en función de la temperatura se puede restringir al primer cuadrante. El éxito de la germinación tomará valores entre 0 y 100%

se mide la temperatura en grados Fahrenheit o Celsius, las gráficas se pueden restringir al primer cuadrante (*véase* la Figura 1.69) ya que para que la germinación tenga lugar la temperatura tiene que estar bien por encima del punto de congelación del agua (0° C ó 32° F). El éxito de la germinación estará comprendido entre 0 y 100%. Para dibujar las gráficas es mejor no etiquetar los ejes más allá de lo que se muestra en la Figura 1.69 ya que no se conoce la respuesta numérica exacta.

Hay bastante información para construir tres gráficas, una para valores de humedad bajos, otra para valores de humedad intermedios, y otra para valores de humedad altos. Los tres se mostrarán en un solo sistema de coordenadas de forma que sea fácil comparar las diferentes respuestas. La gráfica para valores de humedad bajos es una recta horizontal ya que el éxito de germinación es 0%. Para valores intermedios y altos de la humedad, las gráficas tienen forma de joroba ya que el éxito de la germinación es máximo para valores intermedios de temperatura. La gráfica para valores de humedad altos está por encima de la gráfica para valores de humedad intermedios ya que las semillas tienden a germinar mejor cuando los valores de humedad son mayores (*véase* la Figura 1.70). ◀



▲ **Figura 1.70**
Éxito de la germinación en función de la temperatura para tres niveles de humedad (bajo, intermedio, alto)

1.3.5. Problemas

(1.3.1)

En los Problemas 1-22, dibuje la gráfica de cada función sin utilizar una calculadora gráfica. (Suponga el máximo dominio posible.)

1. $y = x^2 + 1$
2. $y = -(x-2)^2 + 1$
3. $y = x^3 - 2$
4. $y = -x^4 + 1$
5. $y = -2x^2 - 3$
6. $y = -(3-x)^2$
7. $y = 3 + 1/x$
8. $y = 1 - 1/x$
9. $y = 1/(x-1)$
10. $y = 1 + 1/(x+2)^2$
11. $y = \exp(x-2)$
12. $y = \exp(-x)$
13. $y = e^{-(x+3)}$
14. $y = 3e^{2x+1}$
15. $y = \ln(x+1)$
16. $y = \ln(x-3)$
17. $y = -\ln(x-1) + 1$
18. $y = -\ln(1-x)$
19. $y = 2\,\mathrm{sen}(x + \pi/4)$
20. $y = 0.2\cos(-x)$
21. $y = -\mathrm{sen}(\pi x/2)$
22. $y = -2\cos(\pi x/4)$

23. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = x^2$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = x^2 - 2$
(b) $y = (x-1)^2 + 1$
(c) $y = -2(x+2)^2$

24. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = x^3$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = x^3 + 1$
(b) $y = (x+1)^3 - 1$
(c) $y = -3(x-2)^3$

25. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = 1/x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$
(b) $y = -\dfrac{1}{x-1}$
(c) $y = \dfrac{x}{x+1}$

26. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = 1/x^2$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = \dfrac{1}{x^2} + 1$
(b) $y = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$
(c) $y = -\dfrac{1}{x^2} - 2$

27. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = e^x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = 2e^x - 1$
(b) $y = -e^{-x}$
(c) $y = e^{x-2} + 1$

28. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = e^x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = e^{-x} - 1$
(b) $y = -e^x + 1$
(c) $y = -e^{x-3} - 2$

29. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = \ln x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = \ln(x-1)$
(b) $y = -\ln x + 1$
(c) $y = \ln(x+3) - 1$

30. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = \ln x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = \ln(1-x)$
(b) $y = \ln(2+x) - 1$
(c) $y = -\ln(2-x) + 1$

31. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = \mathrm{sen}\, x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = 1 - \mathrm{sen}\, x$
(b) $y = \mathrm{sen}(x - \frac{\pi}{4})$
(c) $y = -\mathrm{sen}(x + \frac{\pi}{3})$

32. Explique cómo se pueden obtener las siguientes funciones partiendo de $y = \cos x$ y utilizando transformaciones básicas.
(a) $y = 1 + \cos x$
(b) $y = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$
(c) $y = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

(1.3.2)

33. Sitúe los siguientes números sobre una línea numérica en escala logarítmica (base 10): 0.0002, 0.02, 1, 5, 50, 100, 1000, 8000 y 20 000.

34. Sitúe los siguientes números sobre una línea numérica en escala logarítmica (base 10): 0.03, 0.7, 1, 2, 5, 10, 17, 100, 150 y 2000.

35. (a) Sitúe los siguientes números sobre una línea numérica en escala logarítmica (base 10): 10^2, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-7} y 10^{-10}.
(b) ¿Se puede situar el 0 sobre una recta numérica en escala logarítmica?
(c) ¿Se pueden situar números negativos sobre una recta numérica en escala logarítmica?

36. Sitúe los siguientes números sobre una línea numérica en escala logarítmica (base 10):
(a) 10^{-3}, 2×10^{-3}, 5×10^{-3}
(b) 10^{-1}, 2×10^{-1}, 5×10^{-1}

(c) 10^2, 2×10^2, 5×10^2

(d) Utilizando (a) – (c), ¿a cuántas unidades (en una escala logarítmica) de distancia está 2×10^{-3} de 10^{-3} (2×10^{-1} de 10^{-1} y 2×10^2 de 10^2)?

(e) Utilizando (a) – (c), ¿a cuántas unidades (en una escala logarítmica) de distancia está 5×10^{-3} de 10^{-3} (5×10^{-1} de 10^{-1} y 5×10^2 de 10^2)?

En los Problemas 37-42, inserte el número apropiado en los espacios en blanco.

37. La especie de gusano más larga conocida es el gusano de tierra *Microchaetus rappi* de Sudáfrica; en 1937 se recogió un espécimen de 6.7 metros de largo en el Transvaal. El gusano más corto es el *Chaetogaster annandalei*, que mide menos de 0.51 mm de longitud. *M. rappi* es _____ órden(es) de magnitud mayor que *C. annandalei*.

38. Tanto el delfín del Río de la Plata (*Pontoporia blainvillei*) como la ballena de esperma (*Physeter macrocephalus*) pertenecen al suborden Odontoceti (individuos con dientes). Un delfín del Río de la Plata pesa entre 30 y 50 kg, mientras que la ballena de esperma pesa entre 35 000 y 40 000 kg. Una ballena de esperma es _____ órden(es) de magnitud más pesada que el delfín del Río de la Plata.

39. Compare una bola de radio 1 cm con una bola de radio 10 cm. El radio de la bola mayor es _____ órden(es) de magnitud mayor que el radio de la bola menor. El volumen de la bola mayor es _____ órden(es) de magnitud mayor que el volumen de la bola menor.

40. Compare un cuadrado cuyo lado mide 1 metro con un cuadrado cuyo lado mide 100 metros. El área de cuadrado mayor es _____ órden(es) de magnitud mayor que el área de cuadrado menor.

41. El diámetro de una bacteria típica está entre 0.5 y 1 μm. La bacteria *Epopliscium fishelsoni* es una excepción, ya que mide unas 600 μm de largo y 80 μm de ancho. El volumen de *E. fishelsoni* es de unos _____ órden(es) de magnitud mayor que el de una bacteria típica. (*Sugerencia*: aproxime la forma de una bacteria típica por una esfera y la de *E. fishelsoni* por un cilindro).

42. La longitud de la célula de una batería típica es aproximadamente la décima parte de la de una célula eucariótica pequeña. En consecuencia, el volumen de la célula de la batería es aproximadamente _____ orden(es) de magnitud menor que el de una célula eucariótica pequeña. (*Sugerencia*: aproxime las formas de ambos tipos de células por esferas).

(1.3.3)

En los Problemas 43-46, cuando se dibuja $\log y$ *en función de* x*, resulta una línea recta. Dibuje las líneas rectas, cada una de ellas determinada por dos puntos, en una gráfica semilogarítmica, y determine la relación funcional. (Se dan las coordenadas x-y originales.)*

43. $(x_1, y_1) = (0, 5), (x_2, y_2) = (3, 1)$

44. $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (2, 8)$

45. $(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (1, 1)$

46. $(x_1, y_1) = (1, 4), (x_2, y_2) = (6, 1)$

En los Problemas 47-54, utilice una transformación logarítmica para obtener la relación lineal entre las cantidades dadas y dibuje dicha relación lineal resultante en una gráfica semilogarítmica.

47. $y = 3 \times 10^{-2x}$

48. $y = 4 \times 10^{5x}$

49. $y = 2e^{-1.2x}$

50. $y = 7e^{3x}$

51. $y = 5 \times 2^{4x}$

52. $y = 6 \times 2^{-0.9x}$

53. $y = 4 \times 3^{2x}$

54. $y = 5^{-6x}$

En los Problemas 55-58, cuando se dibuja $\log y$ *en función de* $\log x$*, resulta una línea recta. Dibuje las líneas rectas, cada una de ellas determinada por dos puntos, en una gráfica logarítmica, y determine la relación funcional. (Se dan las coordenadas x-y originales.)*

55. $(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (5, 1)$

56. $(x_1, y_1) = (3, 5), (x_2, y_2) = (1, 5)$

57. $(x_1, y_1) = (4, 2), (x_2, y_2) = (8, 8)$

58. $(x_1, y_1) = (2, 5), (x_2, y_2) = (5, 2)$

En los Problemas 59-66, utilice una transformación logarítmica para obtener la relación lineal entre las cantidades dadas y dibuje dicha relación lineal resultante en una gráfica logarítmica.

59. $y = 2x^5$

60. $y = 3x^2$

61. $y = x^6$

62. $y = 5x^3$

63. $y = x^{-2}$

64. $y = 6x^{-1}$

65. $y = 4x^{-3}$

66. $y = 7x^{-5}$

En los Problemas 67-72, utilice una transformación logarítmica para obtener una relación lineal entre las cantidades dadas, y determine si se debe usar una gráfica logarítmica o semilogarítmica para representar la relación lineal resultante.

67. $f(x) = 3x^{1.7}$

68. $g(s) = 1.8e^{-0.2s}$

69. $N(t) = 130 \times 2^{1.2t}$

70. $I(u) = 4.8u^{-0.89}$

71. $R(t) = 3.6t^{1.2}$

72. $L(c) = 1.7 \times 10^{2.3c}$

73. La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre x e y, que puede ser una función exponencial o potencial. Utilice una transformación logarítmica apropiada y dibuje una gráfica para decidir si la tabla proviene de una función potencial o de una función exponencial y obtenga la relación funcional entre x e y.

x	y
1	1.8
2	2.07
4	2.38
10	2.85
20	3.28

74. La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre x e y, que puede ser una función exponencial o potencial. Utilice una transformación logarítmica apropiada y dibuje una gráfica para decidir si la tabla proviene de una función potencial o de una función exponencial y obtenga la relación funcional entre x e y.

x	y
0.5	7.81
1	3.4
1.5	2.09
2	1.48
2.5	1.13

75. La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre x e y, que puede ser una función exponencial o potencial. Utilice una transformación logarítmica apropiada y dibuje una gráfica para decidir si la tabla proviene de una función potencial o de una función exponencial y obtenga la relación funcional entre x e y.

x	y
−1	0.398
−0.5	1.26
0	4
0.5	12.68
1	40.18

76. La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre x e y, que puede ser una función exponencial o potencial. Utilice una transformación logarítmica apropiada y dibuje una gráfica para decidir si la tabla proviene de una función potencial o de una función exponencial y obtenga la relación funcional entre x e y.

x	y
0	3
0.5	2.20
1	1.61
1.5	1.18
2	0.862

77. La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre x e y, que puede ser una función exponencial o potencial. Utilice una transformación logarítmica apropiada y dibuje una gráfica para decidir si la tabla proviene de una función potencial o de una función exponencial y obtenga la relación funcional entre x e y.

x	y
0.1	0.045
0.5	1.33
1	5.7
1.5	13.36
2	24.44

78. La siguiente tabla se basa en una relación funcional entre x e y, que puede ser una función exponencial o potencial. Utilice una transformación logarítmica apropiada y dibuje una gráfica para decidir si la tabla proviene de una función potencial o de una función exponencial y obtenga la relación funcional entre x e y.

x	y
0.1	1.72
0.5	1.41
1	1.11
1.5	0.872
2	0.685

Hasta ahora se ha utilizado siempre la base 10 para las transformaciones logarítmicas. La razón es que nuestro sistema numérico utiliza la base 10 y es por tanto fácil transformar logarítmicamente números de la forma ..., 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000,... cuando se utiliza base 10. En los Problemas 79-82, utilice la base indicada para transformar logarítmicamente cada una de las relaciones exponenciales de forma que resulte una relación lineal. Dibuje cada una de las relaciones en un sistema de coordenadas con los ejes transformados en consecuencia, de forma que resulten líneas rectas (utilizando la base indicada).

79. $y = 2^x$; base 2

80. $y = 3^x$; base 3

81. $y = 2^{-x}$; base 2

82. $y = 3^{-x}$; base 3

83. Suponga que $N(t)$ indica el tamaño de una población en el instante t, y cumple la ecuación

$$N(t) = 2e^{3t} \quad \text{para } t \geqslant 0$$

(a) Si se dibuja $N(t)$ en función de t en una gráfica semilogarítmica, resulta una línea recta. Explique por qué.

(b) Dibuje $N(t)$ en función de t en una gráfica semilogarítmica, y determine la pendiente de la línea recta resultante.

84. Suponga que se realiza un seguimiento en el tiempo de una población. Al dibujar los datos en una gráfica semilogarítmica, resulta una línea recta de pendiente 0.03. Suponga además que el tamaño de la población en el instante 0 era de 20. Si $N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t, ¿qué función describe mejor el tamaño de la población en el instante t?

85. (*Curvas especie-área*) Muchos estudios han demostrado que el número de especies en una isla crece con el área de la isla. A menudo, la relación funcional entre número de especies (S) y el área (A) se aproxima por la relación $S = CA^z$, siendo z una constante que depende de las especies particulares y del hábitat del estudio (los valores reales de z pueden variar entre 0.2 y 0.35). Suponga que el mejor ajuste a los datos disponibles en una escala logarítmica es una línea recta. ¿Es el modelo $S = CA^z$ una descripción apropiada de los datos? Si es así, ¿cómo se obtendría z?

86. (*Ecuación de Michaelis-Menten*) Las enzimas sirven como catalizadores en muchas reacciones químicas de los seres vivientes. En las reacciones más simples se transforma un único substrato en un producto mediante la ayuda de una enzima. La ecuación de Michaelis-Menten describe la velocidad inicial de este tipo de reacciones controladas por enzimas. Dicha ecuación relaciona la velocidad inicial de la reacción (v_0) con la concentración del substrato (s_0):

$$v_0 = \frac{v_{max} s_0}{s_0 + K_m}$$

siendo v_{max} la velocidad máxima a la que se puede formar el producto y K_m la constante de Michaelis-Menten. Nótese esta ecuación tiene la misma forma que la función de crecimiento de Monod.

(a) Demuestre que la ecuación de Michaelis-Menten se puede escribir de esta forma

$$\frac{1}{v_0} = \frac{K_m}{v_{max}} \frac{1}{s_0} + \frac{1}{v_{max}}$$

La expresión anterior se conoce como ecuación de Lineweaver-Burk y expresa que existe una relación lineal entre $1/v_0$ y $1/s_0$.

(b) Dibuje la gráfica de la ecuación de Lineweaver-Burk. Utilice un sistema de coordenadas en el que se represente $1/s_0$ en el eje horizontal y $1/v_0$ en el eje vertical. Demuestre que la gráfica resultante es una recta que corta al eje horizontal en $-1/K_m$ y al eje vertical en $1/v_{max}$.

(c) Para determinar K_m y v_{max}, se mide la velocidad inicial de la reacción, denotada por v_0, en función de la concentración del substrato, denotada por s_0, y se ajusta una línea recta a los puntos en el sistema de coordenadas cuyo eje horizontal es $1/s_0$ y cuyo eje vertical es $1/v_0$. Explique cómo se determinan K_m y v_{max} a partir de la gráfica.

(Nótese que en este ejemplo se utiliza una transformación no logarítmica para obtener una relación lineal. Como se utilizan los inversos de las dos cantidades de interés, la gráfica resultante se denomina gráfica doblemente inversa.)

87. (*Continuación del Problema 86*) La estimación de K_m y v_{max} a partir de la gráfica de Lineweaver- Burk como se describe en el Problema 86 no siempre es satisfactoria. Existe una transformación diferente que produce generalmente mejores estimaciones (Dowd y Riggs, 1965). Demuestre que la ecuación de Michaelis-Menten se puede escribir como

$$\frac{v_0}{s_0} = \frac{v_{max}}{K_m} - \frac{1}{K_m} v_0$$

y explique por qué esta transformación produce una línea recta cuando se dibuja v_0 en el eje horizontal y v_0/s_0 en el eje vertical. Explique cómo se pueden estimar K_m y v_{max} a partir de esa gráfica.

88. (*Adaptado de Reiss, 1989*) En un estudio realizado sobre nueve especies de mamíferos salvajes en África (Taylor *et al.*, 1980), se dibujaron las velocidades máximas de consumo de oxígeno (en ml/s) en función de las masas de los cuerpos (en kg). Se observó que los puntos de datos se ajustaban a una línea recta de pendiente aproximadamente igual a 0.8 y ordenada en el origen aproximadamente 0.105. Obtenga una ecuación que relacione el consumo máximo de oxígeno con la masa de los cuerpos.

89. (*Adaptado de Benton y Harper, 1997*) En los vertebrados, los embriones y los jóvenes poseen grandes cabezas en comparación con el tamaño total del cuerpo. A medida que el animal envejece, las proporciones cambian. Por ejemplo, en la relación entre la longitud del cráneo la longitud del cuerpo disminuye. Esto no sólo ocurre para los vertebrados vivientes sino también para los vertebrados fósiles, como demuestra el siguiente ejemplo.

Los Ictiosaurios son un grupo de reptiles marinos que aparecieron a principios del triásico y desaparecieron bastante antes del final del cretácico[1]. Tenían forma de pez y su tamaño era comparable al de los delfines. En un estudio realizado sobre 20 esqueletos fósiles, se encontró la siguiente relación alométrica entre el tamaño del cráneo (S) (medida en centímetros) y la longitud de la espina dorsal (B) (medida centímetros).

$$S = 1.162B^{0.93}$$

(a) Escoja transformaciones adecuadas para S y B de forma que la relación resultante sea lineal. Dibuje la relación transformada y obtenga la pendiente y la ordenada en el origen.

(b) Explique por qué la ecuación alométrica confirma que los ejemplares jóvenes tienen cabezas relativamente grandes (*Sugerencia*: calcule la relación de S a B para diversos valores diferentes de B, por ejemplo, 10 cm, 100 cm, 500 cm, y compare).

90. La intensidad de luz en los lagos disminuye exponencialmente con la profundidad. Si $I(z)$ indica la intensidad de luz a la profundidad z, siendo $z = 0$ el valor de la superficie, entonces,

$$I(z) = I(0)e^{-\alpha z}, \quad z \geq 0$$

siendo α una constante positiva denominada coeficiente de atenuación vertical. La Figura 1.71 muestra el porcentaje de radiación de superficie, definido como $100I(z)/I(0)$, en función de la profundidad en diferentes lagos.

(a) Basándose en la gráfica, estime α para cada lago.

(b) Reproduzca una gráfica como la de la Figura 1.71 para el Lago Constanza (Alemania) en mayo ($\alpha = 0.768\ m^{-1}$) y en diciembre ($\alpha = 0.219\ m^{-1}$) (datos tomados de Tilzer *et al.*, 1982).

(c) Explique por qué las gráficas son líneas rectas.

91. La absorción de luz en una columna de agua uniforme sigue una ley exponencial. Es decir la intensidad $I(z)$ en función de la profundidad z es

$$I(z) = I(0)e^{-\alpha z}$$

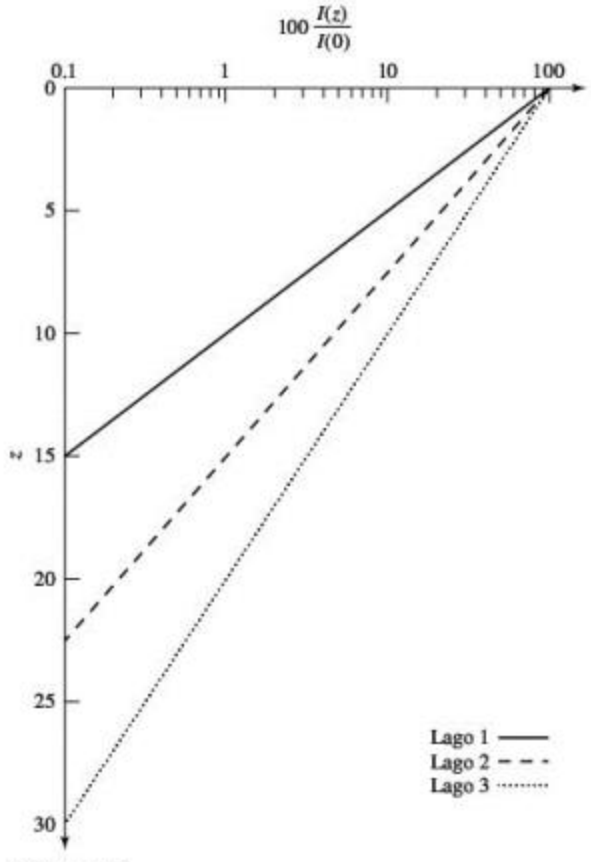
siendo $I(0)$ la intensidad en la superficie (es decir, cuando $z = 0$) y α el *coeficiente de atenuación vertical* (se supone que α es constante; en realidad, α depende de la longitud de onda de la luz que penetra en la superficie).

(a) Suponga que el 10% de la luz se absorbe en el primer metro. Calcule α. ¿En qué unidades se mide α?

(b) ¿Qué porcentaje de la intensidad restante tras el primer metro se absorbe en el segundo metro? ¿Qué porcentaje de la intensidad restante tras el segundo metro se absorbe en el tercer metro?

---

[1] El triásico es un periodo geológico que comenzó hace unos 248 millones de años y terminó hace unos 213 millones de años. El cretácico comenzó hace unos 144 millones de años y terminó hace 65 millones de años.



▲ **Figura 1.71**
Intensidad de luz en función de la superficie para el Problema 90

(c) ¿Qué porcentaje de la intensidad inicial queda en 1 metro, 2 metros y 3 metros?

(d) Dibuje la intensidad de luz como porcentaje de la intensidad en superficie, en una gráfica lineal y en una gráfica semilogarítmica.

(e) Relacione la pendiente de la curva en la gráfica semilogarítmica con el coeficiente de atenuación α.

(f) La profundidad en la que queda el 1% de intensidad de superficie es significativa en términos biológicos. Representa aproximadamente el nivel en el que cesa el crecimiento de algas. La zona por encima de este nivel se denomina zona eufótica. Exprese la profundidad de la zona eufótica en función de α.

(g) Compare un lago muy claro con una corriente glacial lechosa ¿Es mayor el coeficiente de atenuación α en el lago claro que la corriente lechosa, o es menor?

92. Cuando las plantas crecen a intensidades altas, se observa a menudo qué número de plantas disminuye a medida que su peso crece (debido al propio crecimiento de la planta). Si se dibuja el logaritmo del peso total en seco de biomasa no enterrada por planta, $\log w$, en función del logaritmo de la densidad de supervivientes, $\log d$ (en base 10), resulta una línea recta de pendiente $-3/2$. Obtenga la ecuación que relaciona w con d, suponiendo que $w = 1$ g cuando $d = 10^3$ m^{-2}.

En los Problemas 93-98, obtenga las relaciones funcionales basándose en las gráficas.

93. Figura 1.72.

94. Figura 1.73.

95. Figura 1.74.

96. Figura 1.75.

97. Figura 1.76. (*Sugerencia*: esta relación es diferente de las consideradas hasta ahora. El eje x está transformado logarítmicamente mientras que el eje y es lineal.)

98. Figura 1.77. (*Sugerencia*: esta relación es diferente de las consideradas hasta ahora. El eje x está transformado logarítmicamente mientras que el eje y es lineal.)

99. La energía libre ΔG necesaria para transformar un soluto descargado a través de una membrana desde una concentración c_1 hacia una concentración c_2 sigue la ecuación

$$\Delta G = 2.303\ RT \log \frac{c_2}{c_1}$$

donde $R = 1.99$ kcal K^{-1} kmol^{-1}, es la constante universal de los gases, y T es la temperatura medida en grados Kelvin (K). Dibuje ΔG en función de la relación de concentraciones c_2/c_1 cuando $T = 298$ K (25^0 C). Utilice un sistema de coordenadas en el que el eje vertical esté en escala lineal y el eje horizontal esté en escala logarítmica.

100. (*Transformación logística*) Suponga que

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-(b+mx)}} \tag{1.8}$$

Una función con la forma de (1.8) se denomina función **logística**. La función logística fue introducida por el biólogo matemático alemán Verhulst hacia el año 1840 para describir el crecimiento de poblaciones con recursos alimentarios limitados. Demuestre que

$$\ln \frac{f(x)}{1 - f(x)} = b + mx \tag{1.9}$$

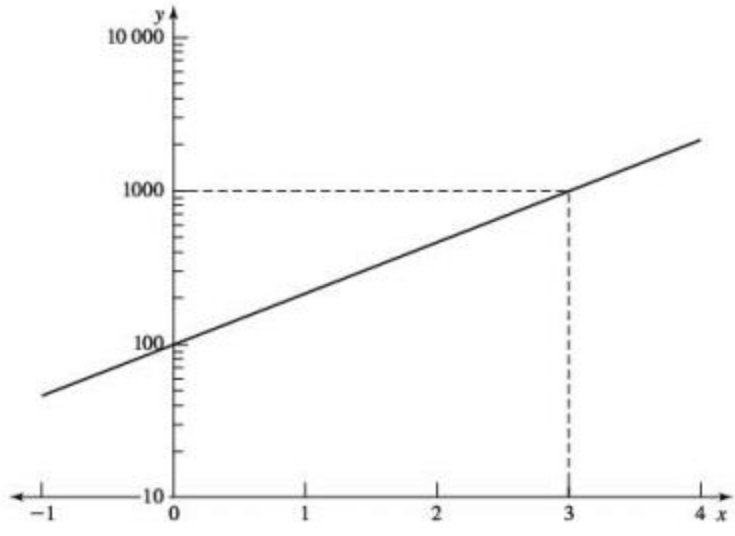
Esta transformación se denomina transformación logística. Es una transformación estándar para linealizar funciones de la forma de (1.8).

(1.3.4)

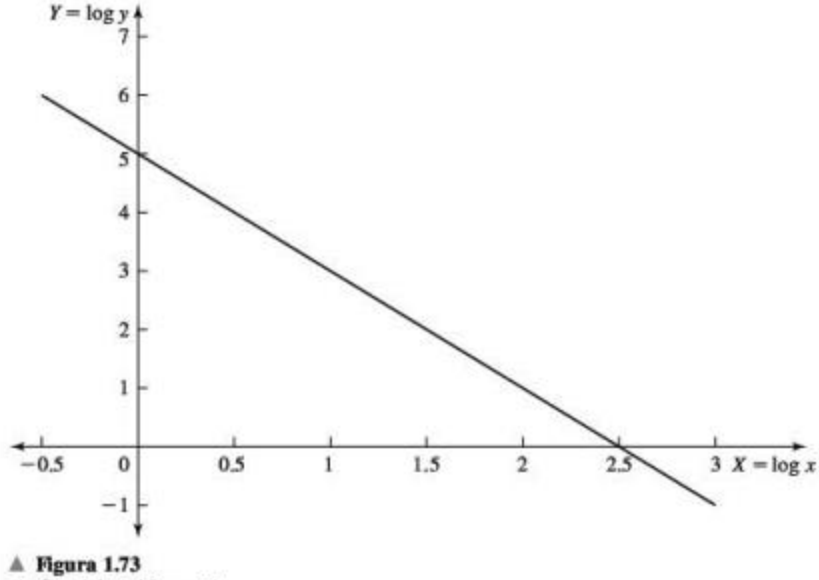
101. No todos los estudios de riqueza de especies en función de productividad producen curvas con forma de joroba. Owen (1988) estudió conjuntos de roedores en Texas. Descubrió que el número de especies era una función decreciente con la productividad. Dibuje una gráfica que describa esta situación.

102. La diversidad de especies en una comunidad se puede controlar mediante la frecuencia de alteraciones. La hipótesis de alteraciones intermedias indica que la diversidad de especies es mayor a niveles de alteraciones intermedios. Dibuje una gráfica de la diversidad de especies en función del nivel de alteraciones que ilustre esta hipótesis.

103. Preston (1962) investigó la dependencia del número de especies de pájaros en el área de una isla de las islas West Indian. Encontró que el número de especies de pájaros crecía con velocidad decreciente a medida que el área de la isla aumentaba. Dibuje esta relación.



▲ **Figura 1.72**
Gráfica del Problema 93



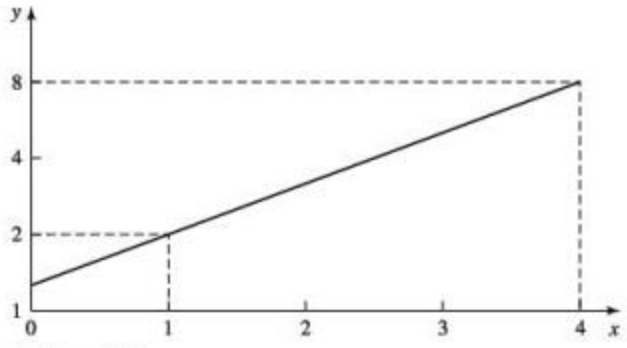
▲ **Figura 1.73**
Gráfica del Problema 94

104. El fitoplancton convierte el dióxido de carbono en componentes orgánicos mediante la fotosíntesis. Este proceso necesita la luz del sol. Se ha observado que la velocidad de fotosíntesis es función de la intensidad de luz. A intensidades bajas, la velocidad de fotosíntesis se incrementa de forma aproximadamente lineal con la intensidad de luz. A niveles intermedios se produce una saturación y a niveles altos disminuye ligeramente. Dibuje la gráfica de la velocidad de fotosíntesis en función de la intensidad de luz.

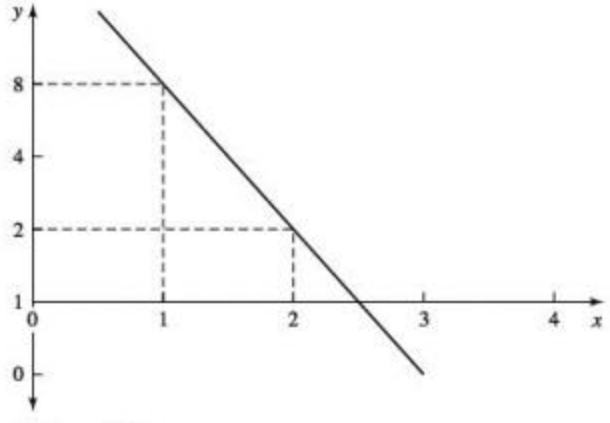
105. Las densidades de lemmings marrones en las áreas de tundra de Norteamérica y Eurasia presentan un comportamiento cíclico. Cada tres o cuatro años las densidades de lemmings crecen muy rápidamente y generalmente se colapsan al año siguiente. Dibuje un gráfico que describa esta situación.

106. La productividad de nitrógeno se puede definir como la cantidad de material seco producida por unidad de nitrógeno y unidad de tiempo. Los estudios experimentales sugieren que la productividad de nitrógeno se incrementa en función de la intensidad de luz con velocidad decreciente. Dibuje la gráfica de la productividad de nitrógeno en función de la intensidad de luz.

107. Un estudio de Borchert (1994) investigó la relación entre el almacenamiento de agua y la densidad de madera para algunas especies de árboles de Costa Rica. El estudio demostró el



▲ **Figura 1.74**
Gráfica del Problema 95



▲ **Figura 1.75**
Gráfica del Problema 96

almacenamiento de agua está inversamente relacionado con la densidad de madera, es decir, a densidades de madera más altas les corresponden contenidos de agua menores. Dibuje en una gráfica el contenido de agua en función de la densidad de madera, ilustrando esta situación.

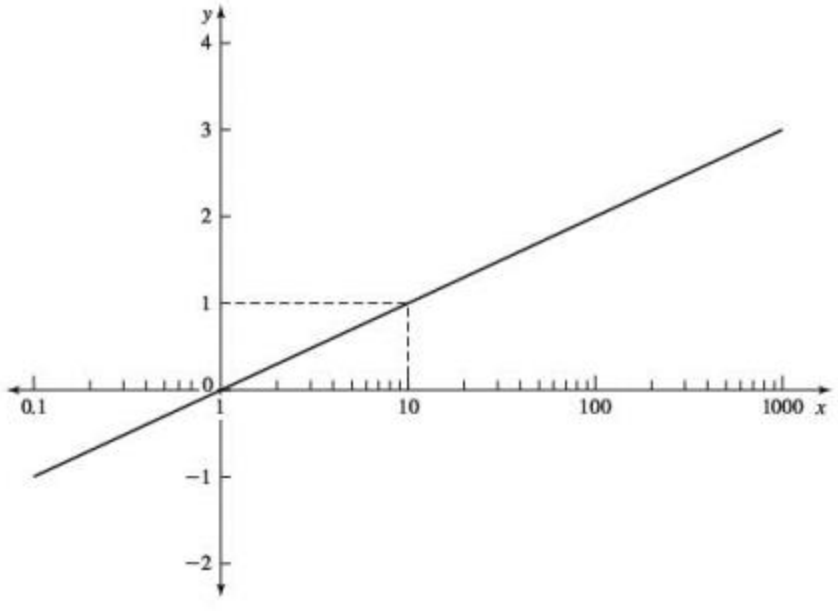
108. La riqueza de especies puede ser una función de la productividad con forma de joroba. En el mismo sistema de coordenadas dibuje las gráficas con forma de joroba de riqueza de especies en función de la productividad. Una de ellas donde el máximo ocurra en productividades bajas y la otra donde el máximo ocurra en productividades altas.

109. La distribución del tamaño del zooplancton en un lago presenta típicamente una curva con forma de joroba. Es decir, si la frecuencia (en %) de zooplancton se dibuja en función de la longitud del cuerpo del zooplancton, resulta una curva que primero crece y después decrece. Brooks y Dodson (1965) estudiaron los efectos de introducir en un lago peces que se alimentaban de zooplancton. Descubrieron que la composición del zooplancton tras la introducción se desplazó hacia tamaños menores de zooplancton. Dibuje en el mismo sistema de coordenadas la distribución de tamaño del zooplancton antes y después de la introducción de los peces.

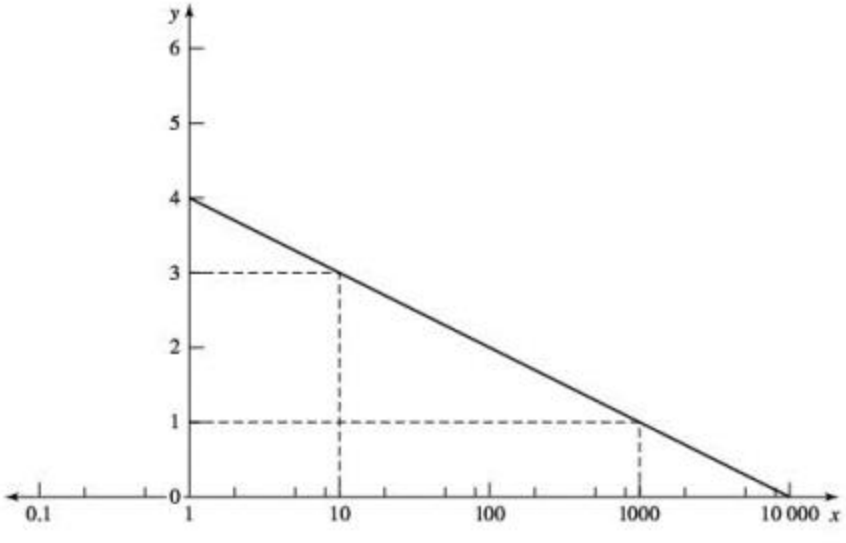
110. *Daphnia* es un género de zooplancton que comprende diversas especies. La velocidad de crecimiento corporal de *Daphnia* depende de la concentración de alimento. Para que haya crecimiento, se requiere una concentración de alimento mínima; por debajo de esa concentración, la velocidad de crecimiento es negativa y por encima, es positiva. En un estudio realizado por Gliwicz (1990), se descubrió que la velocidad de crecimiento es una función creciente de la concentración de alimento y que la mínima concentración de alimento requerida para el crecimiento disminuía al aumentar el tamaño del animal. Dibuje gráficas en el mismo sistema de coordenadas que ilustren esta situación: una para especies de *Daphnia* grandes, y otra para especies de *Daphnia* pequeñas.

111. Grant (1982) investigó el peso de los huevos en función del peso de los adultos entre especies de pinzones de Darwin. Descubrió que la relación entre el logaritmo del peso medio del huevo y el logaritmo del peso medio del adulto es lineal y que las especies más pequeñas ponen huevos menores y las especies más grandes, huevos mayores. Dibuje esta relación.

112. Grant *et al.* (1985) investigaron la relación entre la longitud media de las alas y el peso medio en machos de poblaciones de seis especies de pinzones de tierra. Encontraron una rela-



◀ **Figura 1.76**
Gráfica del Problema 97



◀ **Figura 1.77**
Gráfica del Problema 98

ción positiva casi lineal entre estas dos cantidades. Dibuje esta relación.

113. Bohlen *et al.* (2001) investigaron la concentración de nitratos en las corrientes a lo largo de un gradiente de elevación en el Bosque Experimental de Hubbard Brook en New Hampshire. Descubrieron que la concentración de nitratos en las corrientes de agua disminuía a elevaciones decrecientes. Dibuje la concentración de nitratos en las corrientes en función de la elevación.

114. En el Ejemplo 13, se discute el éxito de la germinación en función de la temperatura para diferentes niveles de humedad. Se puede considerar también el éxito de la germinación en función de la humedad para diversos niveles de temperatura. Dibuje las siguientes gráficas del éxito de la germinación en función de la humedad: una para baja temperatura, otra para temperatura intermedia y otra para temperatura alta.

115. Boulinier *et al.* (2001) estudiaron las dinámicas de las comunidades de pájaros en los bosques. Descubrieron que la velocidad de extinción local media de especies sensibles al área disminuía con el tamaño medio del área de bosque, mientras que la velocidad de extinción media de especies no sensibles al área no dependía del tamaño medio del bosque. Dibuje en el mismo sistema de coordenadas la velocidad de extinción media en función del tamaño medio del área de bosque para (a) una especie sensible al área y (b) una especie no sensible al área.

116. Dalling *et al.* (2001) compararon las velocidades netas de fotosíntesis de dos árboles colonizadores, *Alseis blackiana* y *Miconia argenta*, en función del tamaño del intervalo en la Isla de Barro Colorado. Descubrieron que las velocidades de fotosíntesis netas (medidas en una base por unidad) crecían con el tamaño del intervalo para ambas especies de árboles y que la velocidad de fotosíntesis del *Miconia argenta* era superior a la del *Alseis blackiana*. Dibuje en el mismo sistema de coordenadas las gráficas de las velocidades de fotosíntesis netas en función del tamaño del intervalo para ambas especies de árboles.

1.4. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 1: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Números reales
2. Intervalos: abierto cerrado y semiabierto
3. Valor absoluto
4. Proporcional
5. Rectas: forma estándar, forma punto-pendiente, forma pendiente-ordenada en el origen
6. Rectas paralelas y perpendiculares
7. Círculo: radio, centro, ecuación del círculo, círculo unidad
8. Ángulo: radianes, grados
9. Igualdades trigonométricas
10. Números complejos: parte real, parte imaginaria
11. Función: dominio, codominio, recorrido, imagen
12. Simetría de funciones: par, impar
13. Composición de funciones
14. Polinomios
15. Grados de un polinomio
16. Reacción química: ley de acción de masas
17. Función racional
18. Velocidad de crecimiento
19. Velocidad de crecimiento específica y velocidad de crecimiento per cápita
20. Función de crecimiento de Monod
21. Función potencial
22. Alometría y relaciones de escala
23. Función exponencial
24. Crecimiento exponencial
25. Base exponencial natural
26. Desintegración radioactiva
27. Vida media
28. Función inversa, inyectiva
29. Función logarítmica
30. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica
31. Función periódica
32. Función trigonométrica
33. Amplitud, periodo
34. Traslación: horizontal, vertical
35. Escala logarítmica
36. Orden de magnitud
37. Transformación logarítmica
38. Gráfica logarítmica
39. Gráfica semilogarítmica

1.5. PROBLEMAS DE REPASO

1. Suponga que el número de bacterias en una placa de Petri está dado por

$$B(t) = 10\,000e^{0.1t}$$

donde t se mide en horas.

(a) ¿Cuántas bacterias hay presentes en $t = 0, 1, 2, 3$ y 4?

(b) Obtenga el instante t en el que el número de bacterias alcanza el valor de 100 000.

2. Suponga que se introduce un patógeno en una población de bacterias en el instante 0. El número de bacterias disminuye entonces como

$$B(t) = 25\,000e^{-2t}$$

donde t se mide en horas.

(a) ¿Cuántas bacterias hay después de tres horas?

(b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir hasta que sólo quede el 1% de número inicial de bacterias?

3. Considere la reacción química

$$A + 2B \rightarrow AB_2$$

Suponga que la reacción se produce en un envase cerrado y que las concentraciones iniciales de A y de B son $a = [A]$ y $b = [B]$, respectivamente.

(a) Explique por qué la velocidad de reacción se puede expresar como

$$R(x) = k(a - x)(b - 2x)^2$$

siendo $x = [AB_2]$.

(b) Demuestre que $R(x)$ es un polinomio y determine su grado.

(c) Dibuje $R(x)$ para los valores relevantes de x cuando $a = 5$, $b = 6$ y $k = 0.3$.

4. Euclides, un matemático griego que vivió hacia el año 300 a.C., escribió los *Elementos*, con mucho el texto matemático más importante de ese periodo. Es una exposición sistemática de

la mayor parte del conocimiento matemático de aquella época, dispuesta en 13 volúmenes. En el Libro III, Euclides estudia la construcción de una tangente a un círculo en un punto P del círculo. Para expresar la construcción en terminología moderna, se dibuja una línea recta que pase por el punto P y que sea perpendicular a la recta que pasa por el centro del círculo y el punto P.

(a) Utilice esta construcción geométrica para obtener la ecuación de la recta que es tangente al círculo unidad en el punto $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$.

(b) Determine el ángulo θ entre el eje x positivo y la recta tangente obtenida en apartado (a) ¿Cuál es la relación entre el ángulo θ y la pendiente de la recta tangente obtenida en el apartado (a)?

5. Para comparar el crecimiento exponencial y el logarítmico, se pueden considerar dos plantas hipotéticas que son del mismo género pero presentan velocidades de crecimiento bastante diferentes. Ambas plantas producen una sola hoja cuya longitud continúa aumentando mientras la planta esté viva. Una de las plantas se denomina *Crecimientus logaritmiensis*, y la otra *Crecimientus exponencialis*. La longitud L (medida en pies) de la hoja de *C. logaritmiensis* a la edad t (medida en años) se expresa como

$$L(t) = \ln(t+1), \quad t \geqslant 0$$

La longitud E (medida en pies) de la hoja de *C. exponencialis* a la edad t (medida en años) se expresa como

$$E(t) = e^t - 1, \quad t \geqslant 0$$

(a) Obtenga la longitud de cada hoja después de 1, 10, 100 y 1000 años.

(b) ¿Cuánto tardaría la hoja de *C. exponencialis* en alcanzar una longitud de 233 810 millas, la distancia media de la Tierra a la Luna? (Observe que 1 milla = 5280 pies) ¿Qué longitud tendría entonces la hoja de *C. logaritmiensis*?

(c) ¿Cuántos años tardaría la hoja de *C. logaritmiensis* en alcanzar una longitud de 233 810 millas? Compare este resultado con el tiempo transcurrido desde que la vida apareció en la Tierra, hace unos 3 500 000 000 de años. Si *C. logaritmiensis* hubiera aparecido hace 3 500 000 000 de años y una planta de esta especie hubiera sobrevivido hasta hoy, ¿qué longitud tendría su hoja?

(d) Las plantas no empezaron a conquistar la tierra hasta el final del periodo Ordoviciano, hace unos 450 millones de años[2]. Si *C. exponencialis* y *C. logaritmiensis* hubieran aparecido entonces, y una planta de cada especie hubiera sobrevivido hasta hoy, ¿qué longitud tendrían sus respectivas hojas?

6. Charles Darwin afirma en el Capítulo 3 de *El Origen de las Especies* (Darwin, 1859) que «la lucha por la existencia se sigue inevitablemente de la alta velocidad con la que los seres orgánicos tienden a crecer.... aunque algunas especies pueden estar creciendo ahora, más o menos rápidamente en número, no pueden hacerlo todas, ya que el mundo no podría mantenerlas». Para ilustrar este punto, él continúa como sigue:

> No hay excepción a la regla de que todo ser orgánico crece naturalmente hasta una velocidad tan alta que, si no es destruido, la tierra pronto se cubriría con la progenie de una sola pareja. Incluso los hombres, de baja velocidad de reproducción, han doblado su número en 25 años, y a esta velocidad, en unos pocos miles de años, literalmente no habría espacio para su progenie.

Empezando con una sola pareja, calcule la población del mundo después de 1000 años y después de 2000 años bajo el supuesto de Darwin de que la población mundial se dobla cada 25 años y obtenga las densidades de población resultantes (número de personas por pie cuadrado). Para responder a la última parte, es necesario saber que el diámetro de la tierra es de unas 7900 millas, que la superficie de una esfera es $4\pi r^2$, siendo r su radio y que los continentes ocupan aproximadamente el 29% de la superficie de la tierra (una milla equivale a 5280 pies).

7. Suponga que una población crece el q% cada año ¿Cuántos años tardaría la población en doblar su tamaño? Obtenga la relación funcional entre el tiempo necesario para doblar el tamaño T y el porcentaje anual de crecimiento q. Produzca una tabla que muestre el tiempo necesario para doblar el tamaño T en función de q para $q = 1, 2, \ldots, 10$, y dibuje T en función de q ¿Qué sucede con T cuando q se acerca a 0?

8. (*Curva de reclutamiento de Beverton-Holt*) Muchos organismos muestran una mortalidad dependiente de la densidad. Se considera a continuación un modelo matemático simple que incorpora este efecto. indica la densidad de padres y la densidad de descendientes *supervivientes*.

(a) Suponga que cuando no hay mortalidad dependiente de la densidad el número de descendientes supervivientes por padre es igual a R. Demuestre que si se dibuja N_b/N_a en función de N_b, resulta una línea horizontal de ordenada en el origen $1/R$. Es decir

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{1}{R}$$

o

$$N_a = R \cdot N_b$$

La constante R se denomina **velocidad reproductiva neta**.

(b) Para incluir la mortalidad dependiente de la densidad, se supone que N_b/N_a es una función creciente de N_b. La forma más simple de hacer esto es suponer que la gráfica de N_b/N_a en función de N_b es una línea recta, de ordenada en el origen $1/R$ y que pasa por el punto $(K, 1)$. Demuestre que esto implica que

$$N_a = \frac{RN_b}{1 + \frac{(R-1)N_b}{K}}$$

Esta relación se denomina curva de reclutamiento de Beverton-Holt.

(c) Explique con palabras por qué el modelo descrito por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt se comporta para densidades iniciales N_b bajas como el modelo de densidad independiente de la mortalidad descrito en el apartado (a).

(d) Demuestre que si $N_b = K$, entonces $N_a = K$. Demuestre además que si $N_b < K$, entonces $N_b < N_a < K$ y que $N_b > K$ implica que $K < N_a < N_b$. Explique con palabras lo que significa. (Note que K se denomina capacidad de alojamiento.)

(e) Dibuje N_a en función de N_b para $R = 2$ y $K = 20$ ¿qué sucede para valores grandes de N_b? Explique con palabras lo que significa.

9. (*Adaptado de Moss, 1980*) Oglesby (1977) investigó la relación entre la producción anual de peces (Y) y la concentración

[2] El periodo Ordoviciano comenzó hace unos 505 millones de años y terminó hace unos 438 millones de años.

de clorofila de fitoplancton en verano (C). La producción de peces se mide mediante el peso en seco por metro cuadrado y año, y la concentración de clorofila se mide en microgramos por litro. Los datos procedentes de 19 lagos, la mayor parte del hemisferio norte, permitieron establecer la siguiente relación

$$\log_{10} Y = 1.17 \log_{10} C - 1.92 \qquad (1.10)$$

(a) Dibuje $\log_{10} Y$ en función de $\log_{10} C$.

(b) Obtenga la relación entre Y y C, es decir, escriba Y como función de C. Explique las ventajas de la transformación logarítmica que da como resultado (1.10) frente a la opción de escribir Y como función de C. [*Sugerencia*: intente dibujar Y en función de C y compare con el apartado (a)].

(c) Obtenga la producción predicha (Y_p) en función de la producción actual (Y_c) si la concentración de clorofila de fitoplancton en verano se dobla.

(d) ¿En qué porcentaje debería aumentar la concentración de clorofila de fitoplancton en verano para tener un incremento del 10% en la producción de peces?

10. (*Adaptado de Moss, 1980*) Para trazar la historia de un lago, se toma una muestra de lodo del centro y se fecha. Uno de los métodos para fechar utiliza isótopos radioactivos. El método del C^{14} es efectivo para sedimentos que tengan menos de 60 000 años de antigüedad. La relación de C^{14} a C^{12} ha sido esencialmente constante en la atmósfera durante un largo periodo de tiempo, y los organismos vivientes absorben el carbono en esta proporción. Tras la muerte, la absorción de carbono cesa y el C^{14} disminuye, lo que hace cambiar la relación de C^{14} a C^{12} de acuerdo con

$$\left(\frac{C^{14}}{C^{12}}\right)_t = \left(\frac{C^{14}}{C^{12}}\right)_{\text{inicial}} e^{-\lambda t}$$

siendo t el instante de la muerte.

(a) Si la relación de C^{14} a C^{12} en la atmósfera es de 10^{-12} y la vida media del C^{14} es de 5730 años, obtenga una expresión de t, la edad del material que está siendo fechado, en función de la relación de C^{14} a C^{12} en dicho material.

(b) Utilice la respuesta del apartado (a) para obtener la edad de una muestra de lodo para la que la relación de C^{14} a C^{12} es de 1.61×10^{-13}.

11. (*Adaptado de Futuyama, 1995* y *Dott* y *Batten, 1976*) Los corales depositan una sola capa caliza cada día. Además, las variaciones estacionales en el espesor de las capas permiten agruparlas por años. En los corales modernos, se pueden contar por tanto 365 capas por año. J. Wells, un paleontólogo, estudió las capas de crecimiento en corales fósiles. Para su asombro, descubrió que los corales del Devónico[3] que vivieron hace aproximadamente 380 millones de años tenían unas 400 capas diarias por año.

(a) Actualmente, la Tierra rota sobre su eje cada 24 horas y da una vuelta alrededor del Sol cada 365 días. Los astrónomos han determinado que la rotación de la Tierra se ha hecho más lenta con el tiempo a una velocidad de unos 2 segundos cada 100 000 años. Es decir, hace 100 000 años, el día era 2 segundos más corto que hoy. Extrapole hacia atrás hasta el periodo Devónico y determine la duración de un día y la duración de un año cuando vivieron los corales de Wells. (*Sugerencia*: el número de horas por año permanece constante. ¿Por qué?).

(b) Obtenga una ecuación lineal que relacione el tiempo geológico (en millones de años) con el número de horas por día en un instante dado.

(c) Los estromatolitos también producen capas diarias. Una muestra de algunos estromatolitos fósiles mostraron entre 400 y 420 capas diarias por año. Utilice la respuesta del apartado (b) para fechar los estromatolitos.

12. La altura en pies (y) de un cierto árbol en función de su edad en años (x) se puede aproximar por

$$y = 132e^{-20/x}$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de esta función. Describa con palabras como crece el árbol, poniendo particular atención a cuestiones como las siguientes: ¿crece el árbol con la misma velocidad a lo largo del tiempo? ¿Qué sucede cuando el árbol es joven? ¿Qué sucede cuando el árbol es viejo?

(b) ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el árbol alcance 100 pies de altura?

(c) ¿Puede alcanzar el árbol alguna vez una altura de 200 pies? ¿Hay una altura final, es decir, una altura máxima que el árbol pueda alcanzar finalmente?

13. (*Modelo de envejecimiento*) La probabilidad de que un individuo viva más allá de la edad t se denomina *función de supervivencia* y se indica como $S(t)$. El modelo de Weibull es muy popular en teoría de fiabilidad y en estudios de envejecimiento biológico. La función de supervivencia depende de los parámetros, λ y β, y su expresión es

$$S(t) = \exp[-(\lambda t)^{\beta}]$$

Se recopilaron los datos de mortalidad de una población de *Drosophila melanogaster* en el laboratorio del doctor Jim Curtsinger en la Universidad de Minnesota, y se ajustó a este modelo separadamente para machos y hembras (Pletcher, 1998). Se obtuvieron los siguientes valores de parámetros (con t medido en días):

Sexo	λ	β
Machos	0.019	3.41
Hembras	0.022	3.24

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la función de supervivencia de las poblaciones de machos y hembras.

(b) Para cada una de las poblaciones, obtenga el valor de t para que la probabilidad de sobrevivir más de ese tiempo sea de 1/2.

(c) Si tuviera un macho y una hembra de esta especie, ¿cuál esperaría que viviera más?

14. El carbono tiene dos isótopos estables, C^{12} y C^{13}. La materia orgánica contiene ambos isótopos estables pero la relación de C^{13} a C^{12} en la materia orgánica es menor en la materia inorgánica, resultado del hecho de que el carbono ligero (C^{12}) es el utilizado preferentemente por las plantas durante la fotosíntesis. Esto se denomina fraccionamiento isotópico y se mide como

$$\delta^{13} C = \left[\frac{([C^{13}]:[C^{12}])_{\text{muestra}}}{([C^{13}]:[C^{12}])_{\text{estándar}}} - 1\right]$$

[3] El periodo Devónico comenzó hace aproximadamente 408 millones de años y terminó hace aproximadamente 360 millones de años.

El estándar se toma de la relación de isótopos en el carbono de las conchas de belenites encontrados en la formación del cretáceo Pedee en Carolina del Sur. Basándose en la información precedente, explique por qué tiene sentido la siguiente cita de Krauskopf y Bird (1995):

> Los bajos valores [negativos] de δ^{13}C en los hidrocarburos procedentes del petróleo son unas de las evidencias importantes para atribuir el origen del petróleo a la alteración del material orgánico en vez de a la condensación de gases primigenios procedentes del interior de la tierra.

15. La velocidad de una reacción enzimática se describe frecuentemente mediante la ecuación de Michaelis-Menten

$$v = \frac{ax}{k + x}$$

donde v es la velocidad de la reacción, x es la concentración de substrato, a es la máxima velocidad de reacción y k es la concentración de substrato a la que la velocidad es la mitad de la velocidad máxima. Esta curva describe la forma en que la velocidad de reacción depende de la concentración de substrato.

(a) Demuestre que cuando $x = k$, la velocidad de reacción es la mitad de la velocidad máxima.

(b) Demuestre que la concentración de substrato debe aumentarse en 81 veces para que la velocidad cambie desde el 10% al 90% de la velocidad máxima, independientemente del valor de k.

16. Los contaminantes atmosféricos pueden causar la acidificación de los lagos (lluvia ácida). Esto puede causar serios problemas a los organismos que viven en los lagos. Por ejemplo, en los peces la capacidad de transporte de oxígeno de la hemoglobina disminuye cuando decrece en los niveles de pH del agua. Se han realizado experimentos con el zooplancton *Daphnia magna* que han demostrado que la disminución de supervivientes es despreciable con un pH = 6, pero que con un pH = 3.5 se produce una marcada disminución de los supervivientes, que desaparecen completamente al cabo de ocho horas. Ilustre gráficamente el porcentaje de supervivientes en función del tiempo para pH = 6 y para pH = 3.5.

17. El nivel de pH de los lagos regula las concentraciones de iones amonio inofensivos (NH_4^+) y de amoniaco tóxico (NH_3). Para niveles de pH inferiores a 8, las concentraciones de iones NH_4^+ resultan poco afectadas por cambios en el valor del pH, pero disminuyen en muchos órdenes de magnitud cuando los niveles de pH aumentan por encima de 8. Por otra parte, las concentraciones de NH_3 son despreciables con pH bajo, y se incrementan en muchos órdenes de magnitud a medida que el nivel de pH aumenta, alcanzando un valor estable alto aproximadamente con pH = 10 (más allá los niveles de NH_3 son poco afectados por cambios en los niveles de pH). Ilustre esto gráficamente.

18. El tiempo de desarrollo de los huevos del zooplancton *Daphnia longispina* depende de la temperatura. Tardan unos tres días a 20° C pero casi 20 días a 5° C. Cuando se dibuja en una escala logarítmica el tiempo de desarrollo del huevo (en días) en función de la temperatura (en °C) resulta una línea recta.

(a) Dibuje una gráfica con el tiempo de desarrollo del huevo en función de la temperatura en una escala logarítmica.

(b) Utilice los datos para obtener la función que relaciona el tiempo de desarrollo del huevo y la temperatura para *D. longispina*.

(c) Utilice su respuesta del apartado (b) para predecir el tiempo de desarrollo del huevo de *D. longispina* a 10° C.

(d) Suponga que se miden los tiempos de desarrollo de huevos en horas y la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Seguiría obteniéndose una línea recta en una gráfica logarítmica?

19. Los organismos consumen recursos. La velocidad de consumo de recursos, denominada v, depende de la concentración de recursos, denominada S. El modelo *Blackman* de consumo de recursos supone una relación lineal entre la velocidad de consumo de recursos y la concentración de recursos. Por debajo de una concentración umbral (S_k) la velocidad de consumo crece linealmente con $S = 0$ cuando $v = 0$. Cuando $S = S_k$, la velocidad de consumo v alcanza su valor máximo v_{max}. Para $S > S_k$, la velocidad de consumo de recursos permanece en su valor máximo v_{max}. Una función como ésta, que tiene una transición abrupta, no se puede escribir analíticamente mediante una única expresión, sino que hay que definirla por tramos:

$$v = \begin{cases} g(S) & \text{para} \quad 0 \leqslant S \leqslant S_k \\ v_{max} & \text{para} \quad S > S_k \end{cases}$$

Obtenga $g(S)$ y dibuje la velocidad de consumo de recursos v en función de la concentración de recursos S.

20. La intensidad de luz en los lagos decrece exponencialmente con la profundidad. Si indica la intensidad de luz a la profundidad z, con $z = 0$ el valor en la superficie, entonces

$$I(z) = I(0)e^{-\alpha z}, \quad z \geqslant 0$$

donde α es una constante positiva denominada coeficiente de atenuación vertical. El coeficiente de atenuación depende de la longitud de onda de la luz y de la cantidad de materia disuelta y de partículas en el agua. En lo que sigue, suponemos que el agua es pura.

(a) Aproximadamente el 65% de la luz roja (720 nm) se absorbe en el primer metro. Obtenga α.

(b) Aproximadamente el 5% de la luz azul (475 nm) se absorbe en el primer metro. Obtenga α.

(c) Explique con palabras por qué un submarinista no vería tonos rojos a pocos metros por debajo de la superficie del lago.

21. La intensidad de luz en los lagos decrece con la profundidad de acuerdo con la expresión

$$I(z) = I(0)e^{-\alpha z}, \quad z \geqslant 0$$

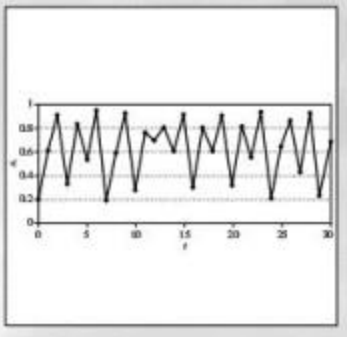
donde $I(z)$ indica la intensidad de luz a la profundidad z, con $z = 0$ el valor en la superficie, y una constante positiva denominada coeficiente de atenuación vertical. La profundidad a la que la intensidad de luz es el 1% de la intensidad de la superficie es importante para la actividad fotosintética del fitoplancton. Por debajo de este nivel, la fotosíntesis es suficiente para compensar las pérdidas respiratorias. El nivel del 1% se denomina *nivel de compensación*. Un método utilizado a menudo y relativamente fiable para determinar el nivel de compensación es el método del *disco de Secchi*. Un disco de Secchi es un disco blanco de radio 10 cm. A una determinada profundidad, el disco desaparece de la vista del observador. El nivel de compensación coincide aproximadamente con el doble de esta profundidad.

(a) Obtenga α en un lago en el que el disco de Secchi desaparece a una profundidad de 9 metros.

(b) Obtenga la profundidad a la que el disco de Secchi desaparece en un lago con $\alpha = 0.473\ m^{-1}$.

MODELOS EN TIEMPO DISCRETO, SUCESIONES Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS

CAPÍTULO 2



En este capítulo, se presentan modelos para poblaciones que se reproducen en instantes discretos. Se basan en funciones cuyos dominios son subconjuntos del conjunto de los enteros no negativos $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. En el Ejemplo 9 de la Sección 1.2 se ha presentado un ejemplo de ese tipo de funciones. Estas funciones se utilizan ampliamente en biología para modelar, por ejemplo, el tamaño de la población de una planta que se reproduce una vez al año y después muere (una planta anual). Las funciones son de la forma

$$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$
$$n \to f(n)$$

Cuando la variable independiente indique tiempo utilizaremos frecuentemente t en vez de n. Como vimos en el Capítulo 1, las tablas y las gráficas son herramientas útiles para ilustrar estas funciones.

Ejemplo 1 Sea

$$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$
$$n \to f(n) = \frac{1}{n+1}$$

Genere una tabla para $n = 0, 1, 2, ..., 5$ y dibuje la función.

Solución

Ésta es la tabla:

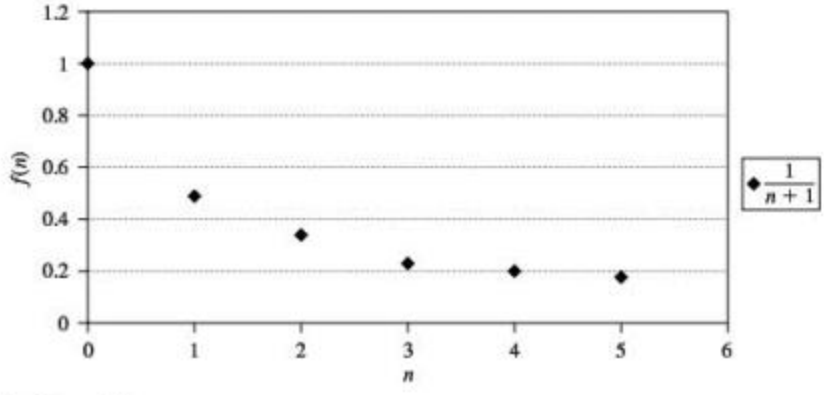
n	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{n+1}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

La gráfica de esta función está formada por puntos discretos (Figura 2.1). ◀

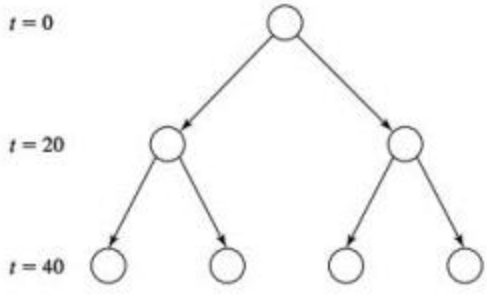
2.1 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

2.1.1 Modelado en tiempo discreto del crecimiento de una población

Imagine que se observan bacterias que se dividen cada 20 minutos y que al principio del experimento hay sólo una bacteria. ¿Cómo cambia el número de bacterias con el tiempo? Denominaremos instante 0 al instante donde se inicia la observación. En el instante 0, hay sólo una bacteria.



▲ **Figura 2.1**
Gráfica de la función $f(n) = \frac{1}{n+1}$ del Ejemplo 1



◀ **Figura 2.2**
Las bacterias se dividen cada 20 unidades de tiempo

Tras 20 minutos, la bacteria se divide en dos por lo que en el instante 20 habrá dos bacterias. 20 minutos después, cada una de las bacterias se divide de nuevo por lo que en el instante 40 habrá cuatro bacterias, y así sucesivamente (Figura 2.2).

Se puede generar una tabla que describe el crecimiento de esta población.

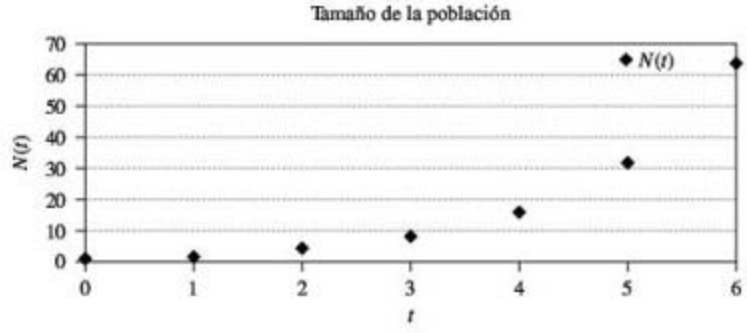
Tiempo (min)	0	20	40	60	80	100	120
Tamaño de la población	1	2	4	8	16	32	64

Podemos simplificar la descripción del crecimiento de esta población si medimos el tiempo en unidades más convenientes. Supongamos que una unidad de tiempo equivale a 20 minutos. Dos unidades de tiempo corresponderán así a 40 minutos, tres unidades de tiempo a 60 minutos, y así sucesivamente. Reproducimos a continuación la tabla del crecimiento de la población con estas nuevas unidades.

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6
Tamaño de la población	1	2	4	8	16	32	64

Estas nuevas unidades de tiempo hacen más sencillo escribir una fórmula general para el tamaño de la población en el instante t. Concretamente, denominando $N(t)$ al tamaño de la población en el instante t, donde t se mide ahora en estas nuevas unidades (una unidad es igual a 20 minutos), podemos concluir, observando la segunda tabla, que

$$N(t) = 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$



▲ **Figura 2.3**
Gráfica de $N(t) = 2^t$ para $t = 0, 1, 2, ..., 6$

Esta función ya apareció en la Sección 1.2. La Ecuación (2.1) permite determinar directamente el tamaño de la población en cualquier instante discreto t sin necesidad de calcular previamente los tamaños de la población en todos los instantes anteriores. Por ejemplo, en el instante $t = 5$, se obtiene $N(5) = 2^5 = 32$, como se indica en la segunda tabla, o en el instante $t = 10$, $N(10) = 2^{10} = 1024$. La Figura 2.3 muestra la gráfica de $N(t) = 2^t$.

La función $N(t) = 2^t$, $t = 0, 1, 2, ...$, es una función exponencial y el crecimiento de este tipo de poblaciones se denomina **crecimiento exponencial**. La base 2 refleja el hecho de que el tamaño de la población se dobla cada unidad de tiempo. Veremos esto más claramente después.

En vez de $N(t)$, escribiremos frecuentemente N_t. La notación con el subíndice sólo se utilizará para funciones $N(t)$ donde t sea entero no negativo. Por tanto, en vez de escribir $N(t) = 2^t$, $t = 0, 1, 2, ...$, se puede escribir , $N_t = 2^t$, $t = 0, 1, 2, ...$

Hasta ahora, se ha supuesto que $N(0) = N_0 = 1$. Veamos ahora qué aspecto tiene N_t si $N_0 = 100$. Independientemente del valor de N_0, el tamaño de la población se dobla cada unidad de tiempo. Se puede construir la siguiente tabla, en la que el tiempo de nuevo se mide en unidades de 20 minutos.

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6
Tamaño de la población	100	200	400	800	1600	3200	6400

A partir de la tabla, se puede obtener la forma general de N_t con $N_0 = 100$:

$$N_t = 100 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

El tamaño inicial de la población $N_0 = 100$ aparece entonces como un factor multiplicativo delante del término 2^t. Si no se desea especificar un valor numérico concreto para el tamaño de la población en el instante 0, se puede escribir

$$N_t = N_0 2^t, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

Ya se ha mencionado que la base 2 indica que el tamaño de la población se dobla cada unidad de tiempo. Sustituyendo 2 por otro número se pueden modelar otras poblaciones, por ejemplo

$$N_t = 3^t, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

modela una población con $N_0 = 1$ que triplica su tamaño cada unidad de tiempo.

Tiempo	0	1	2	3	4
Tamaño de la población	1	3	9	27	81

Ahora que tenemos alguna experiencia con el crecimiento exponencial en tiempo discreto, se puede presentar la fórmula general

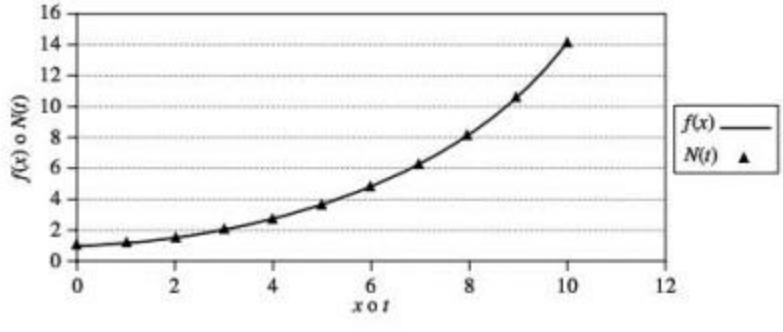
$$N_t = N_0 R^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

El parámetro R es una constante positiva que se denomina **constante de crecimiento**. La constante N_0 es no negativa e indica el tamaño de la población en el instante 0. Los supuestos $R > 0$ y $N_0 \geqslant 0$ se basan en razones biológicas, ya que valores negativos de R o de N_0 producirían tamaños de la población negativos, y el valor $R = 0$ carece de interés.

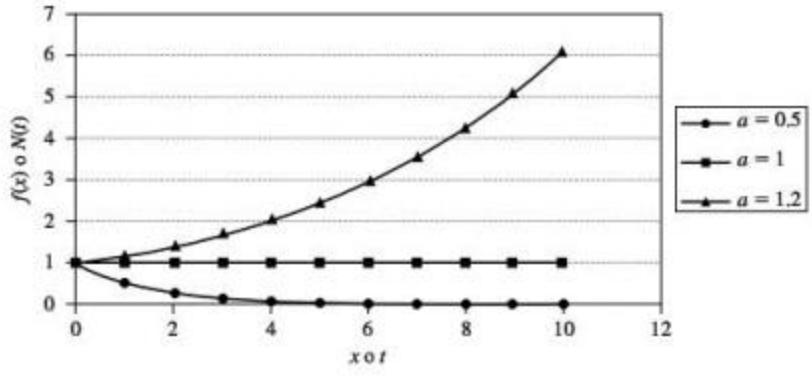
La función $N_t = N_0 R^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, es una función exponencial. Estas funciones se consideraron en el capítulo anterior. Concretamente, se estudió la función $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. Para facilitar las comparaciones, se escoge $N_0 = 1$ en la Expresión (2.2) y se restringe la función $f(x) = a^x$ a los valores $x \geqslant 0$. Si se escogen los mismos valores para R y a, las dos funciones N_t y $f(x) = a^x$ utilizan las mismas reglas para calcular sus valores. La diferencia está en el dominio: N_t está definida sólo para enteros no negativos, mientras que $f(x)$ está definida para todos los números reales no negativos. Las dos funciones concuerdan allí donde ambas están definidas. Esto se puede ver si se dibujan N_t y $f(x)$ en el mismo sistema de coordenadas para $R = a$ (*véase* la Figura 2.4).

En el Capítulo 1 vimos cómo se comporta la función $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$ para diferentes valores de a. Esto se puede utilizar ahora para estudiar el comportamiento de $N_t = N_0 R^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ En la Figura 2.5, se muestra la función $f(x) = a^x$, $x \geqslant 0$, para diferentes valores de a. Se ha dibujado superpuesta la gráfica de $N_t = N_0 R^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, para $R = a$ y $N_0 = 1$.

Puede verse que cuando $R > 1$, el tamaño de la población N_t crece indefinidamente; cuando $R = 1$, el tamaño de la población N_t permanece constante para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$; cuando $0 < R < 1$, el tamaño de la población N_t decrece y se aproxima a 0 a medida que t crece. El comportamiento es el mismo para todo tamaño inicial de la población positivo ($N_0 > 0$). Cuando $N_0 = 0$, entonces $N_t = 0$, $t = 1, 2, 3, \ldots$, lo que implica el tamaño de la población no cambia con el tiempo. Una población cuyo tamaño no varía con el tiempo se denomina **punto fijo** o **equilibrio**. Hablaremos de los puntos fijos después de presentar otras formas de representar la función N_t.



▲ **Figura 2.4**
Gráficas de $f(x) = a^x$, $0 \leqslant x \leqslant 10$, y de $N(t) = R^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$, para $a = R = 1.3$



▲ **Figura 2.5**
Gráficas de $f(x) = a^x$, $0 \leqslant x \leqslant 10$, y de $N(t) = R^t$, $t = 0, 1, 2, ..., 10$, para tres valores diferentes de $a = R$: $a = R = 0.5$, $a = R = 1$, $a = R = 1.2$

2.1.2 Ecuaciones recursivas

Cuando se construyeron las tablas de tamaño de la población de bacterias con $R = 2$ en intervalos de tiempo consecutivos, simplemente se dobló el tamaño de la población de un intervalo siguiente. En otras palabras, se calculó el tamaño de la población en el instante $t + 1$ basándose en el tamaño de la población en el instante t utilizando la ecuación

$$N_{t+1} = 2N_t \tag{2.3}$$

La Ecuación (2.3) se denomina **ecuación recursiva**, porque es una regla que se aplica de forma repetida para ir de un intervalo temporal al siguiente. Se dice que la Ecuación (2.3) define el tamaño de la población **recursivamente**.

Si se desea utilizar la Ecuación (2.3) para obtener el tamaño de la población, por ejemplo en $t = 4$, es necesario conocer el tamaño de la población en algún instante anterior, por ejemplo en $t = 0$. Supongamos que $N_0 = 1$. Aplicando entonces repetidamente la ecuación recursiva (2.3) se obtiene

$$N_1 = 2N_0 = 2$$
$$N_2 = 2N_1 = 4$$
$$N_3 = 2N_2 = 8$$
$$N_4 = 2N_3 = 16$$

Veremos seguidamente dos formas equivalentes de describir esta población. Para $t = 0, 1, 2, ...,$

$$N_t = 2^t \quad \text{es equivalente a} \quad N_{t+1} = 2N_t \quad \text{con } N_0 = 1$$

La ecuación recursiva para un valor general de R es

$$N_{t+1} = RN_t \quad \text{con} \quad N_0 = \text{tamaño de la población en el instante 0} \tag{2.4}$$

Aplicando repetidamente la expresión (2.4), se obtiene

$$N_1 = RN_0$$
$$N_2 = RN_1 = R^2N_0$$
$$N_3 = RN_2 = R^3N_0$$

$$N_4 = RN_3 = R^4N_0$$
$$\vdots$$
$$N_t = RN_{t-1} = R^tN_0$$

Las dos descripciones para $t = 0, 1, 2, \ldots,$

$N_t = N_0R^t$ y $N_{t+1} = RN_t$ con $N_0 =$ tamaño de la población en el instante 0

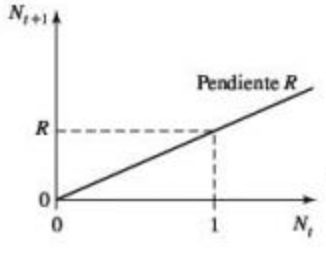
son equivalentes. Se dice que $N_t = N_0R^t$ es una **solución** de la ecuación recursiva $N_{t+1} = RN_t$ con condición inicial N_0 en el instante 0, ya que la función $N_t = N_0R^t$ cumple dicha ecuación recursiva con la condición inicial $N(0) = N_0$.

La visualización de las ecuaciones recursivas es una herramienta importante para entenderlas. Una forma de conseguirlo es dibujar N_t en el eje horizontal y N_{t+1} en el eje vertical. La ecuación recursiva con crecimiento exponencial

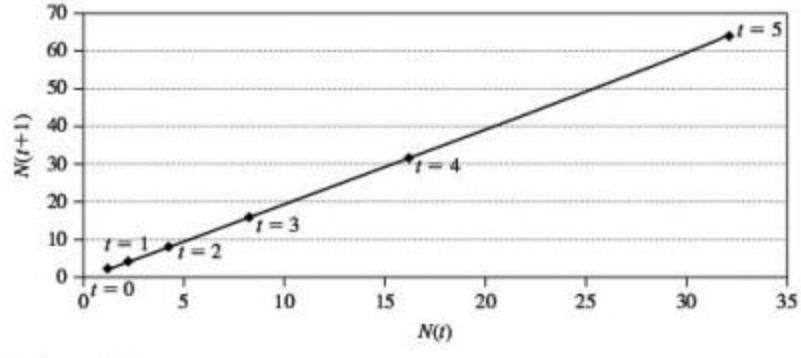
$$N_{t+1} = RN_t \tag{2.5}$$

es entonces una línea recta con pendiente R que pasa por el origen (*véase* la Figura 2.6). Como $N_t \geqslant 0$ por razones biológicas, se puede restringir la gráfica al primer cuadrante.

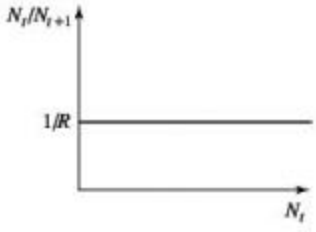
¿Qué nos indica esta gráfica? Para cualquier tamaño actual de población N_t, nos permite obtener el tamaño de la población en el siguiente intervalo temporal, es decir N_{t+1}. Por ejemplo, si se escoge $R = 2$ y $N_0 = 1$, entonces los tamaños sucesivos de la población son 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Para este valor de N_0, nunca aparecerá un tamaño de población por ejemplo de 5 o 10. Por tanto, para una selección específica de N_0, sólo se obtendrán unos puntos seleccionados de la gráfica $N_{t+1} = RN_t$ (véase la Figura 2.7). Una selección diferente de la condición inicial producirá un conjunto de puntos diferente.



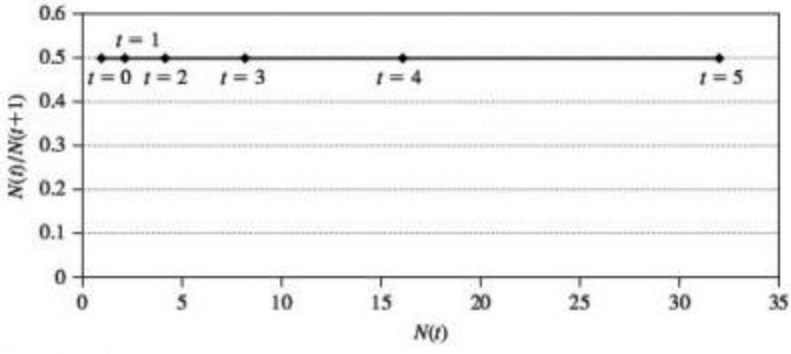
◀ **Figura 2.6**
Ecuación recursiva del crecimiento exponencial $N_{t+1} = RN_t$ cuando $R > 0$



▲ **Figura 2.7**
Tamaños sucesivos en la gráfica de la ecuación recursiva del crecimiento exponencial cuando $R = 2$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, 5$



▲ **Figura 2.8**
Gráfica de la razón de padres a hijos N_t/N_{t+1} en función de N_t cuando $N_t > 0$



▲ **Figura 2.9**
Gráfica de la razón de padres a hijos N_t/N_{t+1} en función de N_t cuando $N_0 = 1$ y $R = 2$

En la Figura 2.7 puede verse también que, a menos que se etiqueten los puntos de acuerdo con su correspondiente valor de t, no se puede decir en qué instante se produce un punto (N_t, N_{t+1}). Se dice que el tiempo está *implícito* en la gráfica. Es interesante comparar esto con la Figura 2.3, donde se dibujó N_t en función de t para los mismos valores de R y N_0. En la Figura 2.3 el tiempo está *explícito*.

La característica del crecimiento exponencial es que la razón de los tamaños de la población sucesivos N_t/N_{t+1} es constante. Cuando un $N_t > 0$ (y por tanto $N_{t+1} > 0$), como $N_{t+1} = RN_t$, entonces

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R}$$

si la población consiste en plantas anuales, la razón N_t/N_{t+1} se puede interpretar como la razón de padres a hijos. Si esta razón es constante, los padres producen el mismo número de hijos independientemente de la densidad de población actual. Este tipo de crecimiento se denomina **independiente de la densidad**.

Cuando $R > 1$, entonces $1/R$, la razón de padres a hijos, es menor que 1, lo que implica que el número de hijos supera al número de padres. El crecimiento independiente de la densidad con $R > 1$ produce un tamaño de población siempre creciente. Esto, en términos biológicos, no es realista ya que cualquier población experimentará más tarde o más temprano limitaciones de alimento o de hábitat que limitarán su crecimiento. En la Sección 2.3 se presentarán modelos que incluyen estas limitaciones.

La independencia de la densidad en el crecimiento exponencial se refleja en una gráfica de N_t/N_{t+1} en función de N_t que es una línea horizontal de nivel $1/R$ (*véase* la Figura 2.8).

Como ocurría anteriormente, en la gráfica de N_t/N_{t+1} en función de N_t sólo hay presentes un número seleccionado de puntos, y el tiempo está implícito en la gráfica. *Véase* la Figura 2.9 con $R = 2$ y $N_0 = 1$.

2.1.3. Problemas

En los Problemas 1-12, construya una tabla para $n = 1, 2, ..., 5$ y dibuje la función.

1. $f(n) = \dfrac{1}{n+2}$

2. $f(n) = \dfrac{1}{1+n^2}$

3. $f(n) = \dfrac{1}{(1+n)^2}$

4. $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

5. $f(n) = n^2 - 1$

6. $f(n) = n^3 + 1$

7. $f(n) = (n + 1)^2$

8. $f(n) = \sqrt{n + 4}$

9. $f(n) = e^{\sqrt{n}}$

10. $f(n) = 3e^{-0.1n}$

11. $f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

12. $f(n) = 2^{0.2n}$

13. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada hora. Es decir, cada hora, la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Si hay inicialmente una bacteria, obtenga el número de células después de una hora, de dos horas, de tres horas, de cuatro horas y de cinco horas.

14. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada 30 minutos. Es decir, cada 30 minutos, la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Si hay inicialmente una bacteria, obtenga el número de células después de una hora, de dos horas, de tres horas, de cuatro horas y de cinco horas.

15. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada 23 minutos. Es decir, cada 23 minutos, la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Si hay inicialmente una bacteria, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que haya 128 bacterias?

16. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada 42 minutos. Es decir, cada 42 minutos, la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Si hay inicialmente una bacteria, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que haya 512 bacterias?

17. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada 10 minutos. Es decir, cada 10 minutos, la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Si hay inicialmente tres bacterias, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que haya 96 bacterias?

18. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada 50 minutos. Es decir, cada 50 minutos, la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Si hay inicialmente 10 bacterias, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que haya 640 bacterias?

19. Obtenga la ecuación del crecimiento exponencial para una población que dobla su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 40 individuos en el instante cero.

20. Obtenga la ecuación del crecimiento exponencial para una población que dobla su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 53 individuos en el instante cero.

21. Obtenga la ecuación del crecimiento exponencial para una población que triplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 20 individuos en el instante cero.

22. Obtenga la ecuación del crecimiento exponencial para una población que triplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 72 individuos en el instante cero.

23. Obtenga la ecuación del crecimiento exponencial para una población que cuadruplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 5 individuos en el instante cero.

24. Obtenga la ecuación del crecimiento exponencial para una población que cuadruplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 17 individuos en el instante cero.

25. Obtenga la ecuación recursiva para una población que dobla su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 20 individuos en el instante cero.

26. Obtenga la ecuación recursiva para una población que dobla su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 37 individuos en el instante cero.

27. Obtenga la ecuación recursiva para una población que triplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 10 individuos en el instante cero.

28. Obtenga la ecuación recursiva para una población que triplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 84 individuos en el instante cero.

29. Obtenga la ecuación recursiva para una población que cuadruplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 30 individuos en el instante cero.

30. Obtenga la ecuación recursiva para una población que cuadruplica su tamaño cada unidad de tiempo y que tiene 62 individuos en el instante cero.

En los Problemas 31-34, dibuje las funciones $f(x) = a^x$, $x \in [0, \infty)$ y $N_t = R^t$, $t \in \mathbf{N}$, el mismo sistema de coordenadas para los valores indicados de a y R.

31. $a = R = 2$

32. $a = R = 3$

33. $a = R = 1/2$

34. $a = R = 1/3$

En los Problemas 35-46, obtenga los tamaños de la población para $t = 0, 1, 2, \ldots, 5$ para cada ecuación recursiva.

35. $N_{t+1} = 2N_t$ con $N_0 = 3$

36. $N_{t+1} = 2N_t$ con $N_0 = 5$

37. $N_{t+1} = 3N_t$ con $N_0 = 2$

38. $N_{t+1} = 3N_t$ con $N_0 = 7$

39. $N_{t+1} = 5N_t$ con $N_0 = 1$

40. $N_{t+1} = 7N_t$ con $N_0 = 4$

41. $N_{t+1} = \frac{1}{2}N_t$ con $N_0 = 1024$

42. $N_{t+1} = \frac{1}{2}N_t$ con $N_0 = 4096$

43. $N_{t+1} = \frac{1}{3}N_t$ con $N_0 = 729$

44. $N_{t+1} = \frac{1}{3}N_t$ con $N_0 = 3645$

45. $N_{t+1} = \frac{1}{5}N_t$ con $N_0 = 31\,250$

46. $N_{t+1} = \frac{1}{4}N_t$ con $N_0 = 8192$

En los Problemas 47-58, escriba N_t en función de t para cada ecuación recursiva.

47. $N_{t+1} = 2N_t$ con $N_0 = 15$

48. $N_{t+1} = 2N_t$ con $N_0 = 7$

49. $N_{t+1} = 3N_t$ con $N_0 = 12$

50. $N_{t+1} = 3N_t$ con $N_0 = 3$

51. $N_{t+1} = 4N_t$ con $N_0 = 24$

52. $N_{t+1} = 5N_t$ con $N_0 = 17$

53. $N_{t+1} = \frac{1}{2}N_t$ con $N_0 = 5000$

54. $N_{t+1} = \frac{1}{2}N_t$ con $N_0 = 2300$

55. $N_{t+1} = \frac{1}{3}N_t$ con $N_0 = 8000$

56. $N_{t+1} = \frac{1}{3}N_t$ con $N_0 = 3500$

57. $N_{t+1} = \frac{1}{5}N_t$ con $N_0 = 1200$

58. $N_{t+1} = \frac{1}{7}N_t$ con $N_0 = 6400$

En los Problemas 59-66, dibuje la recta $N_{t+1} = RN_t$ en el plano $N_t - N_{t+1}$ para el valor indicado de R y localice los puntos (N_t, N_{t+1}), $t = 0$, 1 y 2 para el valor dado de N_0.

59. $R = 2, N_0 = 2$

60. $R = 2, N_0 = 3$

61. $R = 3, N_0 = 1$

62. $R = 4, N_0 = 2$

63. $R = \frac{1}{2}, N_0 = 16$

64. $R = \frac{1}{2}, N_0 = 64$

65. $R = \frac{1}{2}, N_0 = 81$

66. $R = \frac{1}{4}, N_0 = 16$

En los Problemas 67-74, dibuje la recta $\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R}$ en el plano $N_t - \frac{N_t}{N_{t+1}}$ para el valor indicado de R y localice los puntos $\left(N_t, \frac{N_t}{N_{t+1}}\right)$, $t = 0$, 1 y 2 para el valor dado de N_0.

67. $R = 2, N_0 = 2$

68. $R = 2, N_0 = 4$

69. $R = 3, N_0 = 2$

70. $R = 4, N_0 = 1$

71. $R = \frac{1}{2}, N_0 = 16$

72. $R = \frac{1}{2}, N_0 = 128$

73. $R = \frac{1}{3}, N_0 = 27$

74. $R = \frac{1}{4}, N_0 = 64$

75. Una población de pájaros vive en un hábitat en el que el número de lugares de anidamiento es un factor limitador del crecimiento de la población. ¿En cuál de los siguientes casos se podría esperar que el crecimiento de esta población de pájaros en las generaciones inmediatamente posteriores se pudiera aproximar razonablemente bien mediante un modelo de crecimiento exponencial?

(a) Todos los lugares de anidamiento están ocupados.

(b) La población de pájaros acaba de invadir el hábitat y el tamaño de la población es todavía mucho menor que los lugares de anidamiento disponibles.

(c) En el año anterior, un huracán mató a más del 90% de los pájaros de este hábitat.

76. Los registros de polen indican que el número de pinos escoceses (*Pinus sylvestris*) ha crecido exponencialmente durante unos 500 años tras la colonización de la región de Norfolk de Gran Bretaña hace unos 9500 años ¿Puede encontrar una posible explicación de este fenómeno?

77. El crecimiento exponencial se produce generalmente cuando el crecimiento de la población es independiente de la densidad. Haga una lista de condiciones bajo las que una población podría interrumpir su crecimiento exponencial.

2.2 SUCESIONES

2.2.1 ¿Qué son las sucesiones?

Antes de considerar otros modelos de población en tiempo discreto, es necesario desarrollar más le teoría de funciones con dominio **N**. Una función

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$
$$n \to f(n)$$

se denomina **sucesión**. Utilizaremos también la notación $a_n = f(n)$ y escribiremos $\{a_n\}$ para indicar la sucesión completa. Se pueden enumerar los valores de la sucesión $\{a_n\}$ en orden creciente del índice n:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

Ejemplo 1 La sucesión

$$a_n = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

toma los valores

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 2 La sucesión

$$a_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

toma los valores

$$0, 1, 4, 9, 16, \ldots \quad \blacktriangleleft$$

Cuando se observa una sucesión y se reconoce un patrón, es posible muchas veces escribir una expresión general de a_n.

Ejemplo 3 Obtenga a_n para la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$

Solución

Observando la sucesión, se pueden adivinar los términos que siguen, concretamente $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, y así sucesivamente. Por tanto, se obtiene que

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

No es necesario que la sucesión empiece en $n = 0$. Si se inicia la sucesión en $n = 1$, se puede escribir

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En cualquier caso, es importante incluir el dominio de la sucesión. ◀

Ejemplo 4 Obtenga a_n para la sucesión

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \cdots$$

Solución

La sucesión van alternando los signos. El primer término es positivo, el segundo es negativo, el tercero es positivo y así sucesivamente. Esto indica que es necesario un factor $(-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Los numeradores son todos iguales a 1, y los denominadores son cuadrados de sucesivos enteros, empezando por el entero 1. Por tanto, se puede escribir

$$a_0 = (-1)^0 \frac{1}{(1)^2} = 1$$

$$a_1 = (-1)^1 \frac{1}{(2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_2 = (-1)^2 \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

y así sucesivamente. Esto sugiere que

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si se desea comenzar la sucesión en $n = 1$, se puede escribir

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

o

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Obsérvese cuidadosamente el exponente de (-1). Cualquier término de la forma $(-1)^n$, $(-1)^{n-1}$ o $(-1)^{n+1}$ produce signos alternos. Como el primer término de la sucesión $\{a_n\}$ es positivo, se necesita utilizar $(-1)^n$ si se empieza con $n = 0$, y o bien $(-1)^{n-1}$ o $(-1)^{n+1}$ si se empieza con $n = 1$. ◀

El modelo de crecimiento exponencial que se consideró en la sesión anterior es un ejemplo de sucesión. Se dieron dos descripciones, una explícita y la otra

recursiva. En general, se pueden usar las dos descripciones para sucesiones. Una descripción explícita es de la forma

$$a_n = f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $f(n)$ es una función de n.

Una descripción recursiva es de la forma

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $f(a_n)$ es una función de a_n. (Las funciones f en las dos descripciones serán en general diferentes). Si, como se muestra aquí, el valor de a_{n+1} sólo depende del valor una unidad de tiempo atrás, concretamente a_n, entonces la ecuación recursive se denomina **ecuación recursiva de primer orden**. Posteriormente en este capítulo veremos un ejemplo de ecuación recursiva de segundo orden, donde el valor de a_{n+1} depende de los valores a_n y a_{n-1}; es decir, de los valores una y dos unidades de tiempo atrás. Para determinar el valor de los miembros sucesivos de la secuencia dada por una ecuación recursiva, se necesita especificar un valor inicial, concretamente a_0 si se empieza la sucesión en $n = 0$ (o a_1 si se empieza la sucesión en $n = 1$).

Utilizando la notación de esta sección, la expresión explícita del modelo de crecimiento exponencial de la sesión anterior es

$$a_n = a_0 R^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y la expresión recursiva es

$$a_{n+1} = Ra_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2.2.2 Límites

Cuando se estudia la evolución de las poblaciones con el tiempo, a menudo se está interesado en su **comportamiento largo plazo**. Concretamente, si N_t es el tamaño de la población en el instante t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, se desea saber cómo se comporta N_t a medida que t se hace más y más grande, o, en términos matemáticos, a medida que t tiende a infinito. Utilizando la notación de esta sección, se desea saber el comportamiento de a_n cuando n tiende a infinito. Cuando se hace tender n a infinito, se dice que «se toma el límite de la sucesión a_n cuando n tiende a infinito» y se utiliza la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} a_n$$

que se lee «límite de a_n cuando n tiende a infinito». La primera notación se usa para escribir ecuaciones y la segunda cuando la expresión aparece en el texto. Comentaremos primero los límites de forma informal, para tener una idea de lo que puede ocurrir.

Ejemplo 5 Sea

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obtenga $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución

Introduciendo sucesivos valores de n en la expresión de a_n, se obtiene que es la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

lo que permite intuir que los términos se aproximan a 0 cuando n tiende a infinito. Este es de hecho el caso, y se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Como el valor del límite es único, se dice que el límite existe. ◀

Debe tenerse en cuenta que sustituir valores sucesivos de n en a_n es sólo una forma heurística de determinar cómo se comporta a_n cuando n tiende a ∞.

Ejemplo 6 Sea

$$a_n = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución

La sucesión es de la forma

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

y puede verse que sus términos se van alternando entre 1 y -1. Por tanto, no existe un número único al que se le pueda asignar el límite de a_n cuando n tiende a ∞. En ese caso se dice que el límite no existe. ◀

Ejemplo 7 Sea

$$a_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obenga $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución

Los sucesivos términos de a_n,

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

presentan un comportamiento siempre creciente. Por tanto, a_n tiende a infinito cuando $n \to \infty$, y se puede escribir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Como infinito ($\infty$) no es un número real, se dice que el límite no existe. ◀

Se presenta a continuación un ejemplo de existencia de límite, antes de dar una definición formal.

Ejemplo 8 Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$

Solución

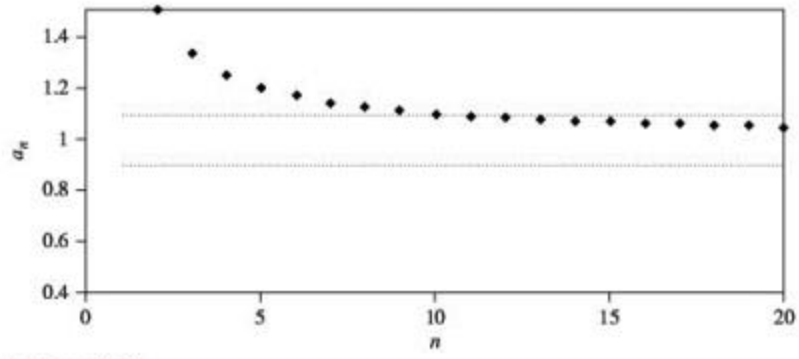
El cálculo de términos sucesivos, empezando por $n = 1$ produce,

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$$

Puede verse que los términos se van acercando más y más a 1, y de hecho puede demostrarse que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$ ◀

La forma en que se han resuelto los cuatro ejemplos anteriores no es satisfactoria. En realidad, se han adivinado los valores de los límites. ¿Cómo podemos saber si nuestra intuición ha sido correcta? Existe una definición formal de límite que se puede utilizar en su cálculo. Sin embargo, excepto en los casos más simples, la definición formal es muy engorrosa de usar. Afortunadamente, hay leyes de límites que se basan en límites simples (que se pueden calcular utilizando la definición formal). Se presentará en primer lugar la definición formal (como un punto opcional), y después se presentarán las leyes de los límites.



▲ **Figura 2.10**
Convergencia de la secuencia $a_n = \frac{n+1}{n}$ al límite $a = 1$

Definición formal de límite (Opcional) El Ejemplo 8 motiva la definición formal de límite. Cuando se adivinó el límite del Ejemplo 8, se vio que los términos sucesivos se aproximaban a 1. Esto significa que, independientemente de lo pequeño que se escoja el intervalo alrededor del 1, para valores de n suficientemente grandes, todos los valores de la sucesión deberán estar en el interior de dicho intervalo. Gráficamente, esto quiere decir que todos los puntos de la gráfica de a_n deben estar dentro de las dos líneas de puntos de la Figura 2.10 para valores de n suficientemente grandes, independientemente de lo cerca que estén las líneas de puntos a la línea horizontal de valor 1. Si se traslada esta idea a una definición formal para el caso general, se llega a la siguiente definición

Definición formal de límite La sucesión $\{a_n\}$ tiene como **límite** a, lo que se escribe como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > N$$

Si el límite existe, se dice que la sucesión es **convergente** y que a_n **converge** al límite a cuando n tiende a infinito. Si la sucesión no tiene límite, se denomina **divergente**.

El valor de N dependerá en general de ε: cuanto menor sea ε, mayor tendrá que ser N. Como es importante entender lo que significa que una secuencia sea convergente, se ilustra en la Figura 2.11. Las líneas horizontales de puntos están en los valores $a + \varepsilon$ y $a - \varepsilon$. Forman una banda de anchura centrada en la línea horizontal de valor a. Los puntos a_n que estén dentro de esta banda cumplirán la inecuación $|a_n - a| < \varepsilon$. Para que una secuencia sea convergente, se requiere que *todos* los puntos a_n estén dentro de esta banda para *todo* n suficientemente grande (concretamente, mayor que un número N).

Ejemplo 9 Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Solución

Antes de trabajar con un valor de ε, intentemos encontrar n para un valor de ε concreto, por ejemplo, $\varepsilon = 0.03$. Se necesita encontrar un entero n tal que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0.03 \quad \text{siempre que } n > N$$

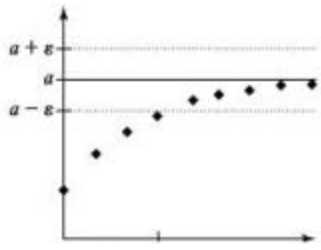


Figura 2.11
Una ilustración de la definición formal de límite para mostrar la convergencia de la secuencia a_n al límite a cuando $n \to \infty$. Para todo $n > N$, los valores a_n están en una banda de anchura 2ε centrada en a.

Resolviendo la inecuación $|\frac{1}{n} - 0| < 0.03$, para valores de n positivos, se obtiene

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}03 \quad \text{o} \quad n > \frac{1}{0{,}03} \approx 33{,}33$$

El mínimo valor de N que se puede elegir es $N = 33$, que corresponde al mayor entero menor o igual que 1/0.03. Valores sucesivos de $n > 33$ nos permiten confiar en que vamos por el buen camino, pero no demuestran que nuestra elección sea correcta:

$$a_{34} = \frac{1}{34} \approx 0{,}0294, \quad a_{35} = \frac{1}{35} \approx 0.0286, \text{ etc.}$$

Para ver que la elección de N funciona, es necesario demostrar que $n > 33$ implica que $|1/n| < 0.03$. Pero $n > 33$ implica que $1/n \leqslant 1/34 \approx 0.0294$. Como $n > 0$, resulta

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0.03 \quad \text{siempre que } n > 33$$

Para demostrar que $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge a 0, es necesario realizar los mismos cálculos para un valor de ε arbitrario. Es decir, es necesario demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un N tal que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n > N$$

Para encontrar un candidato para N, se resuelve la inecuación $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$. Como $\frac{1}{n} > 0$, se puede eliminar el valor absoluto, y se obtiene

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{o} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Supongamos que se escoge N como el mayor entero menor o igual que $1/\varepsilon$. Si $n > N$, entonces $n \geqslant N + 1$, que es equivalente a $1/n \leqslant 1/(N + 1)$. Como N es el mayor entero que es menor o igual que $1/\varepsilon$, se deduce que $1/n \leqslant 1/(N + 1) < \varepsilon \leqslant 1/N$, para $n > N$. Esto, junto con la condición $n > 0$, demuestra que si N es el mayor entero que es menor o igual que $1/\varepsilon$, entonces

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n > N \qquad \blacktriangleleft$$

Leyes de los límites La definición formal de límite es engorrosa cuando se desea calcular límites en ejemplos concretos. Afortunadamente, existen leyes de los límites que facilitan su cálculo.

LEYES DE LOS LÍMITES

Si existen $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$, y c es una constante. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \text{ suponiendo que } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Aunque para utilizar las leyes de los límites no es necesario conocer la definición formal de límite, es necesario, para los dos ejemplos siguientes, saber que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{2.6}$$

que se demostró en el Ejemplo 9 (utilizando la definición formal de límite).

Ejemplo 10 Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$

Solución

Se descompone $\frac{n+1}{n}$ en suma de dos términos, como $1 + \frac{1}{n}$. Como $\lim_{n\to\infty} 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ existen (el primero es igual a 1 y el segundo es igual a 0, de acuerdo con (2.6)), se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (1) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1 \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 11 Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2}$$

Solución

Si se escribe a_n como

$$a_n = \frac{4n^2 - 1}{n^2} = 4 - \frac{1}{n^2} = 4 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

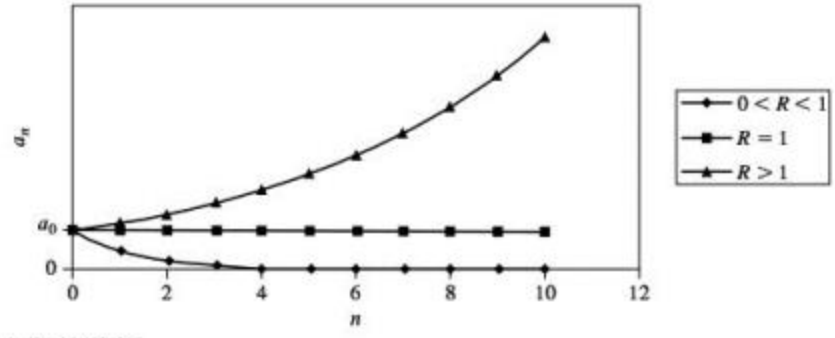
Como $\lim_{n\to\infty} 4$ y $\lim_{n\to\infty}$ existen, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 4 - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)$$

$$= 4 - 0 \cdot 0 = 4 \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 12 Sin demostrarlo, estableceremos el comportamiento a largo plazo del crecimiento exponencial. Para $R > 0$, el crecimiento exponencial se expresa como

$$a_n = a_0 R^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$



▲ **Figura 2.12**
Crecimiento exponencial en el Ejemplo 12 para tres valores diferentes de R

La Figura 2.12 indica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < R < 1 \\ a_0 & \text{si } R = 1 \\ \infty & \text{si } R > 1 \end{cases}$$

Esto se puede demostrar rigurosamente usando la definición formal de límite. ◀

2.2.3 Ecuaciones recursivas

En la subsección anterior se ha visto cómo obtener $\lim_{n\to\infty} a_n$ cuando a_n se expresa explícitamente como función de n. Pero, ¿cómo se pueden obtener los límites cuando a_n se expresa recursivamente?

Cuando se define recursivamente una sucesión de primer orden $\{a_n\}$ se expresa a_{n+1} en función de a_n y se especifica un valor de a_0. Así se pueden calcular los valores sucesivos de a_n, que nos permitirían intuir el límite si existe. En algunos casos, se puede obtener una solución de la ecuación recursiva, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13 Calcule a_n para $n = 1, 2, ..., 5$ para

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{3}{4} \quad \text{con } a_0 = 2 \tag{2.7}$$

Obtenga una solución de la ecuación recursiva y empléela para obtener el comportamiento límite de la sucesión.

Solución

Aplicando repetidamente la ecuación recursiva se obtiene

$$a_1 = \frac{1}{4} a_0 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$a_2 = \frac{1}{4} a_1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

$$a_3 = \frac{1}{4} a_2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{16} + \frac{3}{4} = \frac{65}{64} \approx 1.0156$$

$$a_4 = \frac{1}{4} a_3 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{65}{64} + \frac{3}{4} = \frac{257}{256} \approx 1.0039$$

$$a_5 = \frac{1}{4} a_4 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{257}{256} + \frac{3}{4} = \frac{1025}{1024} \approx 1.0010$$

Parece existir un patrón, de forma que los denominadores son potencias de 4 y los numeradores valen una unidad más que los denominadores. Por tanto

$$a_n = \frac{4^n + 1}{4^n} \tag{2.8}$$

Y se puede comprobar que de hecho ésa es la solución de la ecuación recursiva. Primero, es necesario comprobar la condición inicial: $a_0 = \frac{4^0+1}{4^0} = \frac{2}{1} = 2$, que concuerda con la condición inicial dada. Seguidamente es necesario comprobar si a_n satisface la ecuación recursiva. Si se escribe

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1} + 1}{4^{n+1}} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 4^n} = 1 + \frac{1}{4}\frac{1}{4^n}$$

Además, $a_n = \frac{4^n+1}{4^n}$ implica que $a_n = 1 + \frac{1}{4^n}$ o que $\frac{1}{4^n} = a_n - 1$. Utilizando esto y simplificando resulta

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4}(a_n - 1) = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$$

que es la ecuación recursiva dada, lo que demuestra que (2.8) es la solución de (2.7). Ahora se puede obtener el límite utilizando (2.8):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 1}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) = 1$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$, de acuerdo con el Ejemplo 12. ◀

La operación de la expresión explícita de a_n, como en el Ejemplo 13, no es en general una estrategia posible ya que la resolución de ecuación recursiva puede ser muy difícil o incluso imposible ¿cómo se puede entonces saber algo acerca del comportamiento límite de una sucesión definida recursivamente?

El procedimiento que sigue permite identificar *candidatos* a límites. Son los puntos fijos que se mencionaron en la Sección 2.1. Un **punto fijo** es un punto tal que, si a_0 es igual al punto fijo, entonces todos los valores sucesivos de a_n son también iguales al punto fijo (ésta es la definición de punto fijo). En términos matemáticos, si denominamos a al punto fijo, entonces sí $a_0 = a$, se cumple que $a_1 = a$, $a_2 = a$, etc.

Entonces, si $a_{n+1} = f(a_n)$, significa que si $a_0 = a$ y a es un punto fijo, se cumple que $a_1 = f(a_0) = f(a) = a$, $a_2 = f(a_1) = f(a) = a$, y así sucesivamente. Es decir, un punto fijo cumple la ecuación

$$a = f(a) \tag{2.9}$$

que se utilizará para encontrar puntos fijos.

En el Ejemplo 13, la ecuación recursiva era $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$. Los puntos fijos de esta ecuación recursiva cumplen por tanto

$$a = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}$$

Despejando a, se obtiene $a = 1$. Esto quiere decir que en el Ejemplo 13, el punto fijo es también el punto límite. Este no es siempre el caso: un punto fijo es solamente un candidato a límite, y una sucesión no tiene porque converger a un punto fijo dado (a no ser que a_0 sea de igual al punto fijo). El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 14 Sea

$$a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$$

Obtenga los puntos fijos y estudie el comportamiento límite de a_n cuando a_0 no es igual al punto fijo.

Solución

Para encontrar los puntos fijos, hay que resolver

$$a = \frac{3}{a}$$

que es equivalente a $a^2 = 3$, y por tanto $a = \sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}$. Estos son los dos puntos fijos. Si $a_0 = \sqrt{3}$, entonces $a_1 = \sqrt{3}$, $a = {}_2 = \sqrt{3}$, etc. Asimismo, si $a_0 = -\sqrt{3}$, entonces $a_1 = -\sqrt{3}$, $a_2 = -\sqrt{3}$, etc.

Empecemos con un valor que no es igual a uno de los puntos fijos, por ejemplo $a_0 = 2$. Utilizando la ecuación recursiva, se obtiene

$$a_1 = \frac{3}{a_0} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \frac{3}{a_1} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$a_3 = \frac{3}{a_2} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{3}{a_3} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

y así sucesivamente. Es decir, los términos sucesivos van alternando entre 2 y 3/2. Si se escoge otro valor inicial, por ejemplo $a_0 = -3$, entonces

$$a_1 = \frac{3}{a_0} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$a_2 = \frac{3}{a_1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$a_3 = \frac{3}{a_2} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$a_4 = \frac{3}{a_3} = \frac{3}{-1} = -3$$

y así sucesivamente. Los términos sucesivos van alternando entre -3 y -1. La alternancia entre dos valores, uno de los cuales es el valor inicial, ocurre siempre que el valor inicial no sea uno de los puntos fijos. Concretamente,

$$a_1 = \frac{3}{a_0} \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{3}{a_1} = \frac{3}{\frac{3}{a_0}} = a_0$$

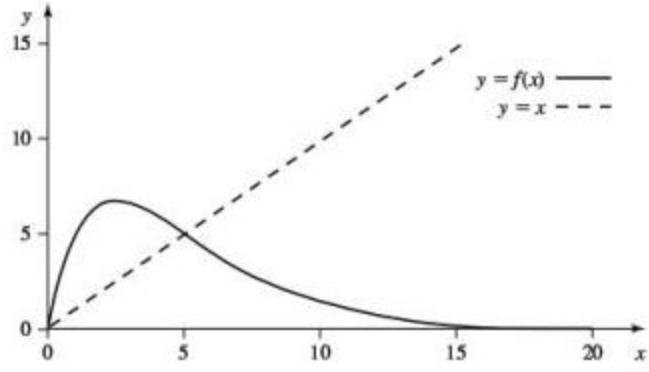
y por tanto a_3 vale lo mismo que a_1, a_4 vale lo mismo que a_2, y por tanto que a_0, y así sucesivamente. ◀

Este último ejemplo ilustra que los puntos fijos sólo son candidatos a límites y que, dependiendo de la condición inicial, la sucesión $\{a_n\}$ puede converger o no converger. Sin embargo, si se sabe que la sucesión $\{a_n\}$ converge, su límite debe ser uno de los puntos fijos.

▶ Ejemplo 15 Suponga que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ para

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \quad \text{con } a_0 = 2$$

Obtenga $\lim_{n\to\infty} a_n$.



▲ **Figura 2.13**
Método gráfico para obtener los puntos fijos (*véase* el texto para la explicación)

Solución

Como el problema dice que existe el límite, no hay que preocuparse sobre su existencia. El problema que resta es identificar el límite. Para ello, se calculan los puntos fijos, resolviendo

$$a = \sqrt{3a}$$

que tiene dos soluciones, concretamente $a = 0$ y $a = 3$. Cuando $a_0 = 2$, se cumple que $a_n > 2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, etc., por lo que podemos excluir $a = 0$ como valor del límite. Esto deja sólo una posibilidad, por lo que se concluye que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 3$$

Utilizando una calculadora, se pueden obtener valores sucesivos de a_n, que se recogen en la siguiente tabla (con 2 decimales de exactitud). Los valores de la tabla sugieren que el límite es 3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	2	2.45	2.71	2.85	2.92	2.96	2.98	2.99

◀

Existe un método gráfico para encontrar los puntos fijos, que se mencionará brevemente aquí y se comentará con más detalle en la Sección 5.6. Si la ecuación recursiva es de la forma $a_{n+1} = f(a_n)$, entonces los puntos fijos satisfacen la ecuación $a = f(a)$. Esto sugiere que si se dibuja $y = f(x)$ e $y = x$ en el mismo sistema de coordenadas, los puntos fijos estarán localizados allí donde se crucen las dos gráficas, como se muestra en la Figura 2.13.

En la Sección 5.6 se volverá a considerar la relación entre los puntos fijos y los límites. Allí se presentarán métodos que permiten determinar si una sucesión converge a un punto fijo en particular.

2.2.4. Problemas

(2.2.1)

En los Problemas 1-8, determine los valores de la sucesión $\{a_n\}$ *para* $n = 1, 2, \ldots, 5$.

1. $a_n = n$

2. $a_n = 3n^2$

3. $a_n = \dfrac{1}{n+2}$

4. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

5. $a_n = (-1)^n n$

6. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

7. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

8. $a_n = n^3\sqrt{n+1}$

En los Problemas 9-16, obtenga los cuatro valores siguientes de la sucesión basándose en los valores de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_5$.

9. 1, 2, 3, 4, 5

10. $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$

11. $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}$

12. $-1, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{25}$

13. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$

14. $\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{10}, \dfrac{9}{17}, \dfrac{16}{26}, \dfrac{25}{37}$

15. $\sqrt{1+e}, \sqrt{2+e^2}, \sqrt{3+e^3}, \sqrt{4+e^4}, \sqrt{5+e^5}$

16. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}, -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}, -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{10}$

En los Problemas 17-28, obtenga una expresión para a_n *basándose en los valores de* $a_0, a_1, a_2, \ldots$

17. 0, 1, 2, 3, 4, ...

18. 0, 2, 4, 6, 8, ...

19. 1, 2, 4, 8, 16, ...

20. 1, 3, 5, 7, 9, ...

21. $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$

22. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, \ldots$

23. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

24. $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$

25. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, \ldots$

26. $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{18}, -\dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{50}, \ldots$

27. $\operatorname{sen}\pi, \operatorname{sen}(2\pi), \operatorname{sen}(3\pi), \operatorname{sen}(4\pi), \operatorname{sen}(5\pi), \ldots$

28. $-\cos\dfrac{\pi}{2}, \cos\dfrac{\pi}{4}, -\cos\dfrac{\pi}{6}, \cos\dfrac{\pi}{8}, -\cos\dfrac{\pi}{10}, \ldots$

(2.2.2)

En los Problemas 29-36, escriba los cinco primeros términos de la sucesión para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *y calcule* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

29. $a_n = \dfrac{1}{n+2}$

30. $a_n = \dfrac{2}{n+1}$

31. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

32. $a_n = \dfrac{2n}{n+2}$

33. $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

34. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

35. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

36. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3+3}$

En los Problemas 37-48, escriba los cinco primeros términos de la sucesión para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *y determine si existe* $\lim_{n\to\infty} a_n$. *Si existe, calcúlelo.*

37. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

38. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$

39. $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

40. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

41. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

42. $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

43. $a_n = \sqrt{n}$

44. $a_n = n^2$

45. $a_n = 2^n$

46. $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

47. $a_n = 3^n$

48. $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Definición formal de límite: en los Problemas 49-64, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *Obtenga el límite a y determine N de forma que* $|a_n - a| < \varepsilon$ *para todo* $n > N$ *para el valor dado de* ε.

49. $a_n = \dfrac{1}{n}, \varepsilon = 0.01$

50. $a_n = \dfrac{1}{n}, \varepsilon = 0.02$

51. $a_n = \dfrac{1}{n^2}, \varepsilon = 0.01$

52. $a_n = \dfrac{1}{n^2}, \varepsilon = 0.001$

53. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \varepsilon = 0.1$

54. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \varepsilon = 0.05$

55. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \varepsilon = 0.01$

56. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \varepsilon = 0.001$

57. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}, \varepsilon = 0.001$

58. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}, \varepsilon = 0.0001$

59. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\varepsilon = 0.01$

60. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\varepsilon = 0.05$

61. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, $\varepsilon = 0.01$

62. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, $\varepsilon = 0.05$

63. $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$, $\varepsilon = 0.01$

64. $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$, $\varepsilon = 0.001$

Definición formal de límite: en los Problemas 65-70, utilice la definición formal para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*; es decir, obtenga el valor de N tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un N tal que* $|a_n - a| < \varepsilon$ *siempre que* $n > N$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

67. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

68. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

En los Problemas 71-82, utilice las leyes de los límites para determinar $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

71. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

72. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2+1}\right)$

73. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

74. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{n}\right)$

75. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$

76. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-5}{n^2}\right)$

77. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2-1}\right)$

78. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n^2-4}\right)$

79. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

80. $\lim\limits_{n\to\infty} (3^{-n} - 4^{-n})$

81. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2^{-n}}{n}$

82. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3^{-n}}{n}$

(2.2.3)

En los Problemas 83-92, la sucesión $\{a_n\}$ *se define recursivamente. Calcule* a_n *para* $n = 1, 2, \ldots, 5$.

83. $a_{n+1} = 2a_n$, $a_0 = 1$

84. $a_{n+1} = 2a_n$, $a_0 = 3$

85. $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $a_0 = 1$

86. $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $a_0 = 2$

87. $a_{n+1} = 4 - 2a_n$, $a_0 = 5$

88. $a_{n+1} = 4 - 2a_n$, $a_0 = \frac{4}{3}$

89. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$, $a_0 = 1$

90. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+3}$, $a_0 = 2$

91. $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $a_0 = 1$

92. $a_{n+1} = 5a_n - \dfrac{5}{a_n}$, $a_0 = 2$

En los Problemas 93-102, la secuencia $\{a_n\}$ *se define recursivamente. Obtenga los puntos fijos de* $\{a_n\}$.

93. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + 2$

94. $a_{n+1} = \dfrac{1}{3} a_n + \dfrac{4}{3}$

95. $a_{n+1} = \dfrac{2}{5} a_n - \dfrac{9}{5}$

96. $a_{n+1} = -\dfrac{1}{3} a_n + \dfrac{1}{4}$

97. $a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n}$

98. $a_{n+1} = \dfrac{7}{a_n}$

99. $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n+2}$

100. $a_{n+1} = \dfrac{3}{a_n-2}$

101. $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$

102. $a_{n+1} = \sqrt{7a_n}$

En los Problemas 103-110, suponga que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$. *Obtenga todos los puntos fijos de* $\{a_n\}$ *y utilice una tabla u otro tipo de razonamiento para intuir qué punto fijo es el valor límite para la condición inicial dada.*

103. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + 5)$, $a_0 = 1$

104. $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(a_n + \dfrac{1}{9}\right)$, $a_0 = 1$

105. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $a_0 = 1$

106. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $a_0 = 0$

107. $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$, $a_0 = 0.1$

108. $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$, $a_0 = 0$

109. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{4}{a_n}\right)$, $a_0 = 1$

110. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{9}{a_n}\right)$, $a_0 = -1$

2.3 MÁS MODELOS DE POBLACIONES

Una aplicación biológica importante de las sucesiones son los modelos de poblaciones de reproducción estacional con generaciones no solapadas, en los que el tamaño de la población en una generación sólo depende del tamaño de la población en la generación anterior. El modelo de crecimiento exponencial de la Sección 2.1 entra en esta categoría. Denominaremos a la población en el instante t, $N(t)$ o N_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ Para modelar cómo se relaciona el tamaño de la población en la generación $t + 1$ con el tamaño de la población en la generación t, se puede escribir

$$N_{t+1} = f(N_t) \tag{2.10}$$

donde la función f expresa la dependencia de la densidad con la dinámica de la población.

Como se explicó en la Sección 2.2, una ecuación recursiva de la forma (2.10) se denomina recursiva de primer orden ya que para obtener el tamaño de la población en el instante $t + 1$ sólo se necesita conocer el tamaño de la población en el intervalo anterior t. Las ecuaciones recursivas se denominan también **ecuaciones en diferencias** o **mapas iterativos** [el nombre de *ecuación en diferencias* proviene de escribir la dinámica en la forma $N_{t+1} - N_t = g(N_t)$. El nombre de *mapa iterativo* hace referencia a la definición recursiva].

Al estudiar los modelos de poblaciones, frecuentemente el interés está en el comportamiento de la población a largo plazo. Es decir, ¿alcanzará el tamaño de la población un valor constante, oscilará de forma predecible o fluctuará ampliamente sin ningún patrón establecido? En los siguientes ejemplos exploraremos estos casos, y se verá que los modelos de poblaciones en tiempo discreto muestran un comportamiento muy rico y complejo.

2.3.1 Crecimiento de poblaciones restringido: curva de reclutamiento de Beverton-Holt

En la Sección 2.1, se presentó el crecimiento exponencial definido por la ecuación recursiva

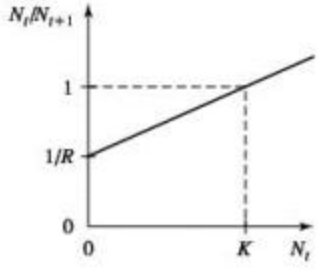
$$N_{t+1} = RN_t \quad \text{con } N_0 = \text{tamaño de la población en el instante 0}$$

Cuando $R > 1$, el tamaño de la población crecerá indefinidamente, suponiendo que $N_0 > 0$. Puede comprenderse el motivo si se observa la razón de padres a hijos para $N_t > 0$, N_t/N_{t+1}, que es $1/R$, una constante en este caso. Esto significa que independientemente de la densidad actual de la población, el número de hijos por padre es constante. Esto se denomina crecimiento independiente de la densidad. Este crecimiento no es realista en términos biológicos. A medida que el tamaño de la población crece, los individuos empezarán a competir entre sí por los recursos como el alimento o los lugares de anidamiento. Esto reducirá el tamaño de la población. El crecimiento de la población que depende de su densidad se denomina crecimiento dependiente de la densidad.

Para obtener un modelo que incorpore una reducción del crecimiento cuando el tamaño de la población alcanza valores grandes, se puede comenzar con la razón de los tamaños sucesivos de la población en el modelo de crecimiento exponencial y suponer que N_0 es positivo, de forma que todos los tamaños de la población sean positivos:

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} \tag{2.11}$$

Cuando se puede considerar la razón como una función del tamaño de la población actual N_t, entonces la razón N_t/N_{t+1} es una función constante del tamaño actual de la población N_t. Esto se refleja como una línea horizontal en una gráfica en la que N_t esté en



▲ **Figura 2.14**
Crecimiento independiente de la densidad: la razón de padres a hijos crece en función del tamaño actual de la población (nótese que éste está definido sólo para $N_t > 0$)

el eje horizontal y la razón N_t/N_{t+1} en el eje vertical. Nótese que mientras la razón de padres a hijos N_t/N_{t+1} sea menor que 1, el tamaño de la población crecerá, ya que hay menos padres que hijos. Una vez que la razón es igual a 1, el tamaño de la población permanece constante de un intervalo temporal al siguiente. Cuando esta razón es mayor que 1, el tamaño de la población disminuye.

Para modelar la reducción en el crecimiento cuando el tamaño de la población es grande, se abandona la suposición de que la razón N_t/N_{t+1} es constante y se asume que la razón de padres a hijos N_t/N_{t+1} es una función creciente con el tamaño de la población N_t. Es decir, se sustituye la constante $1/R$ en la Ecuación (2.11) por una función creciente con N_t. El caso más simple es el de una función lineal. Gráficamente es una línea recta de pendiente positiva. Para comparar el modelo dependiente de la densidad con el modelo de crecimiento exponencial (2.11), se supone que los dos modelos coinciden para tamaños de la población muy pequeños. Para ello, se supone que la recta correspondiente al crecimiento independiente con la densidad pasa por el punto $(0, 1/R)$. Para asegurarse de que la población crece para densidades bajas, se supone que $R > 1$. La densidad de población cuando la razón padres a hijos es igual a 1 es de particular importancia ya que corresponde a un tamaño de población que no cambia de una generación a la siguiente. Este tamaño de población se denomina **capacidad de alojamiento** y se denota por K, siendo K una constante positiva. Por tanto, se requiere que la recta correspondiente al crecimiento dependiente con la densidad conecte los puntos $(0, 1/R)$ y $(K, 1)$ en una gráfica en la que N_t esté en el eje horizontal y la razón N_t/N_{t+1} en el eje vertical (*véase* la Figura 2.14).

La pendiente de la recta de la Figura 2.14 es $(1 - 1/R)/K$ y la ordenada en el origen vale $1/R$, con lo que se llega a la ecuación

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} + \frac{1 - \frac{1}{R}}{K} N_t$$

Ordenando la ecuación anterior se obtiene una ecuación recursiva. Si se multiplican los dos miembros por N_{t+1},

$$N_t = N_{t+1}\left(\frac{1}{R} + \frac{1 - \frac{1}{R}}{K} N_t\right)$$

Despejando N_{t+1},

$$N_{t+1} = \frac{N_t}{\frac{1}{R} + \frac{1 - \frac{1}{R}}{K} N_t}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la expresión anterior por R para simplificar:

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K} N_t} \tag{2.12}$$

Esta ecuación recursiva se denomina **curva de reclutamiento de Beverton-Holt**.

Utilizando los resultados de la Sección 2.2, se pueden calcular los puntos fijos de (2.12):

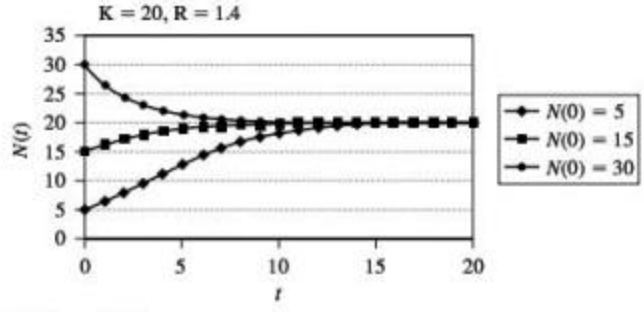
$$N = \frac{RN}{1 + \frac{R-1}{K} N}$$

Despejando N, se obtiene inmediatamente $N = 0$. Si $N \neq 0$, se dividen los dos miembros por N,

$$1 = \frac{R}{1 + \frac{R-1}{K} N}$$

y se despeja N,

$$1 + \frac{R-1}{K} N = R \quad \text{o} \quad \frac{R-1}{K} N = R - 1$$



▲ **Figura 2.15**
Tamaños de población N_t para $K = 20$ y $R = 1.4$ en el modelo de reclutamiento de Beverton-Holt, para diferentes densidades iniciales de población

de donde se obtiene

$$N = \frac{R-1}{\frac{R-1}{K}} = (R-1)\frac{K}{R-1} = K$$

Existen por tanto dos puntos fijos cuando $R > 1$: el punto fijo $N = 0$, que se denomina **trivial** ya que corresponde a la ausencia de población, y el punto fijo $N = K$, que se denomina **no trivial** ya que corresponde a un tamaño de población positivo.

En la Figura 2.15 se dibuja, para $K = 20$, $N(t)$ en función de t para tres tamaños iniciales de población diferentes. Para mayor claridad, se incluyen las líneas que unen los tamaños de población sucesivos. Observando la Figura 2.15, puede verse que si $N_0 > 0$, entonces N_t se aproxima a K (si $N_0 = K$ entonces $N_t = K$ para todo $t = 1, 2, 3, \ldots$, ya que K es un punto fijo). Esta es la razón para denominar a K capacidad de alojamiento. A partir de la Figura 2.15, se puede concluir que cuando $K > 0$, $R > 1$ y $N_0 > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} N_t = K$$

En este momento, es necesario basarse en gráficas y tablas para poder decir algo sobre el comportamiento a largo plazo de la población. Es una seria limitación, ya que restringe las investigaciones a especificar valores de parámetros y en consecuencia las conclusiones sólo son válidas para los valores de parámetros utilizados. Obviamente, no es posible explorar de esta forma todos los valores de parámetros posibles. Puede verse que este ejemplo tiene el mismo comportamiento cualitativo para todo R y K siempre que se cumpla que $R > 1$ y $K > 0$. En la Sección 5.6 se presentarán métodos analíticos que permitirán realizar afirmaciones más generales (como la realizada anteriormente) acerca del comportamiento de los modelos de poblaciones en tiempo discreto que no se basarán en tablas o gráficas. En la siguiente subsección, se presentará un ejemplo en el que el comportamiento depende fuertemente de la selección de los parámetros.

2.3.2 Ecuación logística discreta

El modelo en tiempo discreto más popular para una sola especie es la ecuación logística discreta. Su ecuación recursiva es

$$N_{t+1} = N_t\left[1 + R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right] \tag{2.13}$$

donde R y K son constantes positivas. R se denomina **parámetro de crecimiento** y K se denomina **capacidad de alojamiento**. El análisis que sigue explicará esta

terminología. Este modelo de crecimiento de población muestra dinámicas muy complejas, descritas en un importante artículo de Robert May (1976).

Antes de analizar el modelo, se transformará en lo que se denomina la *forma canónica*. La ventaja de hacer esto es que la ecuación recursiva resultante tendrá una forma algebraica más sencilla. Los pasos algebraicos que siguen no son obvios pero nos conducirán a la forma canónica de la ecuación logística discreta.

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t\left[1 + R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right] \\ &= N_t\left[1 + R - \frac{R}{K}N_t\right] \\ &= N_t(1+R)\left[1 - \frac{R}{K(1+R)}N_t\right] \end{aligned}$$

Ahora, dividiendo por $1 + R$, resulta

$$\frac{1}{1+R}N_{t+1} = N_t\left[1 - \frac{R}{K(1+R)}N_t\right]$$

Multiplicando los dos miembros por R/K (enseguida se verá por qué),

$$\frac{R}{K(1+R)}N_{t+1} = \frac{R}{K}N_t\left[1 - \frac{R}{K(1+R)}N_t\right] \tag{2.14}$$

Se define la nueva variable

$$x_t = \frac{R}{K(1+R)}N_t \tag{2.15}$$

entonces

$$\frac{R}{K(1+R)}N_{t+1} = x_{t+1} \quad \text{y} \quad \frac{R}{K}N_t = (1+R)x_t$$

y la Ecuación (2.14) se transforma en

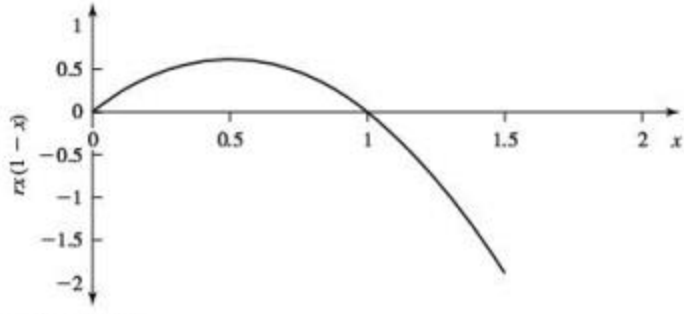
$$x_{t+1} = (1+R)x_t(1 - x_t)$$

En este punto es habitual introducir un nuevo parámetro, concretamente $r = 1 + R$. Nótese que $r > 1$ ya que $R > 0$. Se llega así a la forma canónica de la ecuación recursiva logística

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \tag{2.16}$$

La ventaja de esto es doble: (1) la ecuación recursiva (2.16) tiene una forma más simple que la ecuación recursiva original (2.13); (2) en lugar de dos parámetros (R y K), hay sólo uno (r); y (3), la cantidad x_t es *adimensional*. El último punto necesita alguna explicación. La variable original N_t tiene unidades (o dimensión) «número de individuos»; el parámetro K tiene las mismas unidades. Al dividir N_t por K en la expresión (2.15) las unidades se cancelan y por tanto la cantidad x_t es adimensional [el parámetro R no tiene dimensión, por tanto al multiplicar N_t/K por $R/(1+R)$ no se introducen unidades adicionales]. Una variable sin dimensión tiene la ventaja de que tiene el mismo valor numérico independientemente de las unidades de medida de la variable original (*véanse* los Problemas 31-34). El proceso de convertir en adimensional una cantidad se denomina **adimensionalización**.

Volvamos ahora a la ecuación logística discreta en su forma canónica (2.16), y veamos cuál es su comportamiento. La función $f(x) = rx(1 - x)$ es una parábola invertida ya que $r > 1$ (*véase* la Figura 2.16). Observando la Figura 2.16 puede verse que si x está fuera del intervalo (0, 1), $f(x)$ es negativa. Como $x_t = \frac{R}{K(1+R)}N_t$



▲ **Figura 2.16**
Gráfica de la ecuación logística discreta en su forma canónica (aquí $r = 2.5$)

[*véase* (2.15)] y N_t debe ser positiva (es un tamaño de población) es necesario que x_t sea positiva. Esto significa que es necesario asegurar que $x_{t+1} = f(x_t)$ permanece dentro del intervalo (0, 1). El máximo valor de $f(x)$ se produce en $x = 1/2$ y $f(1/2) = r/4$ y por tanto se requiere que $r/4 < 1$ o $r < 4$. En resumen, si $1 < r < 4$, entonces x_i permanecerá en el intervalo (0, 1) para todo $t = 1, 2, 3, \ldots$ suponiendo que $x_0 \in (0, 1)$. Por tanto, en lo que sigue se supondrá que $1 < r < 4$ y que $x_0 \in (0, 1)$.

Se calculan primero los puntos fijos de (2.16). Es necesario resolver

$$x = rx(1 - x)$$

Inmediatamente aparece la solución trivial $x = 0$. Si $x \neq 0$, se pueden dividir ambos miembros por x, resultando

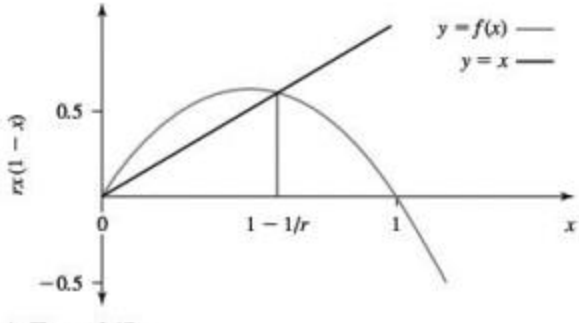
$$1 = r(1 - x) \quad \text{o} \quad x = 1 - \frac{1}{r}$$

(*Véase* la Figura 2.17). Suponiendo que $r > 1$, ambos puntos fijos están en [0, 1).

Volvamos ahora por un momento a la variable original N_t, para ver lo que significa $x = 0$ y $x = 1 - 1/r$ en términos de N. Como $x = \frac{R}{K(1+R)} N$, el punto fijo $x = 0$ corresponde al punto fijo $N = 0$, lo que justifica llamar a $x = 0$ equilibrio trivial. Cuando $x = 1 - 1/r$, utilizando $r = 1 + R$,

$$N = \frac{K(1+R)}{R} x = \frac{K(1+R)}{R}\left(1 - \frac{1}{1+R}\right)$$
$$= \frac{K(1+R)}{R} \frac{1+R-1}{1+R} = K$$

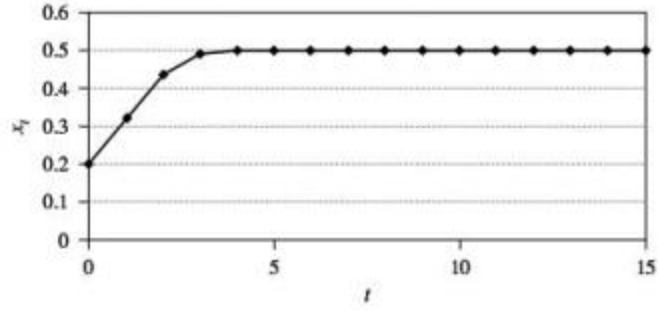
por lo que en el otro punto fijo $N = K$.



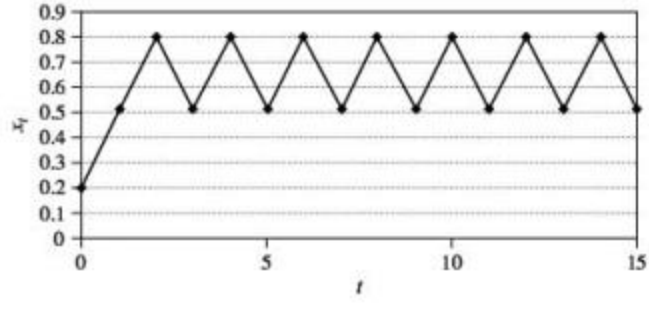
▲ **Figura 2.17**
Ilustración gráfica de los puntos fijos de la ecuación discreta logística en su forma canónica. Los puntos fijos están donde se cortan la parábola y la ecuación $y = x$

Como se comentó anteriormente, el comportamiento a largo plazo de la ecuación logística discreta es muy complicado. Se comentarán a continuación brevemente los diferentes casos. Más adelante, en la Sección 5.6, se podrá entender, al menos hasta cierto punto, por qué esta ecuación tiene este comportamiento complejo.

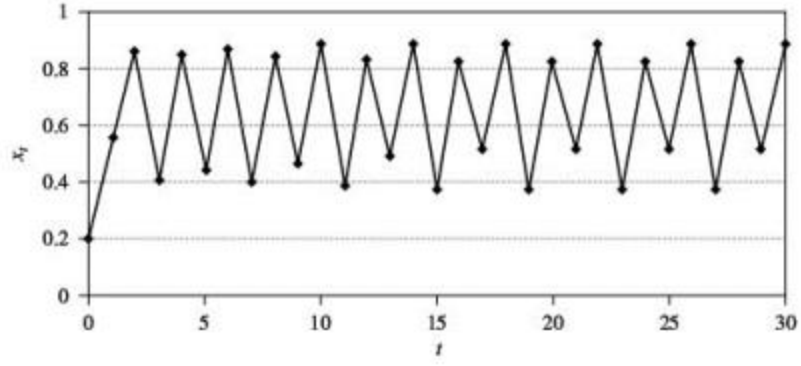
Cuando $1 < r < 3$ y $x_0 \in (0, 1)$, converge al punto fijo $1 - 1/r$ (*véase* la Figura 2.18). Al aumentar r a valores entre 3 y 3.449..., x_t presenta un comportamiento cíclico de periodo 2 (Figura 2.19). Esto significa que para tiempos suficientemente grandes, x_t oscilará una vez y otra entre un valor grande y uno pequeño. Para valores de r entre 3.449... y 3.544... el periodo se dobla. Aparece un ciclo de periodo 4 para tiempos suficientemente grandes. El tamaño de la población oscila ahora entre los mismos cuatro valores (Figura 2.20). Al aumentar r continúa doblándose el periodo. Aparece un ciclo de periodo 8 cuando $r = 3.544...$, un ciclo de periodo 16 cuando $r = 3.564...$, un ciclo de periodo 32 cuando $r = 3.567...$ Este comportamiento de periodo continúa hasta que r alcanza un valor de 3.57, momento en el que el patrón de la población se convierte en **caótico** (Figura 2.21). La dinámica de la población parece comportarse de forma aleatoria, aunque las reglas son completamente deterministas. No hay un patrón regular que se pueda discernir: x_t ya no oscila más entre los mismos valores y la dinámica ya no es periódica. Además, al comenzar desde las condiciones iniciales ligeramente diferentes, se producen rápidamente trayectorias muy distintas (Figura 2.22). Esta sensibilidad a las condiciones iniciales es característica del comportamiento caótico.



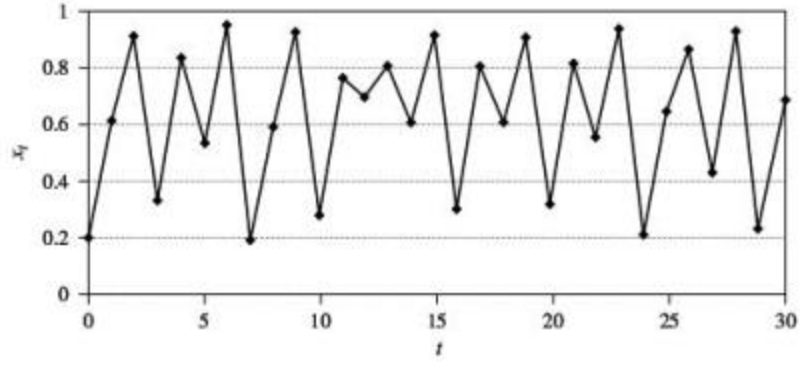
▲ **Figura 2.18**
Gráfica de x_t en función de t para $r = 2$



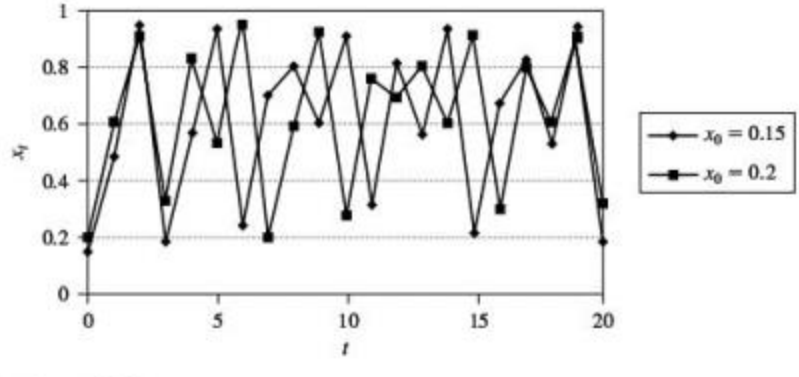
▲ **Figura 2.19**
Gráfica de x_t en función de t para $r = 3.2$



▲ **Figura 2.20**
Gráfica de x_t en función de t para $r = 3.52$



▲ **Figura 2.21**
Gráfica de x_t en función de t para $r = 3.8$



▲ **Figura 2.22**
Gráfica de x_t en función de t con $r = 3.8$ para dos valores diferentes de x_0

Para obtener resultados de utilidad biológica, es necesario restringir tanto r como x_0. La razón es que si $x_t > 1$, entonces x_{t+1} para valores negativos. Esto se puede remediar fácilmente modificando ligeramente la dinámica. En la siguiente subsección presentaremos un modelo de este tipo.

2.3.3 Curva de Ricker

La ecuación logística discreta tiene la característica biológica poco realista de que a menos que se restrinja el tamaño de la población inicial y el parámetro de crecimiento, pueden aparecer tamaños de la población negativos. La razón de esto es que la función $f(x) = rx(1 - x)$ toma valores negativos para $x > 1$ y así, si $x_t > 1$, entonces $x_{t+1} < 0$. No es difícil evitar este problema. Un ejemplo de ecuación operativa que tiene las mismas propiedades (deseables) en la ecuación logística pero que no admite tamaños de la población negativos (suponiendo que el tamaño de la población en el instante 0 sea positivo) es la **curva de Ricker**. La ecuación recursiva, denominada **ecuación logística de Ricker** se expresa como

$$N_{t+1} = N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right] \tag{2.17}$$

donde R y K son parámetros positivos. Como en el modelo logístico discreto, R es el parámetro de crecimiento y K es la capacidad de alojamiento. La gráfica de la curva de Ricker (Figura 2.23), $f(N_t) = N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]$, es positiva para todo $N_t > 0$, evitándose así el problema de los tamaños de población negativos.

Los puntos fijos de (2.17) satisfacen

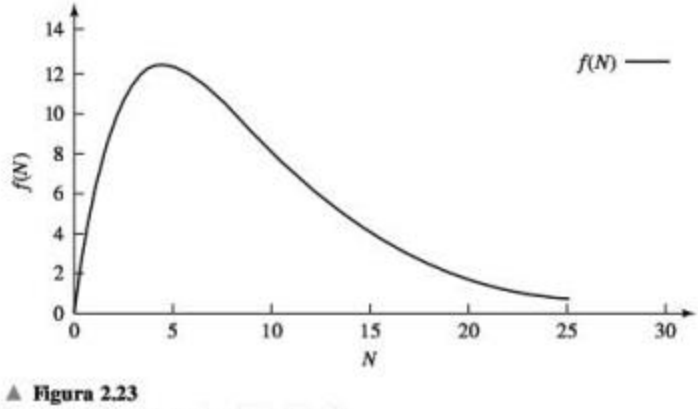
$$N = N \exp\left[R\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right] \tag{2.18}$$

Se obtiene un punto fijo trivial $N = 0$. Si $N \neq 0$, se pueden dividir los dos miembros de la Ecuación (2.18) por N,

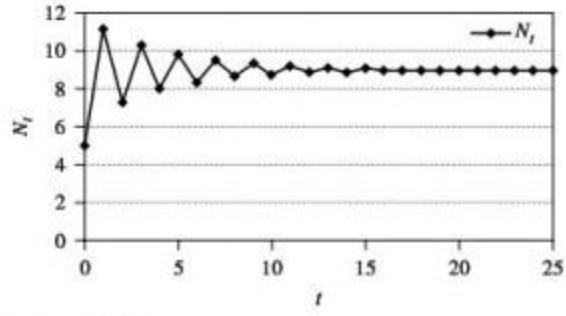
$$1 = \exp\left[R\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right]$$

que se cumple si $R(1 - N/K) = 0$ o $N = K$. El parámetro K tiene el mismo significado que en la ecuación logística discreta, concretamente la capacidad de alojamiento.

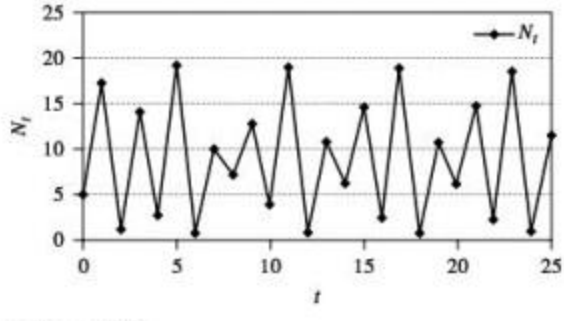
La ecuación logística de Ricker muestra la misma dinámica compleja que la ecuación logística discreta [convergencia al punto fijo para valores de R positivos y pequeños (Figura 2.24), comportamiento periódico con periodo que se dobla al



▲ **Figura 2.23**
Curva de Ricker para $R = 2.8$ y $K = 9$



▲ **Figura 2.24**
Tamaño de la población N_t en función de t para $R = 1.8$ y $K = 9$



▲ **Figura 2.25**
Tamaño de la población N_t en función de t para $R = 2.8$ y $K = 9$

aumentar R, y comportamiento caótico para valores mayores de R (Figura 2. 25)]. Los valores de R en los que cambia el comportamiento son diferentes que en la ecuación logística discreta. Por ejemplo, la aparición de caos en la ecuación logística discreta ocurre para $R = 2.570...$, mientras que la aparición de caos en ecuación logística de Ricker ocurre para $R = 2.692...$

2.3.4 Sucesiones de Fibonacci

Como último ejemplo de esta sección, estudiaremos una **ecuación en diferencias de segundo orden**. En una ecuación en diferencias de segundo orden, N_{t+1} depende de N_t y de N_{t-1}.

Un ejemplo famoso de ecuación de diferencias de segundo orden es la **sucesión de Fibonacci**. Proviene del siguiente problema propuesto en 1202 por Leonardo de Pisa (1175-1250), un matemático italiano conocido con el nombre de Fibonacci: ¿cuántas parejas de conejos se producen si cada pareja produce una nueva pareja de conejos a la edad de un mes y otra pareja de conejos a la edad de 2 meses e inicialmente hay una pareja de conejos recién nacidos?

Si N_t indica el número de parejas de conejos recién nacidos en el instante t, (medido en meses), entonces en el instante 0 habrá una pareja de conejos ($N_0 = 1$). El instante 1, la pareja de conejos inicial tiene una edad de un mes y producirá a una pareja de conejos recién nacidos y por tanto $N_1 = 1$. En el instante 2, habrá una pareja de conejos de 2 meses de edad y una pareja de conejos de un mes de edad. Cada pareja producirá una pareja de conejos recién nacidos, por tanto $N_2 = 2$. En el instante 3, nuestra pareja de conejos original tiene ahora tres meses de edad y dejara de reproducirse. Ahora hay una pareja de conejos de 2 meses

de edad y 2 parejas de conejos de un mes de edad. Como cada pareja de un mes de edad y la pareja de 2 meses de edad producen una pareja de conejos recién nacidos, en el instante $t = 3$, habrá $2 + 1 = 3$ parejas de conejos recién nacidos. De forma más general, para obtener el número de parejas de conejos recién nacidos, es necesario sumar el número de parejas de conejos de un mes de edad y de conejos de 2 meses de edad. Los conejos de un mes de edad en el instante $t + 1$ eran conejos recién nacidos en el instante t. Los conejos de 2 meses de dar eran conejos recién nacidos en el instante $t - 1$. Por tanto, el número de parejas de conejos recién nacidos en el instante $t + 1$ es

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1},\ t = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{con } N_0 = 1 \text{ y } N_1 = 1$$

Nótese que es necesario especificar $t = 0$ y $t = 1$ para poder utilizar la ecuación recursiva. Utilizando dicha ecuación, se obtiene la sucesión

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Puede verse que el número de parejas de conejos recién nacidos tiende a infinito cuando t tiende a infinito, de forma que N_t no converge a un límite finito. Sucede, sin embargo, que la razón N_{t+1}/N_t sí converge. Se puede obtener un candidato para el valor límite de la siguiente forma. Comencemos con la ecuación recursiva

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}$$

y dividamos ambos miembros por N_t, con lo que se obtiene

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + \frac{N_{t-1}}{N_t} \tag{2.19}$$

Si suponemos ahora que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_{t+1}}{N_t} = \lambda$$

lo que también implica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{N_{t-1}} = \lambda$$

(λ es la letra griega lambda minúscula), entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H_{t-1}}{N_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{N_t}{N_{t-1}}} = \frac{1}{\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{N_{t-1}}} = \frac{1}{\lambda}$$

Tomando el límite cuando t tiende a infinito en la Ecuación (2.19) se obtiene

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

que se puede expresar como $\lambda^2 = \lambda + 1$ tras multiplicar ambos miembros por λ. Por tanto, debemos resolver

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Una solución es positiva, y la otra es negativa. Cuando $N_0 = N_1 = 1$ sólo es relevante la solución positiva ya que entonces $N_{t+1}/N_t > 0$ para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$ La razón

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

es el límite de N_{t+1}/N_t cuando t tiende a infinito, y se conoce como la **media dorada**.

Un rectángulo en el que la proporción entre sus lados coincida con ese número se denomina **rectángulo dorado** y se considera que es el rectángulo con la proporción más placentera para la vista. Esto era conocido por los antiguos griegos, que lo utilizaron como escala para dimensionar sus edificios (por ejemplo el Partenón). Las razones de los sucesivos números de Fibonacci se pueden encontrar también en la naturaleza. Por ejemplo, las florecillas del girasol crecen en espiral y la razón de número de espirales que crecen en direcciones opuestas son muchas veces números sucesivos de Fibonacci.

2.3.5. Problemas

(2.3.1)

En los Problemas 1-6, suponga que el crecimiento de la población se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt con parámetro de crecimiento R y capacidad de alojamiento K. Para los valores dados de R y K, dibuje N_t/N_{t+1} en función de N_t y obtenga la ecuación recursiva de la curva de reclutamiento de Beverton-Holt.

1. $R = 2, K = 15$

2. $R = 2, K = 50$

3. $R = 1.5, K = 40$

4. $R = 3, K = 120$

5. $R = 2.5, K = 90$

6. $R = 2, K = 150$

En los Problemas 7-12, suponga que el crecimiento de la población se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt con parámetro de crecimiento R y capacidad de alojamiento K. Obtenga R y K.

7. $N_{t+1} = \dfrac{2N_t}{1 + N_t/20}$

8. $N_{t+1} = \dfrac{3N_t}{1 + 2N_t/40}$

9. $N_{t+1} = \dfrac{1.5N_t}{1 + 0.5N_t/30}$

10. $N_{t+1} = \dfrac{2N_t}{1 + N_t/200}$

11. $N_{t+1} = \dfrac{4N_t}{1 + N_t/150}$

12. $N_{t+1} = \dfrac{5N_t}{1 + N_t/20}$

En los Problemas 13-18, suponga que el crecimiento de la población se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt con parámetro de crecimiento R y capacidad de alojamiento K. Obtenga todos los puntos fijos.

13. $N_{t+1} = \dfrac{4N_t}{1 + N_t/30}$

14. $N_{t+1} = \dfrac{3N_t}{1 + N_t/60}$

15. $N_{t+1} = \dfrac{2N_t}{1 + N_t/30}$

16. $N_{t+1} = \dfrac{2N_t}{1 + N_t/100}$

17. $N_{t+1} = \dfrac{3N_t}{1 + N_t/30}$

18. $N_{t+1} = \dfrac{5N_t}{1 + N_t/120}$

En los Problemas 13-18, suponga que el crecimiento de la población se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt con parámetro de crecimiento R y capacidad de alojamiento K. Obtenga los tamaños de la población para $t = 1, 2, \ldots, 5$ y $\lim_{t\to\infty} N_t$ para el valor inicial N_0 dado.

19. $R = 2, K = 10, N_0 = 2$

20. $R = 2, K = 20, N_0 = 5$

21. $R = 3, K = 15, N_0 = 1$

22. $R = 3, K = 30, N_0 = 0$

23. $R = 4, K = 40, N_0 = 3$

24. $R = 4, K = 20, N_0 = 10$

(2.3.2)

En los Problemas 25-30, suponga que se utiliza la ecuación logística discreta con parámetros R y K. Escriba la ecuación en la forma canónica $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$ y determine r y x_1 en función de R, K y N_t.

25. $R = 1, K = 10$

26. $R = 1, K = 20$

27. $R = 2, K = 15$

28. $R = 2, K = 20$

29. $R = 2.5, K = 30$

30. $R = 2.5, K = 50$

En los Problemas 31-34, se estudiarán las ventajas de las variables adimensionales.

31. **(a)** Sea N_t el tamaño de la población en el instante t y K la capacidad de alojamiento. Ambas cantidades se miden en unidades de número de individuos. Demuestre que $x_t = N_t/K$ es adimensional.

(b) Sea M_t el tamaño de la población en el instante t y L la capacidad de alojamiento. Ambas cantidades se miden en unidades de 1000 individuos. Demuestre que $y_t = M_t/L$ es adimensional.

(c) ¿Cómo se relacionan N_t y M_t? ¿Cómo se relacionan K y L?

(d) Utilice el resultado de (c) para obtener M_t y L si hay 20 000 individuos en el instante t y la capacidad de alojamiento es de 5000.

(e) Para el tamaño de población y la capacidad de alojamiento del apartado (d), demuestre que $x_t = y_t$.

32. Para cuantificar la estructura espacial de una población de plantas podría ser conveniente introducir una escala de longitud característica. Esta escala de longitud podría estar caracterizada por la distancia de dispersión media de la planta bajo estudio. Supongamos que la escala de longitud característica se denota por L. Se indica con x la distancia de las semillas a su fuente. Se define $z = x/L$. Obtenga z si $x = 100$ cm y $L = 50$ cm, y demuestre que z tendría el mismo valor si las unidades de x y L hubieran sido metros.

33. Suponga que una bacteria se divide cada 20 minutos, tiempo que se denominará escala temporal característica y se denotará por T. Sea t el tiempo transcurrido desde el comienzo de un experimento que involucra a la bacteria. Se define $z = t/T$. Calcule z si $t = 120$ minutos y demuestre que z tiene el mismo valor si las unidades de t y T fueran horas en vez de minutos.

34. El tiempo desde el antepasado común más reciente de una pareja de individuos en una población con apareamiento aleatorio depende del tamaño de dicha población. Sea t el tiempo medido en unidades de generaciones hasta el antepasado común más reciente y sea T igual a N generaciones, siendo N del tamaño de la población con apareamiento aleatorio. Se define $z = t/T$. Demuestre que z es adimensional y que su valor no cambia aunque t y T se midan en unidades distintas a generaciones, por ejemplo, en años (suponga que una generación es igual a n años).

En los Problemas 35-46, se estudiará el comportamiento de la ecuación logística discreta

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$$

Calcule x_t para $t = 0, 1, 2, \ldots, 20$ con los valores dados de r y x_0 y dibuje x_t en función de t.

35. $r = 2$, $x_0 = 0.2$

36. $r = 2$, $x_0 = 0.1$

37. $r = 2$, $x_0 = 0.9$

38. $r = 2$, $x_0 = 0$

39. $r = 3.1$, $x_0 = 0.5$

40. $r = 3.1$, $x_0 = 0.1$

41. $r = 3.1$, $x_0 = 0.9$

42. $r = 3.1$, $x_0 = 0$

43. $r = 3.8$, $x_0 = 0.5$

44. $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$

45. $r = 3.8$, $x_0 = 0.9$

46. $r = 3.8$, $x_0 = 0$

(2.3.3)

En los Problemas 47-50, dibuje la curva de Ricker

$$N_{t+1} = N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]$$

en el plano $N_t - N_{t+1}$ para los valores dados de R y K. Obtenga los puntos de intersección de esta gráfica con la recta $N_{t+1} = N_t$.

47. $R = 2$, $K = 10$

48. $R = 3$, $K = 15$

49. $R = 2.5$, $K = 12$

50. $R = 4$, $K = 20$

En los Problemas 51-54, se estudiará el comportamiento de la curva de Ricker

$$N_{t+1} = N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]$$

Calcule para $t = 1, 2, \ldots, 20$ con los valores dados de R, K y N_0 y dibuje N_t en función de t.

51. **(a)** $R = 1$, $K = 20$, $N_0 = 5$

(b) $R = 1$, $K = 20$, $N_0 = 10$

(c) $R = 1$, $K = 20$, $N_0 = 20$

(d) $R = 1$, $K = 20$, $N_0 = 0$

52. **(a)** $R = 1.8$, $K = 20$, $N_0 = 5$

(b) $R = 1.8$, $K = 20$, $N_0 = 10$

(c) $R = 1.8$, $K = 20$, $N_0 = 20$

(d) $R = 1.8$, $K = 20$, $N_0 = 0$

53. **(a)** $R = 2.1$, $K = 20$, $N_0 = 5$

(b) $R = 2.1$, $K = 20$, $N_0 = 10$

(c) $R = 2.1$, $K = 20$, $N_0 = 20$

(d) $R = 2.1$, $K = 20$, $N_0 = 0$

54. **(a)** $R = 2.8$, $K = 20$, $N_0 = 5$

(b) $R = 2.8$, $K = 20$, $N_0 = 10$

(c) $R = 2.8$, $K = 20$, $N_0 = 20$

(d) $R = 2.8$, $K = 20$, $N_0 = 0$

(2.3.4)

55. Calcule N_t y N_t/N_{t-1} para $t = 2, 3, 4, \ldots, 20$ cuando

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}$$

con $N_0 = 1$ y $N_1 = 1$.

56. Calcule N_t y N_t/N_{t-1} para $t = 2, 3, 4, \ldots, 20$ cuando

$$N_{t+1} = N_t + 2N_{t-1}$$

con $N_0 = 1$ y $N_1 = 1$.

57. En el texto, se da la interpretación de la ecuación recursiva de Fibonacci

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}$$

Utilice un ejemplo similar para dar una interpretación de la ecuación recursiva

$$N_{t+1} = N_t + 2N_{t-1}$$

58. En el texto, se da la interpretación de la ecuación recursiva de Fibonacci

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}$$

Utilice un ejemplo similar para dar una interpretación de la ecuación recursiva

$$N_{t+1} = 2N_t + N_{t-1}$$

1.4. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 2: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Crecimiento exponencial
2. Crecimiento constante
3. Punto fijo
4. Equilibrio
5. Ecuación recursiva
6. Solución
7. Independencia de la densidad
8. Sucesión
9. Ecuación recursiva de primer orden
10. Límite
11. Comportamiento a largo plazo
12. Convergencia, divergencia
13. Leyes de los límites
14. Ecuación en diferencias
15. Curva de reclutamiento de Beverton-Holt
16. Dependencia de la densidad
17. Capacidad de alojamiento
18. Parámetro de crecimiento
19. Ecuación logística discreta
20. Adimensionalización
21. Comportamiento periódico
22. Caos
23. Curva de Ricker
24. Sucesión de Fibonacci
25. Media dorada

1.5. PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas 1-10, obtenga los límites.

1. $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}$
2. $\lim_{n\to\infty} 3^n$
3. $\lim_{n\to\infty} 40(1-4^{-n})$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{1+2^{-n}}$
5. $\lim_{n\to\infty} a^n$ cuando $a > 1$
6. $\lim_{n\to\infty} a^n$ cuando $0 < a < 1$
7. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{n^2-1}$
8. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-6}{n-2}$
9. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$
10. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$

En los Problemas 11-14, escriba explícitamente en función de n basándose en los primeros cinco términos de la sucesión a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

11. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$
12. $\frac{2}{2}, \frac{6}{4}, \frac{12}{8}, \frac{20}{16}, \frac{30}{32}$
13. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}$
14. $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}$

15. La curva de reclutamiento de Beverton-Holt se expresa mediante ecuación recursiva

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K} N_t}$$

donde $R > 1$ y $K > 0$. Cuando $N_0 > 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} N_t = K$ para todos los valores de $R > 0$. Para investigar cómo afecta R al comportamiento límite de N_t, calcule para $t = 1, 2, 3, \ldots, 10$ para $K = 100$ y $N_0 = 20$ cuando (a) $R = 2$, (b) $R = 5$ y (c) $R = 10$, y dibuje en función de t para los tres valores de R en el mismo sistema de coordenadas.

16. (*Entorno con variación temporal*) La ecuación recursiva

$$N_{t+1} = R_t N_t$$

modela el crecimiento en un entorno con variación temporal si R_t se interpreta como el parámetro de crecimiento en la generación t. Se realiza el seguimiento de una población durante 10 años y los tamaños de la población se miden cada año. Utilice los datos que suministran para obtener R_t para $t = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

t	N_t	t	N_t
0	10	6	95.1
1	15.5	7	103.2
2	15.6	8	165.0
3	10.8	9	418.7
4	15.6	10	15.7
5	32.2		

17. (*Entorno con variación temporal*) La ecuación recursiva

$$N_{t+1} = R_t N_t$$

modela el crecimiento en un entorno con variación temporal si R_t se interpreta como el parámetro de crecimiento en la generación t. Se realiza el seguimiento de una población durante 20 años y los tamaños de la población se miden cada año. La tabla proporciona los datos del tamaño de la población y los valores obtenidos de R_t para cada uno de los veinte años. Los valores de N_t indican que esa población canina hacia su extinción. El comportamiento a largo plazo de la media geométrica del parámetro de crecimiento, denominada $\hat{R}_t$, se define como

$$\hat{R}_t = (R_0 R_1 \cdots R_{t-1})^{1/t}$$

y determina si la población se extinguirá. Concretamente si

$$\lim_{t\to\infty} \hat{R}_t < 1$$

entonces, la población se extinguirá. Calcule $\hat{R}_t$ para $t = 1, 2, \ldots, 20$.

t	N_t	R_t	t	N_t	R_t
0	10.0	2.78	11	0.45	0.88
1	27.8	0.29	12	0.40	2.69
2	8.10	0.43	13	1.06	0.36
3	3.49	0.25	14	0.38	0,08
4	0.87	2.90	15	0.03	2.34
5	2.52	1.67	16	0.07	2.13
6	4.21	1.17	17	0.15	2.20
7	4.94	0.69	18	0.34	2.80
8	3.39	1.45	19	0.94	0.29
9	4.92	1.13	20	0.28	1.22
10	5.56	0.08			

18. (*Entorno con variación temporal*) La ecuación recursiva

$$N_{t+1} = R_t N_t$$

describe el crecimiento en un entorno con variación temporal si R_t se interpreta como el parámetro de crecimiento en la generación t.

(a) Demuestre que

$$N_t = (R_{t-1} R_{t-2} \cdots R_1 R_0) N_0$$

(b) La cantidad $\hat{R}_t$, definida como

$$\hat{R}_t = (R_{t-1} R_{t-2} \cdots R_1 R_0)^{1/t}$$

se denomina **media geométrica**. Demuestre que

$$N_t = (\hat{R}_t)^t N_0$$

(c) La **media aritmética** de una secuencia de números x_0, x_1, ..., x_{n-1} se define como

$$\bar{x}_n = \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n}$$

Sea $r_t = \ln R_t$. Demuestre que

$$\bar{r}_t = \frac{\ln R_{t-1} + \ln R_{t-2} + \cdots + \ln R_0}{t}$$

(d) Utilice el resultado del apartado (c) para demostrar que

$$N_t = N_0 e^{\bar{r}_t t}$$

19. (*Modelo de recogida*) Sea N_t el tamaño de la población en el instante t y suponga que

$$N_{t+1} = (1-c) N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{(1-c)N_t}{K}\right)\right]$$

siendo R y K constantes positivas y c la fracción recogida. Calcule N_t para $t = 1, 2, \ldots, 20$ cuando $R = 1$, $K = 100$ y $N_0 = 50$ para (a) $c = 0.1$, (b) $c = 0.5$ y (c) $c = 0.9$.

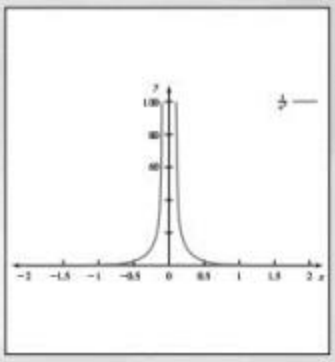
20. (*Modelo de recogida*) Sea N_t el tamaño de la población en el instante t y suponga que

$$N_{t+1} = (1-c) N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{(1-c)N_t}{K}\right)\right]$$

siendo R y K constantes positivas y c la fracción recogida. Calcule N_t para $t = 1, 2, \ldots, 20$ cuando $R = 3$, $K = 100$ y $N_0 = 50$ para (a) $c = 0.1$, (b) $c = 0.5$ y (c) $c = 0.9$.

CAPÍTULO 3

LÍMITES Y CONTINUIDAD



3.1 LÍMITES

En el Capítulo 2, se presentaron los límites de la forma $\lim_{n\to\infty} a_n$, donde n tomaba valores enteros. En este capítulo, se considerarán límites de la forma

$$\lim_{x\to c} f(x) \tag{3.1}$$

siendo ahora x una variable real continua que tiende a un valor fijo c (c puede ser finito o infinito). Veamos un ejemplo que motivará la necesidad de límites de la forma (3.1).

El crecimiento de poblaciones con apareamiento estacional discreto (como en el Capítulo 2) se puede modelar mediante el cambio en el tamaño de la población de una generación a otra. En poblaciones que se aparean de forma continua, no existe una escala de tiempo natural como la generación. En ese caso es necesario modelar cómo cambia el tamaño de la población en intervalos de tiempo pequeños. Se denomina $N(t)$ al tamaño de la población en el instante t, donde t varía ahora de forma continua en el intervalo $[0, \infty)$. Estudiemos cómo cambia el tamaño de la población en el intervalo de tiempo $[t, t + h]$, con $h > 0$. El cambio absoluto durante este intervalo de tiempo, denominado ΔN es

$$\Delta N = N(t + h) - N(t)$$

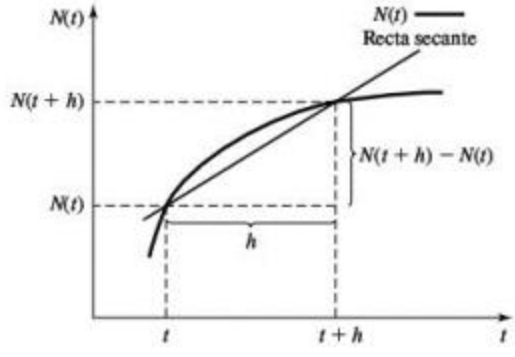
(El símbolo Δ indica que se toma una diferencia). Para obtener el cambio relativo a la longitud del intervalo de tiempo $[t, t + h]$ se divide ΔN por la longitud de dicho intervalo de tiempo, denominada Δt, que es $(t + h) - t = h$. Se tiene

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + h) - N(t)}{h}$$

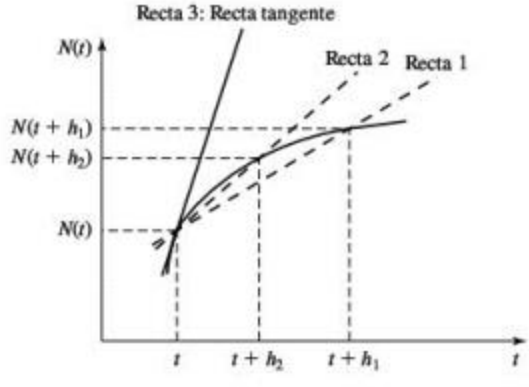
Esta razón se denomina **tasa de crecimiento media**.

Si se observa la Figura 3.1 puede verse que $\Delta N/\Delta t$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(t, N(t))$ y $(t + h, N(t + h))$. La tasa de crecimiento media $\Delta N/\Delta t$ depende de la longitud del intervalo temporal Δt. Esto se ilustra en la Figura 3.2, donde puede verse que las pendientes de las dos rectas secantes (rectas 1 y 2) son diferentes. Pero puede verse también que a medida que se escogen intervalos de tiempo cada vez menores, las rectas secantes convergen a la recta tangente en el punto $(t, N(t))$ de la gráfica de $N(t)$ (recta 3).

La pendiente de la recta tangente se denomina **velocidad de crecimiento instantánea** y es una forma adecuada de describir el crecimiento de una población de apareamiento continuo. Para obtener esta cantidad,



◀ **Figura 3.1**
La pendiente de la recta secante es la tasa de crecimiento media



◀ **Figura 3.2**
La pendiente de la recta secante converge a la pendiente de la recta tangente a medida que la longitud del intervalo $[t, t + h]$ tiende a 0

es necesario tomar un límite, concretamente, es necesario disminuir hasta 0 la longitud del intervalo de tiempo $[t, t + h]$ haciendo tender h a 0. Esto se expresa como

$$\lim_{h \to 0} \frac{N(t + h) - N(t)}{h} \tag{3.2}$$

En (3.2) se toma el límite de una cantidad cuando una variable continua, concretamente h, se aproxima a un valor fijo, concretamente 0. Esto es un límite de la forma (3.1).

3.1.1 Presentación informal de los límites

Definición informal El **«límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es igual a L»** significa que $f(x)$ puede tomar valores arbitrariamente cercanos a L siempre que x esté suficientemente cerca de c (pero no sea igual a c). Esto se indica como

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

o $f(x) \to L$ cuando $x \to c$.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y L es un número finito, se dice que el límite **existe** y que $f(x)$ **converge** a L. Si el límite no existe, se dice que $f(x)$ **diverge** cuando x tiende a c.

Es conveniente tener en cuenta que se ha dicho que x está cercano a c, pero no es igual a c. Es decir, al obtener el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c, no basta

simplemente con sustituir x por c en la expresión de $f(x)$. De hecho, incluso se verán ejemplos en los que $f(x)$ no está definida en $x = c$. El valor de $f(c)$ es irrelevante para calcular el valor de $\lim_{x \to c} f(x)$.

Más aún, al decir «x se aproxima a c», se expresa que x se puede aproximar a c de cualquier forma. Cuando x se aproxima a c sólo por un lado, se utiliza la notación

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \quad \text{cuando } x \text{ se acerca a } c \text{ por la derecha}$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{cuando } x \text{ se acerca a } c \text{ por la izquierda}$$

Se denominan límites por la derecha y por la izquierda. La notación «$x \to c^+$» indica que cuando x se aproxima a c por la derecha, los valores de x son mayores que c, y cuando x se aproxima c por la izquierda («$x \to c^-$»), los valores de x son menores que c.

Veamos algunos ejemplos.

Límites que existen

Ejemplo 1 Calcule

$$\lim_{x \to 2} x^2$$

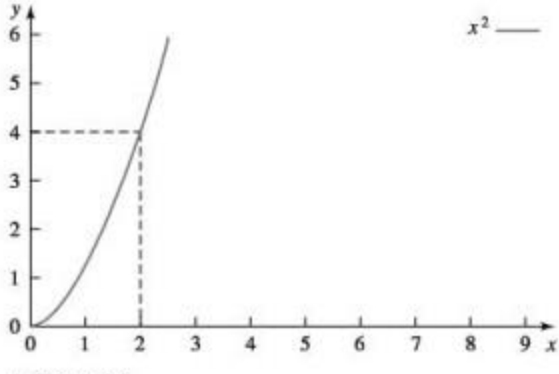
Solución

La gráfica de $y = x^2$ (*véase* la Figura 3.3) muestra inmediatamente que el límite de x^2 a medida que x se aproxima a 2, vale 4 (desde cualquier lado). Este resultado se puede sospechar también observando la siguiente tabla, donde se muestran valores de x^2 para x cercano a 2 (pero no igual a 2). En la mitad izquierda de la tabla, la aproximación a $x = 2$ es por la izquierda ($x \to 2^-$); en la mitad derecha de la tabla, la aproximación a $x = 2$ es por la derecha ($x \to 2^+$).

x	x^2	x	x^2
1.9	3.61	2.1	4.41
1.99	3.9601	2.01	4.0401
1.999	3.996001	2.001	4.004001
1.9999	3.99960001	2.0001	4.00040001

Se obtiene por tanto que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$



▲ **Figura 3.3**
A medida que x se aproxima a 2, $f(x) = x^2$ se aproxima a 4

Como este límite es un número finito, se dice que el límite existe y que x^2 converge a 4 cuando x tiende a 2. El hecho de que ocurra también que $f(x) = x^2$ en $x = 2$ es una propiedad interesante que se presentará y comentará más tarde. No todas las funciones se comportan así. ◀

Ejemplo 2 Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Solución

Se define $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $x \neq 3$. Como el denominador de $f(x)$ es igual a 0 cuando $x = 3$, el punto $x = 3$ queda excluido del dominio. Cuando $x \neq 3$ se puede simplificar la expresión, concretamente

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad \text{para } x \neq 3$$

El término $x - 3$ se ha podido cancelar porque se ha supuesto que $x \neq 3$ y $x - 3 \neq 0$ para $x \neq 3$ (si se permitiera el valor $x = 3$, cancelar $x - 3$ supondría dividir por 0). La gráfica de $f(x)$ es una línea recta en la que falta un punto en $x = 3$ (*véase* la Figura 3.4). Tomando el límite resulta

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3)$$

Ahora, bien utilizando la gráfica de $y = x + 3$ o una tabla, se puede intuir que

$$\lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

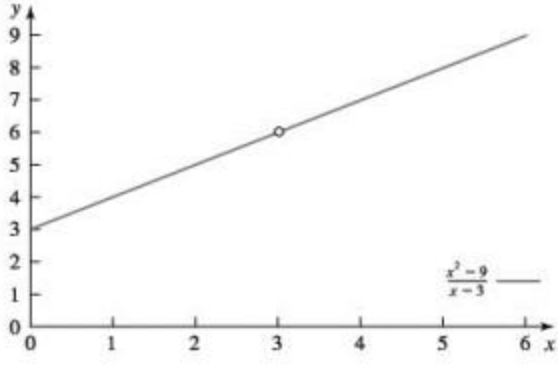
(Uno de los objetivos de este capítulo es aprender a demostrar esto sin basarse en gráficas ni en tablas.) Se concluye entonces que el $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe y que $f(x)$ converge a 6 cuando x tiende a 3. Nótese en este caso $f(3)$ no existe. ◀

Límites laterales Para calcular límites laterales, se utiliza la notación

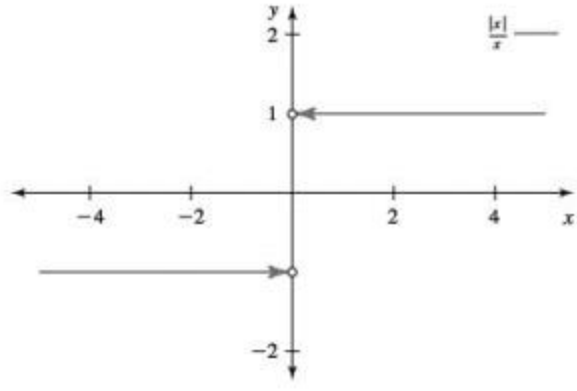
$$\lim_{x \to c^+} f(x) \quad \text{cuando } x \text{ se aproxima a } c \text{ por la derecha}$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{cuando } x \text{ se aproxima a } c \text{ por la izquierda}$$

que ya se presentó anteriormente.



▲ **Figura 3.4**
La gráfica de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, es una línea recta sin el punto (3, 6)



▲ **Figura 3.5**
Gráfica de $\frac{|x|}{x}$ en el Ejemplo 3. La función no está definida en $x = 0$

Ejemplo 3 Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

Solución

Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Como $|x| = x$ para $x \geqslant 0$ y $|x| = -x$ para $x \leqslant 0$, se obtiene que

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{para } x > 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

La Figura 3.5 muestra la gráfica de $f(x)$. Puede verse que $f(x)$ converge a 1 cuando x tiende a 0 por la derecha y que $f(x)$ converge a -1 cuando x tiende a 0 por la izquierda. Esto se puede escribir como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

y puede observarse que los límites laterales existen. ◀

En el Ejemplo 3 se han calculado límites laterales. Como el límite por el lado derecho es diferente del límite por el lado izquierdo se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{no existe}$$

ya que la frase «x tiende a 0» (o en símbolos $\lim_{x\to 0}$) significa que x se aproxima a 0 de cualquier forma.

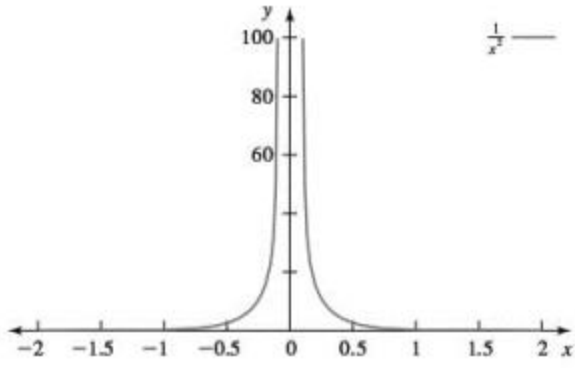
Más límites que no existen

Ejemplo 4 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Solución

La gráfica de $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$ revela que $f(x)$ crece sin límite cuando $x \to 0$ (*véase* la Figura 3.6). Esto se puede sospechar también si se dan en $f(x)$ valores



▲ **Figura 3.6**
Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ del Ejemplo 4. La función crece sin límite cuando x tiende a 0

cercanos a 0. Escogiendo valores suficientemente cercanos a 0 se pueden obtener valores de $f(x)$ arbitrariamente grandes.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	100	10 000	10^6	10^6	10 000	100

Esto indica que el límite no existe. ◀

Cuando no existe $\lim_{x\to c} f(x)$, se dice que $f(x)$ diverge cuando x tiende a c. La divergencia del Ejemplo 4 ha consistido en que la función crece sin límite. Este es un caso importante, por lo que se define a continuación.

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \text{ si } f(x) \text{ crece sin límite cuando } x \to c$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \text{ si } f(x) \text{ decrece sin límite cuando } x \to c$$

Se pueden dar definiciones similares para límites laterales, que serán necesarias en el siguiente ejemplo. Hay que notar que cuando se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$), se dice que $f(x)$ diverge cuando x tiende a c. En particular, esto significa que el $\lim_{x\to c} f(x)$ *no* existe (los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no corresponden a números reales). No obstante, se escribirá $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$) cuando $f(x)$ crezca (o decrezca) sin límite cuando $x \to c$, ya que resulta de utilidad.

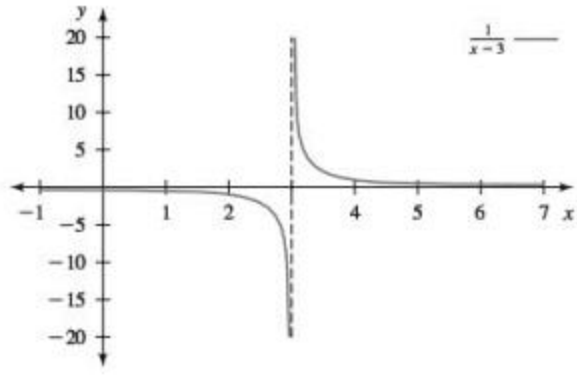
Ejemplo 5 Calcule

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$$

Solución

La gráfica de $f(x) = 1/(x-3)$, $x \neq 3$ de la Figura 3.7 revela que

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$



▲ **Figura 3.7**
La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x-3}$ del Ejemplo 5 crece sin límite cuando x se aproxima a 3 por la derecha y decrece sin límite cuando x se aproxima a 3 por la izquierda

Se llega a la misma conclusión cuando se calculan valores de $f(x)$ para x cercano a 3. Si x es ligeramente mayor que 3, puede verse que $f(x)$ es positivo y crece sin límite a medida que x se acerca a 3 por la derecha. Asimismo, si x es ligeramente menor que 3, $f(x)$ es negativo y decrece sin límite cuando x se acerca a 3 por la izquierda. Se concluye por tanto que $f(x)$ diverge cuando x se aproxima a 3. ◀

EL siguiente ejemplo muestra que una función puede diverger sin tener límites laterales ni tender a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 6 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Solución

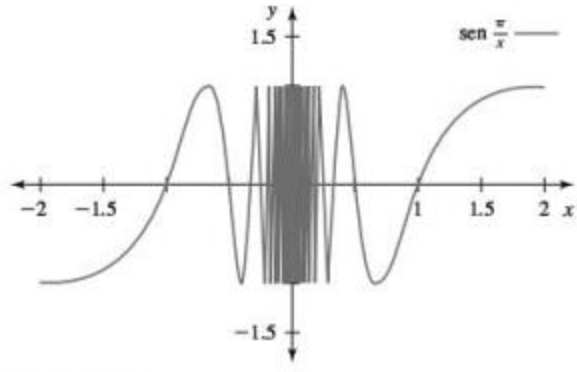
Utilizando simplemente una calculadora y dando valores para encontrar el límite se pueden obtener resultados incorrectos si no se procede con cuidado. Si se construyera una tabla con los valores de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ para $x = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$, se obtiene $\operatorname{sen} \frac{\pi}{0.1} = 0$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{0.01} = 0$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{0.001} = 0$, y así sucesivamente (nótese que los ángulos se miden en radianes). Esto podría llevarnos a concluir que el límite de la función es 0. Pero veamos la gráfica que se muestra en la Figura 3.8. La gráfica no coincide con la conclusión extraída con la calculadora.

Lo que se observa es que los valores de $f(x)$ oscilan infinitamente rápido entre -1 y $+1$ cuando $x \to 0$. Veamos porque: cuando $x \to 0^+$, el argumento de la función seno tiende a infinito (asimismo, cuando $x \to 0^-$ el argumento de la función tiende a menos infinito).

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\pi}{x} = -\infty$$

A medida que el argumento de la función seno se acerca a $+\infty$ o $-\infty$, los valores de la función oscilan entre -1 y $+1$. Por tanto, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ continúa oscilando entre -1 y $+1$ cuando $x \to 0$. ◀

El comportamiento mostrado en el Ejemplo 6 se denomina **divergencia por oscilación**.



▲ **Figura 3.8**
Gráfica de la función $f(x) = \text{sen } \frac{\pi}{x}$ del Ejemplo 6

Dificultades Se presenta a continuación un interesante ejemplo que ilustra otras limitaciones al utilizar la calculadora para obtener límites.

Ejemplo 7 Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x^2}$$

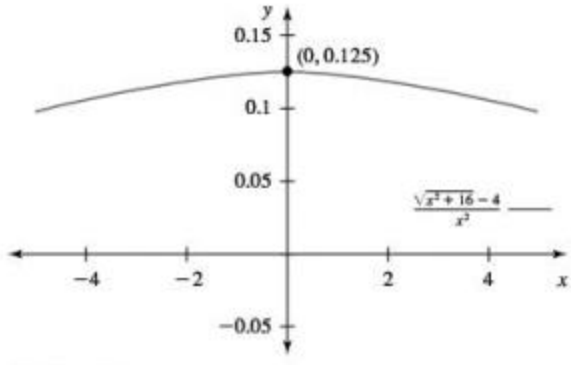
Solución

La gráfica de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$, que se muestra en la Figura 3.9, indica que el límite existe y, basándose en dicha gráfica, se puede conjeturar que es igual a 0.125. Si se utilizó una calculadora para construir una tabla de valores de $f(x)$ cercanos a 0, puede ocurrir algo extraño.

x	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.0000001
$f(x)$	0.1249998	0.125	0.125	0.125	0.1	0

Al acercarse a 0, primero $f(x)$ se acerca a 0.125, pero al acercarse más a 0, $f(x)$ empieza acercarse a 0. ¿Qué está sucediendo? Antes de empezar a preocuparse, dejemos sentado que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0.125$. En la sección siguiente, se aprenderá a calcular este límite sin la ayuda (algo discutible) de la calculadora. El extraño comportamiento de los valores calculados sucede porque cuando x es muy pequeño, la diferencia en el numerador es tan cercana a 0 que la calculadora no tiene suficiente precisión para determinar su valor. La calculadora sólo puede operar con precisión un cierto número de dígitos, lo que es suficiente en la mayoría de los casos. Aquí, sin embargo, se necesita una exactitud mayor. Este mismo comportamiento extraño aparece también al intentar dibujar esta función utilizando la calculadora gráfica. Cuando el intervalo de la ventana de representación para x es demasiado pequeño, la gráfica ya no es exacta (Inténtese, por ejemplo, $-0.00001 \leqslant x \leqslant 0.00001$ y $-0.03 \leqslant y \leqslant 0.15$ como intervalo de la ventana de representación). ◀

Al final de este capítulo, se presentará la definición formal de límite. La definición formal es conceptualmente similar a la que se utilizó para definir los límites de la forma $\lim_{n \to \infty} a_n$, pero no se utilizará para el cálculo de límites. Como ocurría en el Capítulo 2, existen leyes de límites que permitirán su cálculo de manera mucho más sencilla.



▲ **Figura 3.9**
Gráfica de $f(x)$ del Ejemplo 7. Cuando x tiende a 0, la función se aproxima a 0.125

3.1.2 Leyes de los límites

En el Capítulo 2 se presentaron leyes de límites de sucesiones. Existen leyes análogas para los límites del tipo $\lim_{x\to c} f(x)$.

LEYES DE LOS LÍMITES

Sea a una constante y supongamos que

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x)$$

existe. Se cumplen entonces las siguientes reglas

1. $\lim_{x\to c} af(x) = a \lim_{x\to c} f(x)$
2. $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
3. $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$
4. $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ supuesto que $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

Probablemente no sea necesario convencernos de que

$$\lim_{x\to c} x = c \tag{3.3}$$

En la Sección 3.6 se utilizará la definición formal de límite para demostrarlo. Por ahora, aceptemos (3.3) como un hecho. A partir de (3.3), se pueden usar las leyes de los límites para calcular límites de polinomios y de funciones racionales.

Ejemplo 8 Calcule

$$\lim_{x\to 2} [x^3 + 4x - 1]$$

Solución

Utilizando las reglas 1 y 2, se puede poner

$$\lim_{x\to 2} x^3 + 4 \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1$$

suponiendo que los límites individuales existen. Para el primer término, se utiliza la regla 3

$$\lim_{x\to 2} x^3 = (\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x)$$

suponiendo que existe el $\lim_{x\to 2} x$. Utilizando la expresión (3.3), se deduce que $\lim_{x\to 2} x = 2$ y por tanto

$$(\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x) = (2)(2)(2) = 8$$

Para calcular el segundo término, se utiliza de nuevo la Expresión (3.3), $\lim_{x\to 2} x = 2$. Para el último término, se utiliza que $\lim_{x\to 2} 1 = 1$. Ahora que se ha visto que los límites individuales existen, se podrán utilizar las reglas 1 y 2 para evaluar

$$\lim_{x\to 2} [x^3 + 4x - 1] = \lim_{x\to 2} x^3 + 4 \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1 = 8 + (4)(2) - 1 = 15 \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 9 Calcule

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

Solución

Utilizando la regla 4, se obtiene

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = \frac{\lim_{x\to 4}(x^2 + 1)}{\lim_{x\to 4}(x - 3)}$$

suponiendo que existen los límites del numerador y del denominador y que el límite del denominador no es igual a 0. Utilizando las reglas 2 y 3 en el numerador, se obtiene

$$\lim_{x\to 4}(x^2 + 1) = \left(\lim_{x\to 4} x^2\right) + \left(\lim_{x\to 4} 1\right) = (4)(4) + 1 = 17$$

La descomposición del límite de la suma del numerador en suma de límites sólo se justifica una vez se demuestra que dichos límites existen. Utilizando las reglas 1 y 2 en el denominador, se obtiene

$$\lim_{x\to 4}(x - 3) = \lim_{x\to 4} x - \lim_{x\to 4} 3 = 4 - 3 = 1$$

La utilización de las leyes de los límites sólo se justifica, de nuevo, una vez se demuestra que los límites existen. Como los límites del denominador y del numerador existen y el límite del denominador no es igual a 0, entonces

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = \frac{17}{1} = 17 \quad \blacktriangleleft$$

Los cálculos realizados en los Ejemplos 8 y 9 pueden parecer algo engorrosos, y que al final lo que se ha hecho es sustituir x por 2 en la expresión $x^3 + 4x - 1$ en el Ejemplo 8 y sustituir x por 4 en la expresión $\frac{x^2+1}{x-3}$ en el Ejemplo 9, incluso aunque se ha dicho en la definición formal de límite que para calcular el $\lim_{x\to c} f(x)$ no es correcto simplemente sustituir x por c en la expresión de $f(x)$. Pero, en esencia, en el Ejemplo 8 se ha realizado el siguiente cálculo

$$\lim_{x\to 2} [x^3 + 4x - 1] = 2^3 + (4)(2) - 1 = 15$$

y el siguiente cálculo en el Ejemplo 9:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = \frac{17}{1} = 17$$

A pesar de haberse dicho que para calcular el $\lim_{x\to c} f(x)$ no es correcto simplemente sustituir x por c en la expresión de $f(x)$, las leyes de los límites y la expresión (3.3) (que se demostrará en la Sección 3.6) muestran que eso es precisa-

mente lo que se hace cuando se toma el límite de un polinomio o de una función racional. A continuación se resume esta idea y se presentan dos ejemplos más que ilustran cómo calcular límites de polinomios o funciones racionales utilizando estos resultados.

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Si $f(x)$ es una función racional, es decir

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ polinomios y $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = f(c)$$

Ejemplo 10 Calcule

$$\lim_{x \to 2} [x^2 - 2x + 1]$$

Solución

Como $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x \to 3} [x^2 - 2x + 1] = 9 - 6 + 1 = 4$$ ◀

Ejemplo 11 Calcule

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - x + 5}{x^2 + 3x + 1}$$

Solución

Obsérvese que

$$f(x) = \frac{2x^3 - x + 5}{x^2 + 3x + 1}$$

es una función racional que está definida en $x = -1$ (el denominador no es igual a 0 al sustituir $x = -1$). Se obtiene

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - x + 5}{x^2 + 3x - 1} = \frac{2(-1)^3 - (-1) + 5}{(-1)^2 + 3(-1) + 1} = \frac{4}{-1} = -4$$ ◀

Cuando se utilizan las leyes de los límites para calcular límites de la forma

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Es necesario comprobar primero que existen $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$, y en el caso de $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$. Los dos ejemplos que siguen ilustran la importancia de comprobar estas suposiciones antes de aplicar las leyes de los límites.

Ejemplo 12 Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1}$$

Solución

Se observa que ni

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \quad \text{ni} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

existen. Por tanto no se puede utilizar la regla 4 directamente. Sin embargo, si se multiplican el numerador y el denominador por x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$$

Ahora, tenemos una función racional en el miembro derecho y se puede sustituir x por 0 ya que el denominador $1+x$ no valdrá 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+0}=1$$ ◀

Ejemplo 13 Calcule

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

Solución

La función $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ es una función racional, pero como $\lim_{x\to 4}(x-4)=0$, no se puede utilizar la regla 4. Entonces, es necesario simplificar primero $f(x)$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$$

Como $x\neq 4$, se puede cancelar el término $x-4$ en el numerador y en el denominador, resultando

$$\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

donde para calcular el límite se ha utilizado que $x+4$ es un polinomio. ◀

3.1.3. Problemas

(3.1.1)

En los Problemas 1-32, calcule los límites utilizando una tabla o una gráfica.

1. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+1)$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x+2}$
3. $\lim_{x\to -1}\frac{x}{1+x^2}$
4. $\lim_{s\to 2}(s^2-4)$
5. $\lim_{x\to \pi}3\cos\frac{x}{4}$
6. $\lim_{t\to \pi/12}\operatorname{sen}(4t)$
7. $\lim_{x\to \pi/2}2\sec\frac{x}{3}$
8. $\lim_{x\to \pi/2}\tan\frac{x-\pi/2}{2}$
9. $\lim_{x\to -1}e^{-x^2/2}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{2x+3}$
11. $\lim_{x\to 0}\ln(x+1)$
12. $\lim_{t\to e}\ln t^2$
13. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x-4}$
14. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}$
15. $\lim_{x\to \infty}\frac{2}{x}$
16. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{x}$
17. $\lim_{x\to \infty}\frac{x}{1+x}$
18. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{2-x^2}$
19. $\lim_{x\to -\infty}e^x$
20. $\lim_{x\to \infty}e^{-x}$
21. $\lim_{x\to 4^-}\frac{2}{x-4}$

22. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

23. $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{1-x}$

24. $\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{2-x}$

25. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2}$

26. $\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x^2-4}$

27. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{x^2}$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

30. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

31. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

32. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{2x}$

33. Utilice una tabla y una gráfica para averiguar el comportamiento de

$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

cuando $x \to \infty$. ¿Qué sucede cuando $x \to -\infty$? ¿Qué sucede cuando $x \to 0$?

34. Utilice una tabla y una gráfica para averiguar el comportamiento de

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

cuando $x \to \infty$. ¿Qué sucede cuando $x \to -\infty$? ¿Qué sucede cuando $x \to 0$?

35. Utilice una calculadora gráfica para estudiar

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{sen} \frac{1}{x-1}$$

36. Utilice una calculadora gráfica para estudiar

$$\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$$

(3.1.2)

En los Problemas 37-54, utilice las leyes de los límites para calcular los límites.

37. $\lim_{x\to -1} (x^3 + 7x - 1)$

38. $\lim_{x\to 2} (3x^4 - 2x + 1)$

39. $\lim_{x\to -5} (4 + 2x^2)$

40. $\lim_{x\to 1} (8x^3 - 2x + 3)$

41. $\lim_{x\to 3} (2x^2 - \frac{1}{x})$

42. $\lim_{x\to -2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)$

43. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3 - 20}{x+1}$

44. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x+2}$

45. $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2+1}{2x-3}$

46. $\lim_{x\to -2} \frac{1+x}{1-x}$

47. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x}$

48. $\lim_{u\to 2} \frac{4-u^2}{2-u}$

49. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$

50. $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$

51. $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x^2-9}$

52. $\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{16-x^2}$

53. $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$

54. $\lim_{x\to 1/2} \frac{1-x-2x^2}{1-2x}$

3.2 CONTINUIDAD

3.2.1 ¿Qué es la continuidad?

Observe las dos funciones siguientes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Nuestro interés se centra en cómo se comportan estas funciones cuando x está cerca de 3. Ambas funciones están definidas para todo $x \in \mathbf{R}$ y son iguales para $x \neq 3$. Además, como se vio en el Ejemplo 2 de la Sección 3.1,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \tag{3.4}$$

Pero las dos funciones toman valores diferentes en $x = 3$: $f(3) = 6$ y $g(3) = 7$. Comparando esto con la Expresión (3.4), se puede ver que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \quad \text{pero} \quad \lim_{x \to 3} g(x) \neq g(3)$$

Esta diferencia se puede ilustrar también gráficamente (Figuras 3.10 y 3.11). La gráfica de $f(x)$ se puede dibujar sin levantar el lápiz, mientras que al dibujar $g(x)$ es necesario levantar el lápiz en $x = 3$, ya que $\lim_{x \to 3} g(x) \neq g(3)$. Se dice que la función $f(x)$ es **continua** en $x = 3$, mientras que $g(x)$ es **discontinua** en $x = 3$. Ésta es la definición de continuidad en un punto:

Definición Se dice que una función f es **continua** en $x = c$ si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Para comprobar si una función es continua en $x = c$, es por tanto necesario comprobar las tres condiciones siguientes:

1. $f(x)$ está definida en $x = c$.
2. Existe el $\lim_{x \to c} f(x)$.
3. $\lim_{x \to c} f(x)$ es igual a $f(c)$.

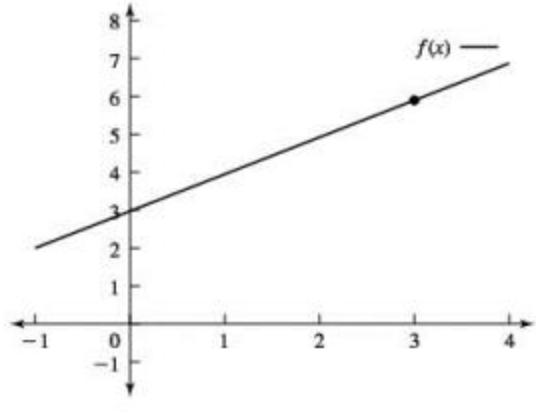
Si falla alguna de las tres condiciones, la función es **discontinua** en $x = c$.

Ejemplo 1 Demuestre que $f(x) = 2x - 3$, $x \in \mathbf{R}$, es continua en $x = 1$.

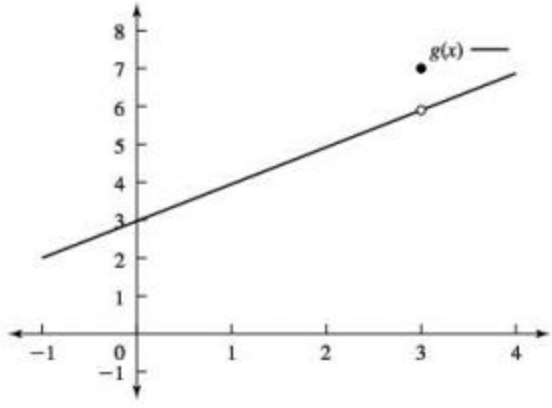
Solución

Deben comprobarse las tres condiciones

1. $f(x)$ está definida en $x = 1$ ya que $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.
2. Utilizando que $\lim_{x \to c} x = c$ se concluye que el $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe.



◀ **Figura 3.10**
La gráfica de $y = f(x)$ es continua en $x = 3$



▲ **Figura 3.11**
La gráfica de $y = f(x)$ es discontinua en $x = 3$

3. Utilizando las leyes de los límites, se obtiene que $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$, que coincide con $f(1)$.

Como se cumplen las tres condiciones, $f(x) = 2x - 3$ es continua en $x = 1$. ◀

Ejemplo 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ a & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Calcule a para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$.

Solución

Para calcular

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

Se factoriza el numerador $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Por tanto, como $x \neq 3$,

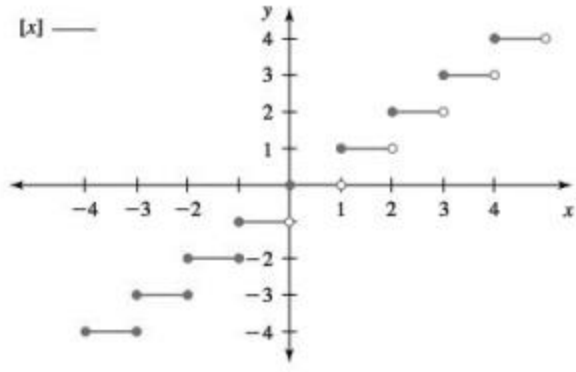
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 2) = 5$$

Para asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 3$, se requiere que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

Por tanto, el valor que debe escogerse para a es 5. Este es el único valor de a que hace que $f(x)$ sea continua. Cualquier otro valor de a producirá una función $f(x)$ que será discontinua. ◀

La función $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$, $x \neq 3$, no está definida en $x = 3$ y por tanto, automáticamente es discontinua en $x = 3$ (ya que no se cumple la condición 1). Pero en el Ejemplo 2 vimos que se puede *eliminar la discontinuidad* definiendo apropiadamente la función en $x = 3$. No siempre es posible eliminar las discontinuidades, como se muestra en los tres ejemplos siguientes. En los dos primeros ejemplos, la discontinuidad es un salto: es decir, en el punto del salto existen los límites por la izquierda y por la derecha, pero no son iguales. En el tercer ejemplo, la función crece sin límite donde es discontinua.



▲ **Figura 3.12**
La función suelo $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Ejemplo 3 La función suelo

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{el mayor entero menor o igual que } x$$

se dibuja en la Figura 3.12. Los círculos rellenos en la figura corresponden a puntos extremos pertenecientes a la gráfica de la función, mientras que los círculos abiertos corresponden a extremos que no pertenecen la gráfica de la función. Para explicar esta función, se calcularán algunos valores: $f(2.1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(1.9999) = 1$. La función tiene un salto siempre que x es entero. Sea k un entero. Entonces $f(x) = k$ y

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = k, \quad \lim_{x \to k^-} f(x) = k - 1$$

Es decir, sólo cuando x se aproxima a un número entero por la derecha el límite es igual a la función. La función es por tanto discontinua en los valores enteros y la discontinuidad no se puede eliminar. Si c no es un entero, entonces $f(x)$ es continua en $x = c$. ◀

El Ejemplo 3 motiva la definición de continuidad lateral.

Definición Se dice que una función f es continua por la derecha en $x = c$ si

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

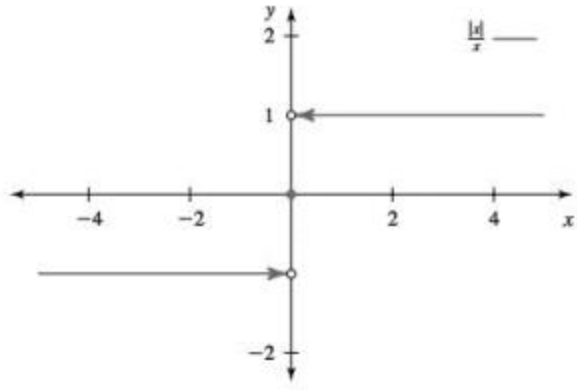
y es continua por la izquierda en $x = c$ si

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

La función $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbf{R}$, del Ejemplo 3, es por tanto continua por la derecha pero no por la izquierda. En el ejemplo siguiente, la discontinuidad es de nuevo un salto, pero en este caso no existirá continuidad lateral.

Ejemplo 4 Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



▲ **Figura 3.13**
La función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ es discontinua en $x = 0$

es discontinua en $x = 0$ y que la discontinuidad no se puede eliminar.

Solución

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la Figura 3.13. Se puede escribir

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

ya que $|x| = x$ si $x > 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$. Por tanto

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Los límites laterales existen, pero no son iguales [lo que implica que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe]. Cuando se dibuja la función, se produce un salto en $x = 0$ (*véase* la Figura 3.13). Esta función no tiene continuidad lateral porque $f(x)$ no vale ni 1 ni -1 en $x = 0$. No hay forma de asignar un valor a $f(0)$ de forma que la función sea continua en $x = 0$. ◀

Ejemplo 5 Demuestre que

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

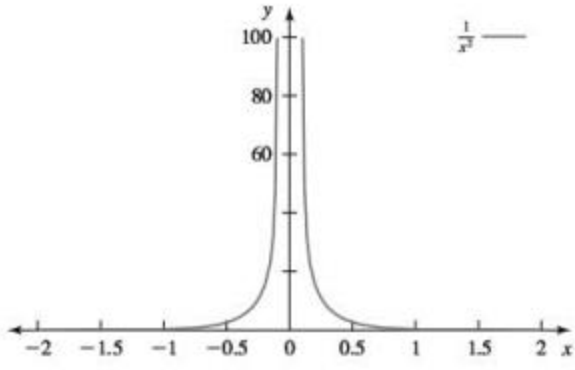
es discontinua en $x = 0$ y que la discontinuidad no se puede eliminar.

Solución

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la Figura 3.14. Demostrar que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$ es sencillo ya que $f(x)$ no está definida en $x = 0$ y por tanto no se cumple la condición 1. Ya sabemos lo que sucede en $x = 0$. En el Ejemplo 4 de la Sección 3.1 se demostró que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \text{(el límite no existe)}$$

Como ∞ no es un número real, no se puede asignar un valor a $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. ◀



▲ **Figura 3.14**
La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$

3.2.2 Combinación de funciones continuas

Utilizando las leyes de los límites, se obtienen las siguientes propiedades para las combinaciones de funciones continuas.

Sea a una constante y sean las funciones f y g continuas en $x = c$. Entonces, las funciones siguientes son continuas en $x = c$:

1. $a \cdot f$
2. $f + g$
3. $f \cdot g$
4. $\frac{f}{g}$ con tal de que $g(c) \neq 0$

Demostración Sólo demostraremos la segunda propiedad. Hay que demostrar que se cumplen las condiciones 1-3 de la subsección anterior.

1. Nótese que $[f + g](x) = f(x) + g(x)$. Por tanto, $f + g$ está definida en $x = c$ y $[f + g](c) = f(c) + g(c)$.
2. Se supone que f y g son continuas en $x = c$. En particular, esto significa que
$$\lim_{x \to c} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x)$$
existen. Es decir, se cumple la hipótesis de las leyes de los límites, por lo que se puede aplicar la regla 2 de los límites, y obtener
$$\lim_{x \to c} [f + g](x) = \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad (3.5)$$
Es decir, el límite $\lim_{x \to c} [f + g](x)$ existe, y por tanto la condición 2 se cumple.
3. Como f y g son continuas en $x = c$,
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = g(c) \qquad (3.6)$$
Por tanto, combinando (3.5) y (3.6),
$$\lim_{x \to c} [f + g](x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c)$$
que es igual a $[f + g](c)$ y por tanto la condición 3 se cumple.

Como se ha demostrado que las tres condiciones se cumplen, se deduce que $f+g$ es continua en $x=c$. Las otras propiedades se demuestran de forma análoga, utilizando las leyes de los límites. ■

Se dice que una función f es continua en el intervalo I si es continua para todo $x \in I$. Nótese que si I es un intervalo cerrado, la continuidad en los extremos izquierdo (y, respectivamente, derecho) del intervalo significa continuidad por la derecha (y, respectivamente, por la izquierda). Las funciones elementales son continuas allí donde están definidas. En el caso de los polinomios y las funciones racionales, esto se deduce inmediatamente del hecho de que ciertas combinaciones de funciones continuas son continuas. Se presenta a continuación una lista con los casos más importantes.

Las siguientes funciones son continuas allí donde están definidas:

1. Funciones polinómicas
2. Funciones racionales
3. Funciones potenciales
4. Funciones geométricas
5. Funciones exponenciales de la forma a^x, $a>0$ y $a \neq 1$
6. Funciones logarítmicas de la forma $\log_a x$, $a>0$ y $a \neq 1$

La frase «allí donde están definidas» es crucial. Ayuda a identificar los puntos donde la función podría ser discontinua. Por ejemplo, la función potencial $1/x^2$ sólo está definida para $x \neq 0$, y la función logarítmica $\log_a x$ sólo está definida para $x>0$. En el siguiente ejemplo se ilustran estos seis casos poniendo particular atención a la frase «allí donde están definidas».

Ejemplo 6 ¿Para qué valores de $x \in \mathbf{R}$ son continuas las siguientes funciones?

(a) $f(x)=2x^3-3x+1$ **(b)** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ **(c)** $f(x)=x^{1/4}$

(d) $f(x)=3\operatorname{sen} x$ **(e)** $f(x)=\tan x$ **(f)** $f(x)=3^x$

(g) $2\ln(x+1)$

Solución

(a) $f(x)$ es un polinomio y está definido para todo $x \in \mathbf{R}$. Por tanto, es continua para todo $x \in \mathbf{R}$.

(b) $f(x)$ es una función racional. Está definida para todo $x \neq 2$. Por tanto es continua para todo $x \neq 2$.

(c) $f(x)=x^{1/4}=\sqrt[4]{x}$ es una función potencial que está definida para $x \geqslant 0$. Por tanto es continua para $x \geqslant 0$.

(d) $f(x)$ es una función trigonométrica. Como $\operatorname{sen} x$ está definida para todo $x \in \mathbf{R}$, $3\operatorname{sen} x$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$.

(e) $f(x)$ es una función trigonométrica. La función tangente está definida para todo $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, siendo k un entero. Por tanto es continua para todo $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, siendo k un entero.

(f) $f(x)$ es una función exponencial. $f(x)=3^x$ está definida para todo $x \in \mathbf{R}$ y es por tanto continua para todo $x \in \mathbf{R}$.

(g) $f(x)$ es una función logarítmica. $f(x)=2\ln(x+1)$ está definida siempre que $x+1>0$ o $x>-1$. Por tanto es continua para todo $x>-1$. ◀

El siguiente resultado es útil para determinar si una composición de funciones es continua.

Teorema Si $g(x)$ es continua en $x = c$ con $g(c) = L$ y $f(x)$ es continua en $x = L$, entonces $(f \circ g)(x)$ es continua en $x = c$. En particular,

$$\lim_{x \to c} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to c} f[g(x)] = f[\lim_{x \to c} g(x)] = f[g(c)] = f(L)$$

Para explicar este teorema, hay que recordar lo que significa calcular $(f \circ g)(x) = f[g(c)]$. Para calcular $f[g(c)]$, se toma el valor c, se calcula $g(c)$ y después se toma el resultado $g(c)$ y se introduce en la función f para calcular $f[g(c)]$. Si en cada uno de esos pasos las funciones son continuas, la función resultante será también continua.

Ejemplo 7 Determinar dónde son continuas las siguientes funciones.

(a) $h(x) = e^{-x^2}$

(b) $h(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

(c) $h(x) = \frac{1}{1 + 2x^{1/3}}$

Solución

(a) Sea $g(x) = -x^2$ y $f(x) = e^x$. Sea $h(x) = (f \circ g)(x)$. Como $g(x)$ es un polinomio, es continua para todo $x \in \mathbf{R}$, y su recorrido es $(-\infty, 0]$. $f(x)$ es continua para todos los valores del recorrido de $g(x)$ [de hecho, $f(x)$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$]. Por tanto se deduce que $h(x)$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$.

(b) Sea $g(x) = \frac{\pi}{x}$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$. $g(x)$ es continua para todo $x \neq 0$. El recorrido de $g(x)$ es el conjunto de los números reales excluyendo el 0. $f(x)$ es continua para todo x en el recorrido de $g(x)$. Por tanto, $h(x)$ es continua para todo $x \neq 0$. Recuérdese que en el Ejemplo 6 de la Sección 3.1 se demostró que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

no existe. Es decir, $h(x)$ es discontinua en $x = 0$.

(c) Sea $g(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$. Sea $h(x) = (f \circ g)(x)$. $g(x)$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$ ya que $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ y 3 es un entero impar. El recorrido de $g(x)$ es $(-\infty, \infty)$. $f(x)$ es continua para todo x real distinto de $-1/2$. Como $g(-\frac{1}{8}) = -\frac{1}{2}$, $h(x)$ es continua para todo x real distinto de $-1/8$. Otra forma de ver la necesidad de excluir $-1/8$ del dominio de $h(x)$ es observar directamente el denominador de $h(x)$. Concretamente, $1 + 2x^{1/3} = 0$ cuando $x = -\frac{1}{8}$. ◀

Cuando se calcula $\lim_{x \to c} f(x)$ y se sabe que $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. En los tres ejemplos siguientes se ilustra esta idea.

Ejemplo 8 Calcule

$$\lim_{x \to 3} sen\left(\pi \frac{x^2 - 1}{4}\right)$$

Solución

La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi \frac{x^2-1}{4})$ es continua en $x = 3$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 3} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x^2-1}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi \frac{9-1}{4}\right) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0$$ ◀

Ejemplo 9 Calcule

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{2x^3 - 1}$$

Solución

La función $f(x) = \sqrt{2x^3 - 1}$ es continua en $x = 1$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{2x^3 - 1} = \sqrt{(2)(1)^3 - 1} = \sqrt{1} = 1$$ ◀

Ejemplo 10 Calcule

$$\lim_{x\to 0} e^{x-1}$$

Solución

La función $f(x) = e^{x-1}$ es continua en $x = 0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} e^{x-1} = e^{0-1} = e^{-1}$$ ◀

Finalizaremos esta sección calculando el límite del Ejemplo 7 de la Sección 3.1:

Ejemplo 11 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16} - 4}{x^2}$$

Solución

No se puede aplicar la regla 4 de la Sección 3.1 porque $f(x) = (\sqrt{x^2+16} - 4)/x^2$ no está definida en $x = 0$ (si se sustituye x por 0 en la expresión de la función, se obtiene 0/0). Se utilizará un truco para calcular el límite; concretamente, se racionalizará el numerador. Para $x \neq 0$ resulta,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+16} - 4}{x^2} &= \frac{(\sqrt{x^2+16} - 4)}{x^2} \frac{\sqrt{x^2+16} - 4)}{(\sqrt{x^2+14} + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 16 - 16}{x^2(\sqrt{x^2+16} + 4)} = \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+16} + 4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+16} + 4}\end{aligned}$$

Nótese que en el último paso se puede dividir por x^2 ya que se supone que $x \neq 0$. Ahora se puede aplicar la regla 4 a $1/(\sqrt{x^2+16} + 4)$, con lo que se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16} - 4}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+16} + 4} = \frac{1}{8} = 0.125$$

como se vio en el Ejemplo 7 de la Sección 3.1. En el Capítulo 5 se presentará otro método para obtener el límite de expresiones de la forma 0/0. ◀

3.2.3. Problemas

(3.2.1)

En los Problemas 1-4, demuestre que las funciones son continuas en los valores dados.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1,\ c = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ c = -1$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(2x),\ c = \dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x) = e^{-x},\ c = 1$

5. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

es continua en $x = 2$.

6. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ -7 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

es continua en $x = -2$.

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ a & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tener a para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$?

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tener a para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$?

9. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 3} & \text{para } x \neq 3 \\ 0 & \text{para } x = 3 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 3$.

10. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{para } x \neq -1,\ 1 \\ 0 & \text{para } x = -1 \text{ o } 1 \end{cases}$$

es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$.

11. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 1$.

12. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para } x \leqslant 0 \\ x & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$.

13. Demuestre que la función suelo $\lfloor x \rfloor$ es continua en $x = 5/2$ pero es discontinua en $x = 3$.

14. Demuestre que la función suelo $\lfloor x \rfloor$ es continua por la derecha en $x = 2$.

15. **(a)** Demuestre que

$$f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad x \geqslant 1$$

es continua por la derecha en $x = 1$.

(b) Dibuje $f(x)$.

(c) ¿Tiene sentido estudiar la continuidad por la izquierda en $x = 1$?

16. **(a)** Demuestre que

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad |x| \geqslant 2$$

es continua por la derecha en $x = 2$ y es continua por la izquierda en $x = -2$.

(b) Dibuje $f(x)$.

(c) ¿Tiene sentido estudiar la continuidad por la izquierda en $x = 2$ y por la derecha en $x = -2$?

(3.2.2)

En los Problemas 17-26, obtenga los valores de $x \in \mathbf{R}$ para los que las funciones dadas son continuas.

17. $f(x) = 3x^4 - x^2 + 4$

18. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

20. $f(x) = \cos(2x)$

21. $f(x) = e^{-|x|}$

22. $f(x) = \ln(x - 2)$

23. $f(x) = \ln \dfrac{x}{x + 1}$

24. $f(x) = \exp[-\sqrt{x - 1}]$

25. $f(x) = \tan(2\pi x)$

26. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{3 + x}\right)$

27. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{para } x \leqslant 0 \\ x + c & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

(a) Dibuje $f(x)$ cuando $c = 1$ y determine si $f(x)$ es continua para este valor de c.

(b) ¿Cómo debe escogerse c para que $f(x)$ sea continua para todo $x \in (-\infty, \infty)$?

28. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{para } x \geqslant 1 \\ 2x + c & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(a) Dibuje $f(x)$ cuando $c = 0$ y determine si $f(x)$ es continua para este valor de c.

(b) ¿Cómo debe escogerse c para que $f(x)$ sea continua para todo $x \in (-\infty, \infty)$?

En los Problemas 29-48, obtenga los límites.

29. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

30. $\lim_{x \to -\pi/2} \cos(2x)$

31. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

32. $\lim_{x \to -\pi/2} \dfrac{1 + \tan^2 x}{\sec^2 x}$

33. $\lim_{x \to 1} \sqrt{1 + 8x^4}$

34. $\lim_{x \to -2} \sqrt{6 + x}$

35. $\lim_{x \to -1} \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

36. $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 + 4x - 1}$

37. $\lim_{x \to 0} e^{-x^2/2}$

38. $\lim_{x \to 0} e^{3x+1}$

39. $\lim_{x \to 2} e^{x^2 - 4}$

40. $\lim_{x \to -1} e^{x^2/2 - 1}$

41. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

42. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + 1}$

43. $\lim_{x \to -2} \dfrac{1}{\sqrt{5x^2 - 4}}$

44. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x^2}}$

45. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

46. $\lim_{x \to 0} \dfrac{5 - \sqrt{25 + x^2}}{2x^2}$

47. $\lim_{x \to 0} \ln(1 - x)$

48. $\lim_{x \to 1} \ln(e^x + 1)$

3.3 LÍMITES EN EL INFINITO

Las leyes de los límites que se presentaron en la Subsección 3.1.2 son también válidas cuando x tiende a ∞ (o a $-\infty$).

Ejemplo 1 Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + 1}$$

Solución

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$. Obviamente, no existen ni $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ni $\lim_{x \to \infty} g(x)$. Por tanto, no se puede utilizar la regla 4 de la Sección 3.1. Pero se puede dividir el numerador y el denominador por x. Se obtiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Como $\lim_{x \to \infty} 1 = 1$ y $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$, ambos límites existen. Además, $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x}) \neq 0$. Ahora, tras los cambios algebraicos realizados, se puede aplicar la regla 4 de la Sección 3.1 con lo que se obtiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \to \infty} 1}{\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})} = \frac{1}{1} = 1$$ ◀

En el Ejemplo 1, se ha calculado el límite de una función racional cuando x tiende a infinito. Las funciones racionales son cocientes de polinomios. Para estudiar cómo se comporta el límite de una función racional cuando x tiende a infinito, primero se compara el crecimiento relativo de las funciones de la forma $y = x^n$. Si $n > m$, el término x^n domina sobre el término x^m cuando x es grande, en el sentido de que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^m} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{x^n} = 0$$

Esto se deduce inmediatamente si se simplifican las fracciones,

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad \text{con } n - m > 0$$

y

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}} \quad \text{con } n - m > 0$$

Este comportamiento límite es importante al calcular límites de funciones racionales cuando $x \to \infty$. Se compararán a continuación los tres límites siguientes:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 4x + 7}{3x^3 + 7x^2 - 1}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 2x - 5}{x^2 - x + 2}$

Para determinar si domina el numerador o el denominador, se miran los términos de mayor grado de los polinomios del numerador y del denominador. Esos términos nos indican la rapidez con la que crece el polinomio cuando x crece.

(a) El término de mayor grado de numerador es x^2, y el término de mayor grado del denominador es x^3. Cuando $x \to \infty$, el denominador crece mucho más rápido que el numerador. Por tanto, es razonable esperar que el límite sea igual a 0. Esto se puede demostrar dividiendo el numerador y el denominador por la potencia más alta de x, concretamente x^3. Se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Como $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})$ existe (es igual a 0) y $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})$ existe y no es igual a 0 (es igual a 1), se puede aplicar la regla 4 y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = \frac{0}{1} = 0$$

(b) La potencia de mayor grado del numerador y del denominador es x^3. Se divide el numerador y el denominador por x^3 y se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 4x + 7}{3x^3 + 7x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{3 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

En el último paso, se ha utilizado que los límites del numerador y del denominador existen y que el límite del denominador no es igual a 0. Aplicando la regla 4 se obtiene el valor del límite. Nótese que el valor del límite es igual al cociente de los coeficientes de los términos de potencias mayores del numerador y del denominador.

(c) El término de mayor grado del numerador es x^4 y el término de mayor grado del denominador es x^2. Como el término de mayor grado del numerador crece mucho más rápidamente que el término de mayor grado del denominador, es razonable suponer que el límite será indefinido. Este es de hecho el caso y puede verse dividiendo el numerador por el denominador. Se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 2x - 5}{x^2 - x + 2} = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 + x - 1 - \frac{x + 3}{x^2 - x + 2}\right) \quad \text{no existe}$$

Frecuentemente es útil determinar si el límite tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Como $x^2 + x - 1$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to \infty$ y el cociente $\frac{x+3}{x^2-x+2}$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$, el límite de $\frac{x^4+2x-5}{x^2-x+2}$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$.

Resumamos nuestras conclusiones. Si $f(x)$ es una función racional de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$, siendo $p(x)$ un polinomio de grado grd(p) y $q(x)$ un polinomio de grado grd(q), entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{grd}(p) < \operatorname{grd}(q) \\ L \neq 0 & \text{si } \operatorname{grd}(p) = \operatorname{grd}(q) \\ \text{no existe} & \text{si } \operatorname{grd}(p) > \operatorname{grd}(q) \end{cases}$$

siendo L un número real que es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y del denominador. Se mantiene el mismo comportamiento si $x \to -\infty$.

Ejemplo 2 Calcule

(a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x + 2x^2}{3x - 5x^2}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^3}{1 + x^5}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4 + 3x^2}{1 - 7x}$

Solución

(a) Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, se obtiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x + 2x^2}{3x - 5x^2} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

(b) Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^3}{1 + x^5} = 0$$

(c) Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite no existe. Cuando x es muy grande, la expresión $\frac{2-x^2}{1+2x}$ se comporta como $\frac{-x^2}{2x} = -\frac{x}{2}$, que tiende a $-\infty$ cuando $x \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - x^2}{1 + 2x} = -\infty \qquad \text{(el límite no existe)}$$

(d) El grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4 + 3x^2}{1 - 7x} = \infty \qquad \text{(el límite no existe)}$$

ya que $\frac{4+3x^2}{1-7x}$ se comporta como $\frac{3x^2}{-7x} = -\frac{3}{7}x$ cuando x es grande, que tiende a $+\infty$ cuando $x \to -\infty$. ◀

Las funciones racionales no son las únicas funciones en las que intervienen límites cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$). En muchas aplicaciones importantes en biología intervienen las funciones exponenciales. Por tanto el siguiente resultado se utilizará con mucha frecuencia. Es uno de los límites más importantes.

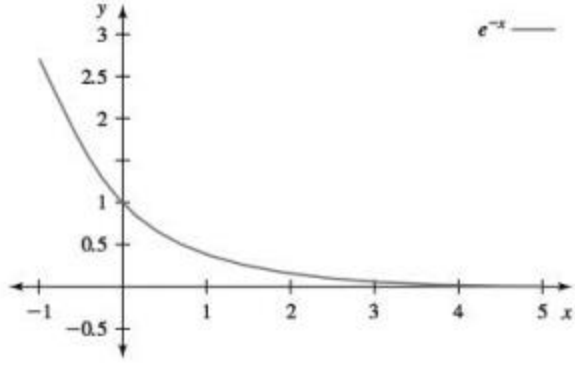
$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

La gráfica de $f(x) = e^{-x}$ se muestra en la Figura 3.15. Es conveniente familiarizarse con la forma básica de esta función y con su comportamiento cuando $x \to \infty$.

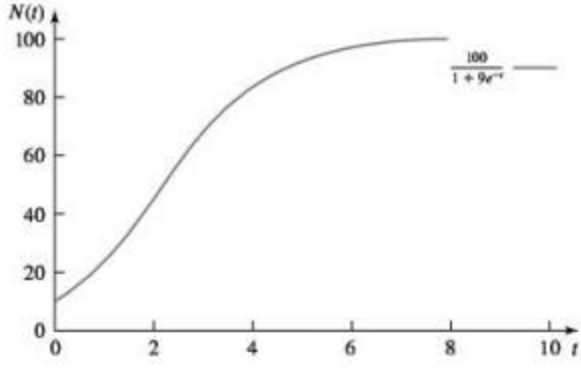
Ejemplo 3 **Crecimiento logístico** La curva logística describe la variación de la densidad de una población con el tiempo, cuando la velocidad de crecimiento depende del tamaño de la población. En los capítulos siguientes se presentará esta función con mayor detalle. Aquí es suficiente decir que la velocidad de crecimiento per cápita disminuye cuando el tamaño de la población crece. Si $N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t, la expresión de la curva logística es

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N(0)} - 1)e^{-rt}} \quad \text{para } t \geqslant 0$$

Los parámetros K y r son números positivos que describen la dinámica de la población. $N(0)$ es el tamaño de la población en el instante cero [evaluando $N(t)$ en $t = 0$]. Se supone que $N(0)$ es positivo. La Figura 3.16 muestra la gráfica de $N(t)$. Ahora se dará una interpretación de K, y la interpretación de r se dejará para el próximo capítulo.



▲ **Figura 3.15**
Gráfica de $f(x) = e^{-x}$



▲ **Figura 3.16**
Gráfica de la curva logística con $K = 100$, $N_0 = 10$ y $r = 1$

Si estamos interesados en el comportamiento a largo plazo de una población que evoluciona de acuerdo a la curva de crecimiento logístico, es necesario estudiar el comportamiento de $N(t)$ cuando $t \to \infty$. Se obtiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + (\frac{K}{N(0)} - 1)\, e^{-rt}} = K$$

ya que $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0$ para $r > 0$. Es decir, cuando $t \to \infty$, el tamaño de la población se aproxima a K. Este valor se denomina **capacidad de alojamiento** de la población. En este texto aparecerá repetidamente el concepto de crecimiento logístico, ya que es una de las ecuaciones más fundamentales para describir el crecimiento en una población. ◀

3.3.1. Problemas

Calcule los límites en los Problemas 1-24

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^4 - 2x + 1}$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3}{5x^2 - 2x + 1}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3}{x - 2}$

4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x - 1}{3 - 4x}$

5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - x^3 + 1}{x^4 + 2x^2}$

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 1}{4x^4 + 1}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

8. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3 - x^2}{1 - 2x^2}$

9. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{4 - x}$

10. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x^3}{2 + x}$

11. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2 + x^2}{1 - x}$

12. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x + x^2}{3x + 1}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$

14. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^x}{e^x + 3}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2 - e^x}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \exp[x]$

18. $\lim_{x\to\infty} \exp[-\ln x]$

19. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x$

20. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cos x$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3}{2 + e^{-x}}$

22. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

23. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1 + x}$

24. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x(1 + x)}$

25. En la Sección 1.2.3, Ejemplo 6, se presentó la función de crecimiento de Monod

$$r(N) = a\frac{N}{k + N}, \quad N \geqslant 0$$

Calcule $\lim_{N\to\infty} r(N)$.

26. En el Problema 86 de la Sección 1.3 se presentó la ecuación de Michaelis-Menten, que describe la velocidad inicial de una reacción enzimática (v_0) en función de la concentración de sustrato (s_0). La expresión de la ecuación es

$$v_0 = \frac{v_{max}\, s_0}{s_0 + K_m}$$

Calcule $\lim_{s_0\to\infty} v_0$.

27. Suponga que el tamaño de una población en el instante t se expresa como

$$N(t) = \frac{500t}{3 + t}, \quad t \geqslant 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $N(t)$.
(b) Determine el tamaño de la población cuando $t \to \infty$. Este tamaño se denomina **tamaño límite de la población**.
(c) Demuestre que en instante $t = 3$, el tamaño de la población es la mitad de su tamaño límite.

28. (*Crecimiento logístico*) Suponga que el tamaño de una población en el instante t está dado por la expresión

$$N(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-t}}$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $N(t)$.
(b) Determine el tamaño de la población cuando $t \to \infty$, utilizando las reglas básicas de los límites. Compare su respuesta con la gráfica dibujada en el apartado (a).

29. (*Crecimiento logístico*) Suponga que el tamaño de una población en el instante t está dado por la expresión

$$N(t) = \frac{50}{1 + 3e^{-t}}$$

para $t \geqslant 0$.

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $N(t)$.
(b) Determine el tamaño de la población cuando $t \to \infty$, utilizando las reglas básicas de los límites. Compare su respuesta con la gráfica dibujada en el apartado (a).

30. (a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de

$$f(x) = e^{ax} \operatorname{sen} x, \quad x \geqslant 0$$

para $a = -0.1, -0.01, 0, 0.01$ y 0.1.
(b) ¿Qué parte de la función $f(x)$ produce la oscilación que se aprecia en la gráfica dibujada en el apartado (a)?
(c) Describa con palabras el efecto que tiene el valor de a en la forma de la gráfica de $f(x)$.
(d) Dibuje $f(x) = e^{ax} \operatorname{sen} x$, $g(x) = -e^{ax}$ y $h(x) = e^{ax}$ en un mismo sistema de coordenadas para (i) $a = 0.1$ y (ii) $a = -0.1$ [utilice sistemas de coordenadas diferentes para (i) y (ii)]. Explique lo que observa en cada caso. Demuestre que

$$-e^{ax} \leqslant e^{ax} \operatorname{sen} x \leqslant e^{ax}$$

Utilice este hecho para determinar los valores de a para los que existe

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

y obtenga el valor del límite.

3.4 EL TEOREMA DEL SÁNDWICH Y ALGUNOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

El siguiente teorema es a la vez útil e intuitivo. No lo demostraremos.

Teorema del sándwich Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contenga a c (excepto probablemente en c) y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

El teorema se denomina teorema del sándwich porque la función $g(x)$ queda atrapada como en un sándwich entre las funciones $f(x)$ y $h(x)$. Como $f(x)$ y $h(x)$ convergen al mismo valor cuando $x \to c$, $g(x)$ debe converger también a ese valor cuando $x \to c$ ya que está atrapada entre $f(x)$ y $h(x)$. El teorema del sándwich también se aplica para límites laterales. El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar este teorema.

Ejemplo 1 Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Solución

Debe advertirse primero que no se puede utilizar la regla 3, que dice que el límite de un producto es el producto de los límites, porque exige que existan los límites de los dos factores. El límite de $\operatorname{sen}(1/x)$ cuando $x \to 0$ no existe. Diverge por oscilación (*véase* el Ejemplo 6 de la Sección 3.1, donde se muestra un límite similar). Sin embargo, se sabe que

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

para todo $x \neq 0$. Para pasar de este conjunto de inecuaciones a uno en el que aparezca $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se pueden multiplicar los tres miembros por x. Como al multiplicar una inecuación por x se cambia el signo cuando $x < 0$, es necesario considerar dos casos, uno de ellos para $x > 0$ y el otro para $x < 0$.

Multiplicando los tres miembros por $x > 0$ se obtiene

$$-x \leqslant x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x$$

Como $\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, se puede aplicar el teorema del sándwich y obtener

$$\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Se pueden repetir los mismos pasos cuando se multiplica por $x < 0$, excepto porque ahora es necesario invertir los signos de la inecuación. Es decir, para $x < 0$,

$$-x \geqslant x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \geqslant x$$

Como $\lim_{x\to 0^-}(-x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$, se puede aplicar de nuevo el teorema del sándwich y obtener

$$\lim_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Combinando los dos resultados, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Este límite se ilustra en la Figura 3.17. ◀

El teorema del sándwich se puede usar también para límites en el infinito.

Ejemplo 2 Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x$$

Solución

Como

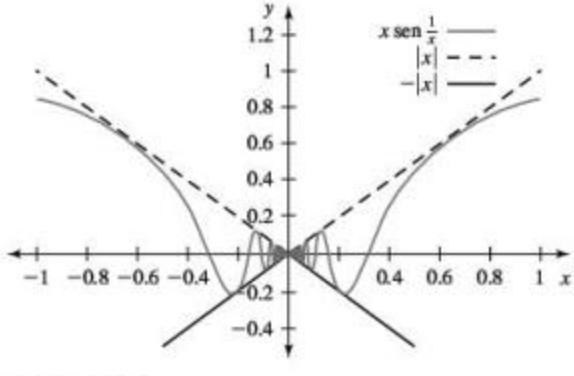
$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$$

y $e^{-x} > 0$, se obtiene (*véase* la Figura 3.18 para $0 \leqslant x \leqslant 8$ y la Figura 3.19 para $6 \leqslant x \leqslant 15$, y nótense las diferentes escalas del eje y en las dos figuras)

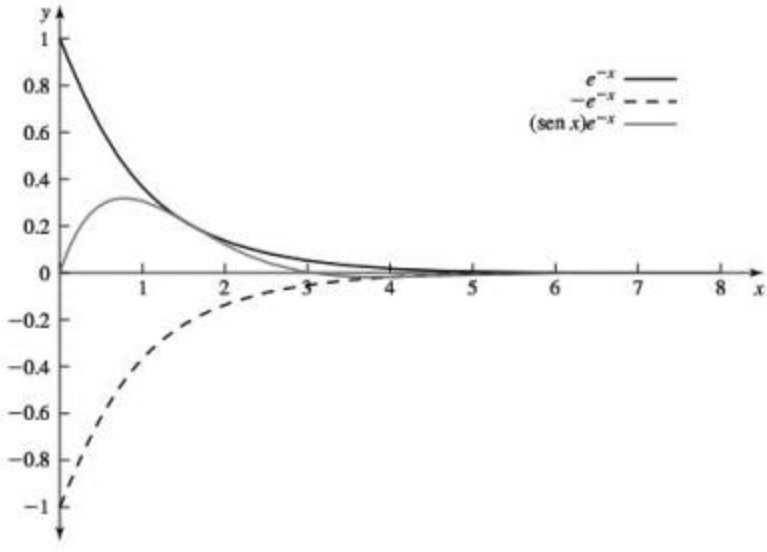
$$-e^{-x} \leqslant e^{-x}\operatorname{sen} x \leqslant e^{-x}$$

Ahora,

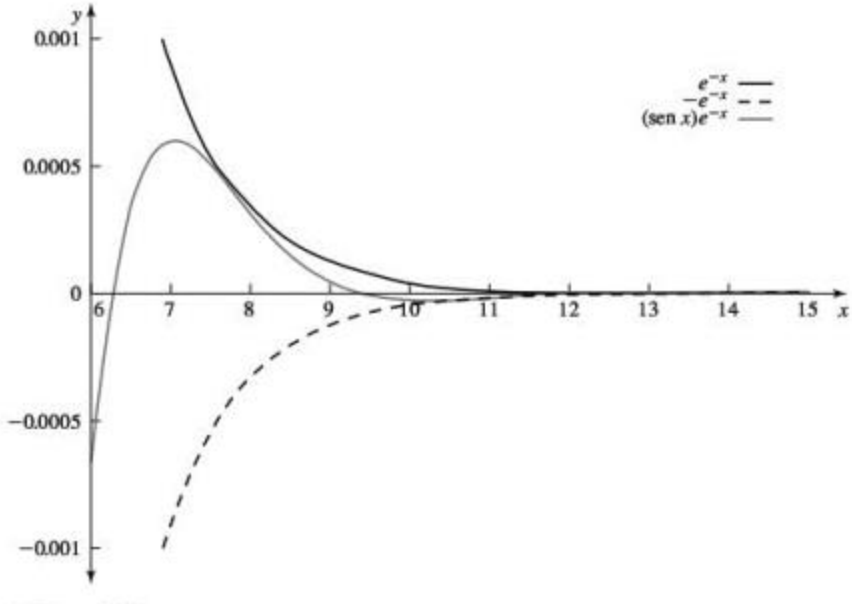
$$\lim_{x\to\infty}(-e^{-x}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$



▲ **Figura 3.17**
Ilustración del teorema del sándwich para $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x)$



▲ **Figura 3.18**
Gráficas de $y = e^{-x}$, $y = -e^{-x}$ e $y = (\text{sen}\,x)e^{-x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 8$

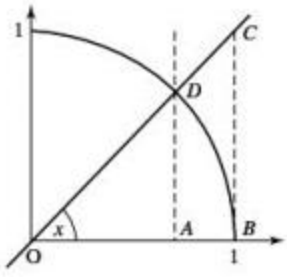


▲ **Figura 3.19**
Gráficas de $y = e^{-x}$, $y = -e^{-x}$ e $y = (\text{sen}\,x)e^{-x}$ desde $x = 6$ hasta $x = 15$

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\text{sen}\,x = 0$$ ◀

Hay dos límites trigonométricos que son importantes para el desarrollo del cálculo diferencial de funciones trigonométricas. Deben memorizarse. Nótense que el ángulo x se mide en radianes.



▲ **Figura 3.20**
El círculo unidad con los triángulos *OAD* y *OBC*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Se demostrarán las dos expresiones. La prueba de la primera expresión utiliza un interesante argumento geométrico y el teorema del sándwich. La segunda expresión se deduce de la primera.

Demostración de que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ Será necesario multiplicar y dividir una inecuación por x y sen x. Como al multiplicar o dividir una inecuación por un número negativo se invierte el sentido de inecuación (*véase* el Ejemplo 1), la demostración se dividirá en dos casos, uno en el que $0<x<\pi/2$, y el otro en el que $-\pi/2<x<0$. En el primer caso, tanto x como sen x son positivos. En el segundo, son negativos (como nuestro interés es el límite cuando $x\to 0$, podemos limitarnos a considerar valores de x cercanos a 0). Empezaremos con el caso $0<x<\pi/2$. En la Figura 3.20 se dibuja el círculo unidad junto con los triángulos OAD y OBC. El ángulo x se mide en radianes. Como $\overline{OB}=1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\text{longitud de arco de } BD &= x\\ \overline{OA} &= \cos x\\ \overline{AD} &= \operatorname{sen} x\\ \overline{BC} &= \tan x\end{aligned}$$

Además (utilizando el símbolo Δ para indicar un triángulo),

$$\text{área de } \Delta\, OAD \leqslant \text{área del sector } OBD \leqslant \text{área de } \Delta\, OBC$$

El área de un sector del ángulo central x (medido en radianes) y radio r es $\frac{1}{2}r^2x$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AD}\leqslant\frac{1}{2}\overline{OB}^2\cdot x\leqslant\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{BC}$$

o

$$\frac{1}{2}\cos x\operatorname{sen} x\leqslant\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x\leqslant\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

Dividiendo la expresión anterior por $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ (y teniendo en cuenta que $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x>0$ para $0<x<\pi/2$) se obtiene

$$\cos x\leqslant\frac{x}{\operatorname{sen} x}\leqslant\frac{1}{\cos x}$$

En el término de la derecha, se ha utilizado que $\tan(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Calculando los inversos e invirtiendo el sentido de la inecuación se obtiene

$$\frac{1}{\cos x}\geqslant\frac{\operatorname{sen} x}{x}\geqslant\cos x$$

Ahora se puede tomar el límite cuando $x\to 0^+$ (no hay que olvidar que se está suponiendo que $0<x<\pi/2$, por lo que sólo nos podemos aproximar a 0 por la derecha). Nótese que

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x}=1$$

Ahora se puede aplicar el teorema del sándwich para obtener

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Sólo se ha demostrado que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, pero se puede utilizar un argumento similar cuando $-\pi/2 < x < 0$. En este caso, $\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Los límites por la derecha y por la izquierda coinciden, por lo que se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$ ■

Demostración de que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ Multiplicando el numerador y el denominador de $f(x) = (1 - \cos x)/x$ por $1 + \cos x$ podemos reducir este caso al caso anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

Utilizando la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se puede escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

que a su vez se puede expresar como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

Se puede determinar este límite. Nótese que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe, según hemos visto anteriormente y $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ existe porque $1 + \cos x \neq 0$ cuando x es cercano a 0. Aplicando la regla 3 de las leyes de los límites, se deduce que el límite del producto es el producto de los límites. Por tanto, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 1 \cdot 0 = 0$$ ■

Ejemplo 3 Calcule los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x}$

Solución

(a) No se puede aplicar directamente el primer límite trigonométrico. El truco es sustituir $z = 3x$ y observar que $z \to 0$ cuando $x \to 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{5z/3} = \frac{3}{5} \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{3}{5}$$

(b) Se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1$$

Se ha utilizado el hecho de que el límite de un producto es el producto de los límites, suponiendo que existe cada uno de los límites del producto.

(c) Primero se escribe $\sec x = 1/\cos x$. Después se multiplica el numerador y el denominador por $\cos x$, con lo que se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x - 1}{x\sec x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\frac{x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{\cos x} - 1)\cos x}{\frac{x}{\cos x}\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$ ◀

3.4.1. Problemas

1. Sea

$$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $y = f(x)$.

(b) Demuestre que para $x \neq 0$, se cumple

$$-x^2 \leqslant x^2\cos\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

(c) Utilice el resultado del apartado (b) y el teorema del sándwich para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$$

2. Sea

$$f(x) = x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $y = f(x)$.

(b) Demuestre que para $x \neq 0$, se cumple

$$-x^2 \leqslant x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

(c) Utilice el resultado del apartado (b) y el teorema del sándwich para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} = 0$$

3. Sea

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $y = f(x)$.

(b) Utilice una calculadora gráfica para estudiar los valores de x para los que se cumple

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para explicar por qué la siguiente expresión es verdadera:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

4. Sea

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}, \quad x > 0$$

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $y = f(x)$.

(b) Explique por qué no se pueden utilizar las reglas básicas para calcular límites en el caso de

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$$

(c) Demuestre que para $x > 0$, se cumple

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

y utilice el teorema del sándwich para calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$$

En los Problemas 5-18, calcule los límites trigonométricos

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(2x)}{2x}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(2x)}{3x}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(5x)}{x}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{-x}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(\pi x)}{x}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(-\pi x/2)}{2x}$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(\pi x)}{\sqrt{x}}$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x}{x}$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x\cos x}{x(1-x)}$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x}$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x(1-\cos x)}{x^2}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\csc x - \cot x}{x\csc x}$

3.5 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

3.5.1 El teorema del valor intermedio

Cuando se sube una montaña, la temperatura disminuye con la altura. Suponga que la temperatura en la base de la montaña es de 70 °F y que la temperatura en la cumbre de la montaña es de 40 °F ¿Cómo saber que en algún momento durante la escalada se debe haber cruzado un punto donde la temperatura era exactamente de 50 °F? La respuesta podría ser algo como esto: «para ir desde 70 °F a 40 °F, se debe pasar por 50 °F, ya que 50 °F está entre 40 °F y 70 °F y la temperatura cambia de forma continua a medida que se escala la montaña». Este ejemplo ilustra la idea del teorema del valor intermedio.

Teorema del valor intermedio Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si L es un número real tal que $f(a) < L < f(b)$ o $f(b) < L < f(a)$, existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = L$.

No se demostrará este teorema, pero la Figura 3.21 ilustra la certeza de este resultado. En la Figura 3.21, f es una función continua que está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a) < L < f(b)$. Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ debe cortar la recta $y = L$ en el intervalo abierto (a, b).

Ejemplo 1 Sea

$$f(x) = 3 + \operatorname{sen} x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

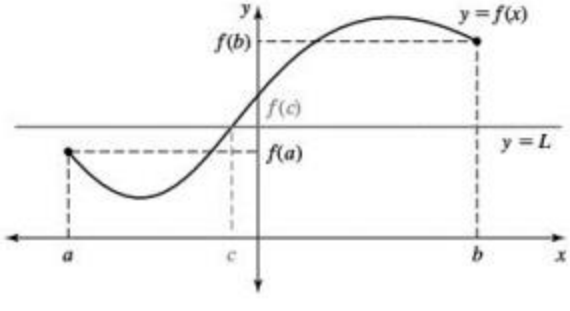
Demuestre que existe al menos un punto c en $(0, 3\pi/2)$ tal que $f(c) = 5/2$.

Solución

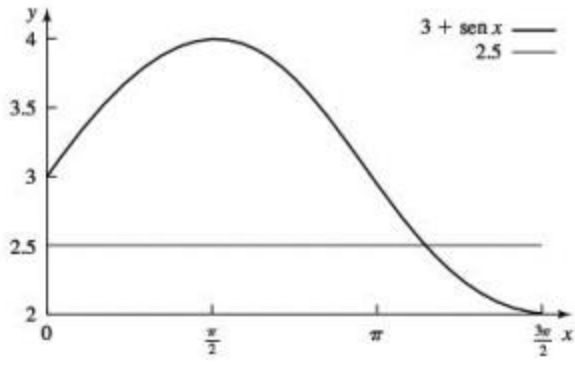
La gráfica de $f(x)$ se muestra en la Figura 3.22. En primer lugar, debe notarse que $f(x)$ está definida en un intervalo cerrado y es continua en $[0, 3\pi/2)$. Además,

$$f(0) = 3 + \operatorname{sen} 0 = 3 + 0 = 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 3 + (-1) = 2$$



▲ **Figura 3.21**
El teorema del valor intermedio



▲ **Figura 3.22**
El teorema del valor intermedio para $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ y $L = 2.5$

Dado que

$$2 < \frac{5}{2} < 3$$

se concluye, utilizando el teorema del valor intermedio, que existe un número c tal que $f(c) = 5/2$. El teorema del valor intermedio no nos indica dónde está c, ni si hay más de un valor intermedio. ◀

Cuando se aplica el teorema del valor intermedio, es importante asegurarse de que la función f es continua. Las funciones discontinuas pueden saltar valores fácilmente. Por ejemplo, la función suelo del Ejemplo 3 de la Sección 3.2 presenta saltos en todos los números enteros.

Como se menciona en el ejemplo anterior, el teorema del valor intermedio sólo indica la existencia de un número c, no indica cuántos puntos puede haber o dónde están localizados.

Podemos preguntarnos por qué un resultado así puede ser de utilidad. Una aplicación importante es que el teorema se puede utilizar para obtener raíces (con soluciones) aproximadas de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo 2 Calcule una raíz de la ecuación $x^5 - 7x^2 + 3 = 0$.

Solución

Sea $f(x) = x^5 - 7x^2 + 3 = 0$. Como $f(x)$ es un polinomio, es continua para todo $x \in \mathbf{R}$. Además,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Es decir, si se escoge un intervalo $[a, b]$ suficientemente grande, entonces $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ y, por tanto, debe existir un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Este número c es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$. La existencia de ese número c está garantizada por el teorema del valor intermedio.

Para obtener un número c tal que $f(c) = 0$, se puede utilizar el **método de la bisección**. Se comienza por buscar una pareja de números a y b tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Por ejemplo,

$$f(-1) = -5 \quad \text{y} \quad f(2) = 7$$

Esto quiere decir que debe existir un número en el intervalo $(-1, 2)$ para el que $f(c) = 0$. Para localizar esta raíz con más precisión, se calcula el punto medio de $(-1, 2)$, que es 0.5, y se evalúa la función en $x = 0.5$ [el punto medio de un inter-

valo (a, b) es $(a + b)/2$]. El valor es $f(0.5) \approx 1.28$ (redondeado a dos decimales). Por tanto,

$$f(-1) = -5 \quad f(0.5) \approx 1.28 \quad f(2) = 7$$

Utilizando de nuevo el teorema del valor intermedio, se puede garantizar la existencia de una raíz en el intervalo $(-1, 0.5)$, ya que $f(-1) < 0$ y $f(0.5) > 0$. Biseccionando el nuevo intervalo y calculando los respectivos valores de $f(x)$, se obtiene

$$f(-1) = -5 \quad f(-0.25) \approx 2.562 \quad f(0.5) \approx 1.28$$

Utilizando de nuevo el teorema del valor intermedio, se puede garantizar la existencia de una raíz en el intervalo $(-1, -0.25)$, ya que $f(-1) < 0$ y $f(-0.25) > 0$. Repitiendo este procedimiento de bisección y seleccionando un nuevo intervalo (más pequeño) se llegará a producir un intervalo suficientemente pequeño como para poder localizar la raíz con cualquier precisión deseada. La Tabla 3.1 resume algunos pasos del procedimiento.

Después de nueve pasos, se obtiene que existe una raíz en el intervalo

$$(-0.6484375, -0.642578125)$$

La longitud de este intervalo es 0.005859375, por tanto, proporciona una solución que es exacta hasta dos decimales. Si esta precisión es satisfactoria, el proceso puede detenerse aquí y escoger por ejemplo el punto medio del último intervalo como valor aproximado de la raíz de la ecuación $x^5 - 7x^2 + 3 = 0$. El punto medio es

$$\frac{-0.642578125 + (-0.6484375)}{2} = -0.6455078125 \approx -0.646$$

tras redondear a tres decimales.

Nótese que la longitud del intervalo disminuye en un factor de 1/2 en cada paso. Es decir, tras nueve pasos, la longitud del intervalo es $(1/2)^9$ de la longitud del intervalo inicial. En nuestro caso, la longitud del intervalo inicial era 3 y por tanto la longitud del intervalo después de nueve pasos es

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{512} = 0.005859375$$

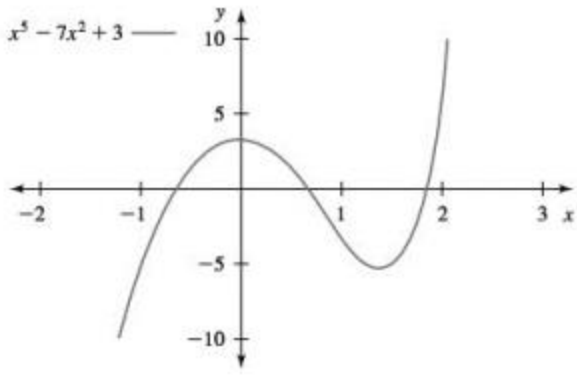
como ya vimos. El método de la bisección es bastante lento cuando se necesita una precisión alta. Por ejemplo, para reducir la longitud del intervalo a 10^{-6}, se necesitarían al menos 22 pasos ya que

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} > 10^{-6} > 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{22}$$

En la Sección 5.7 se presentará un método más rápido.

TABLA 3.1 Método de la bisección

a	$\frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f(\frac{a+b}{2})$	$f(b)$
−1	0.5	2	−5	1.28	7
−1	−0.25	0.5	−5	2.562	1.28
−1	−0.625	−0.25	−5	0.170	2.562
−1	−0.8125	−0.625	−5	−1.975	0.170
−0.8125	−0.71875	−0.625	−1.975	−0.808	0.170
−0.71875	−0.671875	−0.625	−0.808	−0.297	0.170
−0.671875	−0.6484375	−0.625	−0.297	−0.0579	0.170
−0.6484375	−0.63671875	−0.625	−0.0579	0.0575	0.170
−0.6484375	−0.642578125	−0.63671875	−0.0579	9.9×10^{-5}	0.0575
−0.6484375		−0.642578125			



▲ **Figura 3.23**
Gráfica de $f(x) = x^5 - 7x^2 + 3$

La Figura 3.23 muestra la gráfica de $f(x) = x^5 - 7x^2 + 3$. Puede verse que la gráfica corta al eje x tres veces. Hemos encontrado una aproximación a la raíz situada más a la izquierda de la ecuación $x^5 - 7x^2 + 3 = 0$. Si se hubiera escogido otro intervalo inicial, por ejemplo $[1, 2]$, se habría encontrado una aproximación a la raíz de la ecuación situada más a la derecha. ◀

3.5.2 Una nota final acerca de las funciones continuas

Muchas funciones en el campo de la biología son de hecho discontinuas. Por ejemplo, si se mide el tamaño de una población a través del tiempo, esta cantidad sólo toma valores discretos (concretamente, enteros no negativos) y por consiguiente cambia de manera discontinua. Sin embargo, si el tamaño de la población es lo suficientemente grande, aumentar o disminuir su tamaño en uno es un cambio tan ligero que podría justificar aproximar el tamaño de la población mediante una función continua. Por ejemplo, si se mide el número de bacterias en una placa de Petri en millones, el número 2.1 correspondería a 2.100.000 bacterias. Aumentar la población en uno produciría 2.100.001 bacterias, o si el tamaño se mide en millones, en 2 100 001, es decir, un incremento de 10^{-6}

3.5.3. Problemas

(3.5.1) (3.5.2)

1. Sea

$$f(x) = x^2 - 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 2$.

(b) Demuestre que

$$f(0) < 0 < f(2)$$

y utilice el teorema del valor intermedio para concluir que debe existir un número $c \in (0, 2)$ tal que $f(x)$.

2. Sea

$$f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $-3 \leqslant x \leqslant -1$.

(b) Utilice el teorema del valor intermedio para concluir que

$$x^3 - 2x + 3 = 0$$

tiene una solución en el intervalo $(-3, -1)$.

3. Sea

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$.

(b) Utilice el teorema del valor intermedio para concluir que

$$\sqrt{x^2 + 2} = 2$$

tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

4. Sea

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Utilice el teorema del valor intermedio para concluir que

$$\operatorname{sen} x = x$$

tiene una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

5. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que

$$e^{-x} = x$$

tiene una solución en el intervalo (0, 1).

6. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que

$$\cos x = x$$

tiene una solución en el intervalo (0, 1).

7. Utilice el método de la bisección para calcular una solución de

$$e^{-x} = x$$

que sea exacta hasta dos decimales.

8. Utilice el método de la bisección para calcular una solución de

$$\cos x = x$$

que sea exacta hasta dos decimales.

9. **(a)** Utilice el método de la bisección para calcular una solución de $3x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$ que sea exacta hasta dos decimales.

(b) Dibuje la función $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$.

(c) ¿Qué solución se ha encontrado en el apartado (a)? ¿Es posible en este caso encontrar la otra solución utilizando el método de la bisección junto con el teorema del valor intermedio?

10. En el Ejemplo 2, ¿cuántos pasos se requieren para garantizar que la raíz aproximada se aproxima al verdadero valor de la raíz con una precisión de 0.0001?

11. Suponga que el número de individuos de una población en el instante t se expresa como

$$N(t) = \frac{54t}{13 + t}, \quad t \geqslant 0 \tag{3.7}$$

(a) Utilice una calculadora para confirmar que $N(10)$ es aproximadamente 23.47826. Considerando que el número de individuos de la población es un entero, ¿cómo daría su respuesta?

(b) Suponga ahora que $N(t)$ está dado por la misma función (3.7), pero que el tamaño de la población se mide en millones. ¿Cómo daría el tamaño de la población en el instante $t = 10$? Realice algunas suposiciones razonables sobre la precisión de una medida para el tamaño de una población tan grande.

(c) Discuta el uso de funciones continuas en los apartados (a) y (b).

12. Explique por qué un polinomio de grado 3 tiene al menos una raíz.

13. Explique por qué $y = x^2 - 4$ tiene al menos dos raíces.

14. Explique por qué un polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

3.6 DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE (OPCIONAL)

Los antiguos griegos utilizaban procedimientos basados en límites para calcular áreas, como el área del círculo, utilizando el «método de agotamiento». Consistía en cubrir (o «agotar») una región de forma tan completa como fuera posible utilizando triángulos. Sumando las áreas de los triángulos se tenía una aproximación al área de la región de interés. Newton y Leibniz, los inventores del cálculo, tuvieron muy en cuenta la importancia de los límites de su desarrollo del cálculo. Sin embargo, no dieron una definición rigurosa del procedimiento. El matemático francés Augustine-Louis Cauchy (1789-1857) fue el primero en desarrollar una definición rigurosa de límite. La definición que usaremos aquí se remonta al matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897).

Antes de escribir la definición formal, volvamos a la definición informal. Allí se dijo que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que el valor de $f(x)$ puede ser arbitrariamente cercano a L siempre que x esté suficientemente cerca de c. ¿Pero cuándo es suficientemente cerca? Tomemos el Ejemplo 1 de la Sección 3. Supongamos que se desea demostrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

sin utilizar la continuidad de $y = x^2$, que a su vez se basa en $\lim_{x \to c} x = c$ [Ecuación (3.3)]. ¿Qué tenemos que hacer? Se necesitaría demostrar que x^2 se puede acercar arbitrariamente a 4 para todos los valores de x suficientemente cercanos a 2 pero no iguales a 2 (en lo que sigue, siempre se excluirá $x = 2$ de la discusión ya que el valor de x^2 en $x = 2$ es irrelevante para calcular el límite). Supongamos que se desea que x^2 se acerque a 4 con la precisión de 0.01. Es decir, se desea que $|x^2 - 4| < 0.01$. ¿Se cumple esto para todo valor de x suficientemente cercano a 2 pero no igual a 2? Comencemos con

$$|x^2 - 4| < 0.01$$

Esto es equivalente a

$$-0.01 < x^2 - 4 < 0.01$$
$$3.99 < x^2 < 4.01$$
$$\sqrt{3.99} < |x| < \sqrt{4.01}$$

Ahora $\sqrt{3.99} = 1.997498...$, y $\sqrt{4.01} = 2.002498...$ Por tanto, hemos encontrado que los valores de $x \neq 2$ el intervalo (1.998, 2002) cumplen la inecuación $|x^2 - 4| < 0.01$ (se ha escogido un intervalo algo más pequeño que el indicado, para obtener un intervalo que sea simétrico alrededor de 2). Es decir, para todos los valores de x cercanos a 2 con una precisión de 0.002, pero no iguales a 2 (es decir, $0 < |x - 2| < 0.002$), x^2 ésta cercano a 4 dentro de de la precisión descrita, concretamente 0.01.

Este ejemplo nos podría hacer pensar de la siguiente forma: supongamos que se desea destacar un cuadrado de área 4 m^2. Cada lado del cuadrado tiene 2 metros de longitud. Se dispone de un palo que se va a cortar a una longitud de 2 metros. Nos podemos preguntar con qué precisión se necesita cortar el palo de forma que el área esté dentro de una precisión definida. La precisión definida era de 0.01, y lo que hemos encontrado es que si se cortó el palo con una longitud de 2 metros con precisión de 0.002, se puede obtener el área con la precisión deseada.

El número 0.01 no tiene nada de especial. Se podría haber escogido cualquier otro grado de precisión y haber encontrado un correspondiente intervalo de valores de x. Esta idea se plasma en la definición formal de límite (*véase* la Figura 3.24).

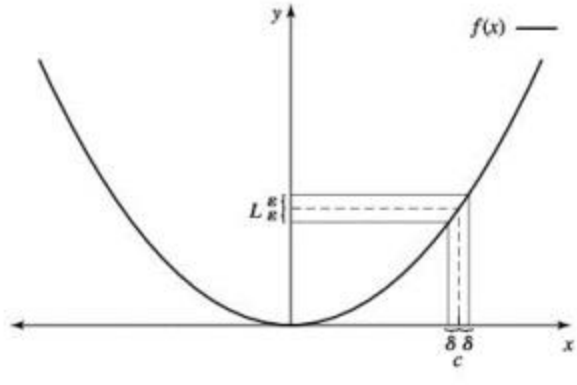
Definición La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

Nótese que, como en la definición informal de límite, se excluye del valor $x = c$ en la definición (esto se hace en la inecuación $0 < |x - c|$). Para aplicar esta definición, es necesario primero intuir el valor del límite L. Entonces se puede escoger un valor $\varepsilon > 0$, la precisión deseada, e intentar obtener un valor $\delta > 0$ de forma que $f(x)$ esté cercano a L con una precisión de ε siempre que x esté cercano a c con



▲ **Figura 3.24**
Definición de límite $\varepsilon - \delta$

una precisión de δ, pero no sea igual a c [en nuestro ejemplo, $f(x) = x^2$, $c = 2$, $L = 4$, $\varepsilon = 0.01$ y $\delta = 0.002$].

Ejemplo 1 Demuestre que

$$\lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1$$

Solución

Sea $f(x) = 2x - 3$. El valor de prueba para el límite es $L = -1$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |2x - 3 - (-1)| \\ &= |2x - 2| \\ &= 2|x - 1| \end{aligned}$$

Ahora se escoge $\varepsilon > 0$ (ε es arbitrario, y no se especificará, ya que el resultado tiene que ser válido para todo $\varepsilon > 0$). El objetivo es calcular $\delta > 0$ de forma que $2|x - 1| < \varepsilon$ siempre que x esté cercano a 1 con una precisión de δ, pero no sea igual a 1. Es decir, $0 < |x - 1| < \delta$. El valor de δ dependerá generalmente de la selección de ε. Como $|x - 1| < \delta$ implica que $2|x - 1| < 2\delta$, esto sugiere que se podría probar con $2\delta = \varepsilon$. Si se escoge $\delta = \varepsilon/2$, entonces,

$$|f(x) - L| = 2|x - 1| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (concretamente, $\delta = \varepsilon/2$) de forma que

$$|f(x) - (-1)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta$$

Pero esto es exactamente la definición de

$$\lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1$$ ◀

Ejemplo 2 En la sección 3.2 se prometió demostrar que

$$\lim_{x \to c} x = c$$

Solución

Sea $f(x) = x$. Se necesita demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta \tag{3.8}$$

Esto sugiere inmediatamente que se debe escoger $\delta = \varepsilon$, y de hecho, si $\delta = \varepsilon$, la Ecuación (3.8) se cumple. ◀

Ejemplo 3 Utilice la definición formal de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

Solución

Se supondrá que $x > 0$. Se necesita demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta \tag{3.9}$$

Ahora $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$ es equivalente a

$$-\varepsilon < \sqrt{x} - 2 < \varepsilon$$
$$2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon$$

Para elevar todo el cuadrado, es necesario asegurarse de que $2 - \varepsilon \geqslant 0$ y $2 + \varepsilon \geqslant 0$. Como $\varepsilon > 0$ por hipótesis, $2 - \varepsilon \geqslant 0$ requerirá suponer que $0 < \varepsilon \leqslant 2$ (la expresión $2 + \varepsilon$ es positiva mientras se cumpla que $\varepsilon > 0$). Con $0 < \varepsilon \leqslant 2$, al elevar al cuadrado resulta

$$(2 - \varepsilon)^2 < x < (2 + \varepsilon)^2$$
$$4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < x < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

Como $4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 > 4 - 4\varepsilon - \varepsilon^2$ tenemos

$$4 - (4\varepsilon + \varepsilon^2) < x < 4 + (4\varepsilon + \varepsilon^2)$$

o

$$|x - 4| < 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

Esto sugiere que si se hace $\delta = 4\varepsilon + \varepsilon^2$ cuando $0 < \varepsilon \leqslant 2$, entonces $0 < |x - 4| < \delta$ implica que $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$. Éste es de hecho el caso; concretamente si $0 < |x - 4| < 4\varepsilon + \varepsilon^2$, entonces $-4\varepsilon - \varepsilon^2 < x - 4 < 4\varepsilon + \varepsilon^2$, o $4 - 4\varepsilon - \varepsilon^2 < x < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$. Esto demuestra que $(2 - \varepsilon)^2 < x < (2 + \varepsilon)^2$. Tomando raíces cuadradas (y teniendo en cuenta que $x > 0$), $2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon$, o $-\varepsilon < \sqrt{x} - 2 < \varepsilon$, que es lo mismo que $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$.

Cuando $\varepsilon > 2$, se puede escoger $\delta = 12$ (o cualquier otro valor menor). El valor $\delta = 12$ proviene de sustituir $\varepsilon = 2$ en la expresión $\delta = 4\varepsilon + \varepsilon^2$. Con $\delta = 12$, si $0 < |x - 4| < 12$, entonces $-12 < x - 4 < 12$ o $-8 < x < 16$. Como $x > 0$, tenemos que $0 < x < 16$, o, tras tomar raíces cuadradas, $0 < \sqrt{x} < 4$, que es lo mismo que $-2 < \sqrt{x} < 2$ o que $|\sqrt{x} - 2| < 2 < \varepsilon$. ◀

La definición también se puede utilizar para demostrar que un límite no existe.

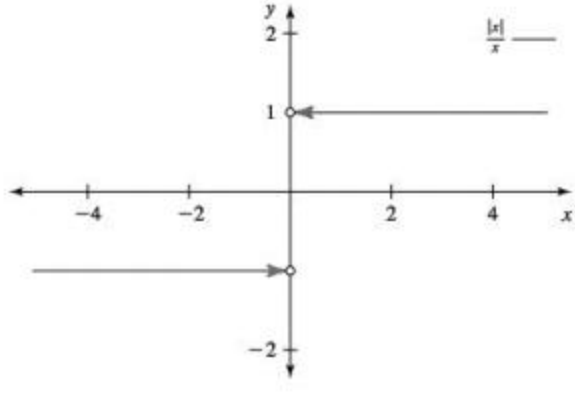
Ejemplo 4 Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe.

Solución

Hay que usar un truco (*véase* la Figura 3.25). Sea $f(x) = |x|/x$, $x \neq 0$. La solución es como sigue: se supone que existe el límite y entonces se intenta obtener una contradicción.



◀ **Figura 3.25**
Gráfica de $f(x) = \frac{|x|}{x}$ del Ejemplo 4. El límite de $\frac{|x|}{x}$ cuando x tiende a 0 no existe

Supongamos que existe un número L tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = L$$

si se observa la Figura 3.25, puede verse que si, por ejemplo, se escoge $L = 1$, no es posible acercarse a L cuando x es menor que 0. De forma similar, puede verse que para cualquier valor de L, o bien la distancia a $+1$ supera a 1, o la distancia a -1 supera a 1. Es decir, independientemente del valor de L, si $\varepsilon < 1$, no se podrá encontrar un valor de δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, ya que $f(x)$ toma los valores $+1$ y -1 para $0 < |x| < \delta$. Por tanto, el $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. ◀

En la sección anterior, se consideró un ejemplo donde $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$. Esto también se puede precisar.

Definición La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

significa que para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > M \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

Se pueden dar definiciones similares para el caso en el que $f(x)$ decrezca sin límite cuando $x \to c$ o para límites laterales. No se darán las definiciones para todos los casos posibles, sino que se ilustrará con un ejemplo cómo se podrían utilizar las definiciones.

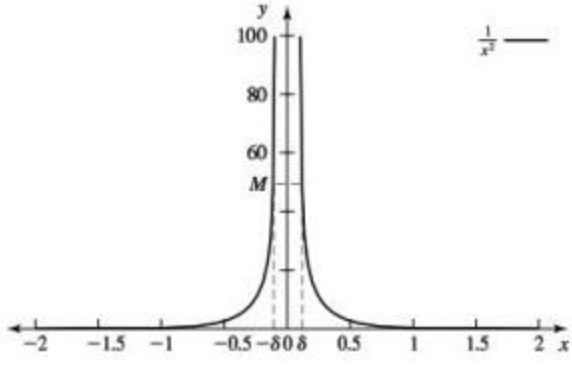
Ejemplo 5 Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Solución

La gráfica de $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, se muestra en la Figura 3.26. Se escoge $M > 0$ (de nuevo, M es arbitrario, ya que la solución debe cumplirse para todo $M > 0$). Se necesita encontrar un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x| < \delta$ (nótese que $c = 0$). Comenzaremos con la inecuación $f(x) > M$ y trataremos de determinar cómo escoger δ.

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \text{es lo mismo que} \quad x^2 < \frac{1}{M}$$



▲ **Figura 3.26**
La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ del Ejemplo 5. El límite de $\frac{1}{x^2}$ cuando x tiende a 0 no existe

Tomando la raíz cuadrada en ambos miembros, se obtiene

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Esto sugiere que se debería escoger $\delta = 1/\sqrt{M}$. Probemos con este valor: dado $M > 0$, se escoge $\delta = 1/\sqrt{M}$. Si $0 < |x| < \delta$, esto implica

$$x^2 < \delta^2 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

Es decir, $1/x^2 > M$ siempre que $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$. ◀

Existe también una definición formal cuando $x \to \infty$ (y otra similar para $x \to -\infty$). Son análogas a las definiciones del Capítulo 2.

Definición La afirmación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x_0 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > x_0$$

Nótese que en la definición, x_0 es un número real.

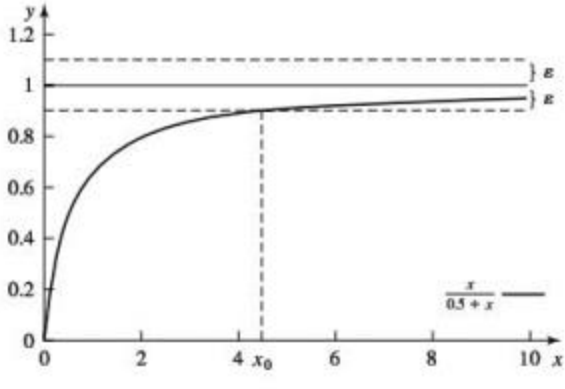
Ejemplo 6 Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{0.5 + x} = 1$$

Solución

Este límite se ilustra en la Figura 3.27. Puede verse que $f(x) = x/(0.5 + x)$, $x \geq 0$, está en una banda de anchura 2ε centrada en el valor límite $L = 1$ para todos los valores de x mayores que x_0 (se supone $\varepsilon < 1$ porque cuando $\varepsilon \geq 1$ la selección de $x_0 \geq 1$ basta). Se determinará ahora el valor de x_0 cuando $\varepsilon < 1$. Para ello, se intentará resolver

$$\left| \frac{x}{0.5 + x} - 1 \right| < \varepsilon$$



▲ **Figura 3.27**
La función $f(x) = \frac{x}{0.5+x}$ del Ejemplo 6. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es 1

para $\varepsilon > 0$. Esto es equivalente a

$$-\varepsilon < \frac{x}{0.5 + x} - 1 < \varepsilon$$

o, tras añadir uno a los tres miembros,

$$1 - \varepsilon < \frac{x}{0.5 + x} < 1 + \varepsilon$$

Como $\frac{x}{0.5+x} < 1$ para $x > 0$, el miembro derecho de la inecuación siempre se cumple. Por tanto sólo es necesario considerar

$$1 - \varepsilon < \frac{x}{0.5 + x}$$

Como estamos interesados en el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \infty$, sólo es necesario considerar valores grandes de x. Multiplicando por $0.5 + x$ (y teniendo en cuenta que se puede suponer que $0.5 + x > 0$), se obtiene

$$(1 - \varepsilon)(0.5 + x) < x$$

Despejando x,

$$(1 - \varepsilon)(0.5) < x - x(1 - \varepsilon)$$
$$(1 - \varepsilon)(0.5) < \varepsilon x$$
$$\frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} < x$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = 0.1$ (como en la Figura 3.27), entonces

$$x > \frac{0.9}{0.2} = 4.5$$

Es decir, $x_0 = 4.5$ y se concluye que para $x > 4.5$, $|f(x) - 1| < 0.1$.

De forma más general, hemos encontrado que para todo $0 < \varepsilon < 1$, existe

$$x_0 = \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}$$

tal que

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > x_0$$ ◀

3.6.1. Problemas

1. Obtenga los valores de x tales que

$$|2x - 1| < 0.01$$

2. Obtenga los valores de x tales que

$$|x^2 - 9| < 0.01$$

3. Obtenga los valores de x tales que

$$|3x^2 + 1| < 0.1$$

4. Obtenga los valores de x tales que

$$|2\sqrt{x} - 5| < 0.1$$

5. Sea

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

(b) ¿Para qué valores de x está $y = f(x)$ a una distancia de 3 inferior a 0.1? (*Sugerencia*: obtenga los valores de x tales que $|(2x - 1) - 3| < 0.1$).

(c) Ilustre el resultado del apartado (b) con la gráfica obtenida en el apartado (a).

6. Sea

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geqslant 0$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 6$.

(b) ¿Para qué valores de x está $y = f(x)$ a una distancia de 1 inferior a 0.2? (*Sugerencia*: obtenga los valores de x tales que $|\sqrt{x} - 1| < 0.2$).

(c) Ilustre el resultado del apartado (b) con la gráfica obtenida en el apartado (a).

7. Sea

$$f(x) = \tfrac{1}{x}, \quad x > 0$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $0 < x \leqslant 4$.

(b) ¿Para qué valores de x es $y = f(x)$ mayor que 4?

(c) Ilustre el resultado del apartado (b) con la gráfica obtenida en el apartado (a).

8. Sea

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geqslant 0$$

(a) Dibuje $y = f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 6$.

(b) ¿Para qué valores de x es $y = f(x)$ menor que 0.1?

(c) Ilustre el resultado del apartado (b) con la gráfica obtenida en el apartado (a).

En los Problemas 9-22, utilice la definición formal de límite para probar cada afirmación.

9. $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$

10. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

11. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$

12. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$

13. $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^2} = \infty$

14. $\lim_{x \to 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = \infty$

16. $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

17. $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2} = 0$

18. $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

19. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$

20. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

21. $\lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b$, siendo m y b constantes

22. $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

3.7. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 3: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos:*

1. Límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c
2. Límites laterales
3. Límites infinitos
4. Divergencia por oscilación
5. Convergencia
6. Divergencia
7. Leyes de los límites
8. Continuidad
9. Continuidad lateral
10. Función continua
11. Discontinuidad evitable
12. Teorema del sándwich
13. Límites trigonométricos
14. Teorema del valor intermedio
15. Método de la bisección
16. Definición de límites $\varepsilon - \delta$

3.8. PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas 1-4, determine si las funciones son continuas. Estudie su comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. Utilice una calculadora gráfica para dibujar las correspondientes gráficas.

1. $f(x) = e^{-|x|}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

5. Dibuje la gráfica de una función que sea discontinua por la izquierda y continua por la derecha en $x = 1$.

6. Dibuje la gráfica de una función $f(x)$ que sea continua en $[0, 4]$, excepto en $x = 1$, donde $f(1) = 4$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

7. Dibuje la gráfica de una función continua en $[0, \infty)$ con $f(0) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

8. Dibuje la gráfica de una función continua en $(-\infty, \infty)$ con $f(0) = 1$, $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

9. Demuestre que la función suelo

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

es continua por la derecha pero discontinua por la izquierda en $x = -2$.

10. Suponga que $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[1, 3]$. Si $f(1) = 0$ y $f(3) = 2$, explique por qué debe existir un número $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 1$.

11. Suponga que el tamaño de la población en el instante t es

$$N(t) = \frac{at}{k + t}, \quad t \geqslant 0$$

siendo a y k constantes positivas. Suponga que el tamaño límite de la población es

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 1.24 \times 10^6$$

y que en el instante $t = 5$, el tamaño de la población es la mitad del tamaño límite. Utilice la información anterior para determinar las constantes a y k.

12. Suponga que

$$N(t) = 10 + 2e^{-0.3t}\operatorname{sen} t, \quad t \geqslant 0$$

describa el tamaño de la población (en millones) en el instante t (medido en semanas).

(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $N(t)$, y describa con palabras lo que ve.

(b) Calcule los límites superior e inferior del tamaño de la población. Es decir, obtenga N_1 y N_2 tales que, para todo $t \geqslant 0$,

$$N_1 \leqslant N(t) \leqslant N_2$$

(c) Obtenga $\lim_{t\to\infty} N(t)$. Interprete esta expresión.

13. Suponga que un organismo reacciona a un estímulo sólo cuando dicho estímulo supera un cierto umbral. Suponga que el estímulo es una función del tiempo t, y que su expresión es

$$s(t) = \operatorname{sen}(\pi t), \quad t \geqslant 0$$

El organismo reacciona al estímulo y muestra una cierta reacción cuando $s(t) \geqslant 1/2$. Defina una función $g(t)$ tal que $g(t) = 0$ cuando el organismo no muestre reacción en el instante t, y $g(t) = 1$ cuando el organismo muestre la reacción.

(a) Dibuje $s(t)$ y $g(t)$ en el mismo sistema de coordenadas.

(b) ¿Es $s(t)$ continua? ¿Es $g(t)$ continua?

14. La siguiente función expresa la altura de un árbol en función de su edad:

$$f(x) = 132e^{-20/x}, \quad x \geqslant 0$$

Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

15. Existen ciertos modelos matemáticos que describen las interacciones entre los depredadores y las presas. Típicamente, tienen en común que el número de presas devoradas por depredador crece con la densidad de presas. En la versión más simple, el número de encuentros con presas por depredador es proporcional al producto del número total de presas y el periodo de tiempo durante el que los depredadores cazan. Es decir, si se denomina N al número de presas, P al número de depredadores, T el periodo de tiempo disponible para cazar, y N_e el número de encuentros con presas, entonces

$$\frac{N_e}{P} = aTN \tag{3.10}$$

siendo a una constante positiva. La cantidad N_e/P es el número de presas encontradas por depredador.

(a) Sea $f(N) = aTN$. Dibuje la gráfica de $f(N)$ cuando $a = 0.1$ y $T = 2$ para $N \geqslant 0$.

(b) Los depredadores pasan generalmente algún tiempo devorando la presa que han cazado. Por tanto, no todo el tiempo T se emplea para cazar. El tiempo de caza real se reduce por un tiempo de atención por presa T_h y se puede escribir como

$$T - T_h\frac{N_e}{P}$$

Demuestre que si T se sustituye por $T - T_h\frac{N_e}{P}$ en la expresión (3.10), entonces

$$\frac{N_e}{P} = \frac{aTN}{1 + aT_hN} \tag{3.11}$$

Defina

$$g(N) = \frac{aTN}{1 + aT_hN}$$

y dibuje $g(N)$ para $N \geqslant 0$ cuando $a = 0.1$, $T = 2$ y $T_h = 0.1$.

(c) Demuestre que (3.11) se reduce a (3.10) cuando $T_h = 0$.

(d) Calcule

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_e}{P}$$

en los casos de $T_h = 0$ y de $T_h > 0$. Explique con palabras la diferencia entre los dos casos.

16. Duarte y Agustí (1998) investigaron el equilibrio de CO_2 en los ecosistemas acuáticos. Relacionaron las velocidades de respiración de la comunidad (R) con las velocidades brutas de producción primaria (P) de los ecosistemas acuáticos (ambas cantidades se midieron en las mismas unidades). Hicieron la siguiente proposición

> Nuestros resultados confirman la generalidad de los informes anteriores de que la relación entre la velocidad de respiración de la comunidad y la producción bruta no es lineal. La respiración de la comunidad es aproximadamente proporcional a la potencia dos tercios de la producción bruta.

(a) Utilice la proposición anterior para explicar por qué

$$R = aP^b$$

se puede utilizar para describir la relación entre las velocidades de respiración de la comunidad (R) y las velocidades brutas de producción primaria (P). ¿Qué valor asignaría a b basándose en la proposición anterior?

(b) Suponga que se obtienen datos de producción bruta y velocidades de respiración para diversos lagos de agua dulce. ¿Cómo representaría gráficamente esos datos para convencer rápidamente a una audiencia de que el exponente b de la ecuación potencial que relaciona R con P es aproximadamente 2/3? (*Sugerencia*: utilice la transformación logarítmica apropiada).

(c) La razón R/P de un ecosistema es importante para evaluar la disponibilidad global de CO_2. Si la respiración supera a la producción (es decir, $R > P$), el ecosistema actúa como una fuente de dióxido de carbono, mientras que si la producción supera a la respiración, (es decir, $P > R$), el ecosistema actúa como un sumidero de dióxido de carbono. Suponga ahora el exponente de la ecuación potencial que relaciona R con P vale 2/3. Demuestre que la razón R/P como función de P es continua para $P > 0$. Además, demuestre que

$$\lim_{P\to 0+} \frac{R}{P} = \infty$$

y

$$\lim_{P\to\infty} \frac{R}{P} = 0$$

Use una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de la razón R/P como función de P para $P > 0$ (experimente con la calculadora gráfica para ver cómo afecta a la gráfica el valor de a).

(d) Utilice los resultados del apartado (c) y el teorema de valor intermedio para concluir que existe un valor P^* tal que la razón R/P en P^* es igual a 1. Basándose en las gráficas del apartado (c), ¿existe más de un valor de P^*?

(e) Use los resultados del apartado (d) para identificar las velocidades de producción P cuando la razón $R/P > 1$, es decir, cuando la respiración supera la producción.

(f) Utilice los resultados de los apartados (a)-(e) para explicar la siguiente proposición de Duarte y Agustí:

> Los ecosistemas acuáticos improductivos ... tienden a ser heterotróficos ($R > P$), y a actuar como fuentes de dióxido de carbono.

17. Las funciones hiperbólicas se utilizan en ciencias. Echemos un vistazo a los tres ejemplos siguientes: el seno hiperbólico, $\operatorname{senh} x$, el coseno hiperbólico, $\cosh x$, y la tangente hiperbólica, $\tanh x$. Se definen así:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Demuestre que estas tres funciones hiperbólicas son continuas para todo $x \in \mathbf{R}$. Utilice una calculadora gráfica para dibujar las gráficas de las tres funciones.

(b) Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{senh} x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x$$

$$\lim_{x \to \infty} \cosh x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x$$

$$\lim_{x \to \infty} \tanh x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x$$

(c) Demuestre que las dos igualdades

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

y

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

son válidas.

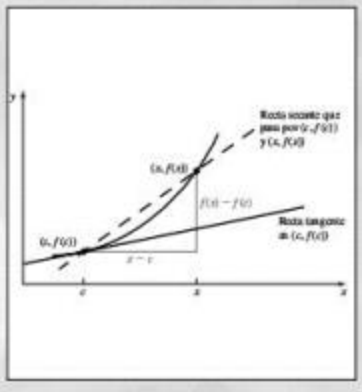
(d) Demuestre que $\operatorname{senh} x$ y $\tanh x$ son funciones impares y que $\cosh x$ es una función par.

(*Nota*: se puede demostrar que si un cable flexible está suspendido entre los puntos de alturas iguales, la forma de la curva resultante está dada por la función coseno hiperbólico. Esta curva se denomina catenaria.)

CAPÍTULO 4

DERIVACIÓN

El cálculo diferencial permite resolver dos de los problemas básicos que se mencionaron en el Capítulo 1, concretamente, construir una línea tangente a una curva (Figura 4.1) y calcular los máximos y mínimos de una curva (Figura 4.2). Las soluciones a estos problemas no pueden explicar por sí mismas el impacto que el cálculo ha tenido en las ciencias. El cálculo es una de las herramientas analíticas más importantes para investigación de problemas dinámicos. Las aplicaciones del cálculo diferencial en las ciencias de la vida incluyen los modelos de crecimiento simple, las interacciones entre organismos, las invasiones de organismos, el trabajo de las neuronas, las reacciones enzimaticas, los procesos de recogida en la industria pesquera, el modelado epidemiológico, el cambio de las frecuencias de genes bajo apareamiento aleatorio, las estrategias evolutivas, y muchas otras.



Los modelos de crecimiento serán de particular interés para nosotros. Revisemos el ejemplo del comienzo del Capítulo 3, consistente en una población cuyo tamaño en el instante t está dado por $N(t)$. La velocidad de crecimiento media en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ es igual a

$$[\text{velocidad media de crecimiento}] = \frac{[\text{cambio en el tamaño de la población}]}{[\text{longitud del intervalo de tiempo}]} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

siendo

$$\Delta N = N(t+h) - N(t) \quad \text{y} \quad \Delta t = (t+h) - t = h$$

Por tanto

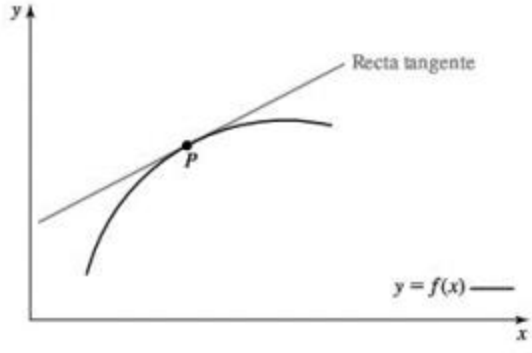
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

La velocidad instantánea de crecimiento se define como el límite de $\Delta N/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$ (o $h \to 0$):

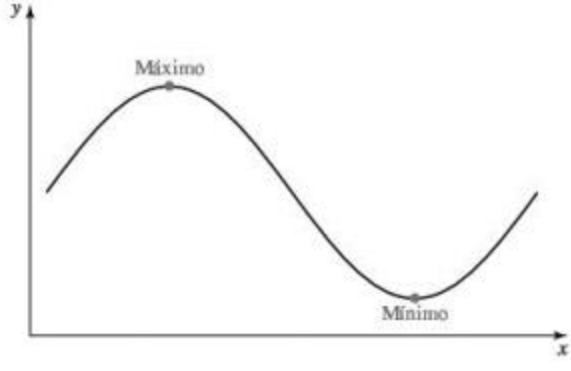
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

suponiendo que este límite existe.

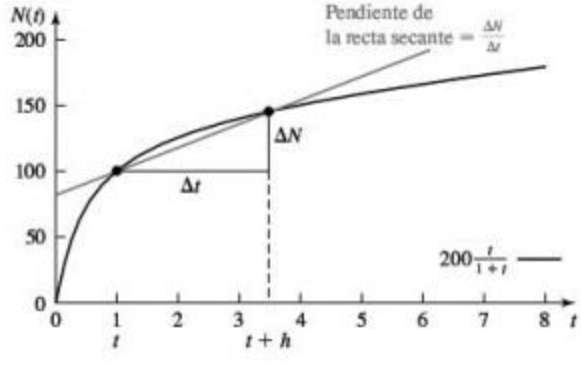
Estamos interesados en la interpretación geométrica de este límite cuando existe. Cuando se dibuja una línea recta que pasa por los puntos $(t, N(t))$ y $(t+h, N(t+h))$, se obtiene la **recta secante**. La pendiente de esta recta está dada por la cantidad $\Delta N/\Delta t$ (Figura 4.3). En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, la recta secante converge a la recta que toca a la gráfica en el punto $(t, N(t))$. Esta recta se denomina **recta tangente** en el punto $(t, N(t))$ (Figura 4.4). El límite de $\Delta N/\Delta t$ cuando la longitud del interva-



◀ **Figura 4.1**
Recta tangente a una curva en un punto



▲ **Figura 4.2**
Máximo y mínimo de una curva



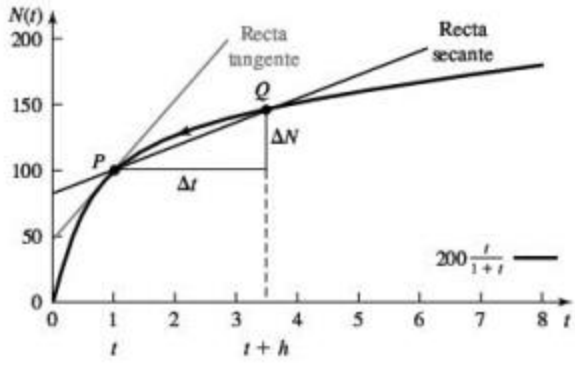
▲ **Figura 4.3**
La velocidad media de crecimiento $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ es igual a la pendiente de la recta secante

lo temporal $[t, t + h]$ tiende a 0 (es decir, $\Delta t \to 0$ o $h \to 0$) será por tanto igual a la pendiente de la recta tangente en $(t, N(t))$. Se denominará $N'(t)$ (que se lee «N prima de t») al valor límite de $\Delta N/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$. Esta cantidad se denomina **derivada** de $N(t)$. Es decir,

$$N'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

suponiendo que el límite existe.

El objetivo de este capítulo es el cálculo de derivadas.



▲ **Figura 4.4**
La velocidad instantánea de crecimiento es el límite $\Delta N/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$. Geométricamente, el punto Q se mueve hacia el punto P sobre la gráfica de $N(t)$, y la recta secante que pasa por P y Q se convierte en la recta tangente en P. La velocidad de crecimiento instantánea es entonces igual a la pendiente de la recta tangente

4.1 DEFINICIÓN FORMAL DE DERIVADA

Definición La derivada de una función f en x, que se denota como $f'(x)$, es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

suponiendo que el límite existe.

Si el límite existe, se dice que f es derivable en x. La frase «suponiendo que el límite existe» es crucial, ya que si se toma una función f arbitraria el límite puede no existir. De hecho, en el capítulo anterior se han visto muchos ejemplos donde el límite no existe. La interpretación geométrica ayuda a comprender cuándo existe el límite y bajo qué condiciones no se puede esperar que exista el límite. Nótese que $\lim_{h \to 0}$ es un límite bilateral (es decir, la aproximación a 0 es por el lado positivo y por el negativo). El cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se denomina **cociente de diferencias**, y se denota como $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (*véase* la Figura 4.5).

Se dice que f es derivable en (a, b) si es derivable en todo $x \in (a, b)$, (como el límite de la definición es bilateral, se deben excluir los extremos del intervalo. En dichos extremos, sólo se podrían calcular los límites laterales, obteniéndose derivadas laterales).

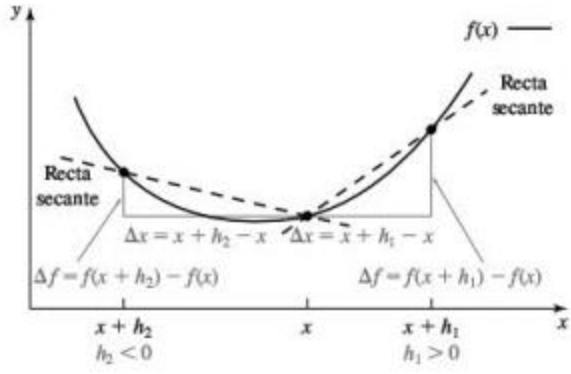
Si se desea calcular la derivada en $x = c$, se puede escribir también

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

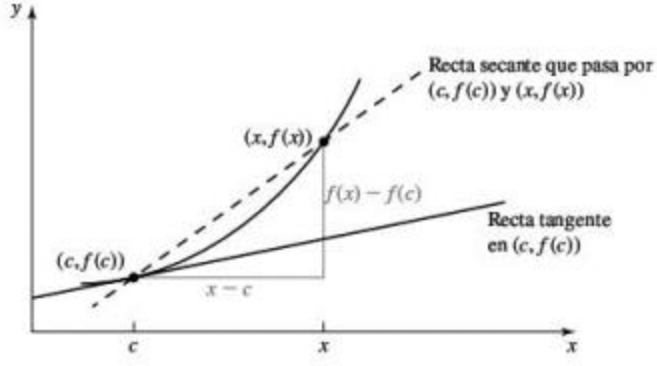
lo que recalca que el punto $(x, f(x))$ converge al punto $(c, f(c))$ cuando se toma el límite $x \to c$ (Figura 4.6). Esto será importante al presentar en la sección siguiente la interpretación geométrica de la derivada.

Hay más de una forma de escribir la derivada de una función $y = f(x)$. Las siguientes expresiones son equivalentes:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$



▲ **Figura 4.5**
Cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h = h_1 > 0$ y $h = h_2 < 0$



▲ **Figura 4.6**
La derivada $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ es la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$

La notación $\frac{df}{dx}$ se remonta a Leibniz y se denomina **notación de Leibniz** (Leibniz tenía un talento real para encontrar la notación apropiada). La notación recuerda que se toma el límite de $\Delta f/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$.

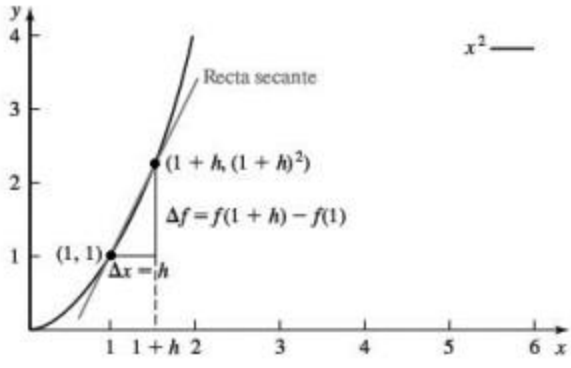
Si se desea resaltar que se está evaluando la derivada de $f(x)$ en $x = c$, se puede escribir

$$f'(c) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$$

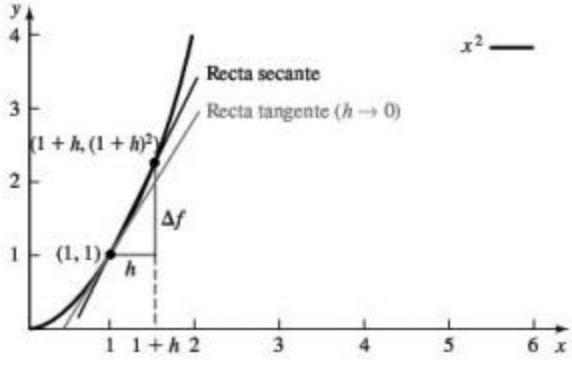
Newton utilizó una notación diferente para denominar a la derivada de una función. Él escribía $\dot{y}$ (que se lee: «y punto») para denominar a la derivada de y. Esta notación todavía se utiliza en Física, cuando las derivadas se toman con respecto a una variable que indica tiempo. En este texto se utilizará la notación de Leibniz, o la notación «$f'(x)$».

4.1.1 Interpretación geométrica y uso de la definición

Sea la función $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ (durante el desarrollo es conveniente consultar las Figuras 4.7 y 4.8). Para calcular la derivada de f, por ejemplo en $x = 1$ utilizando



▲ **Figura 4.7**
La pendiente de la recta secante que pasa por (1, 1) y $(1 + h, (1 + h)^2)$ es $\Delta f/\Delta x$



▲ **Figura 4.8**
Al tomar el límite $h \to 0$, la recta secante converge a la recta tangente en (1, 1)

la definición, primero se calcula el cociente de diferencias en $x = 1$. Para $h \neq 0$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h}$$

$$= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(2 + h)}{h}$$

$$= 2 + h$$

El cociente de diferencias $\Delta f/\Delta x$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (1, 1) y $(1 + h, (1 + h)^2)$ (Figura 4.7).

Para calcular la derivada $f'(1)$, es necesario tomar al límite cuando $h \to 0$ (Figura 4.8):

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Tomar el límite cuando $h \to 0$ quiere decir que el punto $(1 + h, (1 + h)^2)$ se acerca al punto (1, 1) (el límite cuando $h \to 0$ es un límite bilateral. En la Figura 4.8 sólo se ha representado un punto $(1 + h, (1 + h)^2)$ para algún valor de $h > 0$). Cuando $h \to 0$, las rectas secantes que pasan por los puntos (1, 1) y $(1 + h, (1 + h)^2)$ convergen a la recta que toca a la gráfica en el punto (1, 1). La recta límite se

denomina recta tangente. Como $f'(1)$ es el límite de la recta secante a medida que el punto $(1 + h, (1 + h)^2)$ se acerca al $(1, 1)$, se obtiene que $f'(1) = 2$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 1)$.

Motivados por el ejemplo, se define formalmente a continuación la recta tangente.

Definición de recta tangente Si la derivada de una función f existe en $x = c$, entonces la recta tangente en $x = c$ es la recta que pasa por el punto $(c, f(c))$ con pendiente

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Conociendo la derivada en un punto (que es la pendiente de la recta tangente en dicho punto) y las coordenadas del punto se puede obtener la ecuación de la recta tangente en ese punto, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

siendo (x_0, y_0) el punto y m la pendiente. Volviendo a la función $y = x^2$, el punto $c = x_0 = 1$ tiene coordenadas $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y la derivada en $c = 1$ es $m = 2$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente se expresa así (Figura 4.9):

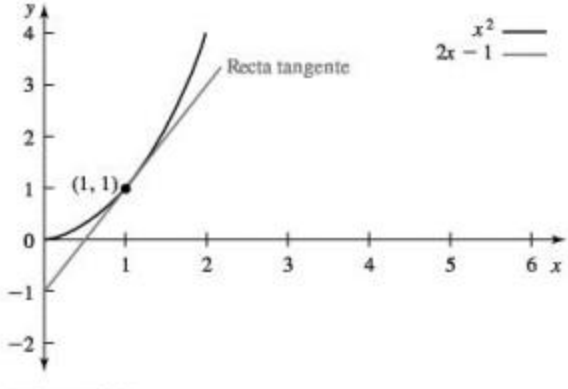
$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o} \quad y = 2x - 1$$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

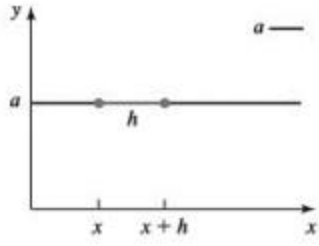
Si la derivada de una función f existe en $x = c$, entonces $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

La interpretación geométrica será de utilidad para calcular derivadas en los dos primeros ejemplos.



▲ **Figura 4.9**
La pendiente de $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$ es $m = 2$. La ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es $y = 2x - 1$



◀ **Figura 4.10**
La pendiente de una recta horizontal es $m = 0$

Ejemplo 1 **Derivada de una función constante** La gráfica de $f(x) = a$ es una recta horizontal que corta al eje y en el punto $(0, a)$ (Figura 4.10). Como la gráfica es una línea recta, la recta tangente en x coincide con la gráfica de $f(x)$ y, por tanto, la pendiente de la recta tangente en x es igual a la pendiente de la línea recta. La pendiente de la recta horizontal es 0, y por tanto, es razonable suponer que $f'(x) = 0$. Utilizando la definición formal con $f(x) = a$ y $f(x + h) = a$, se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

De nuevo, es importante recordar que cuando se toma el límite cuando $h \to 0$, h se aproxima a 0 (desde ambos lados), pero no es igual a 0. Como $h \neq 0$, la expresión $0/h = 0$. Esto se ha utilizado en los pasos del segundo al último. ◀

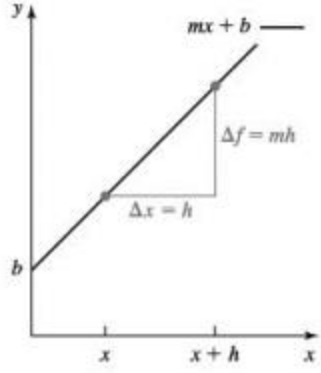
Ejemplo 2 **Derivada de una función lineal** La gráfica de $f(x) = mx + b$ es una línea recta de pendiente m y ordenada en el origen b (Figura 4.11). La derivada de $f(x)$ es la pendiente de la recta tangente en x. Como la gráfica es una línea recta, la recta tangente en x coincide con la gráfica de $f(x)$ y, por tanto, la pendiente de la recta tangente en x es igual a la pendiente de la línea recta. La pendiente de la recta horizontal es 0, y por tanto, es razonable suponer que $f'(x) = m$. Utilizando la definición formal, se puede confirmar:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + b - (mx + b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{mx + mh + b - mx - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \to 0} m = m$$

En los pasos del segundo al último se ha podido simplificar h porque $h \neq 0$.

El resultado obtenido es por tanto: si $f(x) = mx + b$, entonces $f'(x) = m$. Esto incluye el caso especial de la función constante, para $m = 0$ (Ejemplo 1). ◀



▲ **Figura 4.11**
La pendiente de la recta $y = mx + b$ es m

Ejemplo 3 **Uso de la definición** Calcule la derivada de

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

Solución

Para calcular $f'(x)$ se utilizará la definición formal de derivada (Figura 4.12). El principal paso algebraico es el cálculo de $f(x+h) - f(x)$, que realizaremos primero. Con $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$ se obtiene

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$$

Para calcular $f'(x)$ se necesita dividir la expresión anterior por h y tomar el límite cuando $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\frac{h}{x(x+h)} \frac{1}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

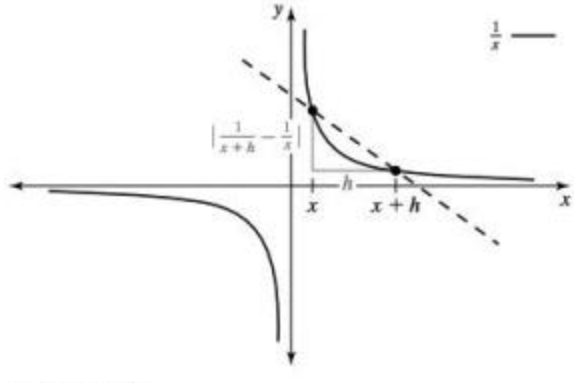
Es decir, si $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, entonces

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$ ◀

Observando los tres ejemplos anteriores, puede verse que para calcular $f'(x)$ utilizando la definición formal de derivada, se evalúa el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como $\lim_{x \to 0} [f(x+h) - f(x)]$ y $\lim_{h \to 0} h$ son iguales a 0, no se puede simplemente calcular los límites del numerador y del denominador de forma separada, ya que esto produciría la expresión indefinida 0/0. Es importante simplificar el cociente de diferencias antes de tomar el límite.



▲ **Figura 4.12**
Gráfica de $f(x) = 1/x$ del Ejemplo 3

4.1.2 La derivada como velocidad de variación instantánea: Un primer vistazo a las ecuaciones diferenciales

Velocidad Supongamos que vamos montando en bicicleta por la carretera recta. Nuestra posición (en millas) en el instante t (en horas) está dada por (Figura 4.13)

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 \quad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 6$$

Podríamos preguntarnos cuál es la velocidad media durante el intervalo de tiempo (por ejemplo) [2, 4], que se define como el cambio en la posición durante el intervalo dividido por la longitud del intervalo. Para calcular la velocidad media, se obtiene la posición en el instante 2 y en el instante 4, y se toma la diferencia de esas dos cantidades. Después se divide esta diferencia por el tiempo empleado en recorrer esta distancia. En el instante $t = 2$, $x(2) = -8 + 24 = 16$ y en el instante $t = 4$, $s(4) = -64 + 96 = 32$. Por tanto, la velocidad media es

$$\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{32 - 16}{4 - 2} = 8 \text{ mph}$$

Este cociente se puede reconocer como el cociente de diferencias

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

y se puede llamar a dicho cociente de diferencias $\Delta s/\Delta t$ **velocidad media**, que se corresponde con la velocidad media de variación.

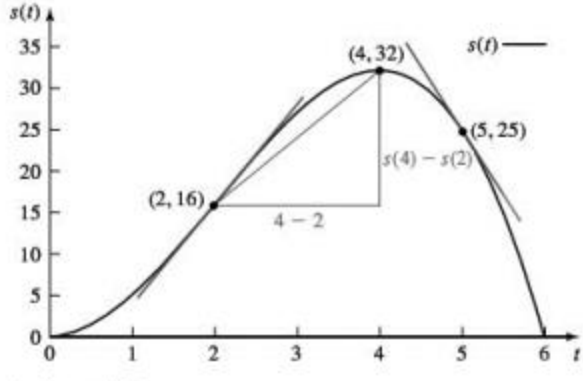
La **velocidad instantánea** en el instante t se define como el límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

suponiendo que el límite existe. Esto es la derivada de $x(t)$ en el instante t, que se indicará como

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

que es una velocidad de cambio instantánea. La velocidad instantánea (o simplemente velocidad) es por tanto la pendiente de la recta tangente en un punto dado de la función de posición $s(t)$, suponiendo que la derivada en este punto existe.



▲ **Figura 4.13**
La velocidad media $\frac{s(4)-s(2)}{4-2}$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (2, 16) y (4, 32). La velocidad en el instante t es la pendiente de la recta tangente en t. Cuando $t = 2$, la velocidad es positiva; en $t = 5$, la velocidad es negativa

Observemos dos puntos de la gráfica de $s(t)$, concretamente, (2, 16) y (5, 25). Puede verse que la pendiente de la recta tangente es positiva en (2, 16) y negativa en (5, 25). La velocidad es por tanto positiva en el instante $t = 2$ y negativa en el instante $t = 5$. En $t = 2$, nos alejamos de nuestro punto de partida, mientras que en $t = 5$ nos acercamos a nuestro punto de partida. En esos dos instantes, nos movemos en direcciones opuestas.

Hay una diferencia entre la *velocidad* y su *valor absoluto*. Si nuestra bicicleta tuviera un velocímetro, nos indicaría el valor absoluto de la velocidad, sin tener en cuenta su dirección.

La interpretación de la derivada como la velocidad instantánea de cambio es un concepto extremadamente importante. De hecho, cuando se encuentran derivadas en los cursos de ciencias, ésta será la interpretación que se utilizará más frecuentemente. Esta interpretación nos permitirá describir una cantidad en términos de su rapidez de variación con respecto a otra cantidad. Para ilustrar este punto, realizaremos dos ejemplos y presentaremos una nueva aplicación.

Crecimiento de una población Al principio de este capítulo, presentamos el crecimiento de una población en el instante t mediante la función continua $N(t)$. Si existe la derivada de $N(t)$ en el instante t, se puede definir la velocidad de crecimiento instantánea de la población como

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} = [\text{velocidad instantánea de crecimiento de la población en el instante } t]$$

Frecuentemente estaremos interesados en la **velocidad de crecimiento instantánea per cápita**. Es la velocidad de crecimiento por individuo, y se puede obtener dividiendo la velocidad instantánea de crecimiento de la población por el tamaño de la población en el instante de tiempo considerado. Es decir

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN}{dt} = [\text{velocidad de crecimiento instantáneo per cápita en el instante } t]$$

En los libros de texto de Biología (y en este libro) la dependencia con t en general no se indica expresamente y se escribe

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \quad \text{en vez de} \quad \frac{1}{N(t)}\frac{dN}{dt}$$

Velocidad de una reacción química Otra ilustración del uso de la derivada como velocidad instantánea de cambio es el Ejemplo 5 de la Subsección 1.2, donde se presentaba la velocidad de reacción de una reacción química irreversible

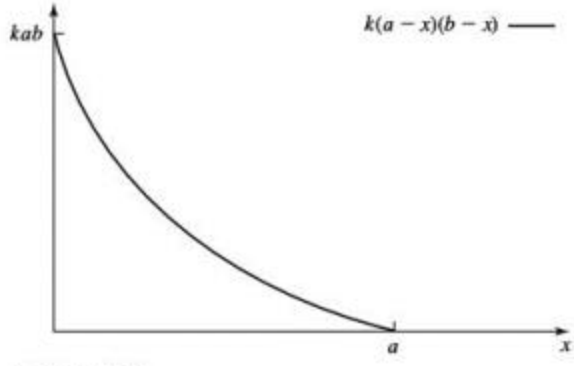
$$A + B \rightarrow AB$$

que es proporcional a las concentraciones de A y de B. Si la concentración del producto AB se indica como x, la velocidad de reacción es igual a

$$k(a - x)(b - x)$$

siendo $a = [A]$ la concentración inicial de A, y $b = [B]$ la concentración inicial de B (Figura 4.14). La velocidad de reacción nos indica la rapidez con la que cambia la concentración x con el tiempo a medida que la reacción procede. La concentración x es por tanto función del tiempo t, $x = x(t)$. La velocidad de relación es la velocidad instantánea de variación, concretamente

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



▲ **Figura 4.14**
Velocidad de reacción para $a \leqslant b$

Se puede identificar el límite $\Delta t \to 0$ como la derivada de la función $x(t)$ con respecto a t y escribir por tanto

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{4.1}$$

La Ecuación (4.1) es un ejemplo de **ecuación diferencial**, es decir, una ecuación que contiene la derivada de una función. En capítulos posteriores estudiaremos estas ecuaciones en profundidad.

A partir de este punto, donde se diga «velocidad de variación», siempre se querrá decir «velocidad instantánea de variación». Cuando se desee indicar velocidad media de variación, se indicará explícitamente.

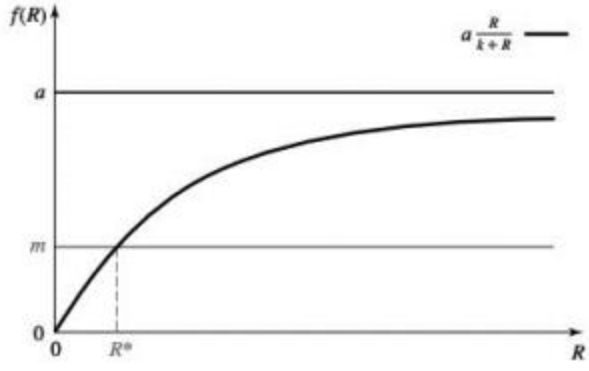
La velocidad de cambio en la reacción química se expresa mediante una ecuación diferencial. Algunas veces es posible resolver esas ecuaciones diferenciales, es decir, obtener explícitamente una función cuya derivada satisfaga la ecuación dada. Posteriormente comentaremos esto en detalle. Más a menudo, no es posible (o no es necesario) obtener explícitamente una solución. Sin resolver la ecuación diferencial, todavía es posible obtener información útil sobre su comportamiento. Esto se ilustra en la siguiente aplicación.

Modelo de Tilman de competición por recursos El Dr. David Tilman de la Universidad de Minnesota desarrolló un marco teórico para describir el resultado de la competición por recursos limitados (Tilman, 1982). Ésta se aplica, por ejemplo, al hábitat de praderas del Área Histórica Natural de Cedar Creek, Minnesota, donde Tilman realizó muchos experimentos para comprobar las predicciones de su teoría.

En este hábitat de praderas, el nitrógeno es un recurso limitado. Es decir, si se añade nitrógeno a la tierra se producirá un aumento de la biomasa. Se presentará el caso de una especie compitiendo por un único recurso limitado. Se supone que la velocidad de variación de la biomasa tiene dos componentes: velocidad de crecimiento y velocidad de pérdida. Entonces

$$\begin{aligned}[\text{velocidad de variación de biomasa}] = {} & [\text{velocidad de crecimiento}] - \\ & - [\text{velocidad de pérdida}]\end{aligned}$$

El cambio en la biomasa de la población de plantas en el instante t se denomina $B(t)$ y se supone que la velocidad de crecimiento depende de un solo recurso cuya concentración se indica por R. Se escribirá la ecuación del **cambio de velocidad específica** de biomasa, que se define como el cambio de biomasa por unidad de biomasa, es decir, $\frac{1}{B}\frac{dB}{dt}$. Se supone que la velocidad de pérdida de biomasa por



▲ **Figura 4.15**
Equilibrio entre pérdidas y crecimiento cuando $R = R^*$

unidad de biomasa es constante y se denominará m. Un modelo simple de la variación de biomasa con el tiempo es entonces

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = f(R) - m \tag{4.2}$$

donde la función $f(R)$ expresa la velocidad de crecimiento específica en función de la concentración de recursos. Una elección común de $f(R)$ es la función de crecimiento de Monod (o la ecuación de Michaelis-Menten) que se consideraron en el Ejemplo 6 de la Subsección 1.2.3:

$$f(R) = a\frac{R}{k+R} \tag{4.3}$$

siendo a y k constantes positivas. La Figura 4.15 muestra $f(R)$ y m en la misma gráfica. Se puede observar lo siguiente. Cuando $0 < m < a$, las gráficas de las funciones $y = f(R)$ e $y = m$ se cortan en $R = R^*$ (que se lee. «R asterisco»). En este nivel de recursos, $f(R) = m$ y por tanto la velocidad específica de variación $\frac{1}{B}\frac{dB}{dt}$ es igual a 0. Es decir, el crecimiento equilibra a las pérdidas, y la biomasa de la especie no cambia. Se dice que la biomasa está en **equilibrio**. Si el nivel de recursos R se mantiene en un valor menor que R^*, entonces $f(R) - m < 0$ y la velocidad de crecimiento de la especie sería negativa, es decir, la biomasa disminuiría. Si $R > R^*$, entonces $f(R) - m > 0$, y la biomasa aumentaría.

Se puede calcular R^* en el caso que $f(R)$ esté dada por la Ecuación (4.3). Como R^* satisface la ecuación $f(R^*) = m$, se tiene que

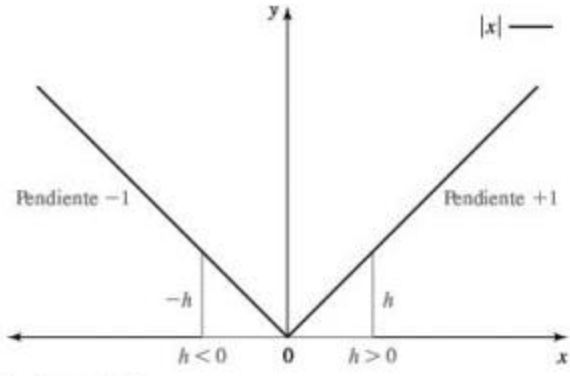
$$a\frac{R^*}{k+R^*} = m \quad \text{o} \quad R^* = \frac{mk}{a-m}$$

4.1.3 Derivabilidad y continuidad

Ejemplo 4 **Una función con una «esquina»** Sea

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geqslant 0 \\ -x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la Figura 4.16. Observando la gráfica, se puede ver que no existe recta tangente en $x = 0$, y por tanto, no es razonable esperar que exista $f'(0)$. Es posible definir la pendiente de la recta secante cuando nos aproximamos a 0 por la derecha y también cuando nos aproximamos a 0 por la izquierda.



▲ **Figura 4.16**
f no es derivable en $x = 0$

Sin embargo, las pendientes convergen en el límite a valores diferentes. El valor de la primera es $+1$, y en la segunda es -1. En este ejemplo, se pueden ver directamente las pendientes en la gráfica, pero dichas pendientes se pueden calcular también normalmente tomando los límites apropiados. Cuando $h > 0$, $f(h) = |h| = h$ y

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1$$

Cuando $h < 0$, $f(h) = |h| = -h$ y

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1$$

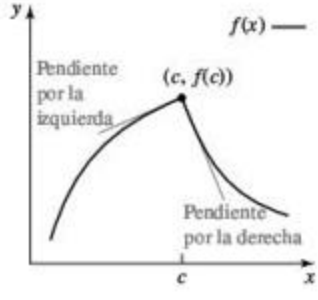
Como $1 \neq -1$, se deduce que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

y por tanto $f'(0)$ no existe.

En todos los demás puntos, la derivada existe. Se puede obtener la derivada simplemente observando la gráficas. Puede verse que

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{para } x > 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$ ◀



▲ **Figura 4.17**
$f(x)$ es continua en $x = c$ pero no es derivable en $x = c$. Las derivadas por la izquierda y por la derecha no son iguales.

El Ejemplo 4 muestra que la continuidad únicamente no es suficiente para que una función sea derivable: la función $f(x) = |x|$ es continua en todos los valores de x, pero no es derivable en $x = 0$. Para dibujar la gráfica de una función continua que no sea derivable en un punto, basta con poner una «esquina» en ese punto (Figura 4.17).

Sin embargo, si la función es derivable, también es continua. Esto significa que la continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para la derivabilidad. Este resultado es suficientemente importante como para que se formule como teorema y se demuestre.

Teorema Si f es derivable en $x = c$, es también continua en $x = c$.

Demostración Como f es derivable en $x = c$, el límite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{4.4}$$

existe y es igual a $f'(c)$. Para demostrar que f es continua en $x = c$, debe demostrarse que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0$$

Nótese primero que f está definida en $x = c$ [si no fuera así, no se podría haber calculado el cociente de diferencias $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$]. Ahora,

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c)$$

Dado que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe y es igual a $f'(c)$ [es la Ecuación (4.4)] y que

$$\lim_{x \to c} (x - c)$$

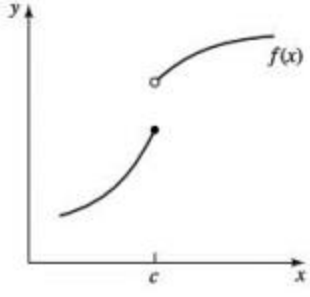
existe (es igual a 0), se puede aplicar la regla del producto de límites y obtener

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \to c} (x - c) = f'(c) \cdot 0 = 0$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0$$

y por tanto que f es continua en $x = c$. ■



▲ **Figura 4.18**
La función $y = f(x)$ no es derivable en $x = c$

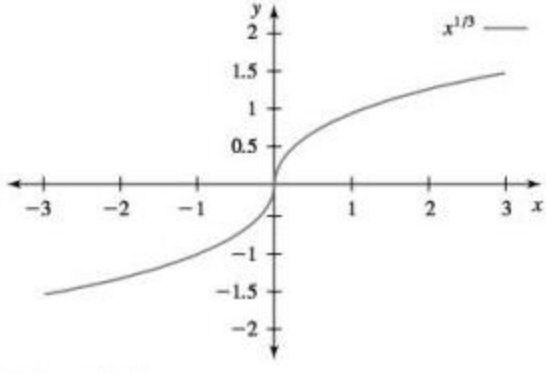
Este teorema permite deducir que si una función f no es continua en $x = c$, entonces no es derivable en $x = c$. La función $y = f(x)$ de la Figura 4.18 es discontinua en $x = c$; no se puede dibujar una recta tangente en $x = c$.

Las funciones pueden tener rectas tangentes verticales. Pero como la pendiente de una recta vertical no está definida, la función no sería derivable en cualquier punto cuya recta tangente fuera vertical. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

▶ **Ejemplo 5** **Recta tangente vertical** Demuestre que

$$f(x) = x^{1/3}$$

no es derivable en $x = 0$.



▲ **Figura 4.19**
La función $f(x) = x^{1/3}$ tiene una recta tangente vertical en $x = 0$. Por tanto, no es derivable en $x = 0$

Solución

A partir de la gráfica de $f(x)$ que se muestra en la Figura 4.19, puede verse que $f(x)$ es continua en $x = 0$. Utilizando la definición formal, se obtiene

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty \qquad \text{que no existe}$$

Como el límite no existe, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$. En la gráfica puede verse que la recta tangente en $x = 0$ es vertical. ◀

4.1.4. Problemas

(4.1.1)

En los Problemas 1-8, calcule la derivada en el punto indicado de la gráfica de cada función.

1. $f(x) = 2; x = 1$
2. $f(x) = -3x; x = 2$
3. $f(x) = 2x - 5; x = -1$
4. $f(x) = -5x + 1; x = 0$
5. $f(x) = x^2; x = 0$
6. $f(x) = (x - 1)^2; x = 1$
7. $f(x) = \cos x; x = 0$
8. $f(x) = \operatorname{sen} x; x = \dfrac{\pi}{2}$

En los Problemas 9-12, calcule $f(c + h) - f(c)$ en el punto indicado.

9. $f(x) = -2x + 1; c = 2$
10. $f(x) = 3x^2; c = 1$
11. $f(x) = \sqrt{x}; c = 4$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x}; c = -2$

13. **(a)** Utilice la definición formal de derivada para calcular la derivada de $y = 5x^2$ en $x = -1$.
(b) Demuestre que el punto $(-1, 5)$ pertenece a la gráfica de $y = 5x^2$, y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
(c) Dibuje $y = 5x^2$ y la recta tangente en el punto $(-1, 5)$ en el mismo sistema de coordenadas.

14. **(a)** Utilice la definición formal de derivada para calcular la derivada de $y = -2x^2$ en $x = 1$.
(b) Demuestre que el punto $(1, -2)$ pertenece a la gráfica de $y = -2x^2$, y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
(c) Dibuje $y = -2x^2$ y la recta tangente en el punto $(1, -2)$ en el mismo sistema de coordenadas.

15. **(a)** Utilice la definición formal de derivada para calcular la derivada de $y = 1 - x^3$ en $x = 2$.
(b) Demuestre que el punto $(2, -7)$ pertenece a la gráfica de $y = 1 - x^3$, y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
(c) Dibuje $y = 1 - x^3$ y la recta tangente en el punto $(2, -7)$ en el mismo sistema de coordenadas.

16. **(a)** Utilice la definición formal de derivada para calcular la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en $x = 2$.
(b) Demuestre que el punto $(2, \frac{1}{2})$ pertenece a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
(c) Dibuje $y = \frac{1}{x}$ y la recta tangente en el punto $(2, \frac{1}{2})$ en el mismo sistema de coordenadas.

17. Utilice la definición formal para obtener la derivada de
$$y = \sqrt{x}$$
para $x > 0$.

18. Utilice la definición formal para obtener la derivada de
$$f(x) = \frac{1}{x + 1}$$
para $x \neq -1$.

19. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2$ en el punto $(1, 2)$.

20. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3/x$ en el punto $(3, 1)$.

21. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$.

22. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 1$ en el punto $(2, -1)$.

23. Calcule la ecuación de la recta normal a la curva $y = -3x^2$ en el punto $(-1, -3)$.

24. Calcule la ecuación de la recta normal a la curva $y = 4/x$ en el punto $(-1, -4)$.

25. Calcule la ecuación de la recta normal a la curva $y = 2x^2 - 1$ en el punto $(1, 1)$.

26. Calcule la ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{x - 1}$ en el punto $(5, 2)$.

27. El siguiente límite representa la derivada de una función f en el punto $(a, f(a))$. Obtenga $f(x)$.
$$\lim_{h\to 0} \frac{2(a + h)^2 - 2a^2}{h}$$

28. El siguiente límite representa la derivada de una función f en el punto $(a, f(a))$. Obtenga $f(x)$.
$$\lim_{h\to 0} \frac{4(a + h)^3 - 4a^3}{h}$$

29. El siguiente límite representa la derivada de una función f en el punto $(a, f(a))$. Obtenga $f(x)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(2+h)^2+1} - \dfrac{1}{5}}{h}$$

30. El siguiente límite representa la derivada de una función f en el punto $(a, f(a))$. Obtenga $f(x)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right) - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}}{h}$$

(4.1.2)

31. Un coche se mueve por una carretera recta. Su posición en el instante t está dada por

$$s(t) = 20t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

donde t se mide en horas y $s(t)$ se mide en kilómetros.

(a) Dibuje $s(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

(b) Calcule la velocidad media del coche entre $t = 0$ y $t = 2$. Ilustre la velocidad media sobre la gráfica de $s(t)$.

(c) Utilice el cálculo para obtener la velocidad instantánea del coche en $t = 1$. Ilustre la velocidad instantánea sobre la gráfica de $s(t)$.

32. Un tren se mueve por una vía recta. Su posición en el instante t está dada por

$$s(t) = \frac{100}{t}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 5$$

donde t se mide en horas y se mide en kilómetros.

(a) Dibuje $s(t)$ para $1 \leqslant t \leqslant 5$.

(b) Calcule la velocidad media del tren entre $t = 1$ y $t = 5$. ¿Dónde se puede encontrar la velocidad media en la gráfica de $s(t)$?

(c) Utilice el cálculo para obtener la velocidad instantánea del tren en $t = 2$ ¿dónde se puede encontrar la velocidad instantánea en la gráfica de $s(t)$? ¿Cuál es la velocidad del tren en $t = 2$?

33. Si $s(t)$ indica la posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ es la velocidad media de variación de $s(t)$, que se denomina velocidad media, y $v(t) = ds/dt$ es la velocidad instantánea de variación de $s(t)$ que se denomina velocidad (instantánea).

Suponga que un coche se mueve por una carretera recta. Su posición en el instante t está dada por

$$s(t) = \frac{160}{3}t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

donde t se mide en horas y $s(t)$ se mide en kilómetros.

(a) ¿Dónde está el coche en $t = 3/4$ y en $t = 1$?

(b) Calcule la velocidad media del coche entre $t = 3/4$ y $t = 1$.

(c) Calcule la velocidad y el valor absoluto de la velocidad del coche en $t = 3/4$.

34. Suponga que una partícula se mueve en línea recta. Su posición en el instante t está dada por

$$s(t) = 3t - t^2, \quad t \geqslant 0$$

donde t se mide en segundos y $s(t)$ se mide en metros.

(a) Dibuje $s(t)$ para $t \geqslant 0$.

(b) Utilice la gráfica del apartado (a) para responder a las siguientes preguntas:

(i) ¿Dónde está la partícula en el instante $t = 0$?

(ii) ¿Hay otro instante de tiempo en el que la partícula vuelva a la posición en la que estaba en $t = 0$?

(iii) ¿Cuánto viaja la partícula en línea recta hacia la derecha?

(iv) ¿Cuánto viaja la partícula en línea recta hacia la izquierda?

(v) ¿Dónde es positiva la velocidad? ¿Dónde es negativa? ¿Dónde es igual a cero?

(c) Calcule la velocidad de la partícula.

(d) ¿Cuándo es la velocidad de la partícula igual a 1 m/s?

35. En la Subsección 4.1.2, se presentó el modelo de recursos de Tilman. Se denomina $B(t)$ a la biomasa en el instante t, y se supone que

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = f(R) - m$$

siendo R el nivel del recurso,

$$f(R) = 200\frac{R}{5+R}$$

y $m = 40$. Utilice el método gráfico para obtener el valor de R^* en el que $\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = 0$. Calcule después R^* resolviendo la ecuación $\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = 0$.

36. Suponga que $N(t)$ indica el tamaño de una población en el instante t, y que $N(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

siendo r una constante.

(a) Calcule la velocidad de crecimiento per cápita.

(b) Suponga que $r > 0$ y que $N(0) = 20$. ¿Es el tamaño de la población en el instante 1 mayor o menor que 20? Explique su respuesta.

37. Suponga que $N(t)$ indica el tamaño de una población en el instante t, y $N(t)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = 3N\left(1 - \frac{N}{20}\right)$$

Sea $f(N) = 3N(1 - \frac{N}{20})$ para $N \geqslant 0$. Dibuje $f(N)$ en función de N e identifique todos los puntos de equilibrio, es decir, aquellos puntos en los que $\frac{dN}{dt} = 0$.

38. Suponga que una especie vive en un hábitat consistente en muchas islas cercanas a un continente. La especie ocupa tanto el continente como las islas pero, aunque está presente en el continente en todo momento, se extingue frecuentemente en las islas. Las islas se pueden volver a colonizar con emigrantes procedentes del continente. El siguiente modelo da cuenta de la fracción de islas ocupadas. Se denomina $p(t)$ a la fracción de islas ocupadas en el instante t. Suponga que cada isla está bajo un riesgo de extinción constante y que las islas vacantes (fracción $1 - p$) se colonizarán desde el continente a velocidad constante. Entonces

$$\frac{dp}{dt} = c(1-p) - ep$$

siendo c y e constantes positivas.

(a) La ganancia por colonización es $f(p) = c(1 - p)$, y la pérdida por extinción es $g(p) = ep$. Dibuje $f(p)$ y $g(p)$ para $0 \leqslant p \leqslant 1$ en el mismo sistema de coordenadas. Explique por qué las dos gráficas se cortan siempre que e y c sean ambos positivos. Calcule el punto de intersección e interprete su significado biológico.

(b) El parámetro c mide la rapidez con la que las islas vacantes son colonizadas desde el continente. Cuanto más cerca estén las islas, mayor será el valor de c. Utilice la gráfica del apartado (a) para explicar lo que sucede en el punto de intersección de las

dos líneas de (a) a medida que c crece. Interprete su resultado en términos biológicos.

39. Considere la reacción química

$$A + B \rightarrow AB$$

Si $x(t)$ indica la concentración de AB en el instante t, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

siendo k una constante positiva, y a y b las concentraciones de A y B en el instante 0. Suponga que $k = 3$, $a = 7$ y $b = 4$. ¿Para qué valores de x es $dx/dt = 0$? ¿Cómo se puede interpretar esto?

40. Considere la reacción autocatalítica

$$A + X \rightarrow X$$

que se presentó en el Problema 30 de la Subsección 1.2.9. Obtenga la ecuación diferencial que expresa la velocidad de variación de la concentración del producto X.

41. Suponga que la velocidad de variación del tamaño de una población se expresa como

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

donde $N = N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t, y r y K son constantes positivas. Calcule el tamaño de equilibrio de la población, es decir, el tamaño para el que la velocidad de variación es 0. Utilice su respuesta para explicar por qué K se denomina capacidad de alojamiento.

42. (*Diversidad biótica*) (Adaptado de Valentine 1985.) Walter y Valentine (1984) sugirieron un modelo de diversidad de especies que supone que las velocidades de extinción de las especies son independientes de la diversidad, y las velocidades de derivación de especies se regulan mediante competición. Denominaron $N(t)$ al número de especies en el instante t, b a la velocidad de derivación de especies y a a la velocidad de extinción. Utilizaron el siguiente modelo:

$$\frac{dN}{dt} = N\left[b\left(1 - \frac{N}{K}\right) - a\right]$$

siendo K el número de «nichos», o sitios potenciales de las especies en el ecosistema.

(a) Obtenga el posible equilibrio bajo la condición $a < b$.

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para explicar la siguiente afirmación de Valentine (1985):

> En esta situación, los ecosistemas nunca están «llenos», con todos los nichos potenciales ocupados por especies, mientras la tasa de extinción esté por encima de cero.

(c) ¿Qué sucede cuando $a \geqslant b$?

(4.1.3)

43. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(A) Si $f(x)$ es continua, entonces es derivable.

(B) Si $f(x)$ es derivable, entonces es continua.

44. Explique la relación entre continuidad y derivabilidad.

45. Dibuje la gráfica de una función que sea continua en todos los puntos de su dominio y derivable en todo su dominio excepto en un punto.

En los Problemas 46-59, dibuje las funciones y, basándose en las gráficas, indique dónde no son derivables (asuma el mayor dominio posible).

46. $y = |x - 2|$

47. $y = -|x + 5|$

48. $y = 2 - |x - 1|$

49. $y = |x + 2| - 1$

50. $y = \dfrac{1}{1 + x}$

51. $y = \dfrac{1}{x - 3}$

52. $y = \dfrac{3 - x}{2 + x}$

53. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

54. $y = |x^2 - 3|$

55. $y = |x^2 - 1|$

56. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$

57. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \leqslant 1 \\ x + 2 & \text{para } x > 1 \end{cases}$

58. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \leqslant -1 \\ 2 - x^2 & \text{para } x > -1 \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{para } x \leqslant 0 \\ e^{-x} & \text{para } x > 0 \end{cases}$

60. Suponga que la función $f(x)$ está definida por tramos, es decir, $f(x) = f_1(x)$ para $x \leqslant a$ y $f(x) = f_2(x)$ para $x > a$. Suponga que $f_1(x)$ es continua y derivable para $x < a$ y que $f_2(x)$ es continua y derivable para $x > a$. Dibuje posibles gráficas de $f(x)$ en los tres casos siguientes:

(a) $f(x)$ es continua y derivable en $x = a$.

(b) $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = a$.

(c) $f(x)$ no es continua ni derivable en $x = a$.

4.2 LA REGLA DE LA POTENCIA, REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN Y DERIVADAS DE POLINOMIOS

En esta sección se comienza un tratamiento sistemático del cálculo de derivadas. Conocer la forma de derivar es fundamental para la comprensión del resto del curso. Aunque existe software de ordenador capaz de calcular las derivadas de muchas funciones (como $y = cx^n$ o $y = e^{\operatorname{sen} x}$), es sin embargo importante manejar las técnicas de derivación.

La regla de la potencia es la más simple de las reglas de derivación. Permite calcular la derivada de una función de la forma $y = x^n$, siendo n un entero positivo.

REGLA DE LA POTENCIA

Sea n un entero positivo. Entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Esta regla ya apareció para la función constante $f(x) = a$ de la sección anterior.

Si $f(x)$ es la función constante, concretamente $f(x) = a$, entonces

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$

Demostraremos la regla de la potencia primero para $n = 2$. Es decir, para $f(x) = x^2$ (Figura 4.20). En la Subsección 4.1.1 se calculó la derivada de $y = x^2$ en $x = 1$. En vez de en $x = 1$, se calculará el cociente de diferencias $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ en un valor x arbitrario,

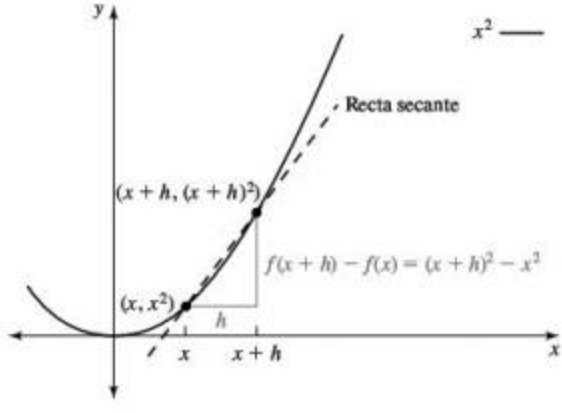
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Utilizando el desarrollo $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$, resulta

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \qquad (4.5)$$

tras simplificar h en el numerador y en el denominador. Para obtener la derivada, es necesario hacer $h \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (2x + hj) = 2x$$



▲ **Figura 4.20**
La pendiente de la recta secante que pasa por (x, x^2) y $((x+h), (x+h)^2)$ es $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Esto demuestra la regla de la potencia para $n = 2$. La demostración de la regla de la potencia para otros valores de n enteros positivos no es conceptualmente diferente del caso de $n = 2$, pero es algebraicamente mucho más engorroso. Para un valor general de n, es necesario el desarrollo de $(x + h)^n$, proporcionado por el **binomio de Newton**, que no demostraremos.

Binomio de Newton Sea n un entero positivo. Entonces,

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^{n-3}y^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

El desarrollo de $(x + y)^n$ es por tanto una suma de términos de la forma

$$C_{n,k}x^{n-k}y^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

donde $C_{n,k}$ es un coeficiente que depende de n y de k. La forma exacta de los coeficientes $C_{n,k}$ no será importante para la demostración de la regla de la potencia, excepto para los términos $C_{n,0} = 1$ y $C_{n,1} = n$, que son los coeficientes de x^n y de x^{n-1}, respectivamente.

Demostración de la regla de la potencia Utilizaremos el desarrollo del binomio de Newton para calcular la diferencia del numerador del cociente de diferencias.

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x+h) - f(x) &= (x+h)^n - x^n \\ &= (C_{n,0}x^n + C_{n,1}x^{n-1}h + C_{n,2}x^{n-2}h^2 + C_{n,3}x^{n-3}h^3 \\ &\quad + \cdots + C_{n,n-1}xh^{n-1} + C_{n,n}h^n) - x^n\end{aligned}$$

Como $C_{n,0} = 1$, los términos se cancelan. Se puede sacar factor común h de los restantes términos, con lo que se obtiene

$$f(x+h) - f(x) = h[C_{n,1}x^{n-1} + C_{n,2}x^{n-2}h + C_{n,3}x^{n-3}h^2 + \cdots + C_{n,n}h^{n-1}$$

Al dividir por h y hacer $h \to 0$, puede verse que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}[C_{n,1}x^{n-1} + C_{n,2}x^{n-2}h + C_{n,3}x^{n-3}h^2 + \cdots + C_{n,n}h^{n-1}]\end{aligned}$$

Todos los términos excepto el primero están multiplicados por h, y por tanto tenderán a 0 cuando $h \to 0$ (el primer término no depende de h). Resulta

$$f'(x) = C_{n,1}x^{n-1}$$

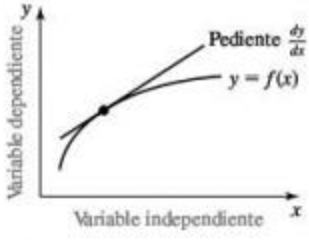
Como $C_{n,1}$, entonces,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

lo que demuestra la regla de la potencia. ■

Ejemplo 1 Aplicaremos la regla de la potencia en varios ejemplos para tener la oportunidad de practicar con las diferentes notaciones

(a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$.
(b) Si $f(x) = x^{300}$, entonces $f'(x) = 300x^{299}$.
(c) Si $g(t) = t^5$, entonces $g'(t) = 5t^4$.
(d) Si $z = s^3$, entonces $\frac{dz}{ds} = 3s^2$.
(e) Si $x = y^4$, entonces $\frac{dx}{dy} = 4y^3$. ◀



▲ **Figura 4.21**
Si $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente e y es la variable dependiente

El Ejemplo 1 ilustra la importancia de saber cómo dependen entre sí las variables (Figura 4.21). Si $y = f(x)$, x se denomina **variable independiente** e y se denomina **variable dependiente**, ya que y depende de la variable x. Por ejemplo, en (a), y es función de x y por tanto, x es la variable independiente e y la dependiente. En el caso (e), x es función de y, por lo que y es ahora la variable independiente y x la dependiente. La notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ resalta la dependencia. Al escribir $\frac{dy}{dx}$ se considera que y es función de x (es decir, que y es la variable dependiente y x la independiente) y que se deriva y con respecto a x.

Como los polinomios y las funciones racionales están formados por funciones potenciales de la forma $y = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, combinadas con las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, se necesitan reglas de derivación básicas para esas operaciones. Comenzaremos con las siguientes reglas.

Teorema Sea a una constante y $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en x. Se cumplen las siguientes igualdades:

1. $\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}f(x)$
2. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

La regla 1 dice que un factor constante se puede sacar de la derivada. La regla 2 dice que la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones. Como $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$, la derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x) + (-1)g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}[(-1)g(x)]$$

Utilizando la regla 1 en el término más a la derecha, se obtiene que $\frac{d}{dx}[(-1)g(x)] = (-1)\frac{d}{dx}g(x)$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Las reglas 1 y 2 permiten derivar polinomios, como se ilustra en los tres ejemplos siguientes.

Ejemplo 2 Derive $y = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^4 - 3x^3 + x - 7) &= \frac{d}{dx}(2x^4) - \frac{d}{dx}(3x^3) + \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}7 \\ &= 2\frac{d}{dx}x^4 - 3\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}7 \\ &= 2(4x^3) - 3(3x^2) + 1 - 0 = 8x^3 - 9x^2 + 1\end{aligned}$$ ◀

Ejemplo 3

(a) $\frac{d}{dx}(-5x^7 + 2x^3 - 10) = -35x^6 + 6x^2$

(b) $\frac{d}{dt}(t^3 - 8t^2 + 3t) = 3t^2 - 16t + 3$

(c) Suponga que n es un entero positivo y que a es una constante. Entonces $\frac{d}{ds}(as^n) = ans^{n-1}$.

(d) $\frac{d}{dN}(\ln 5 + N \ln 7) = \ln 7$

(e) $\frac{d}{dr}(r^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - r^3 \cos \frac{\pi}{12} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) = 2r \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - 3r^2 \cos \frac{\pi}{12}$ ◀

En la sección anterior se relacionó la derivada con la pendiente de la recta tangente. El siguiente ejemplo utiliza esta interpretación.

Ejemplo 4 Si $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$, calcule las rectas tangente y normal en $(-1, 2)$.

Solución

La pendiente de la recta tangente en $(-1, 2)$ es $f'(-1)$. Se calcula como sigue:

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

Evaluando $f'(x)$ en $x = -1$, se obtiene

$$f'(-1) = 6(-1)^2 - 3 = 3$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $(-1, 2)$ es

$$y - 2 = 3(x - (-1)) \quad \text{o} \quad y = 3x + 5$$

Para obtener la ecuación de la recta normal, hay que recordar que la recta normal es perpendicular a la recta tangente. Por tanto, la pendiente de la recta normal, m, está dada por

$$m = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3}$$

La recta normal pasa también por el punto $(-1, 2)$. La ecuación de la recta normal es por consiguiente

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - (-1)) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

La gráfica de $f(x)$, incluyendo las rectas tangente y normal en $(-1, 2)$ se muestra en la Figura 4.22. ◀

Volvamos al segundo ejemplo: para calcular $f'(-1)$, *primero* se calcula $f'(x)$; el *segundo* paso es evaluar $f'(x)$ en $x = -1$. No tiene sentido sustituir -1 en $f(x)$ y después derivar el resultado. Como $f(-1) = 2$ es una constante, su derivada sería 0, que no coincide obviamente con $f'(-1)$. La notación $f'(-1)$ significa que se evalúa la función $f'(x)$ en $x = -1$.

4.2.1. Problemas

Derive con respecto a la variable independiente las funciones dadas en los Problemas 1-22.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$

2. $f(x) = 3x^2 - 4x^4$

3. $f(x) = -2x^5 + 7x - 4$

4. $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 2$

5. $f(x) = 3 - 4x - 5x^2$

6. $f(x) = 8x^4 + 2x^2 - 1$

7. $g(s) = 5s^7 + 2s^3 - 5s$

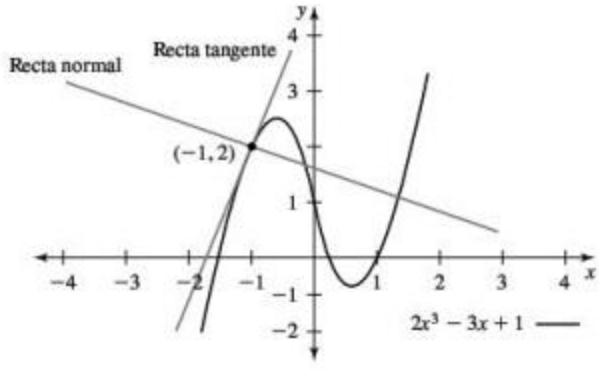
8. $g(s) = 3 - 4s^2 - 4s^3$

9. $h(t) = \frac{3}{6}t^4 + 4t$

10. $h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 2$

11. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}$

12. $f(x) = 2x^3 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}$



▲ **Figura 4.22**
Gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$, junto con las rectas tangente y normal en $(-1, 2)$

13. $f(x) = -3x^4 \tan\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{6}$

14. $f(x) = x^2 \sec\frac{\pi}{6} + 3x \sec\frac{\pi}{4}$

15. $f(x) = t^3 e^{-2} + t$

16. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^3 - x^4$

17. $f(s) = s^3 e^3 + 3e$

18. $f(x) = \frac{x}{\pi} + \pi x + \pi$

19. $f(x) = 20x^3 - 4x^6 + 9x^8$

20. $f(x) = \frac{x^3}{15} - \frac{x^4}{20} + \frac{2}{15}$

21. $f(x) = 2^3 x^3 - \frac{1}{2^3} + \frac{x}{2^3}$

22. $f(x) = \pi x e^2 - \frac{x^2\pi}{e}$

23. Derive
$$f(x) = ax^3$$
con respecto a x. Asuma que a es una constante.

24. Derive
$$f(x) = x^3 + a$$
con respecto a x. Asuma que a es una constante.

25. Derive
$$f(x) = ax^2 - 2a$$
con respecto a x. Asuma que a es una constante.

26. Derive
$$f(x) = a^2x^4 - 2ax^2$$
con respecto a x. Asuma que a es una constante.

27. Derive
$$h(s) = rs^2 - r$$
con respecto a s. Asuma que r es una constante.

28. Derive
$$f(r) = rs^2 - r$$
con respecto a r. Asuma que s es una constante.

29. Derive
$$f(x) = rs^2x^3 - rx + s$$
con respecto a x. Asuma que r y s son constantes.

30. Derive
$$f(x) = \frac{r + x}{rs^2} - rsx + (r + s)x - rs$$
con respecto a x. Asuma que r y s son constantes distintas de cero.

31. Derive
$$f(N) = (b - 1)N^4 - \frac{N^2}{b}$$
con respecto a N. Asuma que b es una constante distinta de cero.

32. Derive
$$f(N) = \frac{bN^2 + N}{K + b}$$
con respecto a N. Asuma que b y K son constantes positivas.

33. Derive
$$g(t) = a^3t - at^3$$
con respecto a t. Asuma que a es una constante.

34. Derive
$$h(s) = a^4s^2 - as^4 + \frac{s^2}{a^4}$$
con respecto a s. Asuma que a es una constante positiva.

35. Derive
$$V(t) = V_0(1 + \gamma t)$$
con respecto a t. Asuma que V_0 y γ son constantes positivas.

36. Derive
$$p(T) = \frac{NkT}{V}$$
con respecto a T. Asuma que N, k y V son constantes positivas.

37. Derive
$$g(N) = N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$
con respecto a N. Asuma que K es una constante positiva.

38. Derive
$$g(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$
con respecto a N. Asuma que K y r son constantes positivas.

39. Derive

$$g(N) = rN^2\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con respecto a N. Asuma que K y r son constantes positivas.

40. Derive

$$g(N) = rN(a - N)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con respecto a N. Asuma que r, a y K son constantes positivas.

41. Derive

$$R(T) = \frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{c^2h^3}T^4$$

con respecto a T. Asuma que k, c y h son constantes positivas.

En los Problemas 42-48, obtenga la recta tangente en forma estándar a $y = f(x)$, en el punto indicado.

42. $y = 3x^2 - 4x + 7$, en $x = 2$

43. $y = 7x^3 + 2x - 1$, en $x = -3$

44. $y = -2x^3 - 3x + 1$, en $x = 1$

45. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2}$, en $x = 4$

46. $y = 3\pi x^5 - \frac{\pi}{2}x^3$, en $x = -1$

47. $y = 2x^4 - 3x$, en $x = 2$

48. $y = -3x^3 - 2x^2$, en $x = 0$

En los Problemas 49-54, obtenga la recta normal en forma estándar a $y = f(x)$, en el punto indicado.

49. $y = 4x^3 - 3x^3$, en $x = -1$

50. $y = 1 - 3x^2$, en $x = -2$

51. $y = \sqrt{3}x^4 - 2\sqrt{3}x^2$, en $x = -\sqrt{3}$

52. $y = -e^2x^2 - ex$, en $x = 0$

53. $y = \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x^3$, en $x = 1$

54. $y = 1 - \pi x^2$, en $x = -1$

55. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = ax^2$$

en $x = 1$. Asuma que a es una constante positiva.

56. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = ax^3 - 2ax$$

en $x = -1$. Asuma que a es una constante positiva.

57. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = \frac{ax^2}{a^2 + 2}$$

en $x = 2$. Asuma que a es una constante positiva.

58. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = \frac{x^2}{a + 1}$$

en $x = a$. Asuma que a es una constante positiva.

59. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = ax^3$$

en $x = -1$. Asuma que a es una constante positiva.

60. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = ax^2 - 3ax$$

en $x = 2$. Asuma que a es una constante positiva.

61. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = \frac{ax^2}{a + 1}$$

en $x = 2$. Asuma que a es una constante positiva.

62. Obtenga la recta tangente a

$$f(x) = \frac{x^3}{a + 1}$$

en $x = 2a$. Asuma que a es una constante positiva.

En los Problemas 63-70, obtenga las coordenadas de todos los puntos de la gráfica de $y = f(x)$ que tengan tangentes horizontales.

63. $f(x) = x^2$

64. $f(x) = 2 - x^2$

65. $f(x) = 3x - x^2$

66. $f(x) = 4x + 2x^2$

67. $f(x) = 3x^3 - x^2$

68. $f(x) = -4x^4 + x^3$

69. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - 2x^2$

70. $f(x) = 3x^5 - \frac{3}{2}x^4$

71. Calcule un punto de la curva

$$y = 4 - x^2$$

cuya tangente sea paralela a la recta $y = 2$. ¿Hay más de un punto con esa propiedad? Si los hubiera, calcúlelos todos.

72. Calcule un punto de la curva

$$y = 4 - x^2$$

cuya tangente sea paralela a la recta $y = -3$. ¿Hay más de un punto con esa propiedad? Si los hubiera, calcúlelos todos.

73. Calcule un punto de la curva

$$y = 4 - x^2$$

cuya tangente sea paralela a la recta $y = x$. ¿Hay más de un punto con esa propiedad? Si los hubiera, calcúlelos todos.

74. Calcule un punto de la curva

$$y = 4 - x^2$$

cuya tangente sea paralela a la recta $y = -x$. ¿Hay más de un punto con esa propiedad? Si los hubiera, calcúlelos todos.

75. Calcule un punto de la curva

$$y = x^3 + 2x + 2$$

cuya tangente sea paralela a la recta $3x - y = 2$. ¿Hay más de un punto con esa propiedad? Si los hubiera, calcúlelos todos.

76. Calcule un punto de la curva

$$y = 2x^3 - 4x + 1$$

cuya tangente sea paralela a la recta $y - 2x = 1$. ¿Hay más de un punto con esa propiedad? Si los hubiera, calcúlelos todos.

77. Demuestre que la recta tangente a la curva

$$y = x^2$$

en el punto $(1, 1)$ pasa por el punto $(0, -1)$.

78. Calcule la recta tangente a la curva

$$y = x^2$$

que pasa por el punto $(0, -1)$.

79. Calcule la recta tangente a la curva

$$y = x^2$$

que pasa por el punto $(0, -a^2)$, siendo a una constante positiva.

80. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva

$$y = x^2 + 2x$$

pasan por el punto $(-\frac{1}{2}, -3)$?

81. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado 4. ¿Es $P'(x)$ también un polinomio? Si lo es ¿de qué grado?

82. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado k. ¿Es $P'(x)$ también un polinomio? Si lo es ¿de qué grado?

4.3 REGLAS DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE Y DERIVADAS DE FUNCIONES POTENCIALES Y RACIONALES

4.3.1 Regla del producto

La derivada de la suma de funciones derivables es la suma de las derivadas de las funciones. La regla para productos no es tan simple. Esto puede verse mediante el siguiente ejemplo. Sea $y = x^5 = (x)^3(x)^2$. Se sabe que

$$\frac{d}{dx}x^5 = 5x^4$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

Esto demuestra que

$$\frac{d}{dx}x^5 \quad \text{no es igual a} \quad \left(\frac{d}{dx}x^3\right)\left(\frac{d}{dx}x^2\right)$$

(Leibniz pensó en un principio que la regla para la multiplicación era así de simple, pero rápidamente advirtió su error y obtuvo la fórmula correcta para la derivación de productos de funciones).

REGLA DEL PRODUCTO

Si $h(x) = f(x)g(x)$ y tanto $f(x)$ como $g(x)$ son derivables en x, entonces

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Si se denomina $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces

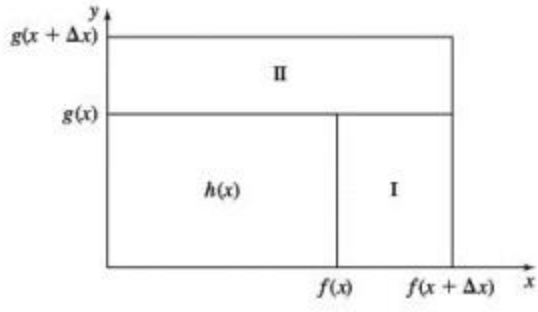
$$(uv)' = u'v + uv'$$

Demostración Como $h(x) = f(x)g(x)$ es el producto de dos funciones, $h(x)$ se puede ver como el área de un rectángulo cuyos lados son $f(x)$ y $g(x)$. Para calcular la derivada se necesita $h(x + \Delta x)$, que está dado por

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$$

Para calcular $h'(x)$, se debe calcular $h(x + \Delta x) - h(x)$ (Figura 4.23). Se obtiene

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x) - h(x) &= \text{área de I} + \text{área de II} \\ &= [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x) \\ &\quad + [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x + \Delta x) \end{aligned}$$



◀ **Figura 4.23**
Regla del producto

Dividiendo este resultado por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x) + [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x + \Delta x) \right] \end{aligned}$$

Ahora, se necesita suponer que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y que $f(x)$ es continua en x [lo que se deduce del hecho de que $f(x)$ es derivable en x]. Esto hace posible utilizar las reglas básicas de los límites, con lo que la última expresión se puede escribir como

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) g(x) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \right)$$

Los límites de los cocientes de diferencias son las respectivas derivadas. Utilizando el hecho de que $f(x)$ es continua en x, se obtiene $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Por tanto,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

como se quería demostrar. ■

Ejemplo 1 Derive $f(x) = (3x + 1)(2x^2 - 5)$.

Solución

Sean $u = 3x + 1$ y $v = 2x^2 - 5$. La regla del producto dice que $(uv)' = u'v + uv'$. Es decir, se necesitan las derivadas de u y de v:

$$u = 3x + 1 \qquad v = 2x^2 - 5$$
$$u' = 3 \qquad v' = 4x$$

Entonces

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ &= 3(2x^2 - 5) + (3x + 1)(4x) \\ &= 6x^2 - 15 + 12x^2 + 4x = 18x^2 + 4x - 15 \end{aligned}$$

Por supuesto, se podría haber obtenido también este resultado realizando la multiplicación $(3x + 1)(2x^2 - 5) = 6x^3 - 15x + 2x^2 - 5$, que es simplemente una función polinómica. Derivando dicha función

$$\frac{d}{dx}(6x^3 - 15x + 2x^2 - 5) = 18x^2 - 15 + 4x$$

que es la misma respuesta. ◀

Ejemplo 2 Derive $f(x) = (3x^2 - 2x)^2$.

Solución

De nuevo, se podría simplemente desarrollar el cuadrado y después derivar el polinomio resultante, pero también se puede utilizar la regla del producto. Para hacerlo, se escribe $u = v = 3x^3 - 2x$. Entonces $f(x) = uv$ y $(uv)' = u'v + uv'$. Como $u = v$, se deduce que $u' = v'$ y la fórmula se simplifica como $(uv)' = (u^2)' = u'u + uu' = 2uu'$. Como $u' = 9x^2 - 2$, se obtiene que

$$f'(x) = 2(3x^3 - 2x)(9x^2 - 2)$$ ◀

Ejemplo 3 En muchos modelos de poblaciones, la velocidad de crecimiento de la población depende sólo del tamaño de la población actual. Esto se puede expresar así:

$$\frac{dN}{dt} = f(N)$$

donde $N(t)$ representa el tamaño de la población en el instante t y $f(N)$ es la velocidad de crecimiento de la población, que depende sólo del tamaño de la población actual $N = N(t)$. La velocidad de crecimiento per cápita $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ es también una función sólo de N:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = g(N)$$

con

$$f(N) = Ng(N)$$

Suponga que $g(N)$ es derivable y que existen los límites $\lim_{N\to 0^+} g(N)$ y $\lim_{N\to 0^+} g'(N)$. Demuestre que

$$g(0) = \lim_{N\to 0^+} \frac{d}{dN} f(N)$$

Solución

Se calcula la derivada de la velocidad de crecimiento de la población $f(N) = Ng(N)$ utilizando la regla del producto

$$\frac{d}{dN}(Ng(N)) = g(N) + Ng'(N)$$

y después se toma el límite cuando $N \to 0^+$:

$$\lim_{N\to 0^+} \frac{d}{dN}(Ng(N)) = \lim_{N\to 0^+} [g(N) + Ng'(N)] = g(0)$$

(Nótese que sólo se toman límites laterales ya que $N \geqslant 0$ por razones biológicas.) ◀

4.3.2 Regla del cociente

La regla del cociente permite calcular la derivada de un cociente de funciones. En particular, permite calcular la derivada de una función racional, ya que es el cociente de dos funciones polinómicas.

REGLA DEL PRODUCTO

Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ y existen $f'(x)$ y $g'(x)$, entonces

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Más brevemente, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

La regla del cociente se podría demostrar de forma muy parecida a como se demostró la regla del producto, utilizando la definición formal de derivada, pero no aportaría mucho. En vez de eso, en la siguiente subsección se presentará una demostración diferente.

Note cuidadosamente la forma exacta de las reglas del producto y del cociente. En la regla del producto, se suman $f'g$ y fg', mientras que la regla del cociente, se restan $f'g$ y fg'. Como ya se ha mencionado, la regla del cociente se puede utilizar para obtener la derivada de funciones racionales. Esto se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 4 Derive $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}$ (esta función está definida para todo $x \in \mathbf{R}$, ya que $x^2 + 1 \neq 0$).

Solución

Sea $u = x^3 - 3x + 2$ y $v = x^2 + 1$. Tanto u como v son polinomios, que sabemos derivar. Se obtiene

$$u = x^3 - 3x + 2 \qquad v = x^2 + 1$$
$$u' = 3x^2 - 3 \qquad v' = 2x$$

Utilizando la regla del cociente, se puede calcular y':

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x + 2)2x}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 3x^2 - 3 - 2x^4 + 6x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{x^4 + 6x^2 - 4x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

◀

Ejemplo 5 Derive la función de crecimiento de Monod

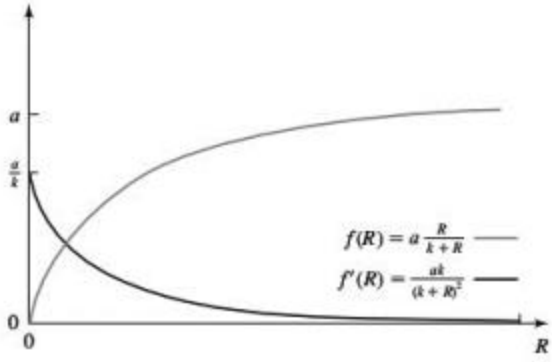
$$f(R) = \frac{aR}{k + R}, \quad R \geqslant 0$$

siendo a y k constantes positivas.

Solución

Como a y k son constantes positivas, $f(R)$ está definida para todo $R \geqslant 0$. Si se escribe $u = aR$ y $v = k + R$ se obtiene

$$u = aR \qquad v = k + R$$
$$u' = a \qquad v' = 1$$



◀ **Figura 4.24**
Gráficas de $f(R)$ y de $f'(R)$ del Ejemplo 5

Por tanto,

$$\frac{d}{dR} f(R) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{a(k+R) - aR \cdot 1}{(k+R)^2} = \frac{ak}{(k+R)^2}$$

En la Figura 4.24, se muestran $f(R)$ y $f'(R)$. Puede verse que la pendiente de la recta tangente en $(R, f(R))$ es positiva para todo $R \geqslant 0$. Esto también se puede concluir observando la gráfica de $f'(R)$, ya que es positiva para todo $R \geqslant 0$. Además, se puede ver que la pendiente de $f(R)$ se va haciendo menos abrupta a medida que R crece, lo que se refleja en el hecho de que $f'(R)$ va disminuyendo a medida que R crece. ◀

La regla del cociente permite extender la regla de la potencia al caso de exponentes enteros negativos.

REGLA DE LA POTENCIA (EXPONENTES ENTEROS NEGATIVOS)

Si $f(x) = x^{-n}$, siendo n un entero positivo, entonces

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Nótese que la regla de la potencia para exponentes enteros negativos funciona de la misma forma que para exponentes enteros positivos. El exponente pasa a multiplicar a la función y después se disminuye en una unidad. A continuación se demuestra la regla de la potencia para exponentes enteros negativos.

Demostración Sea $f(x) = \frac{1}{x^n}$, y sean $u = 1$ y $v = x^n$. Entonces

$$u = 1 \qquad v = x^n$$
$$u' = 0 \qquad v' = nx^{n-1}$$

y, por tanto,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$ ■

Ejemplo 6

(a) Si $y = \frac{1}{x}$, entonces

$$y' = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

(b) Si $g(x) = \frac{3}{x^4}$, entonces

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(3x^{-4}) = 3\frac{d}{dx}x^{-4} = 3(-4)x^{-4-1}$$
$$= -12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$$ ◀

Existe una forma general de la regla de la potencia, en la que el exponente puede ser cualquier número real. En la sección siguiente se dará la demostración cuando el exponente es racional, y en la Sección 4.7 se demostrará el caso general.

REGLA DE LA POTENCIA (FORMA GENERAL)

Sea $f(x) = x^r$, siendo r un número real cualquiera. Entonces

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Ejemplo 7

(a) Si $y = \sqrt{x}$, entonces

$$y' = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) Si $y = \sqrt[5]{x}$, entonces

$$y' = \frac{d}{dx}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{(1/5)-1} = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}}$$

(c) Si $g(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, entonces

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(t^{-1/3}) = \left(-\frac{1}{3}\right)t^{(-1/3)-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)t^{-4/3} = -\frac{1}{3t^{4/3}}$$

(d) Si $h(s) = s^{\pi}$, entonces $h'(s) = \pi s^{\pi-1}$. ◀

La función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ aparece muy frecuentemente. Por tanto, merece la pena memorizar su derivada, que sólo está definida para $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 8

Combinación de reglas Derive $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$.

Solución 1

Puede considerarse como el producto de dos funciones. Sean

$$u = \sqrt{x} \qquad v = x^2 - 1$$

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v' = 2x$$

Por tanto,

$$f'(x) = u'v + uv' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + \sqrt{x}(2x)$$

$$= \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x}(2x)2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$

Solución 2

Como $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1) = x^{5/2} - x^{1/2}$, se puede utilizar también la versión general de la regla de la potencia. Se obtiene que

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{(5/2)-1} - \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{5}{2}x^{3/2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^{3/2}\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$ ◀

Ejemplo 9 **Una función que contiene una constante** Derive $h(t) = (at)^{1/3}(a + 1) - a$, siendo a una constante positiva.

Solución

Como $h(t)$ es función de t, hay que derivar con respecto a t, teniendo en mente que a es una constante. Esto se facilita si se escribe $h(t)$ de otra forma:

$$h(t) = a^{1/3}(a + 1)t^{1/3} - a$$

El factor $a^{1/3}(a + 1)$ delante de $t^{1/3}$ es una constante. Por tanto

$$h'(t) = a^{1/3}(a + 1)\frac{1}{3}t^{-2/3} - 0 = \frac{a^{1/3}(a + 1)}{3t^{2/3}}$$ ◀

Ejemplo 10 **Derivación de una función no especificada** Suponga que $f(2) = 3$ y que $f'(2) = 1/4$. Calcule

$$\frac{d}{dx}[xf(x)]$$

en $x = 2$.

Solución

Como $xf(x)$ es un producto, se puede aplicar la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + xf'(x)$$

Por tanto

$$\frac{d}{dx}[xf(x)]\Big|_{x=2} = f(2) + 2f'(2) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$ ◀

Ejemplo 11 **Derivación de una función no especificada** Suponga que $f(x)$ es derivable. Obtenga una expresión para la derivada de

$$y = \frac{f(x)}{x^2}$$

Solución

Sea

$$u = f(x) \qquad v = x^2$$
$$u' = f'(x) \qquad v' = 2x$$

Utilizando la regla del cociente, se obtiene

$$y' = \frac{f'(x)x^2 - f(x)2x}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$$ ◀

4.3.3. Problemas

(4.3.1)

En los Problemas 1-16, derive con respecto a la variable independiente.

1. $f(x) = (2x - 1)(2 - x^2)$
2. $f(x) = (3x + 2x^2)(5x^3 - 2)$
3. $f(x) = (x^3 + 17)(3x - 14x^2)$
4. $f(x) = (2x^4 - 3x^2 + 1)(2x - 5x^3)$
5. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)(2x + 3x^2)$
6. $f(x) = 2(3x^2 - 2x^3)(1 - 5x^2)$
7. $f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{5}$
8. $f(x) = 3(x^2 + 2)(4x^2 - 5x^4) - 3$
9. $f(x) = (3x - 1)^2$

10. $f(x) = (4 - 2x^2)^2$

11. $f(x) = 3(1 - 2x)^2$

12. $f(x) = \dfrac{(2x^2 - 3x + 1)^2}{4} + 2$

13. $g(s) = (2s^2 - 5s)^2$

14. $h(t) = 4(3t^2 - 1)(2t + 1)$

15. $g(t) = 3(2t^2 - 5t^4)^2$

16. $h(s) = (4 - 3s^2 + 4s^3)^2$

En los Problemas 17-20, calcule la recta tangente, en forma pendiente-ordenada en el origen, de $y = f(x)$ en el punto especificado.

17. $f(x) = (3x^2 - 2)(x - 1)$, en $x = 1$

18. $f(x) = (1 - 2x)(1 + 2x)$, en $x = 2$

19. $f(x) = 4(2x^4 + 3x)(4 - 2x^2)$, en $x = -1$

20. $f(x) = (3x^3 - 3)(2 - 2x^2)$, en $x = 0$

En los Problemas 21-24, calcule la recta normal, en forma pendiente-ordenada en el origen, de $y = f(x)$ en el punto especificado.

21. $f(x) = (1 - x)(2 - x^2)$, en $x = 2$

22. $f(x) = (2x + 1)(3x^2 - 1)$, en $x = 1$

23. $f(x) = 5(1 - 2x)(x + 1) - 3$, en $x = 0$

24. $f(x) = \dfrac{(2 - x)(3 - x)}{4}$, en $x = 1$

En los Problemas 25-28, aplique repetidamente la regla del producto para calcular la derivada de $y = f(x)$.

25. $f(x) = (2x - 1)(3x + 4)(1 - x)$

26. $f(x) = (x - 3)(2 - 3x)(5 - x)$

27. $f(x) = (x - 3)(2x^2 + 1)(1 - x^2)$

28. $f(x) = (2x + 1)(4 - x^2)(1 + x^2)$

29. Derive

$$f(x) = a(x - 1)(2x - 1)$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

30. Derive

$$f(x) = (a - x)(a + x)$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

31. Derive

$$f(x) = 2a(x^2 - a)^2 + a$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

32. Derive

$$f(x) = \frac{3(x - 1)^2}{2 + a}$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

33. Derive

$$g(t) = (at + 1)^2$$

con respecto a t. Asuma que a es una constante positiva.

34. Derive

$$h(t) = \sqrt{a}(t - a) + a$$

con respecto a t. Asuma que a es una constante positiva.

35. Suponga que $f(2) = -4$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$. Calcule

$$(fg)'(2)$$

36. Suponga que $f(2) = -4$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$. Calcule

$$(f^2 + g^2)'(2)$$

En los Problemas 37-40, suponga que $f(x)$ es derivable. Calcule una expresión para la derivada de y.

37. $y = 2xf(x)$

38. $y = 3x^2 f(x)$

39. $y = -5x^3 f(x) - 2x$

40. $y = \dfrac{xf(x)}{2}$

En los Problemas 41-44, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x. Calcule una expresión para la derivada de y.

41. $y = 3f(x)g(x)$

42. $y = [f(x) - 3]g(x)$

43. $y = [f(x) + 2g(x)]g(x)$

44. $y = [-2f(x) - 3g(x)]g(x) + \dfrac{2g(x)}{3}$

45. Sea $B(t)$ la biomasa en el instante t con una velocidad de crecimiento específica $g(B)$. Demuestre que la velocidad de crecimiento específica en $B = 0$ está dada por la pendiente de la recta tangente a la curva de la velocidad de crecimiento en $B = 0$.

46. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Derive

$$f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con respecto a N, siendo r y K constantes positivas.

47. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Derive

$$f(N) = r(aN - N^2)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con respecto a N, siendo r, K y a constantes positivas.

48. Considere la reacción química

$$A + B \rightarrow AB$$

Si x indica la concentración de AB en el instante t, entonces la velocidad de reacción está dada por

$$R(x) = k(a - x)(b - x)$$

siendo k, a y b constantes positivas. Derive $R(x)$.

(4.3.2)

En los Problemas 49-70, derive con respecto a la variable independiente.

49. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

50. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x + 1}$

51. $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{1 - x}$

52. $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x - 1}{5x^2 - 2x + 1}$

53. $f(x) = \dfrac{3 - x^3}{1 - x}$

54. $f(x) = \dfrac{1 + 2x^2 - 4x^4}{3x^3 - 5x^5}$

55. $f(x) = \dfrac{t^2 - 3t + 1}{t + 1}$

56. $h(t) = \dfrac{3 - t^2}{(t + 1)^2}$

57. $f(s) = \dfrac{4 - 2s^2}{1 - s}$

58. $f(s) = \dfrac{2s^3 - 4s^2 + 5s - 7}{(s^2 - 3)^2}$

59. $f(x) = \sqrt{x}(x - 1)$

60. $f(x) = \sqrt{x}(x^4 - 5x^2)$

61. $f(x) = \sqrt{3x}(x^2 - 1)$

62. $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x}(1 + x^2)}{\sqrt{2}}$

63. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$

64. $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{x^5}$

65. $f(x) = 2x^2 - \dfrac{3x - 1}{x^3}$

66. $f(x) = -x^3 + \dfrac{2x^2 - 3}{4x^4}$

67. $g(s) = \dfrac{s^{1/3} - 1}{s^{2/3} - 1}$

68. $g(s) = \dfrac{s^{1/7} - s^{2/7}}{s^{3/7} - s^{4/7}}$

69. $f(x) = (1 - 2x)\left(\sqrt{2x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

70. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

En los Problemas 71-74, calcule la recta tangente, en la forma pendiente-ordenada en el origen, de $y = f(x)$ en el punto especificado.

71. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^3 + 5}$, en $x = -2$

72. $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^2}$, en $x = 1$

73. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^3}$, en $x = 2$

74. $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 1)$, en $x = 1$

75. Derive

$$f(x) = \frac{ax}{3 + x}$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

76. Derive

$$f(x) = \frac{ax}{k + x}$$

con respecto a x. Asuma que a y k son constantes positivas.

77. Derive

$$f(x) = \frac{ax^2}{4 + x^2}$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

78. Derive

$$f(x) = \frac{ax^2}{k^2 + x^2}$$

con respecto a x. Asuma que a y k son constantes positivas.

79. Derive

$$f(R) = \frac{R^2}{k + R}$$

con respecto a R. Asuma que k es una constante positiva.

80. Derive

$$h(t) = \sqrt{at}(1 - a) + a$$

con respecto a t. Asuma que a es una constante positiva.

81. Derive

$$h(t) = \sqrt{at}(t - a) + at$$

con respecto a t. Asuma que a es una constante positiva.

82. Suponga que $f(2) = -4$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$. Calcule

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(2)$$

83. Suponga que $f(2) = -4$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$. Calcule

$$\left(\frac{f}{2g}\right)'(2)$$

En los Problemas 84-87, suponga que $f(x)$ es derivable. Calcule una expresión para la derivada de y.

84. $y = \dfrac{f(x)}{x^2 + 1}$

85. $y = \dfrac{x^2 + 4f(x)}{f(x)}$

86. $y = [f(x)]^2 - \dfrac{x}{f(x)}$

87. $y = \dfrac{f(x)}{f(x) + x}$

En los Problemas 88-91, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables. Calcule una expresión para la derivada de y.

88. $y = \dfrac{2f(x) + 1}{3g(x)}$

89. $y = \dfrac{f(x)}{[g(x)]^2}$

90. $y = \dfrac{x^2}{f(x) - g(x)}$

91. $y = \sqrt{x}f(x)g(x)$

92. Suponga que $f(x)$ es una función derivable. Calcule la derivada de la función $g(x) = 1/f(x)$ en los puntos donde $f(x) \neq 0$.

93. Calcule la recta tangente a la hipérbola $yx = c$, siendo c una constante positiva, en el punto (x_1, y_1), con $x_1 > 0$. Demuestre que la recta tangente corta al eje x en un punto que no depende de c.

94. (*Adaptado de Roff, 1992*) Los machos de la especie de rana *Eleutherodactilus coqui* (encontrada en Puerto Rico) cuidan de su prole. Mientras están protegiendo los huevos, no pueden buscar otras parejas, y por tanto no pueden incrementar su descendencia. Por otra parte, si no pasan tiempo suficiente protegiendo a su prole, su descendencia podría no sobrevivir. Existen modelos matemáticos simples que dan la proporción de descendientes que consiguen salir del huevo por unidad de tiempo, $w(t)$, en función de la probabilidad de salir del huevo si se pasa un tiempo t protegiendo a la prole, $f(t)$, y del coste C asociado con el tiempo empleado en buscar otras parejas. Dada la siguiente relación

$$w(t) = \frac{f(t)}{C + t}$$

calcule la derivada de $w(t)$.

4.4 REGLA DE LA CADENA Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

4.4.1 Regla de la cadena

En la Sección 1.2 se definió la composición de funciones. Para obtener la derivada de funciones compuestas, se necesita utilizar la **regla de la cadena** (que se demuestra al final de esta sección).

REGLA DE LA CADENA

> Si g es derivable en x y f es derivable en $y = g(x)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ es derivable en x, y su derivada se expresa como
>
> $$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$

Esta fórmula parece complicada. Detengámonos un momento para ver qué se necesita hacer para obtener la derivada de la función compuesta $(f \circ g)(x)$. La función g es la función interna y la función f es la función externa. La expresión $f'[g(x)]g'(x)$ significa por tanto que se debe calcular la derivada de la función externa evaluada en $g(x)$ y la derivada de la función interna evaluada en x. Después se multiplican.

Ejemplo 1 **Un polinomio** Calcule la derivada de

$$h(x) = (3x^2 - 1)^2$$

Solución

La función interna es $g(x) = 3x^2 - 1$. La función externa es $f(u) = u^2$. Entonces

$$g'(x) = 6x \quad \text{y} \quad f'(u) = 2u$$

Evaluando $f'(u)$ en $u = g(x)$ resulta

$$f'[g(x)] = 2g(x) = 2(3x^2 - 1)$$

Por tanto,

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$
$$= 2(3x^2 - 1)6x = 12x(3x^2 - 1)$$ ◀

La derivada de $f \circ g$ se puede escribir utilizando la notación de Leibniz. Si se hace $u = g(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)] = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

Esta forma de la regla de la cadena resalta el orden en que se debe derivar $f \circ g$: se multiplica la derivada de la función externa por la derivada de la función interna. La primera evaluada en u y la segunda en x.

Ejemplo 2 **Un polinomio** Calcule la derivada de

$$h(x) = (2x + 1)^3$$

Solución

Si se hace $u = g(x) = 2x + 1$ y $f(u) = u^3$, entonces $h(x) = (f \circ g)(x)$. Hay que calcular $f'[g(x)]$ y $g'(x)$ para obtener $h'(x)$. Entonces,

$$g'(x) = 2 \quad \text{y} \quad f'(u) = 3u^2$$

Por tanto, como $f'[g(x)] = 3(g(x))^2 = 3(2x + 1)^2$,

$$h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2$$
$$= 6(2x + 1)^2$$

Si se utiliza la notación de Leibniz,

$$h'(x) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 2 = 3(2x + 1)^2 \cdot 2$$
$$= 6(2x + 1)^2$$ ◀

Ejemplo 3 **Una función radical** Calcule la derivada de $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Solución

Si se hace $u = g(x) = x^2 + 1$ y $f(u) = \sqrt{u}$, entonces $h(x) = (f \circ g)(x)$. Se obtiene que

$$g'(x) = 2x \quad \text{y} \quad f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Hay que evaluar f' en $g(x)$, es decir,

$$f'[g(x)] = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

Por tanto,

$$h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}\, 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$ ◀

Ejemplo 4 **Una función radical** Calcule la derivada de

$$h(x) = \sqrt[7]{2x^2 + 3x}$$

Solución

Se escribe

$$h(x) = (2x^2 + 3x)^{1/7}$$

La función interna es $u = g(x) = 2x^2 + 3x$ y la función externa es $f(u) = u^{1/7}$. Por tanto, se obtiene

$$h'(x) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{7}\, u^{1/7 - 1}(4x + 3)$$
$$= \frac{1}{7}\,(2x^2 + 3x)^{-6/7}(4x + 3)$$
$$= \frac{4x + 3}{7(2x^2 + 3x)^{6/7}}$$ ◀

Ejemplo 5 **Una función racional** Calcule la derivada de $h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$.

Solución

Si se hace $u = g(x) = \frac{x}{x+1}$ y $f(u) = u^2$, entonces $h(x) = (f \circ g)(x)$. Para calcular la derivada de $g(x)$ se utiliza la regla del cociente:

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x + 1) - x \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Como $f'(u) = 2u$, se obtiene

$$h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = 2\,\frac{x}{x + 1}\,\frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{2x}{(x + 1)^3}$$ ◀

Demostración de la regla del cociente La regla de la cadena se puede utilizar para demostrar la regla del cociente. Supongamos que $g(x) \neq 0$ para todo x del dominio de g. Si se define $h(x) = \frac{1}{x}$, entonces,

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = \frac{1}{g(x)}$$

En el Ejemplo 3 de la Sección 4.1 se utilizó la definición formal de derivada para demostrar que $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Utilizando esto, junto con la regla de la cadena, se obtiene

$$(h \circ g)'(x) = -\frac{1}{[g(x)]^2} g'(x) \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Como $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$, se puede utilizar la regla del producto

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$
$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Nótese que no se ha utilizado la regla de la potencia con exponentes enteros negativos (Subsección 4.3.2) para calcular $h'(x)$, sino que se ha empleado la definición formal de derivada para calcular la derivada de $1/x$. Si se hubiera utilizado la regla de la potencia con exponentes enteros negativos habríamos caído en un razonamiento circular: se utilizó la regla del cociente para demostrar la regla de la potencia con exponentes enteros negativos, y por tanto no se puede utilizar la regla de la potencia con exponentes enteros negativos para demostrar la regla del cociente. ■

Ejemplo 6 **Una función con parámetros** Calcule la derivada de

$$h(x) = (ax^2 - 2)^n$$

siendo $a > 0$ y n un entero positivo.

Solución

Si se hace $u = g(x) = ax^2 - 2$ y $f(u) = u^n$, entonces $h(x) = (f \circ g)(x)$. Como

$$g'(x) = 2ax \quad \text{y} \quad f'(u) = nu^{n-1}$$

se obtiene

$$h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = n(ax^2 - 2)^{n-1}2ax$$
$$= 2anx(ax^2 - 2)^{n-1}$$

Observando $h'(x) = n(ax^2 - 2)^{n-1} \cdot 2ax$ puede verse que primero se ha derivado mediante la regla de la potencia la función externa f, resultando $n(ax^2 - 2)^{n-1}$, y después se ha multiplicado el resultado por la derivada de la función g, que es $2ax$. ◀

Ejemplo 7 **Derivación de una función no especificada** Suponga que $f(x)$ es derivable. Calcule

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

Solución

Sea

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = [f(x)]^{-1/2}$$

Ahora, $u = f(x)$ es la función interna y $h(u) = u^{-1/2}$ es la función externa. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{dh}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}u^{-3/2}f'(x)$$
$$= -\frac{1}{2u^{3/2}}f'(x) = -\frac{f'(x)}{2[f(x)]^{3/2}}$$ ◀

Ejemplo 8 **Regla de la potencia generalizada** Suponga que $f(x)$ es derivable y sea r un número real. Calcule

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^r$$

Solución

Utilizando la forma general de la regla de la potencia y la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^r = r[f(x)]^{r-1}f'(x)$$ ◀

Ejemplo 9 **Derivación de una función no especificada** Suponga que $f'(x) = 3x - 1$. Calcule

$$\frac{d}{dx}f(x^2) \quad \text{en } x = 3$$

Solución

La función interna es $u = x^2$, y la función externa es $f(u)$, con lo que se obtiene

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = 2xf'(x^2)$$

Si se sustituye $x = 3$ en $f'(x^2)$, se obtiene $f'(3^2) = f'(9) = (3)(9) - 1 = 26$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}f(x^2)|_{x=3} = (2)(3)f'(9) = (6)(26) = 156$$ ◀

La regla de la cadena se puede usar repetidamente, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 10 **Anidación de la regla de la cadena** Calcule la derivada de

$$h(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)^2$$

Solución

Si se hace $h(x) = (f \circ g)(x)$, entonces $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 1$ y $f(u) = u^2$. Puede verse que $g(x)$ es a su vez una composición de dos funciones, una función interna $v = x^2 + 1$ y una función externa $\sqrt{v} + 1$. Para derivar $h(x)$ se procede por pasos,

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 1} + 1)^2 = 2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 1} + 1)$$

Como

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 1} + 1) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

donde se ha utilizado la regla de la cadena para derivar $\sqrt{x^2 + 1}$, se obtiene

$$h'(x) = 2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$ ◀

Ejemplo 11 **Anidación de la regla de la cadena** Calcule la derivada de

$$h(x) = (2x^3 - \sqrt{3x^4 - 2})^3$$

Solución

Como en el ejemplo anterior, se procede por pasos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3(2x^3 - \sqrt{3x^4 - 2})^2 \frac{d}{dx}(2x^3 - \sqrt{3x^4 - 2}) \\ &= 3(2x^3 - \sqrt{3x^4 - 2})^2 \left(6x^2 - \frac{12x^3}{2\sqrt{3x^4 - 2}}\right) \\ &= 18x^2(2x^3 - \sqrt{3x^4 - 2})^2 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3x^4 - 2}}\right) \end{aligned}$$

◀

Se concluirá esta subsección con la demostración de la regla de la cadena. La primera parte de la demostración sigue las líneas del argumento utilizado al principio de esta sección, pero la segunda parte es mucho más técnica y considera el problema de que Δu podría ser cero.

Demostración de la regla de la cadena Para la demostración, se utilizará la definición de derivada. Formalmente,

$$(f \circ g)(x) = \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{x - c}$$

Es necesario demostrar que el miembro derecho es igual a $f'[g(c)]g'(c)$. Siempre que $g(x) \neq g(c)$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{x - c} &= \lim_{x \to c} \frac{\frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)}[g(x) - g(c)]}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} = f'[g(c)] \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = g'(c),$$

estos límites existen, y se puede utilizar el hecho de que el límite de un producto es el producto de los límites. Se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{x - c} &= \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\ &= f'[g(c)]g'(c) \end{aligned}$$

En el cálculo anterior, es necesario suponer que $g(x) - g(c) \neq 0$. Por supuesto, al tomar el límite cuando $x \to c$, puede haber valores de x en los que $g(x) = g(c)$, y debe considerarse esa posibilidad.

Sea $y = g(x)$ y $d = g(c)$. La expresión

$$f^*(y) \equiv \frac{f(y) - f(d)}{y - d}$$

sólo está definida para $y \neq d$. Como

$$\lim_{y \to d} \frac{f(y) - f(d)}{y - d} = f'(d)$$

una extensión natural de $f^*[g(x)]$ que hace que sea continua es por tanto

$$f^*[g(x)] = \begin{cases} \dfrac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} & \text{para } g(x) \neq g(c) \\ f'[g(c)] & \text{para } g(x) = g(c) \end{cases}$$

Esto significa que para todo x,

$$f[g(x)] - f[g(c)] = f^*[g(x)][g(x) - g(c)]$$

Con esta equivalencia se pueden repetir los cálculos, obteniéndose

$$\lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f^*[g(x)][g(x) - g(c)]}{x - c}$$

$$\lim_{x \to c} f^*[g(x)] \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f'[g(c)] \cdot g'(c)$$

Nótese que en el último paso se ha utilizado el hecho de que $f^*[g(x)]$ es continua en $x = c$. ■

4.4.2 Funciones implícitas y derivación implícita

Hasta ahora se han considerado únicamente funciones de la forma $y = f(x)$, donde se define y *explícitamente* en función de x. Es también posible definir y *implícitamente* como función de x, como en la siguiente ecuación:

$$y^5x^2 - yx + 2y^2 = \sqrt{x}$$

En la ecuación anterior, y es una función de x, es decir, y es la variable independiente. No existe una forma obvia de despejar y. Hay una técnica muy utilizada, que se basa en la regla de la cadena, que permite obtener dy/dx en el caso de funciones implícitas. La técnica se denomina **derivación implícita**. En el ejemplo siguiente se explica el procedimiento.

Ejemplo 12 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $x^2 + y^2 = 1$.

Solución

Se derivan los dos miembros de la ecuación $x^2 + y^2$ con respecto a x. Hay que recordar que y es función de x.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 = \frac{d}{dx}(1)$$

Como la derivada de una suma es la suma de las derivadas, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

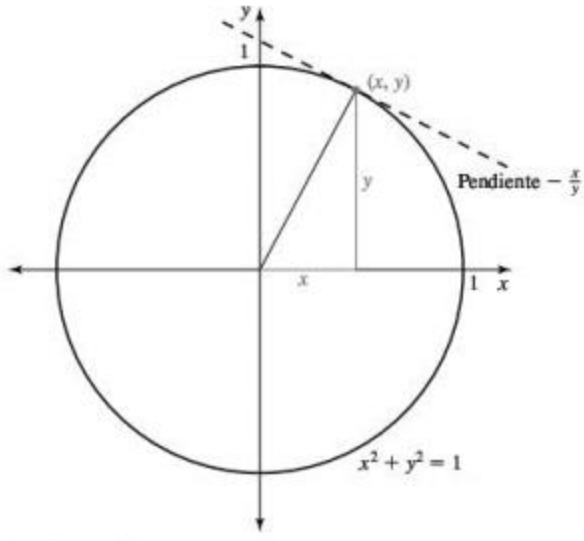
Empezando con el miembro izquierdo y utilizando la regla de la potencia, se obtiene $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Para derivar y^2 con respecto a x, se debe aplicar la regla de la cadena. Se obtiene $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$. En el miembro derecho, se obtiene $\frac{d}{dx}(1) = 0$. Por tanto,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora se puede despejar $\frac{dy}{dx}$, resultando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Como $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de la circunferencia unidad centrada en el origen (Figura 4.25), podemos comprobar que se trata de la derivada correcta utilizando



▲ **Figura 4.25**
La pendiente de la recta tangente a la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ en (x, y) es $m = -\frac{x}{y}$

un argumento geométrico. La recta que une $(0, 0)$ con (x, y) tiene pendiente $\frac{y}{x}$ y es perpendicular a la recta tangente en (x, y). Como las pendientes de las rectas perpendiculares se obtienen calculando la inversa cambiada de signo, la pendiente de la recta tangente en (x, y) debe ser $-\frac{x}{y}$.

También se podría haber despejado y en $x^2 + y^2 = 1$ y después haber derivado con respecto a x. Esto habría producido el mismo resultado, pero de forma más complicada. ◀

Se resumen a continuación los pasos a realizar para obtener dy/dx cuando en una ecuación se define y implícitamente como función derivable de x.

Paso 1. Derivar los dos miembros de la ecuación con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x.

Paso 2. Despejar en la ecuación resultante dy/dx.

Nótese que derivar términos que dependen de y requiere en general la aplicación de la regla de la cadena. Se presenta a continuación otro ejemplo. Esta vez, no se puede utilizar un argumento geométrico ni se puede despejar y.

Ejemplo 13 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y^3x^2 - yx + 2y^2 = x$.

Solución

Se derivan los dos miembros de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(y^3x^2) - \frac{d}{dx}(yx) + \frac{d}{dx}(2y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$

Para derivar y^3x^2 e yx con respecto a x se utiliza la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(y^3x^2) = \left(\frac{d}{dx}y^3\right)x^2 + y^3\left(\frac{d}{dx}x^2\right) = \left(\frac{d}{dx}y^3\right)x^2 + (y^3)(2x)$$

$$\frac{d}{dx}(yx) = \left(\frac{d}{dx}y\right)(x) + y\left(\frac{d}{dx}x\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)x + y$$

Para derivar $\frac{d}{dx} y^3$, se utiliza la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} y^3 = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

Además,

$$\frac{d}{dx} (2y^2) = 4y \frac{dy}{dx}$$

y

$$\frac{d}{dx} (x) = 1$$

Reuniendo toda la información, se obtiene

$$3y^2 \frac{dy}{dx} (x^2) + (y^3)(2x) - \left[\left(\frac{dy}{dx} \right) x + y \right] + 4y \frac{dy}{dx} = 1$$

Sacando factor común $\frac{dy}{dx}$, queda

$$\frac{dy}{dx} [3y^2x^2 - x + 4y] + 2xy^3 - y = 1$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 1 - 2xy^3}{3y^2x^2 - x + 4y}$$ ◀

El siguiente ejemplo sirve de preparación para estudiar la aplicación de la regla de la cadena a exponentes racionales.

Ejemplo 14 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y^2 = x^3$. Suponga que $x > 0$.

Solución

Derivando ambos miembros con respecto a x:

$$\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (x^3)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{y}$$

Como $y = x^{3/2}$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{y} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{x^{3/2}} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

Esta es la solución que se esperaría obtener aplicando la versión general de la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^{3/2} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$ ◀

Regla de la potencia para exponentes racionales El ejemplo anterior se puede generalizar a funciones de la forma $y = x^r$, siendo r un número racional. Esto servirá de demostración de la forma generalizada de la regla de la potencia cuando el exponente es un número racional, algo que se prometió en la sección anterior. Se escribe $r = p/q$, siendo p y q enteros (si q es par, se requiere que x sea positivo). Entonces,

$$y = x^{p/q} \quad \Leftrightarrow \quad y^q = x^p$$

Derivando los dos miembros de $y^q = x^p$ con respecto a x, se obtiene

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}}$$
$$= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q}$$
$$= \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Se resume el resultado:

> Si r es un número racional, entonces
>
> $$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$$

4.4.3 Variaciones relacionadas

Una aplicación importante de la derivación implícita son los problemas de las variaciones relacionadas. Empezaremos con un ejemplo ilustrativo.

Considérese el caso de una porción de aire elevándose rápidamente en la atmósfera. Como consecuencia, se expande sin intercambiar calor con el aire que le rodea. Las leyes de la Física indican que el volumen (V) y la temperatura (T) de la porción de aire se relacionan vía

$$TV^{\gamma-1} = C$$

siendo γ aproximadamente 1,4 para aire suficientemente seco (γ es la letra griega gamma minúscula) y C es una constante. La temperatura se mide en grados Kelvin[1], una escala en la que la temperatura es siempre positiva (escala absoluta de temperatura). Como al elevarse el aire se expande, el volumen de la porción de aire aumenta con el tiempo. Esto se expresa matemáticamente como $dV/dt > 0$, donde t indica tiempo.

Para determinar cómo cambia la temperatura del aire cuando se eleva, se deriva implícitamente $TV^{\gamma-1} = C$, con respecto a t:

$$\frac{dT}{dt}V^{\gamma-1} + T(\gamma-1)V^{\gamma-2}\frac{dV}{dt} = 0$$

o

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T(\gamma-1)V^{\gamma-2}\frac{dV}{dt}}{V^{\gamma-1}}$$
$$= -T(\gamma-1)\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

Si se utiliza $\gamma = 1{,}4$, entonces

$$\frac{dT}{dt} = -T(0.4)\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

lo que implica que si el aire se expande (es decir, $dV/dt > 0$), entonces su temperatura desciende (es decir, $dT/dt < 0$), ya que tanto T como V son positivos. La

[1] Para comparar las escalas Celsius y Kelvin, nótese que una diferencia de temperatura de 1 °C es igual a una diferencia de temperatura de 1 °K y que 0 °C = 273,15 °K y 100 °C = 373,15 °K.

temperatura de la porción de aire desciende mientras asciende, y la temperatura de una porción descendente de aire aumenta. Esto se puede observar cerca de las altas montañas.

En un problema típico de variaciones relacionadas, una cantidad se expresa en términos de otra y ambas varían con el tiempo. Generalmente se conoce cómo varía una de las cantidades con el tiempo, y se pretende obtener cómo varía la otra. Por ejemplo, supóngase que y es una función de x, y que tanto x como y varían con el tiempo. Se conoce cómo varía x con el tiempo (es decir, si se conoce dx/dt), y se desea conocer cómo varía y con el tiempo (es decir, dy/dt). El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo 15 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $x^2 + y^3 = 1$ y $\frac{dx}{dt} = 2$ para $x = \sqrt{7/8}$.

Solución

En este ejemplo, tanto x como y son funciones de t. La derivación implícita con respecto a t permite obtener

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^3) = \frac{d}{dt}(1)$$

y de aquí

$$2x\frac{dx}{dt} + 3y^2\frac{dy}{dt} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dt}$ se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{x}{y^2}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = \sqrt{7/8}$,

$$y^3 = 1 - x^2 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

y por tanto $y = 1/2$. Así,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{7/8}}{1/4}\cdot 2 = -\frac{16}{3}\sqrt{\frac{7}{8}} = -\frac{4}{3}\sqrt{14}$$ ◀

Se presentan seguidamente dos ejemplos más de variaciones relacionadas.

Ejemplo 16 Una pelota esférica se rellena con aire. Cuando el radio es $r = 6$ cm, dicho radio se incrementa a una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué rapidez varía el volumen en ese instante?

Solución

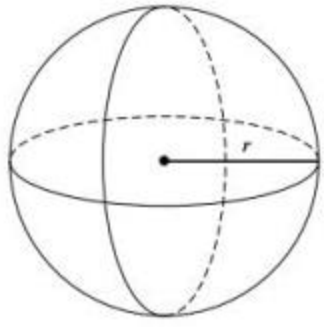
El volumen V de una esfera de radio r se expresa como

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(*véase* la Figura 4.26). Nótese que V es función de r. Como r está aumentando con una cierta velocidad, puede suponerse que r varía con el tiempo t, es decir, $r = r(t)$. Como el volumen V depende de r, cambiará también con el tiempo t. Por tanto V se considera también una función de t. Derivando los dos miembros de (4.6) con respecto a t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$



◀ **Figura 4.26**
El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Cuando $r = 6$ cm y $dr/dt = 2$ cm/s, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi 6^2 \text{ cm}^2 \, 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 288\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

Nótese que las unidades de dV/dt son cm^3/s, que es lo lógico ya que la unidad de volumen es cm^3 y la unidad de tiempo es segundos. ◀

Ejemplo 17 **(Adaptado de Benton y Harper, 1997)** Los ictiosaurios son un grupo de reptiles marinos con forma de pez y comparables en tamaño a los delfines. Se extinguieron durante el periodo Cretáceo[2]. Basándose en el estudio de 20 esqueletos fósiles, se descubrió que la longitud del cráneo (en cm) y la longitud de la espina dorsal (en cm) de los ejemplares estaban relacionadas mediante la ecuación alométrica (que se presentó en el Ejemplo 7 de la Sección 1.2)

$$[\text{longitud del cráneo}] = 1.162[\text{longitud de la espina dorsal}]^{0.933}$$

¿Cómo se relaciona la tasa de crecimiento de la espina dorsal con la del cráneo?

Solución

Sea x la edad del ictiosaurio, y sean

$$S = S(x) = \text{longitud del cráneo a la edad de } x$$
$$B = B(x) = \text{longitud de la espina dorsal a la edad de } x$$

de forma que

$$S(x) = (1.162)[B(x)]^{0.933}$$

Estamos interesados en la relación entre dS/dx y dB/dx, que son respectivamente las velocidades de crecimiento del cráneo y de la espina dorsal. Derivando la ecuación de $S(x)$ con respecto a x, se obtiene

$$\frac{dS}{dx} = (1.162)(0.933)[B(x)]^{0.933-1} \frac{dB}{dx}$$

Reordenando términos del miembro derecho de la ecuación anterior, se puede escribir como

$$\frac{dS}{dx} = \underbrace{(1.162)[B(x)]^{0.933}}_{S(x)} (0.933) \frac{1}{B(x)} \frac{dB}{dx}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx} = 0.933 \frac{1}{B(x)} \frac{dB}{dx}$$

Esta ecuación relaciona las velocidades de crecimiento relativas $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}$ y $\frac{1}{B}\frac{dB}{dx}$. El factor 0.933 es menor que 1, lo que indica que los cráneos crecen con menos rapi-

[2] El periodo Cretáceo comenzó hace unos 144 millones de años y finalizó hace unos 65 millones de años.

dez que las espinas dorsales. Este es un concepto familiar: los vertebrados jóvenes tienen la cabeza más grande que los adultos, relativa al tamaño del cuerpo. ◀

4.4.4 Derivadas de orden superior

La derivada de una función f es asimismo una función, que se denomina **primera derivada**, y se indica como f'. Si existe la primera derivada, se dice que la función es derivable una vez. Como la primera derivada es también una función, se puede definir su derivada (donde exista). Esta derivada se denomina **segunda derivada** y se indica como f''. Si existe la segunda derivada, se dice que la función es derivable dos veces. La segunda derivada es de nuevo una función, y por tanto se puede definir su derivada (donde exista). El resultado es la **tercera derivada**, que se indica como f'''. Si existe la tercera derivada, se dice que la función es derivable tres veces. Se puede continuar este proceso. De la cuarta derivada en adelante las derivadas se denotan como $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, etc. Si la derivada $f^{(n)}$ existe, se dice que la función es derivable n veces.

Los polinomios son funciones que se pueden derivar tantas veces como se desee. La razón es que la primera derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $n-1$. Como la derivada es a su vez un polinomio, se puede calcular su derivada, y así sucesivamente. En algún momento, la derivada se hará igual a 0. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 18 Calcule la derivada n-ésima de $f(x) = x^5$ para $n = 1, 2, \ldots$

Solución

Derivando $f(x)$, se obtiene que la primera derivada es

$$f'(x) = 5x^4$$

Derivando $f'(x)$, se obtiene que la segunda derivada es

$$f''(x) = 5(4x^3) = 20x^3$$

Derivando $f''(x)$, se obtiene que la tercera derivada es

$$f'''(x) = 20(3x^2) = 60x^2$$

Derivando $f'''(x)$, se obtiene que la cuarta derivada es

$$f^{(4)}(x) = 60(2x) = 120x$$

Derivando $f^{(4)}(x)$, se obtiene que la quinta derivada es

$$f^{(5)}(x) = 120$$

Derivando $f^{(5)}(x)$, se obtiene que la sexta derivada es

$$f^{(6)}(x) = 0$$

Todas las derivadas de orden superior, es decir, $f^{(7)}(x)$, $f^{(8)}(x)$, ..., son también iguales a cero. ◀

Las derivadas de orden superior se pueden escribir utilizando la notación de Leibniz. La derivada n-ésima de $f(x)$ se escribe como

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

Ejemplo 19 Calcule la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

Solución

Primero, hay que calcular la primera derivada,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{para } x > 0$$

Para calcular la segunda derivada, se deriva la primera derivada

$$\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-1/2)-1}$$

$$= -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$ ◀

Cuando las funciones se definen implícitamente, se puede utilizar la técnica de la derivación implícita para obtener derivadas de orden superior.

Ejemplo 20 Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ siendo $x^2 + y^2 = 1$.

Solución

En el Ejemplo 12, se obtuvo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Derivando los dos miembros de esta ecuación con respecto a x, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\frac{x}{y}\right]$$

El miembro izquierdo de la ecuación se puede poner como

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

En el miembro derecho, se puede utilizar la regla del cociente. Por tanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1 \cdot y - x\,\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

Sustituyendo $-\frac{x}{y}$ por $\frac{dy}{dx}$, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2}$$

$$= -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

Como $x^2 + y^2 = 1$, se puede simplificar, resultando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$$ ◀

Anteriormente se comentó que la velocidad de un objeto que se mueve en línea recta es la derivada de su posición. La derivada de la velocidad es la **aceleración**. Si $s(t)$ indica la posición del objeto que se mueve en línea recta, $v(t)$ su velocidad y $a(t)$ su aceleración, las tres magnitudes se relacionan como sigue:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo 21 **Aceleración** Suponga que la posición de un coche que se mueve en línea recta se expresa como

$$s(t) = 3t^3 - 2t + 1$$

Calcule su velocidad y su aceleración.

Solución

Para calcular la velocidad, es necesario derivar la posición

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 9t^2 - 2$$

Para calcular la aceleración, se deriva la velocidad

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 18t$$ ◀

Ejemplo 22 Despreciando la resistencia del aire, la distancia (en metros) recorrida en la caída de un objeto cuando se deja caer desde una determinada altura es

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

siendo $g = 9.81$ m/s^2 la constante gravitatoria de la Tierra y t el intervalo de tiempo (en segundos) transcurrido desde que el objeto se deja caer.

(a) Calcule su velocidad y aceleración.

(b) Si la altura inicial es de 30 m, ¿cuánto tardará el objeto en llegar al suelo y cuál será su velocidad en el momento del impacto?

Solución

(a) La velocidad es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = gt$$

y la aceleración es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = g$$

Nótese que la aceleración es constante.

(b) Para calcular el instante en el que el objeto llega a tierra, se hace $s(t) = 30$ m, y se despeja t:

$$30 \text{ m} = \frac{1}{2} (9.81) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

Entonces,

$$t^2 = \frac{60}{9.81} \text{s}^2 \quad \text{o} \quad t = \sqrt{\frac{60}{9.81}} \text{ s} \approx 2.47 \text{ s}$$

(Sólo es necesario considerar la solución positiva.) La velocidad en el instante del impacto es

$$v(t) = gt = (9.81) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sqrt{\frac{60}{9.81}} \text{ s} \approx 24.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$ ◀

4.4.5. Problemas

(4.4.1)

En los Problemas 1-28, derive la función con respecto a la variable independiente.

1. $f(x) = (x - 2)^2$
2. $f(x) = (2x - 1)^3$
3. $f(x) = (1 - 3x^2)^4$
4. $f(x) = (2x^2 - 3x)^2$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
6. $f(x) = \sqrt{2x - 5}$
7. $f(x) = \sqrt{3 - x^3}$
8. $f(x) = \sqrt{5x + 3x^3}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 2)^4}$

10. $f(x) = \dfrac{2}{(1 - 2x^2)^3}$

11. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

12. $f(x) = \dfrac{(1 - 2x^2)^2}{(3 - x^2)^3}$

13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{(x - 1)^2}$

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$

15. $f(s) = \sqrt{s + \sqrt{s}}$

16. $g(t) = \sqrt{t^2 + \sqrt{t+1}}$

17. $g(t) = \left(\dfrac{t}{t - 3}\right)^3$

18. $h(s) = \left(\dfrac{2s^2}{s + 1}\right)^4$

19. $f(r) = (r^2 - r)^3(r + 3r^3)^{-4}$

20. $h(s) = \dfrac{2(3 - s)^2}{s^2 + (7s - 1)^2}$

21. $h(x) = \sqrt[5]{3 - x^4}$

22. $h(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$

23. $f(x) = \sqrt[7]{x^2 - 2x + 1}$

24. $f(x) = \sqrt[4]{2 - 4x^2}$

25. $g(s) = (3s^7 - 7s)^\pi$

26. $h(t) = (t^4 - 4t)^e$

27. $h(t) = \left(3t + \dfrac{3}{t}\right)^{2/5}$

28. $h(t) = \left(4t^4 + \dfrac{4}{t^4}\right)^{1/4}$

29. Derive

$$f(x) = (ax + 1)^3$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

30. Derive

$$f(x) = \sqrt{ax^2 - 2}$$

con respecto a x. Asuma que a es una constante positiva.

31. Derive

$$g(N) = \frac{bN}{(k + N)^2}$$

con respecto a N. Asuma que b y k son constantes positivas.

32. Derive

$$g(N) = \frac{N}{(k + bN)^2}$$

con respecto a N. Asuma que b y k son constantes positivas.

33. Derive

$$g(T) = a(T_0 - T)^3 - b$$

con respecto a T. Asuma que a, b y T_0 son constantes positivas.

34. Suponga que $f'(x) = 2x + 1$. Calcule lo siguiente

(a) $\dfrac{d}{dx} f(x^2)$

en $x = -1$.

(b) $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x})$

en $x = 4$.

35. Suponga que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Calcule lo siguiente

(a) $\dfrac{d}{dx} f(x^2 + 3)$

(b) $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x - 1})$

En los Problemas 36-39, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables.

36. Calcule

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x) + g(x)}$$

37. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)} + 1\right)^2$$

38. Calcule

$$\frac{d}{dx} f\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

39. Calcule

$$\frac{d}{dx}\frac{[f(x)]^2}{g(2x) + 2x}$$

En los Problemas 40-46, calcule $\frac{dy}{dx}$ aplicando repetidamente la regla de la cadena.

40. $y = (\sqrt{1 - x^2} + 2)^2$

41. $y = (\sqrt{x^3 - 3x} + 3x)^3$

42. $y = (1 + (x - 1)^2)^2$

43. $y = (1 + (3x^2 - 1)^3)^2$

44. $y = \left(\dfrac{x}{2(x^2 - 1)^2 - 1}\right)^2$

45. $y = \dfrac{2x + 1}{3(x^3 - 1)^3 - 1}\Bigg)^3$

46. $y = \left(\dfrac{(2x + 1)^2 - x}{(3x^3 + 1)^3 - x}\right)^2$

(4.4.2)

En los Problemas 47-54, calcule $\frac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita.

47. $x^2 + y^2 = 4$

48. $y = x^2 + yx$

49. $x^{3/4} + y^{3/4} = 1$

50. $xy - y^3 = 1$

51. $\sqrt{xy} = x^2 + 1$

52. $\dfrac{1}{xy} - y^2 = 2$

53. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$

54. $\dfrac{x}{xy+1} = 2xy$

En los Problemas 55-57, obtenga las rectas que son (a) tangentes y (b) normales a cada curva en el punto dado.

55. $x^2 + y^2 = 25$, $(4, -3)$ (circunferencia)

56. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $(1, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ (elipse)

57. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, $(\frac{25}{3}, 4)$ (hipérbola)

58. (*Lemniscata*)

(a) La curva cuya ecuación es $y^2 = x^2 - x^4$ tiene forma de ocho. Calcule $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$.

(b) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la curva de (a). Si la calculadora gráfica no puede dibujar funciones implícitas, dibuje separadamente la mitad superior e inferior de la curva, es decir, dibuje

$$y_1 = \sqrt{x^2 - x^4}$$
$$y_2 = -\sqrt{x^2 - x^4}$$

Escoja como rectángulo de visualización $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

59. (*Astroide*)

(a) Considere la curva cuya ecuación es $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(-1, 3\sqrt{3})$.

(b) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la curva de (a). Si la calculadora gráfica no puede dibujar funciones implícitas, dibuje separadamente la mitad superior e inferior de la curva. Para obtener la mitad superior, asegúrese de que su calculadora evalúa $x^{2/3}$ en el orden $(x^2)^{1/3}$. Escoja como rectángulo de visualización $-10 \leqslant x \leqslant 10$, $-10 \leqslant y \leqslant 10$.

60. (*Campila de Eudoxo*)

(a) Considere la curva cuya ecuación es $y^2 = 10x^4 - x^2$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(1, 3)$.

(b) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la curva de (a). Si la calculadora gráfica no puede dibujar funciones implícitas, dibuje separadamente la mitad superior e inferior de la curva. Escoja como rectángulo de visualización $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-10 \leqslant y \leqslant 10$.

(4.4.3)

61. Suponga que x e y son funciones derivables de t. Calcule $\frac{dy}{dt}$ cuando $x^2 + y^2 = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2$ para $x = \frac{1}{2}$, e $y > 0$.

62. Suponga que x e y son funciones derivables de t. Calcule $\frac{dy}{dt}$ cuando $y^2 = x^2 - x^4$, $\frac{dx}{dt} = 1$ para $x = \frac{1}{2}$, e $y > 0$.

63. Suponga que x e y son funciones derivables de t. Calcule $\frac{dy}{dt}$ cuando $x^2y = 1$ y $\frac{dx}{dt} = 3$ para $x = 2$.

64. Suponga que u e v son funciones derivables de t. Calcule $\frac{du}{dt}$ cuando $u^2 + v^3 = 12$, $\frac{dv}{dt} = 2$ para $v = 2$, e $u > 0$.

65. Suponga que la longitud de la arista x y el volumen $V = x^3$ de un cubo son funciones derivables de t. Exprese dV/dt en función de dx/dt.

66. Suponga que el radio r y el área $A = \pi r^2$ de un círculo son funciones derivables de t. Exprese dA/dt en función de dr/dt.

67. Suponga que el radio r y el área de la superficie $S = 4\pi r^2$ de una esfera son funciones derivables de t. Exprese dS/dt en función de dr/dt.

68. Suponga que el radio r y el volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ de una esfera son funciones derivables de t. Exprese dV/dt en función de dr/dt.

69. Suponga que se almacena agua en un tanque cilíndrico de radio 5 m. Si la altura del agua en el tanque es h, el volumen de agua es $V = \pi r^2 h = (25\ \text{m}^2)\pi h = 25\pi h\ \text{m}^2$. Si se vacía el agua con una velocidad de 250 litros por minuto, ¿a qué velocidad disminuye el nivel de agua del tanque? (Note que un metro cúbico equivale a 1000 litros.)

70. Suponga que se vierte agua en un tanque cónico circular invertido con una velocidad de cinco pies cúbicos por minuto. La altura del tanque es de 6 pies y el radio de la parte superior es de 3 pies. ¿A qué velocidad sube el nivel de agua cuando dicho nivel es de 2 pies? (Note que el volumen de un cono circular de radio r y altura h es de $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.)

71. Dos personas comienzan a andar en bicicleta desde el mismo punto. Una viaja hacia el este a 15 millas por hora y la otra hacia el sur a 18 millas por hora. ¿A qué velocidad cambia la distancia entre las dos personas después de 20 minutos y de 40 minutos?

72. Las ecuaciones alométricas describen relaciones de escala entre dos medidas, tales como la longitud del cráneo con respecto a la longitud del cuerpo. En los vertebrados, una relación típica es

$$[\text{longitud del cráneo}] \propto [\text{longitud del cuerpo}]^a$$

para algún valor de $a \in (0, 1)$. Exprese la velocidad de crecimiento de la longitud del cráneo en función de la velocidad de crecimiento de la longitud del cuerpo.

(4.4.4)

En los Problemas 73-82, calcule las derivadas primera y segunda de cada función.

73. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

74. $f(x) = (x^2 - 3)^2$

75. $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

76. $h(s) = \dfrac{1}{s^2+2}$

77. $g(t) = \sqrt{3t^3 + 2t}$

78. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + x - 1$

79. $f(s) = \sqrt{x^{3/2} - 1}$

80. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

81. $g(t) = t^{-5/2} - t^{1/2}$

82. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$

83. Calcule las diez primeras derivadas de $y = x^5$.

84. Calcule $f(n)(x)$ y $f^{(n+1)}(x)$ para $f(x) = x^n$.

85. Calcule un polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $p(0) = 3$, $p'(0) = 2$ y $p''(0) = 6$.

86. La posición en el instante t de una partícula que se mueve en línea recta está dada por la función $s(t)$. La primera derivada de $s(t)$ se denomina velocidad, y se denomina $v(t)$. Es decir, la velocidad corresponde a la velocidad de variación de la posición. La velocidad de variación de la velocidad se denomina **aceleración**, y se denomina $a(t)$. Es decir,

$$\frac{d}{dt}v(t) = a(t)$$

Dado que $v(t) = s'(t)$, se deduce que

$$\frac{d^2}{dt^2}s(t) = a(t)$$

Calcule la velocidad y la aceleración en el instante $t = 1$ para las siguientes funciones de posición.

(a) $s(t) = t^2 - 3t$

(b) $s(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

(c) $s(t) = t^4 - 2t$

87. Despreciando la resistencia del aire, la altura h (en metros) de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba desde tierra con una velocidad inicial v_0 se expresa como

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

siendo $g = 9.81$ m/s^2 la constante gravitatoria de la Tierra y t el tiempo (en segundos) transcurrido desde que se lanza el objeto.

(a) Calcule la velocidad y la aceleración del objeto.

(b) Calcule el instante en el que la velocidad es igual a 0. ¿En qué dirección está viajando el objeto justo antes de este instante y en qué dirección justo después de este instante?

4.5 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para calcular las derivadas del seno y el coseno se necesitarán los límites trigonométricos calculados en la Sección 3.4.

Teorema Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son derivables para todo x, y

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

Un dibujo de las derivadas de cada una de las funciones trigonométricas basado en la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente confirma estas reglas (*véanse* las Figuras 4.27 y 4.28).

Demostración Se demostrará la primera fórmula. La demostración similar de la segunda fórmula se considerará en el Problema 61. Se necesita la igualdad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Utilizando la definición formal de derivada se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &\lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\,\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\,\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]\end{aligned}$$

En la Sección 3.4 se demostró que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

Por tanto se pueden aplicar las reglas básicas de los límites y obtener

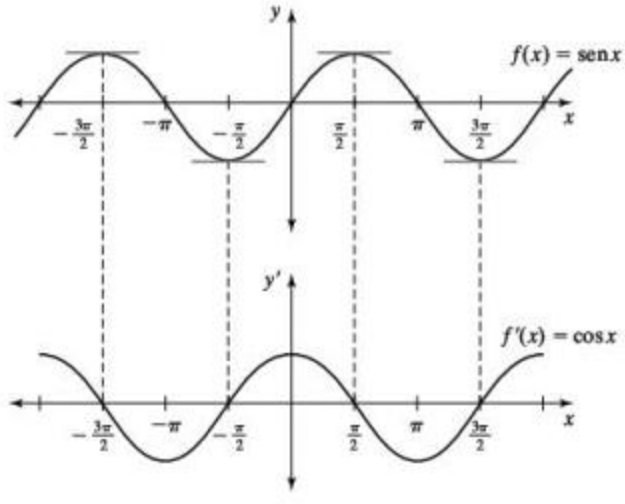
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} \\ &= (\operatorname{sen} x(0) + (\cos x)(1) = \cos x\end{aligned}$$

■

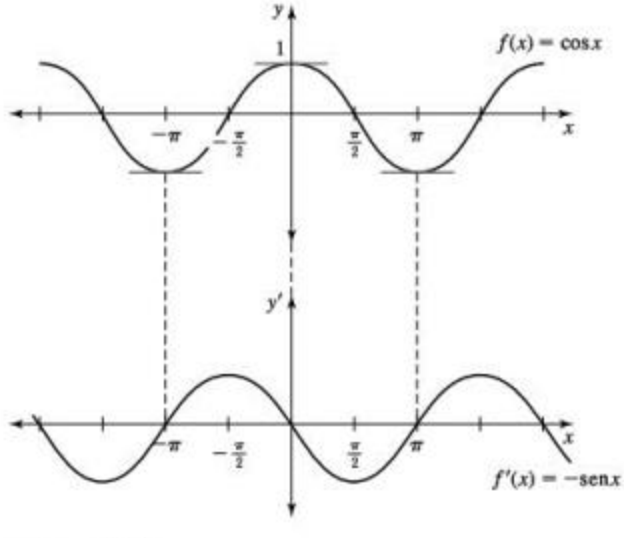
Ejemplo 1 Calcule la derivada de $f(x) = -4\operatorname{sen} x + \cos\frac{\pi}{6}$.

Solución

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(-4\operatorname{sen} x + \cos\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -4\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \frac{d}{dx}\cos\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$



▲ **Figura 4.27**
La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada $f'(x) = \cos x$. La derivada $f'(x) = 0$ donde la recta tangente a $f(x)$ es horizontal



▲ **Figura 4.28**
La función $f(x) = \cos x$ y su derivada $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. La derivada $f'(x) = 0$ donde la recta tangente a $f(x)$ es horizontal

El primer término es una función trigonométrica y el segundo término es una constante (concretamente, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$). Derivando cada término se obtiene

$$= -4(\cos x) + 0$$

$$= -4\cos x$$ ◀

Ejemplo 2 Calcule la derivada de $y = \cos(x^2 + 1)$.

Solución

Sea $u = g(x) = x^2 + 1$ y $f(u) = \cos u$. Entonces $y = f[g(x)]$. Utilizando la regla de la cadena, se obtiene

$$y' = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\cos u)\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (-\operatorname{sen} u)(2x)$$
$$= -[\operatorname{sen}(x^2 + 1)]2x = -2x \operatorname{sen}(x^2 + 1)$$ ◀

Ejemplo 3 Calcule la derivada de $y = x^2 \operatorname{sen}(3x) - \cos(5x)$.

Solución

Para el primer término se utilizará la regla del producto. Además, se necesitará la regla de la cadena para $\operatorname{sen}(3x)$ y $\cos(5x)$.

$$y' = \frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(3x) - \cos(5x)]$$
$$= \frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(3x)] - \frac{d}{dx}\cos(5x)$$
$$= \left(\frac{d}{dx}x^2\right)\operatorname{sen}(3x) + x^2\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(3x) - \frac{d}{dx}\cos(5x)$$
$$= 2x \operatorname{sen}(3x) + x^2 3\cos(3x) - 5(-\operatorname{sen}(5x))$$
$$= 2x \operatorname{sen}(3x) + 3x^2\cos(3x) + 5\operatorname{sen}(5x)$$ ◀

Las derivadas de las otras funciones trigonométricas se pueden calcular utilizando las siguientes relaciones:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Por ejemplo, para calcular la derivada de la tangente, se utiliza la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$
$$= \frac{(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x)\cos x - \operatorname{sen} x(\frac{d}{dx}\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

En el penúltimo paso se ha utilizado la igualdad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

Las otras derivadas se pueden obtener de forma similar, y se consideran en los Problemas 62-64.

En el recuadro siguiente se resumen las derivadas de todas las funciones trigonométricas.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

Ejemplo 4 Compare las derivadas de (a) $\tan x^2$ y (b) $\tan^2 x$.

Solución

(a) Si $y = \tan x^2 = \tan (x)^2$, utilizando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan (x^2) = (\sec^2 (x^2))(2x) = 2x\sec^2 (x^2)$$

(b) Si $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$, utilizando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x)^2 = 2(\tan x)\frac{d}{dx}\tan x = 2\tan x \sec^2 x$$

Las dos derivadas son claramente diferentes, y conviene observar de nuevo las funciones $\tan x^2$ y $\tan^2 x$ para entender cuál es la función interna y cuál es la función externa en cada caso. ◀

Ejemplo 5 **Aplicación repetida de la regla de la cadena** Calcule la derivada de $f(x) = \sec\sqrt{x^2 + 1}$.

Solución

Se trata de una función compuesta. La función interna es $\sqrt{x^2 + 1}$ y la función externa es $\sec x$. Aplicando una vez la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\sec\sqrt{x^2 + 1} = \sec\sqrt{x^2 + 1}\tan\sqrt{x^2 + 1}\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + 1}$$

Para evaluar $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + 1}$, se necesita aplicar la regla de la cadena una segunda vez:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Combinando los dos pasos, el resultado es

$$\frac{df}{dx} = (\sec\sqrt{x^2 + 1})(\tan\sqrt{x^2 + 1})\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

La función $f(x)$ puede verse como la composición de tres funciones. La función más interna es $u = g(x) = x^2 + 1$, la función intermedia es $v = h(u) = \sqrt{u}$, y la función más externa es $f(v) = \sec v$. Para calcular la derivada se aplica la regla de la cadena dos veces en la forma

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$$ ◀

4.5.1. Problemas

En los Problemas 1-58, calcule la derivada con respecto a la variable independiente.

1. $f(x) = 2\operatorname{sen} x - \cos x$
2. $f(x) = 3\cos x - 2\sec x$
3. $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 5\cos x - 2\sec x$
4. $f(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x$
5. $f(x) = \tan x - \cot x$
6. $f(x) = \sec x - \csc x$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$
8. $f(x) = \cos(-5x)$
9. $f(x) = 2\operatorname{sen}(3x + 1)$
10. $f(x) = -3\cos(1 - 2x)$
11. $f(x) = \tan(4x)$
12. $f(x) = \tan(2 - 3x)$
13. $f(x) = 2\sec(1 + 2x)$
14. $f(x) = -3\sec(3 - 5x)$
15. $f(x) = 3\operatorname{sen}(x^2)$
16. $f(x) = 2\operatorname{sen}(x^3 - 3x)$
17. $f(x) = \sec(x^2 - 3)$
18. $f(x) = \cos^2(x^2 - 1)$
19. $f(x) = 3\operatorname{sen}^2 x$
20. $f(x) = -\operatorname{sen}^2(2x - 1)$
21. $f(x) = 4\cos(x^2)$
22. $f(x) = -5\cos(2 - x^3)$
23. $f(x) = 4\cos^2 x$
24. $f(x) = -3\cos^2(3x^2 - 1)$
25. $f(x) = 2\tan(1 - x^2)$
26. $f(x) = -\tan(3x^3 - 4x)$
27. $f(x) = -2\tan^3(3x - 1)$
28. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$
29. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(2x^2 - 1)}$
30. $g(s) = (\cos^2 s - 3s^2)^2$
31. $g(s) = \sqrt{\cos s}$
32. $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(3t)}{\cos(5t)}$
33. $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2t) + 1}{\cos(6t) - 1}$
34. $f(x) = \dfrac{\cot(2x)}{\tan(4x)}$
35. $f(x) = \dfrac{\sec(x^2 - 1)}{\csc(x^2 + 1)}$
36. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
37. $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 1)\cos(3x + 1)$
38. $f(x) = \tan x \cot x$
39. $f(x) = \tan(3x^2 - 1)\cot(3x^2 + 1)$
40. $f(x) = \sec x \cos x$
41. $f(x) = \operatorname{sen} x \sec x$
42. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
43. $f(x) = \dfrac{1}{\sec x + \tan x}$
44. $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(3x)}$
45. $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(3x^2 - 1)}$
46. $g(x) = \dfrac{1}{\csc(5x)}$
47. $g(x) = \dfrac{1}{\csc(1 - 5x^2)}$
48. $h(x) = \cot(3x)\csc(3x)$
49. $h(x) = \dfrac{3}{\tan(2x) - x}$
50. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} t^2}}$
51. $h(s) = \operatorname{sen}^2 s + \cos^2 s$
52. $f(x) = (2x^3 - x)\cos(1 - x^2)$
53. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + x^2}$
54. $f(x) = \frac{1 + \cos(3x)}{2x^3 - x}$
55. $f(x) = \tan \frac{1}{x}$
56. $f(x) = \sec \frac{1}{1 + x}$
57. $f(x) = \frac{\sec x^2}{\sec^2 x}$
58. $f(x) = \frac{\csc(3 - x^2)}{1 - x^2}$
59. Calcule los puntos de la curva $y = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}x)$ que tienen tangente horizontal.
60. Calcule los puntos de la curva $y = \cos^2 x$ que tienen tangente horizontal.
61. Utilice la igualdad
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
y la definición de derivada para demostrar que
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$
62. Utilice la regla del cociente para demostrar que
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$
(*Sugerencia*: escriba $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.)
63. Utilice la regla de la cadena para demostrar que
$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$
[*Sugerencia*: escriba $\sec x = (\cos x)^{-1}$.]
64. Utilice la regla de la cadena para demostrar que
$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$
[*Sugerencia*: escriba $\csc x = (\operatorname{sen} x)^{-1}$.]

65. Calcule la derivada de
$$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 1}$$
66. Calcule la derivada de
$$f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 1}$$
67. Calcule la derivada de
$$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{3x^3 + 3x}$$
68. Calcule la derivada de
$$f(x) = \cos\sqrt{1 - 4x^4}$$
69. Calcule la derivada de
$$f(x) = \operatorname{sen}^2(x^2 - 1)$$
70. Calcule la derivada de
$$f(x) = \cos^2(2x^2 + 3)$$
71. Calcule la derivada de
$$f(x) = \tan^3(3x^3 - 3)$$
72. Calcule la derivada de
$$f(x) = \sec^2(2x^2 - 2)$$

73. Suponga que la concentración de nitrógeno en un lago muestra un comportamiento periódico. Es decir, si se denomina $c(t)$ a la concentración de nitrógeno en el instante t, entonces se supone que
$$c(t) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$
(a) Calcule
$$\frac{dc}{dt}$$
(b) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $c(t)$ y $\frac{dc}{dt}$ en el mismo sistema de coordenadas.

(c) Observando las gráficas de (b), responda a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuándo alcanza $c(t)$ un máximo, y cuál es entonces el valor de $\frac{dc}{dt}$?

(ii) Cuando es $\frac{dc}{dt}$ positiva, ¿es $c(t)$ creciente o decreciente?

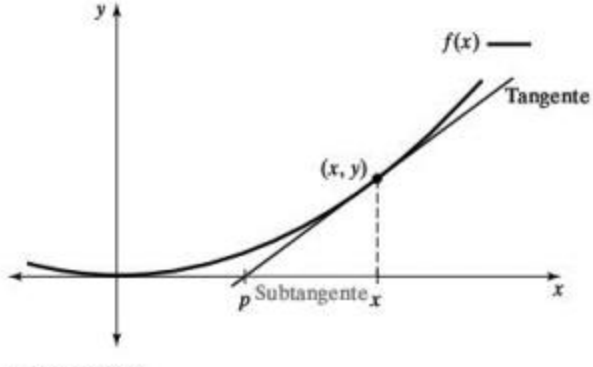
(iii) ¿Qué se puede decir de $c(t)$ cuando $dc/dt = 0$?

4.6 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Pierre de Fermat (1601-1665) desarrolló un método para obtener la recta tangente a una curva en un punto dado (x, y) construyendo la **subtangente**. La subtangente se define como el segmento de recta entre el punto donde la recta tangente corta al eje x y el punto $(x, 0)$ (*véase* la Figura 4.29).

El procedimiento de Fermat esencialmente buscaba la pendiente de la recta tangente considerando la recta secante que pasa por (x, y) y un punto cercano de la gráfica de $y = f(x)$. Tras calcular la pendiente de la recta secante, Fermat igualó los dos puntos utilizados para calcular la pendiente de la recta secante, obteniendo así la pendiente de la recta tangente. Esto recuerda mucho a la definición de derivada que se utiliza hoy y, de hecho, es la misma idea. Sin embargo, Fermat no desarrolló ni formalizó un marco general para el cálculo diferencial. Esto fue realizado por Leibniz y Newton.

Utilizando la definición de derivada, se puede relacionar la subtangente con la pendiente de la tangente en el correspondiente punto de la gráfica de $y = f(x)$. Supongamos que la recta tangente en (x, y), siendo $y = f(x)$, corta al eje x en el punto $(p(x), 0)$. La posición de $p(x)$ depende de x. Sea $c(x) = x - p(x)$. Esta es la ecuación de las tangente. En la Figura 4.29 puede verse que la pendiente de la



▲ **Figura 4.29**
El problema de la subtangente

recta tangente en (x, y) está dada por $y/c(x)$. Como la pendiente de la recta tangente en (x, y) es la derivada de la función de la curva evaluada en x [es decir, $f'(x)$], se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{c(x)}$$

Un problema natural (que fue planteado a Descartes por Debaune en 1639) es calcular una curva cuya subtangente sea una constante dada. Es decir, se desea obtener la función $y = f(x)$ que cumpla

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{c}$$

siendo c una constante distinta de 0 (este problema fue resuelto por Leibniz en 1684, cuando publicó por primera vez su cálculo diferencial). Expresado en palabras, estamos buscando una función $y = f(x)$ cuya derivada sea proporcional a la propia función. Como veremos seguidamente, las funciones exponenciales son la solución de este problema.

Recuerde de la Sección 1.2 que la función f es una función exponencial de base a si

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

siendo a una constante positiva distinta de 1 (*véase* la Figura 4.30). Se puede utilizar la definición formal de derivada para calcular $f'(x)$, concretamente,

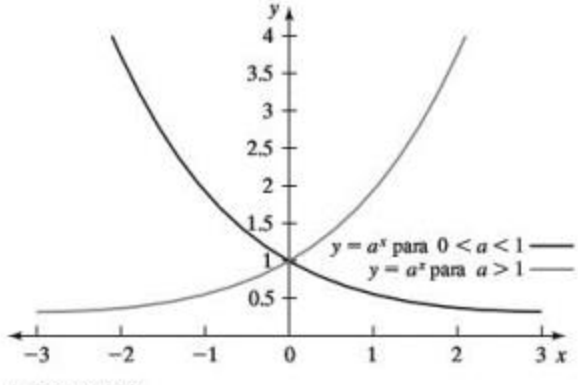
$$f'(x) = \frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

En el paso final se pudo extraer el término a^x del límite ya que dicho término no depende de h. Por tanto, nos queda estudiar

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Nótese en primer lugar que el límite no depende de h. Si se supone que este límite existe, se deduce que es igual a $f'(0)$. Para ver el motivo, se puede utilizar la definición formal de derivada para calcular $f'(0)$ (se puede demostrar que este límite existe, pero esta demostración se sale de los objetivos de este curso).



▲ **Figura 4.30**
La función $y = a^x$

De los cálculos anteriores se deduce que si $f'(0)$ existe, entonces $f'(x)$ existe y

$$f'(x) = a^x f'(0)$$

Esto demuestra que la función exponencial es una función cuya derivada es proporcional a la propia función, suponiendo que $f'(0)$ existe [la constante de proporcionalidad es $f'(0)$]. Es decir, las funciones exponenciales resuelven el problema de la subtangente mencionado anteriormente. Se considera aparte el caso en el que el valor de la base a es tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

es igual a 1. Esta base se denomina e. El número e se define por tanto como

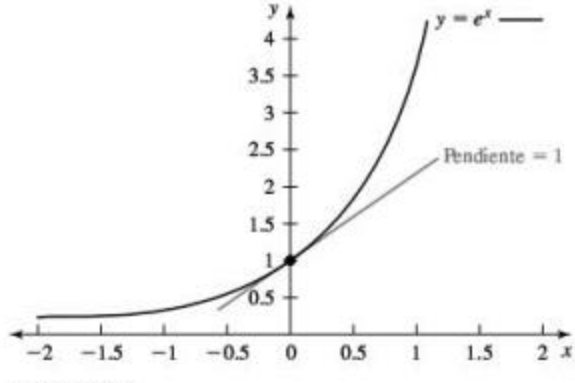
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{4.7}$$

Y la derivada de $f(x) = e^x$ es

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \tag{4.8}$$

La Figura 4.31 muestra la gráfica de $f(x) = e^x$. El dominio de esta función es $\mathbf{R}$ y su recorrido es el intervalo abierto $(0, \infty)$ (en particular, $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$). La denominación de e de la base de la función exponencial para la que se cumplan las Ecuaciones (4.7) y (4.8) no es casual. Es de hecho la base exponencial natural que se presentó en la Sección 1.2. Aunque no se puede demostrar esto aquí, la siguiente tabla apoya el argumento. Siendo $e = 2.71828...$, se tiene que

x	0.1	0.001	0.001	0.0001
$\frac{e^h - 1}{h}$	1.0517	1.0050	1.00050	1.000050



▲ **Figura 4.31**
La función $y = e^x$. La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es $m = 1$

Recuérdese también existe una notación alternativa para e^x, concretamente exp[x]. Utilizando la igualdad

$$a^x = \exp[\ln a^x]$$

Y el hecho de que $\ln a^x = x \ln a$, se puede obtener la derivada de a^x con la ayuda de la regla de la cadena, concretamente,

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} \exp[\ln a^x] = \frac{d}{dx} \exp[x \ln a]$$
$$= \exp[x \ln a] \ln a = (\ln a) a^x$$

Es decir, se cumple

$$\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x \tag{4.9}$$

lo que permite obtener la siguiente igualdad:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a \tag{4.10}$$

Ejemplo 1 Calcule la derivada de $f(x) = e^{x^2/2}$.

Solución

Se utiliza la regla de la cadena:

$$f'(x) = e^{-x^2/2} \left(-\frac{2x}{2} \right) = -xe^{-x^2/2}$$ ◀

Ejemplo 2 Calcule la derivada de $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$.

Solución

Se puede utilizar la Ecuación (4.9) y la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx} 3^{\sqrt{x}} = (\ln 3) 3^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Sin embargo, como toda función exponencial se puede escribir utilizando la base e, y la regla de derivación para e^x es particularmente simple ($\frac{d}{dx} e^x = e^x$), frecuentemente es más fácil volver a escribir la función exponencial utilizando e y después derivar. Es decir, se escribe

$$3^{\sqrt{x}} = \exp[\ln 3^{\sqrt{x}}] = \exp[\sqrt{x} \ln 3]$$

Entonces, utilizando la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{d}{dx} \exp[\sqrt{x} \ln 3] = \frac{\ln 3}{2\sqrt{x}} \exp[\sqrt{x} \ln 3] = \frac{\ln 3}{2\sqrt{x}} 3^{\sqrt{x}}$$ ◀

Como es frecuente tener que derivar funciones de la forma $y = e^{g(x)}$, se presenta como una regla separada. Utilizando la regla de la cadena, se cumple que

$$\frac{d}{dx} e^{g(x)} = g'(x) e^{g(x)} \tag{4.11}$$

Ejemplo 3 Calcule la derivada de $f(x) = \exp[\operatorname{sen}\sqrt{x}]$.

Solución

Sea $g(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$. Para derivar $g(x)$, debe aplicarse la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}g(x) = (\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ahora se puede derivar utilizando la Ecuación (4.11).

$$\frac{d}{dx}f(x) = (\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\exp[\operatorname{sen}\sqrt{x}]$$ ◀

Veamos un ejemplo que muestra cómo se usa (4.10).

Ejemplo 4 Calcule

$$\lim_{h\to 0}\frac{3^{2h}-1}{h}$$

Solución

Se efectúa la sustitución $l = 2h$, y teniendo en cuenta que $l \to 0$ cuando $h \to 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{3^{2h}-1}{h} = \lim_{l\to 0}\frac{3^{l}-1}{l/2}$$

$$= 2\lim_{l\to 0}\frac{3^{l}-1}{l} = 2\ln 3$$

La función exponencial de base e aparece en muchos problemas científicos. El siguiente ejemplo considera la desintegración radioactiva.

Ejemplo 5 **(Desintegración radioactiva)** Calcule la derivada de la función de desintegración radioactiva, que modela la cantidad de material restante tras t unidades de tiempo (*véase* el Ejemplo 10 de la Subsección 1.2.5):

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0$$

siendo W_0 la cantidad de material en el instante cero y λ la constante de desintegración radioactiva. Demuestre que $W(t)$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W(t)$$

Solución

Para calcular la derivada de $W(t)$ se utiliza la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}W(t) = \underbrace{W_0 e^{-\lambda t}}_{W(t)}(-\lambda)$$

Es decir,

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W(t)$$

Expresándolo en palabras, la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de material restante. Esto debería recordarnos el problema de la subtangente. Aquí, se desea obtener una función cuya derivada sea proporcional a la propia función. Esta es exactamente la situación que tenemos en este ejemplo: la derivada de $W(t)$ es proporcional a $W(t)$. ◀

Ejemplo 6 **Crecimiento exponencial** Calcule la velocidad de crecimiento per cápita de una población cuyo tamaño en el instante t, $N(t)$, sigue la ecuación de crecimiento exponencial

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

siendo $N(0)$ el tamaño de la población en el instante 0 y r una constante.

Solución

Se calcula primero la derivada de $N(t)$.

$$\frac{dN}{dt} = N(0)re^{rt}$$

Como $N(0)e^{rt} = N(t)$, se puede escribir

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

La velocidad de crecimiento per cápita de esta población con crecimiento exponencial es entonces

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$$ ◀

4.6.1. Problemas

Derive las funciones de los Problemas 1-52, con respecto a la variable independiente.

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{-4x}$
3. $f(x) = 4e^{1-3x}$
4. $f(x) = 3e^{2-5x}$
5. $f(x) = e^{-2x^2+3x-1}$
6. $f(x) = e^{4x^2-2x+1}$
7. $f(x) = e^{7x^3-\sqrt{x}+3}$
8. $f(x) = e^{-x^2-\sqrt{2x+1}}$
9. $f(x) = xe^x$
10. $f(x) = 2xe^{3x}$
11. $f(x) = x^2e^{-x}$
12. $f(x) = (3x^2 - 1)e^{1-x^2}$
13. $f(x) = \frac{1+e^x}{1+x^2}$
14. $f(x) = \frac{x-e^{-x}}{1+xe^{-x}}$
15. $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2+e^x}$
16. $f(x) = \frac{x}{e^x+e^{-x}}$
17. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$
18. $f(x) = e^{\cos x}$
19. $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x^2-1)}$
20. $f(x) = e^{\cos(1-2x^3)}$
21. $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$
22. $f(x) = \cos(e^x)$
23. $f(x) = \operatorname{sen}(e^{2x} + x)$
24. $f(x) = \cos(3x - e^{x^2-1})$
25. $f(x) = \exp[x - \operatorname{sen} x]$
26. $f(x) = \exp[x^2 - 2\cos x]$
27. $g(x) = \exp[\sec s^2]$
28. $f(x) = \exp[\tan s^3]$
29. $f(x) = e^{x \operatorname{sen} x}$
30. $f(x) = e^{1-x\cos x}$
31. $f(x) = -3e^{x^2+\tan x}$
32. $f(x) = 2e^{1-x\sec(3x)}$
33. $f(x) = 2^x$
34. $f(x) = 3^x$
35. $f(x) = 2^{x+1}$
36. $f(x) = 3^{x-1}$
37. $f(x) = 5^{2x-1}$
38. $f(x) = 3^{1-3x}$
39. $f(x) = 2^{x^2+1}$
40. $f(x) = 3^{x^3-1}$
41. $h(t) = 2^{t^2-1}$
42. $h(t) = 4^{2t^3-t}$
43. $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$
44. $f(x) = 3^{\sqrt{x+1}}$
45. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-1}}$
46. $f(x) = 4^{\sqrt{1-2x^3}}$
47. $h(t) = 5^{\sqrt{t}}$
48. $h(t) = 6^{\sqrt{6t^6-6}}$
49. $g(x) = 2^{2\cos x}$
50. $g(r) = 2^{-3\operatorname{sen} r}$
51. $g(r) = 3r^{1/5}$
52. $g(r) = 4r^{1/4}$

Calcule los límites en los Problemas 53-56.

53. $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{2h}-1}{h}$

54. $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{5h}-1}{3h}$

55. $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{h}-1}{\sqrt{h}}$

56. $\lim_{h\to 0} \dfrac{2^{h}-1}{h}$

57. Calcule la longitud de la subtangente al punto (1, 2) para la curva $y = 2^x$.

58. Calcule la longitud de la subtangente al punto $(2, e^4)$ para la curva $y = \exp[x^2]$.

59. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es

$$N(t) = e^{2t},\ t \geqslant 0$$

(a) ¿Cuál es el tamaño de la población en el instante 0?

(b) Demuestre que

$$\frac{dN}{dt} = 2N$$

60. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es

$$N(t) = N_0 e^{rt},\ t \geqslant 0$$

siendo N_0 una constante positiva y r un número real.

(a) ¿Cuál es el tamaño de la población en el instante 0?

(b) Demuestre que

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

61. Suponga que una colonia de bacterias crece de forma que en el instante t el tamaño de la población es

$$N(t) = N(0)2^t$$

siendo $N(0)$ el tamaño de la población en el instante 0. Calcule la velocidad de crecimiento; es decir, calcule dN/dt y exprese su solución en función de $N(t)$. Demuestre que la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de dicha población.

62. Suponga que una colonia de bacterias crece de forma que en el instante t el tamaño de la población es

$$N(t) = N(0)2^t$$

siendo $N(0)$ el tamaño de la población en el instante 0. Calcule la velocidad de crecimiento per cápita.

63. (a) Calcule la derivada de la curva de crecimiento logístico (*véase* el Ejemplo 3 de la Sección 3.3)

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right)e^{-rt}}$$

siendo r y K constantes positivas y $N(0)$ el tamaño de la población en el instante 0.

(b) Demuestre que $N(t)$ cumple la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

[Sugerencia: utilice la función $N(t)$ dada en el apartado (a) en el miembro derecho de la ecuación anterior y simplifique hasta obtener la derivada de $N(t)$ que se calculó en el apartado (a)].

(c) Dibuje la velocidad de crecimiento per cápita, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, en función de N, y note que decrece al aumentar el tamaño de la población.

64. El modelo siguiente se utiliza en la literatura pesquera para describir la reproducción de peces en función del tamaño del stock de padres. Si denominamos R al número de peces nuevos y P al tamaño del stock de padres, entonces

$$R(P) = \alpha P e^{-\beta P},\quad P \geqslant 0$$

siendo α y β constantes positivas.

(a) Dibuje la gráfica de la función $R(P)$ cuando $\beta = 1$ y $\alpha = 2$.

(b) Derive $R(P)$ con respecto a P.

(c) Calcule todos los puntos de la curva que tengan una tangente horizontal.

65. El crecimiento de los peces se puede modelar mediante la función de crecimiento de von Bertalanffy

$$L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-kx}$$

siendo x la edad del pez y k, L_∞ y L_0 constantes positivas.

(a) Sea $L_0 = 1$ y $L_\infty = 10$. Dibuje $L(x)$ para $k = 1.0$ y $k = 0.1$.

(b) Interprete L_0 y L_∞.

(c) Si se comparan las gráficas para $k = 0.1$ y $k = 1.0$, ¿en cuál de ellas el pez alcanza $L = 5$ más rápidamente?

(d) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}L(x) = k(L_\infty - L(x))$$

Es decir, $dL/dx \propto L_\infty - L$. ¿Qué indica esto acerca de cómo cambia la velocidad de crecimiento con la edad?

(e) La constante k es la constante de proporcionalidad en el Apartado (d) ¿Qué indica el valor de k sobre la velocidad de crecimiento del pez?

66. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t (medido en días). Suponga que la constante de desintegración radioactiva del material es de 0.2/día. Obtenga la ecuación diferencial de la función de desintegración radioactiva $W(t)$.

67. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t (medido en días). Suponga que la constante de desintegración radioactiva del material es de 4/día. Obtenga la ecuación diferencial de la función de desintegración radioactiva $W(t)$.

68. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t (medido en días). Suponga que la vida media del material es de 3 días. Obtenga la ecuación diferencial de la función de desintegración radioactiva $W(t)$.

69. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t (medido en días). Suponga que la vida media del material es de 5 días. Obtenga la ecuación diferencial de la función de desintegración radioactiva $W(t)$.

70. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t. Suponga que $W(0) = 15$ y que

$$\frac{dW}{dt} = -2W(t)$$

(a) ¿Cuánto material queda en el instante $t = 2$?

(b) ¿Cuál es la vida media de este material?

71. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t. Suponga que $W(0) = 6$ y que

$$\frac{dW}{dt} = -3W(t)$$

(a) ¿Cuánto material queda en el instante $t = 4$?

(b) ¿Cuál es la vida media de este material?

72. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t. Suponga que $W(0) = 10$ y que $W(1) = 8$.

(a) Calcule la ecuación diferencial que describe esta situación.

(b) ¿Cuánto material queda en el instante $t = 5$?

(c) ¿Cuál es la vida media de este material?

73. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo que queda después de un tiempo t. Suponga que $W(0) = 5$ y que $W(1) = 2$.

(a) Calcule la ecuación diferencial que describe esta situación.

(b) ¿Cuánto material queda en el instante $t = 3$?

(c) ¿Cuál es la vida media de este material?

4.7 DERIVADAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Recordamos que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Por tanto, para obtener la derivada de la función logarítmica, es necesario aprender primero a calcular la derivada de una función inversa.

4.7.1 Derivada de la función inversa

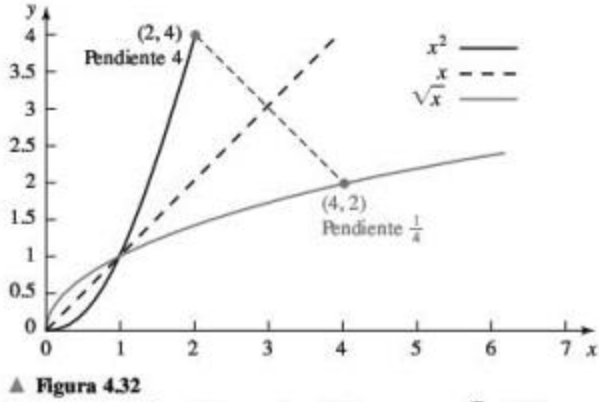
Comenzaremos con un ejemplo (Figura 4.32). Sea $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$. La función inversa de f se calculó en la Subsección 1.2.6. Debe notarse en primer lugar que $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$, es inyectiva (para comprobarlo puede utilizarse la prueba de la recta horizontal). Por tanto, se puede definir su inversa. Se repiten a continuación los pasos que deben seguirse para obtener una función inversa [recuérdese que la gráfica de la función inversa se obtiene reflejando $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$].

1. Se escribe $y = f(x)$:
$$y = x^2$$
2. Se despeja x:
$$x = \sqrt{y}$$
3. Se intercambian x e y:
$$y = \sqrt{x}$$

Como el recorrido de $f(x)$, que es el intervalo $[0, \infty)$, se convierte en el dominio de la función inversa, se obtiene

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{para} \quad x \geqslant 0$$

Ya conocemos la derivada de $\sqrt{x}$, concretamente, $1/(2\sqrt{x})$. Intentaremos ahora calcular la derivada de una forma diferente que se pueda generalizar para obtener



▲ **Figura 4.32**
La función $y = x^2$, $x \geqslant 0$, y su función inversa $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$

una fórmula de cálculo de derivadas de funciones inversas. Sea $g(x) = f^{-1}(x)$. Entonces

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (\sqrt{x})^2 = x, \quad x \geqslant 0$$

Por tanto, las derivadas de $(\sqrt{x})^2$ y de x deben coincidir. Aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})^2 = 2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

Como $\frac{d}{dx} = 1$, resulta

$$2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = 1$$

o, para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Para preparar la forma en que se relacionan geométricamente las derivadas de la función y de su función inversa, obsérvese la Figura 4.32, donde la pendiente de $f(x) = x^2$ en el punto (2, 4) es $m = 4$, y la pendiente de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2) es $m = 1/4$. Esta relación inversa de las pendientes en los puntos relacionados la encontraremos también en el caso general.

Los pasos seguidos para calcular la derivada de $\sqrt{x}$ se pueden utilizar para obtener una fórmula general de la derivada de la función inversa. Si $g(x)$ es la función inversa de $f(x)$, entonces $f[g(x)] = x$. Siguiendo los mismos pasos, para el caso general $f[g(x)] = x$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$$

Como $\frac{d}{dx}x = 1$, resulta

$$f'[g(x)]g'(x) = 1$$

Si $f'[g(x)] \neq 0$, se puede dividir por $f'[g(x)]$, obteniéndose

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$$

Como $g(x) = f^{-1}(x)$ y $g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}f^{-1}(x)$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \tag{4.12}$$

Esta relación se ilustra en la Figura 4.33.

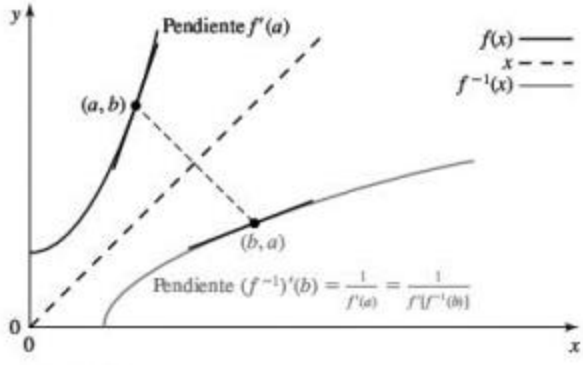
Volvamos al ejemplo, $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$ donde $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, para ilustrar cómo se usa esta fórmula. Ahora, $f'(x) = 2x$. Se necesita evaluar

$$f'[f^{-1}(x)] = f'[\sqrt{x}] = 2\sqrt{x}$$

Para aplicar la fórmula, es necesario suponer que $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$. Entonces

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{para } x > 0$$

Observando las gráficas de $y = x^2$ y de $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ es fácil ver por qué $f^{-1}(x)$ no es derivable en $x = 0$ [recuérdese que la gráfica de la función inversa se obtuvo



▲ **Figura 4.33**
Las gráficas de $y = f(x)$ y de su función inversa $y = f^{-1}(x)$ tienen pendientes inversas en los puntos (a, b) y (b, a)

reflejando $y = f(x)$ con respecto al eje $y = x$]. Si se dibuja la recta tangente a la curva $y = x^2$ en $x = 0$, puede verse que la tangente es horizontal, es decir, su pendiente es 0. Al reflejar la recta horizontal con respecto a $y = x$ se obtiene una recta vertical, para la que la pendiente no está definida (Figura 4.32).

La fórmula para calcular derivadas de funciones inversas toma una forma particularmente fácil de recordar utilizando la notación de Leibniz. Para verlo, nótese que (sin intercambiar x e y),

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

y por tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

Esta fórmula resalta la relación inversa. Ilustraremos esta fórmula utilizando el ejemplo

$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

para $x > 0$. Como $\frac{dy}{dx} = 2x$, se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Es decir,

$$\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

La respuesta está ahora expresada en función de y, ya que no se intercambiaron x e y al calcular la función inversa. Si lo hacemos, obtenemos de nuevo,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ejemplo 1 Sea

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{para } x \geqslant 0$$

Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(\frac{1}{3})$.

Solución

Para demostrar que existe $f^{-1}(x)$, se utiliza la prueba de la recta horizontal, lo que permite concluir que $f(x)$ es inyectiva en todo su dominio, ya que cada recta horizontal corta a la gráfica de $f(x)$ como máximo en un punto (*véase* la Figura 4.34).

Se puede calcular la inversa de $f(x)$. De esta forma, dispondremos de dos métodos para calcular la derivada de la inversa. Concretamente, se puede calcular explícitamente la función inversa y después derivar el resultado, o se puede utilizar directamente la fórmula para calcular derivadas de funciones inversas. Empezaremos por esta última.

1. Para utilizar la Fórmula (4.12), es necesario calcular $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$; es decir, hay que obtener el valor de x para el que $f(x) = \frac{1}{3}$. Entonces,

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{3} \quad \text{implica} \quad 2x = 1 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Aplicando la Fórmula (4.12),

$$\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{f'[f^{-1}(\frac{1}{3})]} = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})}$$

Para obtener la derivada de $f(x)$ se puede utilizar la regla del cociente.

$$f'(x) = \frac{(1)(1+x) - (x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

En $x = 1/2$, $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1+1/2)^2} = \frac{4}{9}$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

2. Se puede calcular la función inversa. Sea $y = \frac{x}{1+x}$. Despejando x resulta

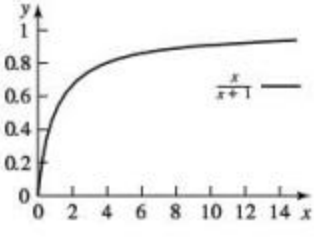
$$x = \frac{y}{1-y}$$

Intercambiando x e y,

$$y = \frac{x}{1-x}$$

Como el dominio de $f(x)$ es $[0, \infty)$, el recorrido de f es $[0, 1)$. El recorrido de f se convierte en el dominio de su inversa. Por tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{para } 0 \leqslant x < 1$$



◀ **Figura 4.34**
Gráfica de $f(x) = \frac{x}{1+x}$ para $x \geqslant 0$

Para calcular $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$ se utiliza la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{(1)(1-x) - (x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

y por tanto

$$\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}$$

que coincide con la respuesta de (1). ◀

No siempre se puede calcular explícitamente la inversa.

Ejemplo 1 Sea

$$f(x) = 2x + e^x \quad \text{para } x \in \mathbf{R}$$

Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(1)$.

Solución

En este caso, no es posible despejar x de $y = 2x + e^x$. Por tanto, para calcular la derivada de la función inversa en un punto concreto debe utilizarse (4.12). Aplicando esa ecuación

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(1) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]}$$

cuando $x = 1$. Es necesario calcular $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 + e^x$$

Como $f(0) = 1$, se deduce que $f^{-1}(1) = 0$ y por tanto

$$\frac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$ ◀

En el siguiente ejemplo, en que se utilizará de nuevo la Ecuación (4.12), se calcula la derivada de la inversa de una función trigonométrica.

Ejemplo 3 Sea $f(x) = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calcular $\frac{d}{dx} f^{-1}(1)$.

Solución

Como $f(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, se deduce que $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{3}$. Recordamos que $f'(x) = \sec^2 x$. Por tanto, tenemos

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(1) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sec^2(\frac{\pi}{4})}$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$ ◀

Si se define $f(x) = \tan x$ en el dominio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $f(x)$ es inyectiva, como puede verse observando la Figura 4.35 (prueba de la recta horizontal). El recorrido de $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$. No se pueden utilizar procedimientos algebraicos para resolver $y = \tan x$. La inversa de la función tangente tiene su propio nombre: se denomina $y = \arctan x$ (o $y = \tan^{-1} x$), y su dominio es $(-\infty, \infty)$. En el ejemplo siguiente, se calculará la derivada de $y = \arctan x$, que tendrá una expresión sorprendentemente simple.

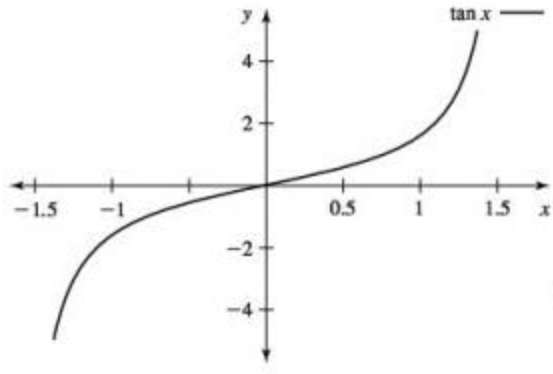


Figura 4.35
La función $f(x) = \tan x$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es inyectiva en su dominio

Ejemplo 4 Sea $f(x) = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calcular $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$.

Solución

Como se comentó anteriormente, $f^{-1}(x)$ existe porque $f(x)$ es inyectiva en su dominio. Recuérdese que

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

La inversa de la función tangente se denomina $\tan^{-1} x$ o $\arctan x$ (nótese que $\tan^{-1} x$ es distinto de $\frac{1}{\tan x}$. El superíndice «-1» indica función inversa). Sea $y = \arctan x$ (y por tanto $x = \tan y$). Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} + \frac{1}{\frac{d}{dy} \tan y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y$$

Se puede simplificar esta expresión utilizando el siguiente truco, que permite escribir $\cos^2 y$ en función de x. Como $x = \tan y$, tenemos que

$$x^2 = \tan^2 y = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

En el segundo paso se ha utilizado la igualdad $\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$, y en el tercer paso, se ha utilizado la igualdad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$. Despejando en la expresión anterior $\cos^2 y$ se obtiene

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$ ◀

El resultado del ejemplo anterior es importante, y se resume en el siguiente recuadro.

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$$

La derivada de la inversa de la función seno, $y = \operatorname{arcsen} x$, se considera en el Problema 22 de esta sección. Las derivadas de las restantes funciones trigonométricas inversas se encuentran en la tabla de derivadas que hay en la cubierta trasera interior de este libro.

4.7.2 Derivada de la función logarítmica

La función logarítmica de base a, $\log_a x$, se presentó como la inversa de la función exponencial a^x (Figuras 4.36 y 4.37). Por tanto, para calcular la derivada de $y = \log_a x$ se puede utilizar la fórmula de la derivada de la función inversa. Como

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

y $\ln a$ es una constante, es suficiente con calcular la derivada de $\ln x$ (Figura 4.38). Sea $f(x) = e^x$. Entonces $f'(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln x$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{\exp[\ln x]} = \frac{1}{x}$$

El siguiente recuadro resume el resultado

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{(\ln a)x}$$

Ejemplo 5 Calcule la derivada de $y = \ln(3x)$.

Solución

Se utiliza la regla de la cadena con $u = g(x) = 3x$ y $f(u) = \ln u$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}3 = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

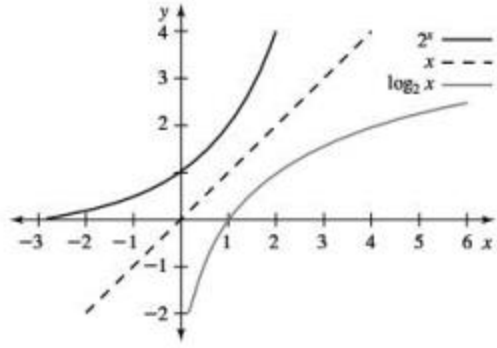


Figura 4.36
La función $y = \log_2 x$ como inversa de la función $y = 2^x$

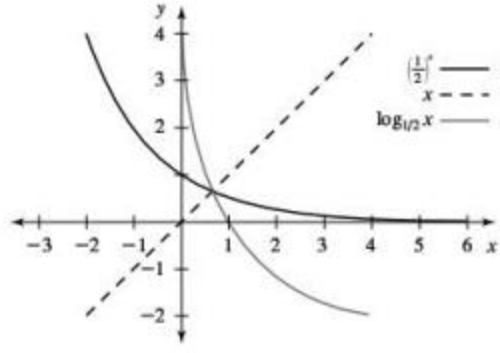


Figura 4.37
La función $y = \log_{1/2} x$ como inversa de la función $y = (\frac{1}{2})^x$

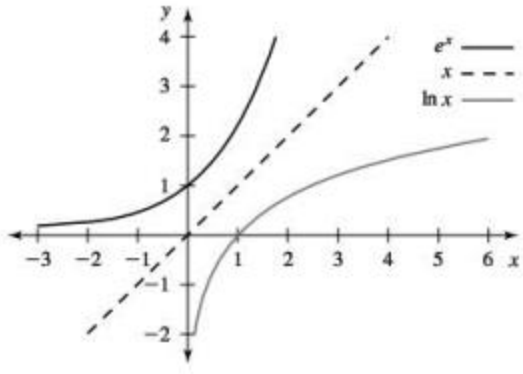


Figura 4.38
El logaritmo natural $y = \ln x$ como función inversa de la exponencial natural e^x

Si nos sorprende la desaparición del factor 3, debe notarse que

$$y = \ln(3x) = \ln 3 + \ln x$$

Como es una constante, su derivada es cero. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(\ln 3 + \ln x) = \frac{d}{dx}\ln 3 + \frac{d}{dx}\ln x = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 3 Calcule la derivada de $y = \ln x^2$, $x \neq 0$.

Solución

Se utiliza la regla de la cadena con $u = g(x) = x^2$ y $f(u) = \ln u$. Se obtiene

$$y' = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}2x = \frac{1}{x^2}2x = \frac{2}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

El ejemplo anterior es de la forma $y = \ln f(x)$. Estas funciones aparecerán frecuentemente. Para calcular su derivada es necesario utilizar la regla de la cadena, como se muestra en el siguiente recuadro:

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ejemplo 7 Derive $y = \ln(\operatorname{sen} x)$.

Solución

Esta función es también de la forma $y = \ln f(x)$, con $f(x) = \operatorname{sen} x$. Como

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$

se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$$

Ejemplo 8 Derive

$$y = \ln(\tan x + x)$$

Solución

La función es también de la forma $y = \ln f(x)$, con $f(x) = \tan x + x$. Entonces

$$y' = \frac{\sec^2 x + 1}{\tan x + x}$$

Ejemplo 9 Derive

$$y = \log(2x^3 - 1)$$

Solución

Esta función es también de la forma $y = \log f(x)$, con $f(x) = 2x^3 - 1$. El logaritmo es en base 10. Por tanto,

$$y' = \frac{1}{\ln 10}\,\frac{6x^2}{2x^3 - 1}$$ ◀

4.7.3 Derivación logarítmica

En 1695, Leibniz introdujo la derivación logarítmica, siguiendo una sugerencia de Johann Bernoulli para calcular derivadas de funciones de la forma $y = [f(x)]^x$. Bernoulli generalizó este método y publicó sus resultados dos años más tarde. La idea básica es tomar logaritmos en los dos miembros y después derivar utilizando la técnica de la derivación implícita.

Ejemplo 10 Calcule $\frac{dy}{dx}$ cuando $y = x^x$.

Solución

Se toman logaritmos en los dos miembros de la ecuación $y = x^x$.

$$\ln y = \ln x^x$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se puede simplificar el miembro derecho: $\ln x^x = x \ln x$. Ahora se pueden derivar los dos miembros con respecto a x. Como y es función de x, es necesario utilizar la regla de la cadena para derivar (tal como aprendimos en la sección de derivación implícita):

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[x \ln x]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y[\ln x + 1]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln x + 1)x^x$$ ◀

Si la función $y = x^x$ parece extraña, se puede escribir como

$$y = x^x = \exp[\ln x^x] = \exp[x \ln x]$$

es decir, $y = e^{x \ln x}$. Esta función se puede derivar sin emplear derivación logarítmica. Concretamente,

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln x}\frac{d}{dx}(x \ln x)$$

$$= e^{x \ln x}\left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{x \ln x}(\ln x + 1)$$

Cualquiera de los dos procedimientos produce la respuesta correcta.

Ejemplo 11 Calcule la derivada de $y = (\operatorname{sen} x)^x$.

Solución

Tomando logaritmos en los dos miembros de la ecuación y simplificando:

$$\ln y = x \ln(\operatorname{sen} x)$$

Derivando con respecto a x se obtiene

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[x \ln(\operatorname{sen} x)]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + x\frac{d}{dx}[\ln(\operatorname{sen} x)]$$

$$= \ln(\operatorname{sen} x) + x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \ln(\operatorname{sen} x) + x\cot x$$

Por tanto, tras multiplicar por y, y sustituir y por $(\operatorname{sen} x)^x$,

$$\frac{dy}{dx} = [\ln(\operatorname{sen} x) + x\cot x](\operatorname{sen} x)^x$$ ◀

El siguiente ejemplo servirá para convencernos de que la derivación logarítmica puede simplificar el cálculo de derivadas de expresiones complicadas.

Ejemplo 12 Derive

$$y = \frac{e^x x^{3/2}\sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4(3x-2)^3}$$

Solución

Sin el uso de la derivación logarítmica, la resolución sería muy complicada. Sin embargo, tomando logaritmos en los dos miembros, la expresión se simplifica. Es muy importante aplicar las propiedades de los logaritmos antes de derivar, ya que entonces se simplificarán las expresiones:

$$\ln y = \ln \frac{e^x x^{3/2}\sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4(3x-2)^3}$$

$$= \ln e^x + \ln x^{3/2} + \ln\sqrt{1+x} - \ln(x^2+3)^4 - \ln(3x-2)^3$$

$$= x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x) - 4\ln(x^2+3) - 3\ln(3x-2)$$

Esto ya no parece tan desalentador, y se pueden derivar los dos miembros:

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}\left[x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x) - 4\ln(x^2+3) - 3\ln(3x-2)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} - 4\frac{2x}{x^2+3} - 3\frac{3}{3x-2}$$

Finalmente, despejando dy/dx resulta

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{8x}{x^2+3} - \frac{9}{3x-2}\right)\frac{e^x x^{3/2}\sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4(3x-2)^3}$$ ◀

Este método se puede utilizar también para demostrar la forma general de la regla de la potencia (como se prometió en la Sección 4.3).

REGLA DE LA POTENCIA (FORMA GENERAL)

Sea $f(x) = x^r$, siendo r un número real cualquiera. Entonces

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$$

Demostración Sea $y = x^r$. Utilizando derivación logarítmica se obtiene

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[\ln x^r]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[r \ln x]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = r\frac{1}{x}$$

Despejando dy/dx resulta

$$\frac{dy}{dx} = r\frac{1}{x}y$$

$$= r\frac{1}{x}x^r$$

$$= rx^{r-1}$$

■

4.7.4. Problemas

(4.7.1)

En los problemas 1-6, calcule la inversa de las funciones, y derive las inversas de dos formas: (i) derivando directamente la función inversa y (ii) utilizando (4.12) *para calcular la derivada de la inversa.*

1. $f(x) = \sqrt{2x}, x \geq 0$

2. $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1$

3. $f(x) = 3x^2, x \geq 0$

4. $f(x) = x^2 - 2, x \geq 0$

5. $f(x) = 3 - 2x^3, x \geq 0$

6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}, x > 1$

En los problemas 7-23, utilice (4.12) *para calcular la derivada de la función inversa en el punto indicado.*

7. Sea

$$f(x) = 2x^2 - 2, \quad x \geq 0$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(0)$. [Note que $f(1) = 0$.]

8. Sea

$$f(x) = -x^2 + 3, \quad x \geq 0$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(-1)$. [Note que $f(2) = -1$.]

9. Sea

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \geq 0$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(2)$. [Note que $f(3) = 2$.]

10. Sea

$$f(x) = \sqrt{5 + x^3}, \quad x \geq 0$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(3)$. [Note que $f(2) = 3$.]

11. Sea

$$f(x) = x + e^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(1)$. [Note que $f(0) = 1$.]

12. Sea

$$f(x) = x + e^x, \quad x > 0$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(1 + e)$. [Note que $f(1) = 1 + e$.]

13. Sea

$$f(x) = x - \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(\pi)$. [Note que $f(\pi) = \pi$.]

14. Sea

$$f(x) = x - \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(-1)$. [Note que $f(0) = 1 + -1$.]

15. Sea

$$f(x) = x^2 + \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(0)$. [Note que $f(0) = 0$.]

16. Sea

$$f(x) = x^2 + \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Calcule $\frac{d}{dx}f^{-1}(\frac{\pi^2}{16} + 1)$. [Note que $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16} + 1$.]

17. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi/2$. Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(1/2)$.

18. Sea $f(x) = \tan x$, $0 < x < \pi/2$. Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(\sqrt{3})$.

19. Sea $f(x) = x^5 + x + 1$, $-1 < x < 1$. Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(1)$.

20. Sea $f(x) = e^{-x^2} + x$. Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(1)$.

21. Sea $f(x) = e^{-x^2/2} + 2x$. Calcule $\frac{d}{dx} f^{-1}(1)$.

22. Denomine $y = \operatorname{arcsen} x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, la función inversa de $y = \operatorname{sen} x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Demuestre que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

(4.7.2)

En los problemas 23-60, derive las funciones con respecto a la variable independiente. (Nótese que log indica logaritmo en base 10.)

23. $f(x) = \ln(x + 1)$

24. $f(x) = \ln(3x)$

25. $f(x) = \ln(1 - 2x)$

26. $f(x) = \ln(3 + 4x)$

27. $f(x) = \ln x^2$

28. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

29. $f(x) = \ln(x^3)$

30. $f(x) = \ln(x^3 - 1)$

31. $f(x) = (\ln x)^2$

32. $f(x) = (\ln x)^3$

33. $f(x) = (\ln x^2)^2$

34. $f(x) = (\ln(1 - x^2))^3$

35. $f(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1}$

36. $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - x}$

37. $f(x) = \ln\frac{x}{x + 1}$

38. $f(x) = \ln\frac{2x}{1 + x^3}$

39. $f(x) = \ln\frac{1 - x}{1 + 2x}$

40. $f(x) = \ln\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

41. $f(x) = \exp[x - \ln x]$

42. $g(s) = \exp[s^2 + \ln s]$

43. $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

44. $f(x) = \ln(\cos(1 - x))$

45. $f(x) = \ln(\tan x^2))$

46. $g(x) = \ln(\operatorname{sen}^2(3s))$

47. $f(x) = x \ln x$

48. $f(x) = x^2 \ln x^2$

49. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

50. $h(t) = \frac{\ln t}{1 + t^2}$

51. $h(t) = \operatorname{sen}(\ln(3t))$

52. $h(s) = \ln(\ln s)$

53. $f(x) = \ln|x^2 - 3|$

54. $f(x) = \log(2x - 1)$

55. $f(x) = \log(1 - x^2)$

56. $f(x) = \log(3x^2 - 5x)$

57. $f(x) = \log(x^3 - 3x)$

58. $f(x) = \log(\sqrt[3]{\tan x^2})$

59. $f(u) = \log_3(3 + u^4)$

60. $g(s) = \log_5(3^s - 2)$

61. Sea $f(x) = \ln x$. Sabemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Se utilizará este hecho y la definición de derivada, para demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(a) Utilice la definición de derivada para demostrar que

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h}$$

(b) Demuestre que (a) implica que

$$\ln[\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}] = 1$$

(c) Haga $h = \frac{1}{n}$ en (b) y haga $n \to \infty$. Demuestre que esto implica que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

62. Asuma que $f(x)$ es derivable con respecto a x. Demuestre que

$$\frac{d}{dx} \ln\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}$$

(4.7.3)

En los problemas 63-74, utilice la derivación logarítmica para calcular la primera derivada de las funciones dadas.

63. $f(x) = x^x$

64. $f(x) = x^{2x}$

65. $f(x) = (\ln x)^x$

66. $f(x) = (\ln x)^{3x}$

67. $f(x) = x^{\ln x}$

68. $f(x) = x^{2 \ln x}$

69. $f(x) = x^{1/x}$

70. $f(x) = x^{3/x}$

71. $y = x^{x^x}$

72. $y = (x^x)^x$

73. $y = x^{\cos x}$

74. $y = (\cos x)^x$

75. Derive

$$y = \frac{e^{2x}(9x - 2)^3}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)(3x^3 - 7)}}$$

76. Derive

$$y = \frac{e^{x-1} \operatorname{sen}^2 x}{(x^2 + 5)^{2x}}$$

4.8 APROXIMACIÓN Y LINEALIDAD LOCAL

Suponga que se desea calcular una aproximación a $\ln(1.05)$ sin utilizar una calculadora. El método para resolver este problema es útil en muchas otras aplicaciones. Obsérvese la gráfica de $f(x) = \ln x$ (Figura 4.39a). Sabemos que $\ln 1 = 0$ y puede verse que 1.05 está cerca de 1. De hecho está tan cerca que la curva que une (1, 0) con (1.05, ln 1.05) es casi una línea recta (Figura 4.39b). Esto sugiere que se podría aproximar la curva por una línea recta. Pero no cualquier línea recta: debe escogerse la tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x$ en $x = 1$ (Figura 4.39a). La ecuación de la recta tangente se puede obtener sin necesidad de calculadora. Concretamente, la pendiente de $f(x) = \ln x$ en $x = 1$ es $f'(1) = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$. Esto, junto con el punto (1, 0), permite obtener la recta tangente en $x = 1$:

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$
$$= 0 + (1)(x - 1) = x - 1$$

$L(x)$ se denomina **aproximación por recta tangente** o **linealización** de $f(x)$ en $x = 1$. Si se evalúa $L(x)$ en $x = 1.05$, se obtiene $L(1.05) = 1.05 - 1 = 0.05$, que es una buena aproximación a $\ln 1.05 = 0.048790...$ (En este caso se ha utilizado una calculadora para ver la cercanía de la aproximación a la solución exacta.)

Aproximación por recta tangente

Asuma que $y = f(x)$ es derivable en $x = a$. Entonces

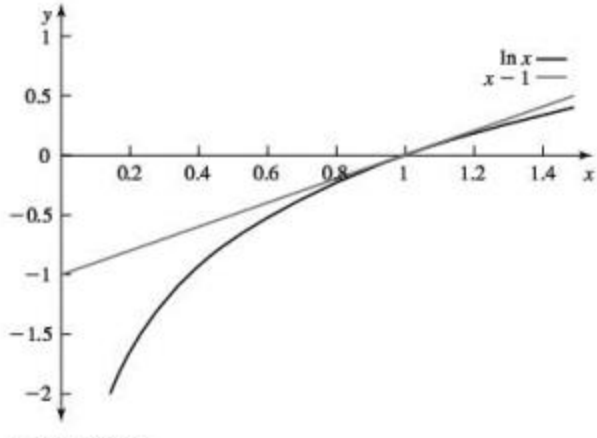
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es la **aproximación por recta tangente** o **linealización** de f en $x = a$.

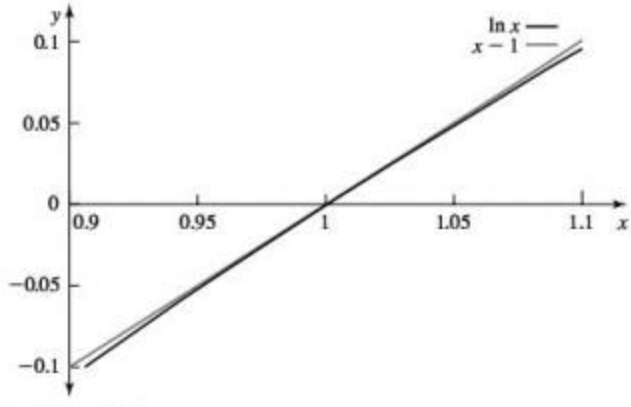
Geométricamente, la linealización de f en $x = a$, $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ (*véase* la Figura 4.40).

Si $|x - a|$ es suficientemente pequeño, entonces $f(x)$ se puede aproximar linealmente por $L(x)$, es decir,

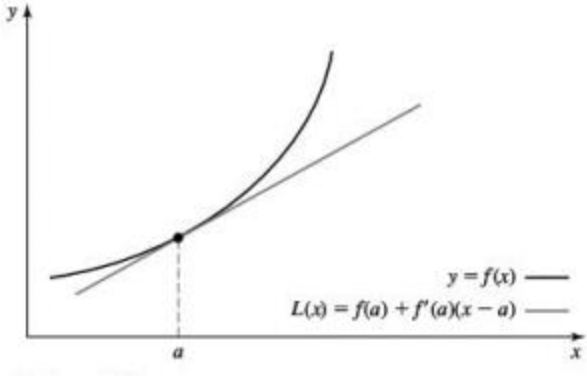
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$



▲ **Figura 4.39a**
La aproximación por recta tangente de $\ln x$ en $x = 1$ para aproximar $\ln(1.05)$



▲ **Figura 4.39b**
La aproximación por recta tangente de $\ln x$ en $x = 1$ para aproximar $\ln(1.05)$. Cuando está cerca de 1, la recta tangente y la gráfica de $y = \ln x$ están cerca



▲ **Figura 4.40**
La aproximación por recta tangente de $y = f(x)$ en $x = a$

Esto se ilustra en la Figura 4.41.

Ejemplo 1 (a) Calcule la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = a$, y (b) utilice su respuesta de (a) para calcular el valor aproximado de $\sqrt{50}$.

Solución

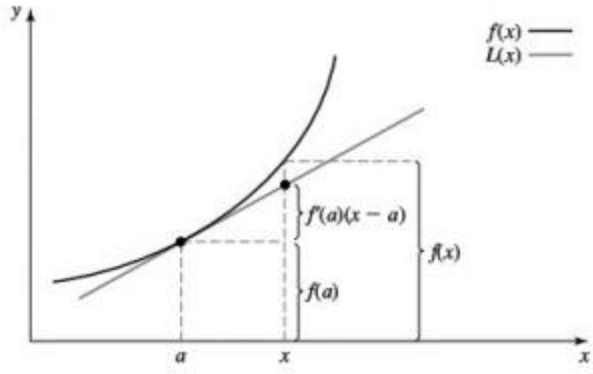
(a) Como $f(x) = \sqrt{x}$, se deduce que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, y la aproximación lineal en $x = a$ es

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$
$$= \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$$

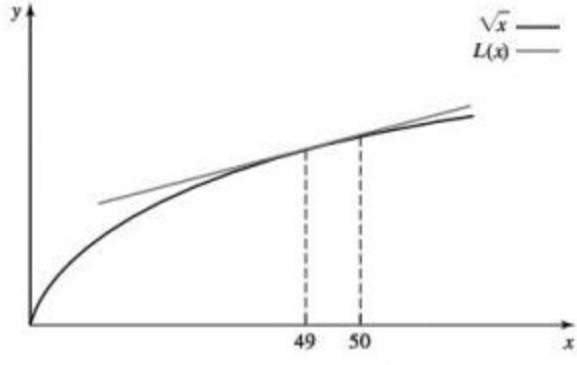
(*véase* la Figura 4.42).

(b) Para calcular el valor aproximado de $f(50) = \sqrt{50}$, es necesario escoger un valor de a cercano a 50 para el que se conozca exactamente el valor de $\sqrt{a}$. La elección es $a = 49$. Se puede aproximar por tanto $f(50)$ por $L(50)$ con $a = 49$ y obtener

$$\sqrt{50} \approx \sqrt{49} + \frac{50 - 49}{2\sqrt{49}} = 7 + \frac{1}{14} \approx 7.0714$$



▲ **Figura 4.41**
La linealización de f en $x = a$ se puede utilizar para aproximar $f(x)$ para x cercano a a



▲ **Figura 4.42**
Aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 49$ es la recta $y = L(x)$

Utilizando una calculadora para obtener $\sqrt{50} = 7.0711$ puede verse que el error de la aproximación es muy pequeño. ◀

Ejemplo 2 Calcule la aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.

Solución

Como $f'(x) = \cos x$, se deduce que

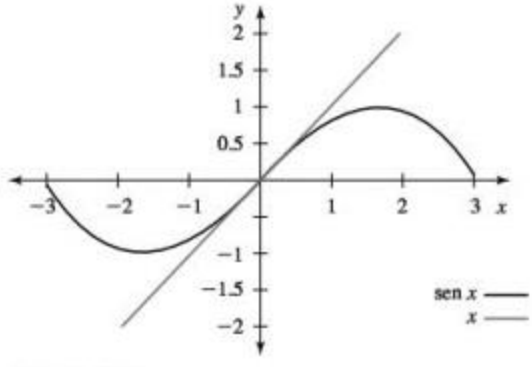
$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$= \operatorname{sen} 0 + (\cos 0)x = x$$

(Figura 4.43). Es decir, para valores pequeños de x se puede aproximar sen x por x. Esto se utiliza a menudo en física (nótese que x se mide en radianes). ◀

Ejemplo 3 Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t y suponga que su velocidad de crecimiento dN/dt se expresa como

$$\frac{dN}{dt} = f(N)$$

siendo $f(N)$ una función derivable con $f(0) = 0$. Calcule la linealización de la velocidad de crecimiento en $N = 0$.



▲ **Figura 4.43**
La aproximación lineal de $y = \operatorname{sen} x$ es la recta $y = x$.

Solución

Es necesario calcular la aproximación por recta tangente de $f(N)$ en $N = 0$. Si se denomina $L(N)$ a la linealización de $f(N)$, se obtiene

$$L(N) = f(0) + f'(0)N$$

Ahora, $f(0) = 0$. Si se hace $r = f'(0)$, se obtiene que para N cercano a 0,

$$\frac{dN}{dt} \approx rN$$

Esto demuestra que la población varía de forma aproximadamente exponencial cuando su tamaño es pequeño.

El valor de $f(0) = 0$ se ha escogido por razones biológicas. Cuando el tamaño de la población es 0, la velocidad de crecimiento debe valer 0. De otro modo, se produciría generación espontánea si $f(0) > 0$ o bien el tamaño de la población se haría negativo si $f(0) < 0$. ◀

Ejemplo 4 Sea $N(t)$ el tamaño de una población de bacterias en el instante t (medido en millones) y suponga que la velocidad de crecimiento per cápita es igual al 2%. Esto se puede expresar en forma de ecuación diferencial. Concretamente,

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0.02$$

Suponga que se conoce que en el instante $t = 10$, el tamaño de la población es de 250 000 000, es decir, $N(10) = 250$ (ya que el tamaño de la población se mide en millones). Obtenga una aproximación lineal para predecir el tamaño aproximado de la población en $t = 10.2$.

Solución

Para predecir el tamaño de la población en $t = 10.2$, se utiliza la linealización de $N(t)$ en $t = 10$. Concretamente,

$$L(t) = N(10) + N'(10)(t - 10)$$

Para evaluar $L(t)$ en $t = 10.2$, se necesita calcular $N'(10)$.

Utilizando la ecuación diferencial, se obtiene

$$N'(t) = (0.02)N(t)$$

Cuando $t = 10$, tenemos que

$$N'(10) = (0.02)N(10) = (0.02)(250) = 5$$

Por tanto,

$$L(10.2) = N(10) + N'(10)(10.2 - 10)$$
$$= 250 + (5)(0.2) = 251$$

Es decir, se predice que el tamaño de la población en el instante $t = 10.2$ es aproximadamente de 251 000 000. Nótese que la aproximación sólo es buena si el instante en el que se desea predecir el tamaño de la población es muy cercano al instante en el que se conoce el tamaño de dicha población. ◀

Propagación de errores La aproximación lineal se utiliza también en problemas de **propagación de errores**. Supongamos que se desea determinar el área de la superficie de una célula esférica. Como el área de la superficie S de una esfera de radio r se expresa como

$$S = 4\pi r^2$$

es suficiente con medir el radio r de la célula. Si la medida del radio tiene una precisión del 2%, ¿cómo afecta esto a la precisión del área de la superficie?

Primero hay que precisar lo que significa decir que una medida tiene una precisión dada por un determinado porcentaje. Supongamos que x_0 es el valor verdadero de una observación, y que x es el valor medido. Entonces $|\Delta x| = |x - x_0|$ es el **error absoluto** o tolerancia de la medida. El **error relativo** se define como $|\Delta x/x_0|$, y el **error en porcentaje** como $100|\Delta x/x_0|$.

Volviendo a nuestro ejemplo, obtengamos el error al calcular el área de la superficie. Se parte del error absoluto en el área de la superficie,

$$|\Delta S| = |S(r_0 + \Delta r) - S(r_0)|$$

siendo r_0 el radio verdadero y $|\Delta r|$ el error absoluto en la medida del radio. Se puede aproximar $S(r_0 + \Delta r) - S(r_0)$ utilizando su aproximación lineal $S'(r_0)\Delta r$, es decir,

$$\Delta S \approx S'(r_0)\Delta r$$

Como $S'(r) = 8\pi r$, el error en porcentaje en la medida del área de la superficie es

$$100\left|\frac{\Delta S}{S(r_0)}\right| \approx 100\left|\frac{S'(r_0)\Delta r}{S(r_0)}\right|$$
$$= 100\left|\frac{8\pi r_0}{4\pi r_0^2}\Delta r\right| = 2\left(100\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right|\right) = 4$$

ya que $100|\Delta r/r_0| = 2$. Es decir, el área de la superficie tiene una precisión (aproximada) del 4% si el radio tiene una precisión del 2%. La explicación de por qué se dobla el error en porcentaje se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Suponga que se desea determinar $f(x)$ a partir de una medida de x. Si $f(x)$ se expresa como una función potencial, es decir, $f(x) = cx^s$, entonces el error en la medida de x se propaga como sigue

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x = csx^{s-1}\Delta x$$

El error en porcentaje $100\left|\frac{\Delta f}{f}\right|$ se relaciona con el porcentaje de error $100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ de la siguiente forma

$$100\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \approx 100\left|\frac{f'(x)\Delta x}{f}\right| = 100\left|\frac{csx^{s-1}\Delta x}{cx^s}\right|$$
$$= |s|\left(100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\right)$$

En nuestro ejemplo anterior, $s = 2$, por lo que el error en porcentaje de la medida del área de la superficie es dos veces el error en porcentaje de la medida del radio. ◀

Ejemplo 6 Suponga que se desea estimar el área total de las hojas de un árbol en un cierto terreno. Los datos experimentales en el terreno de estudio (Niklas, 1994) indican que

$$[\text{área de hojas}] \propto [\text{diámetro de tallo}]^{1.84}$$

En vez de intentar medir directamente el área total de las hojas, se mide el diámetro del tallo y se utiliza la relación de escala anterior para estimar el área total de las hojas ¿Con qué precisión debe medirse el diámetro del tallo para estimar el área de las hojas con un error del 10%?

Solución

Se denomina A al área de las hojas y d al diámetro del tallo. Entonces

$$A(d) = cd^{1.84}$$

siendo c la constante de proporcionalidad. Un error en la medida de d se propaga como

$$\Delta A \approx A'(d)\Delta d = c(1.84)d^{0.84}\Delta d$$

El error en porcentaje $100\left|\frac{\Delta A}{A}\right|$ se relaciona con el error en porcentaje $100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 100\left|\frac{\Delta A}{A}\right| &\approx 100\left|\frac{A'(d)\Delta d}{A}\right| \\ &= 100\left|\frac{c(1.84)d^{0.84}}{cd^{1.84}}\Delta d\right| \\ &= (1.84)\left(100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\right) \end{aligned}$$

Se requiere que $100\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = 10$. Por tanto

$$10 = (1.84)\left(100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\right)$$

o

$$100\left|\frac{\Delta d}{d}\right| = \frac{10}{1.84} = 5.4$$

Es decir, el diámetro del tallo debe medirse con una precisión de 5.4%.

Utilizando el resultado del Ejemplo 5, se podría haber obtenido la conclusión anterior inmediatamente, ya que

$$A(d) = cd^{1.84}$$

Tenemos $s = 1.84$, donde s es el exponente definido en el Ejemplo 5. Utilizando

$$100\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = |s|\left(100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\right)$$

se obtiene

$$100\left|\frac{\Delta d}{d}\right| = \frac{1}{|s|}\left(100\left|\frac{\Delta A}{A}\right|\right) = \frac{10}{1.84} = 5.4$$

como antes. ◀

Ejemplo 7 Supongamos que se desea determinar el error en porcentaje de $f(x)$ a partir de una medida de x, con $f(x) = \ln x$, $x = 10$ y el error en porcentaje de x del 2%. Calcule el error en porcentaje de $f(x)$.

Solución

La función $f(x)$ no es una función potencial, por lo que no hay una regla simple. Tenemos que

$$100\frac{\Delta f}{f} \approx 100\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}$$

Como se conoce $100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$, se multiplica y se divide el miembro derecho por x y se ordenan términos, resultando

$$100\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} = 100\frac{\Delta x}{x}\frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Como $f'(x) = 1/x$, en $x = 10$ se obtiene

$$100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|_{|x=10} = 2\frac{(10)(1/10)}{\ln 10} = \frac{2}{\ln 10} \approx 0.869$$

Es decir, el error en porcentaje de f es aproximadamente del 0.9%. ◀

4.8.1. Problemas

En los problemas 1-10, utilice la fórmula

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

para aproximar el valor de la función dada, y comparar su resultado con el valor obtenido mediante calculadora.

1. $\sqrt{65}$; sea $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 64$, y $x = 65$
2. $\sqrt{35}$; sea $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 36$, y $x = 35$
3. $\sqrt[3]{124}$
4. $(3.9)^3$
5. $(0.99)^{25}$
6. $\operatorname{sen}(0.01)$
7. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 0.02\right)$
8. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.01\right)$
9. $\ln(1.01)$
10. $\frac{1}{0.99}$

En los problemas 11-30, aproxime $f(x)$ en a mediante la aproximación lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

11. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en $a = 0$
12. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $a = 0$
13. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en $a = 1$
14. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $a = 2$
15. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ en $a = 0$
16. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ en $a = 0$
17. $f(x) = \ln(1 + x)$ en $a = 0$
18. $f(x) = \ln(1 + 2x)$ en $a = 0$
19. $f(x) = \ln x$ en $a = e$
20. $f(x) = \ln x$ en $a = e^2$
21. $f(x) = e^x$ en $a = 0$
22. $f(x) = e^{2x}$ en $a = 0$
23. $f(x) = e^{-x}$ en $a = 0$
24. $f(x) = e^{-3x}$ en $a = 0$
25. $f(x) = e^{x-1}$ en $a = 1$
26. $f(x) = e^{2x+1}$ en $a = -1/2$
27. $f(x) = (1 + x)^{-n}$ en $a = 0$ (asuma que a es un entero positivo).
28. $f(x) = (1 - x)^{-n}$ en $a = 0$ (asuma que a es un entero positivo).
29. $f(x) = \tan x$ en $a = 0$
30. $f(x) = \cos x$ en $a = 0$

31. Suponga que la velocidad de crecimiento per cápita de una población es del 3%, es decir, si $N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t, entonces

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0.03$$

Suponga que el tamaño de la población en el instante $t = 4$ es igual a 100. Utilice una aproximación lineal para calcular el tamaño de la población en el instante $t = 4.1$.

32. Suponga que la velocidad de crecimiento per cápita de una población es del 2%, es decir, si $N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t, entonces

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0.02$$

Suponga que el tamaño de la población en el instante $t = 2$ es igual a 50. Utilice una aproximación lineal para calcular el tamaño de la población en el instante $t = 2.1$.

33. Suponga que la velocidad de crecimiento específico y una planta es del 1%, es decir, si $B(t)$ indica la biomasa en el instante t, entonces

$$\frac{1}{B(t)}\frac{dB}{dt} = 0.01$$

Suponga que la biomasa en el instante $t = 1$ es igual a 5 gramos. Utilice una aproximación lineal para calcular la biomasa en el instante $t = 1.1$.

34. Suponga que una cierta planta crece a lo largo de un gradiente que se gradúa desde pobre en nitrógeno hasta rico en nitrógeno. Los datos experimentales muestran que la masa media por planta que ha crecido en un suelo con un contenido total de nitrógeno de 1000 mg de nitrógeno por kg de suelo es del 2.7 g y que la velocidad de variación de la masa media por planta con este nivel de nitrógeno es 1.05×10^{-3} g por mg de variación en el nitrógeno total por kg de suelo. Utilice una aproximación lineal para predecir la masa media por planta que crece en un suelo con un contenido total de nitrógeno de 1100 mg de nitrógeno por kg de suelo.

En los problemas 35-40, un error de medida en x afecta a la precisión del valor $f(x)$. En cada caso determine un intervalo de la forma

$$[f(x) - \Delta f,\ f(x) + \Delta f]$$

que refleje el error de medida Δx. En los problemas, se dan $f(x)$ y x = (verdadero valor de x) $\pm\ |\Delta x|$.

35. $f(x) = 2x,\ x = 1 \pm 0.1$

36. $f(x) = 1 - 3x,\ x = -2 \pm 0.3$

37. $f(x) = 3x^2,\ x = 2 \pm 0.1$

38. $f(x) = \sqrt{x},\ x = 10 \pm 0.5$

39. $f(x) = e^x,\ x = 2 \pm 0.2$

40. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ x = -1 \pm 0.05$

En los problemas 41-44, suponga que la medida de x es de una precisión del 2%. Determine el error Δf en el cálculo de f y el error en porcentaje $100\frac{\Delta f}{f}$ en cada caso. Se dan $f(x)$ y el verdadero valor de x.

41. $f(x) = 4x^3,\ x = 1.5$

42. $f(x) = x^{1/4},\ x = 10$

43. $f(x) = \ln x,\ x = 20$

44. $f(x) = \dfrac{1}{1+x},\ x = 4$

45. El volumen V de una célula esférica de radio r está dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Si se puede determinar el radio con una precisión del 3%, ¿qué precisión tendrá el cálculo del volumen?

46. La velocidad v de la sangre que fluye por el eje central de una arteria de radio R está dada por la ley de Poiseuille

$$v(R) = cR^2$$

siendo c una constante. Si se puede determinar el radio de la arteria con una precisión del 5%, ¿qué precisión tendrá el cálculo de la velocidad?

47. Suponga que está estudiando la reproducción del musgo. Se ha encontrado una relación de escala (Niklas, 1994) entre el número de esporas de musgo (N) y la longitud de la cápsula. Concretamente,

$$N \propto L^{2.11}$$

Esta relación no es muy precisa pero sí suficiente para nuestros propósitos. Para estimar el número de esporas de musgo se mide la longitud de la cápsula. Se desea estimar el número de esporas de musgo con una precisión del 5%, ¿con qué precisión se debe medir la longitud de la cápsula?

48. (*Modelo de recursos de Tilman*) Suponga que la velocidad de crecimiento de una planta en un cierto hábitat depende de un solo recurso: por ejemplo, el nitrógeno. Suponga que la velocidad de crecimiento $f(R)$ depende del nivel de recurso R de la siguiente forma

$$f(R) = a\frac{R}{k+R}$$

siendo a y k constantes. Exprese el error en porcentaje de la velocidad de crecimiento, $100\frac{\Delta f}{f}$, en función del error en porcentaje del nivel de recurso, $100\frac{\Delta R}{R}$.

49. La velocidad de reacción $R(x)$ de una reacción irreversible

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{AB}$$

es función de la concentración x del producto AB y se expresa como

$$R(x) = k(a - x)(b - x)$$

siendo k una constante, a la concentración de A al comienzo de la reacción, y b la concentración de B al principio a la reacción. Exprese el error en porcentaje de la velocidad de reacción, $100\frac{\Delta R}{R}$, en función del error en porcentaje de la concentración x, $100\frac{\Delta x}{x}$.

4.9. Términos clave

Repaso del capítulo 4: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos:*

1. Derivada, definición formal
2. Cociente de diferencias
3. Recta secante y recta tangente
4. Velocidad instantánea de variación
5. Velocidad media de variación
6. Ecuación diferencial
7. Derivabilidad y continuidad
8. Regla de la potencia
9. Reglas básicas de derivación
10. Regla del producto
11. Regla del cociente
12. Regla de la cadena
13. Función implícita
14. Derivación implícita
15. Variaciones relacionadas
16. Derivadas de orden superior
17. Derivadas de funciones trigonométricas
18. Derivadas de funciones exponenciales
19. Derivada de la función inversa y de la función logarítmica
20. Derivación logarítmica
21. Aproximación por recta tangente
22. Propagación de errores
23. Error absoluto, error relativo, error en porcentaje

4.10. Problemas de repaso

En los problemas 1-8, derive con respecto a la variable independiente.

1. $f(x) = -3x^4 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 1$
2. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 4}}$
3. $h(t) = \left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^{1/3}$
4. $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$
5. $f(x) = e^{2x}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$
6. $g(s) = \dfrac{\operatorname{sen}(3s+1)}{\cos(3s)}$
7. $f(x) = 2\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x^2}$
8. $g(x) = e^{-x}\ln(x+1)$

En los problemas 9-12, calcule las derivadas primera y segunda de las funciones dadas.

9. $f(x) = e^{-x^2/2}$
10. $g(x) = \tan(x^2 + 1)$
11. $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$
12. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

En los problemas 13-16, calcule dy/dx.

13. $x^2y - y^2x = \operatorname{sen} x$
14. $e^{x^2+y^2} = 2x$
15. $\ln(x - y) = 2x$
16. $\tan(x - y) = x^2$

En los problemas 17-19, calcule dy/dx y d^2y/dx^2.

17. $x^2 + y^2 = 16$
18. $x = \tan y$
19. $e^y = \ln x$
20. Suponga que x es función de t. Calcule $\frac{dy}{dt}$ cuando $y = \cos x$ y $\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}$ para $x = \frac{\pi}{3}$.
21. Una bandada de pájaros pasa directamente por encima, volando horizontalmente a una altitud de 100 pies y con una velocidad de 6 pies por segundo ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre nosotros y los pájaros cuando la distancia es de 320 pies? (estamos en la superficie de la tierra y no nos movemos).
22. Calcule la derivada de
$$y = \ln|\cos x|$$
23. Suponga que $f(x)$ es derivable. Calcule la expresión de la derivada de las siguientes funciones
(a) $y = e^{f(x)}$
(b) $y = \ln f(x)$
(c) $y = [f(x)]^2$
24. Calcule la recta tangente y la recta normal a $y = \ln(x + 1)$ en $x = 1$.
25. Suponga que
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \geqslant 0$$
(a) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $f(x)$ para $x \geqslant 0$. Note la forma de «S» de la gráfica.
(b) Calcule la recta que pasa por el origen y que toca a la gráfica de $f(x)$ en algún punto $[c, f(c)]$ con $c > 0$. Esa es la recta tangente en $[c, f(c)]$ que pasa por el origen. Dibuje la recta tangente en el mismo sistema de coordenadas utilizado en el apartado (a).

En los problemas 26-29, calcule la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto especificado.

26. $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ en $x = \frac{\pi}{2}$
27. $y = e^{-x^2}\cos x$ en $x = \frac{\pi}{3}$
28. $x^2 + y = e^y$ en $x = \sqrt{e-1}$
29. $x\ln y = y\ln x$ en $x = 1$

30. En el Problema de repaso 17 del Capítulo 3 se presentaron las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

(b) Utilice los hechos de que

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

y

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

junto con los resultados de (a) para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

31. Calcule un polinomio de segundo grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

con $p(-1) = 6$, $p'(1) = 8$ y $p''(0) = 4$.

32. Utilice la interpretación geométrica de la derivada para obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x^2 + y^2 = 1$$

en los siguientes puntos.

(a) $(1, 0)$

(b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

(c) $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

(d) $(0, -1)$

33. Geradedorf y Straightville están comunicadas por una carretera muy recta pero bastante accidentada. Al pasear en bicicleta desde Geradedorf a Straightville, la posición en el instante t (medido en horas) está dada por la función

$$s(t) = 3\pi t + 3(1 - \cos(\pi t))$$

para $0 \leqslant t \leqslant 5.5$, donde $s(t)$ se mide en millas.

(a) Utilice una calculadora gráfica para convencerse de que no se retrocede durante el viaje ¿Cómo se puede comprobar esto? Suponiendo que el viaje dura 5.5 horas, calcule la distancia entre Geradedorf y Straightville.

(b) Calcule la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$.

(c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$. En el Apartado (a), se utilizó la función $s(t)$ para concluir que no se retrocedía durante el viaje. ¿Se pueden utilizar las otras dos funciones para responder a la cuestión del retroceso? Explique su respuesta.

(d) Suponiendo que la velocidad se hace más lenta durante la escalada y más rápida durante la bajada ¿cuántos picos y valles tiene esta carretera?

34. Suponga que su posición en el instante t en una carretera recta está dada por

$$s(t) = \cos(\pi t)$$

para $0 \leqslant t \leqslant 2$, donde t se mide en horas.

(a) ¿Cuál es su posición al principio y al final del viaje?

(b) Utilice una calculadora gráfica para describir su viaje con palabras.

(c) ¿Qué distancia ha viajado en total?

(d) Determine su velocidad y su aceleración durante el viaje ¿Cuándo es la velocidad igual a 0? Relacione esto con su posición, y explique lo que significa.

35. En el siguiente modelo de población muy sencillo, la velocidad de crecimiento en el instante t depende el número de individuos en el instante $t - T$, siendo T una constante positiva (es decir, el modelo incorpora un retardo temporal en la velocidad de nacimientos). Esto se utiliza, por ejemplo, cuando se desea tener en cuenta el hecho de que los individuos deben madurar antes de reproducirse.

Denomine $N(t)$ al tamaño de la población en el instante t, y suponga que

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\pi}{2T}(K - N(t - T)) \tag{4.13}$$

siendo K y T constantes positivas.

(a) Demuestre que

$$N(t) = K + A\cos\frac{\pi t}{2T}$$

es una solución de (4.13).

(b) Dibuje $N(t)$ para $K = 100$, $A = 50$ y $T = 1$.

(c) Explique con palabras cómo varía el tamaño de la población con el tiempo.

36. Se denomina $W(t)$ a la cantidad de material radioactivo que queda tras un tiempo t si la cantidad inicial era $W(0) = W_0$.

(a) Demuestre que

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$$

resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W(t)$$

(b) Demuestre que si se dibuja $W(t)$ en escala semilogarítmica, el resultado es una línea recta.

(c) Utilice el resultado del Apartado (b) para explicar por qué

$$\frac{d\ln W(t)}{dt} = \text{constante}$$

Determine la constante, y relaciónela con la gráfica del Apartado (b).

(d) Demuestre que

$$\frac{d\ln W(t)}{dt} = \text{constante}$$

implica que

$$\frac{dW}{dt} \propto W(t)$$

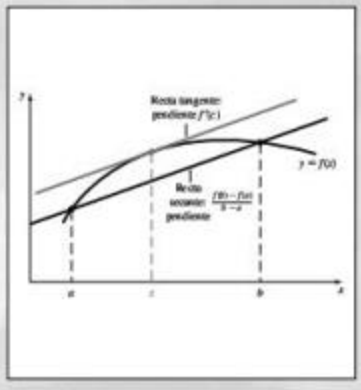
37. En el Ejemplo 17 de la Subsección 4.4.3, se presentó la relación alométrica entre la longitud del cráneo (en cm) y la longitud de la espina dorsal (en cm) del ictiosaurio, un grupo de reptiles marinos extintos. La relación es

$$S = (1.162)B^{0.933}$$

siendo S y B la longitud del cráneo y de la espina dorsal, respectivamente. Suponga que se dispone sólo del cráneo de un individuo y que basándose en la longitud de ese cráneo se desea estimar la longitud de la espina dorsal del espécimen ¿Con qué precisión debe medirse la longitud del cráneo si se desea estimar la longitud de la espina dorsal con un error del 10%?

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN



5.1 EXTREMOS Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

El objetivo principal de este capítulo es presentar cómo puede ayudar el cálculo a entender el comportamiento de las funciones. Los puntos donde la función tiene un máximo o un mínimo, denominados extremos, son de particular importancia. En esta sección se definen los extremos, se dan condiciones que garantizan los extremos (teorema de los valores extremos) y se proporciona una caracterización de los extremos (teorema de Fermat). El teorema de Fermat resulta crucial para establecer el teorema del valor medio, un resultado que se puede entender gráficamente. El teorema del valor medio tiene importantes consecuencias que aparecerán en las secciones siguientes donde se presentarán métodos para caracterizar el comportamiento de las funciones.

5.1.1 El teorema de los valores extremos

Supongamos que se mide la profundidad de un arroyo a lo largo de una sección transversal entre dos puntos A y B (*véase* la Figura 5.1). Observando el perfil del arroyo, puede verse que hay una posición donde la profundidad es máxima y una posición donde la profundidad es mínima. La existencia de esas posiciones es el contenido del teorema de los valores extremos. Para formalizar este resultado, hay que presentar alguna terminología.

Definición Sea f una función definida en un conjunto D que contiene al número c. Entonces

f tiene un **máximo global** (o **absoluto**) en $x = c$ si

$$f(c) \geqslant f(x) \quad \text{para todo } x \in D$$

f tiene un **mínimo global** (o **absoluto**) en $x = c$ si

$$f(c) \leqslant f(x) \quad \text{para todo } x \in D$$

El siguiente resultado proporciona la condición bajo la que existen los máximos y mínimos globales, denominados colectivamente **extremos globales** (o **absolutos**).

▲ **Figura 5.1**
Sección transversal de un arroyo entre los puntos A y B

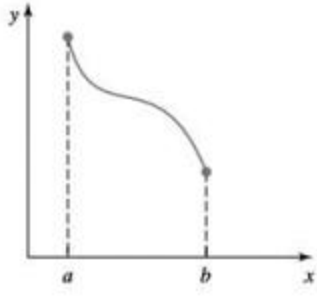
Teorema de los valores extremos Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, entonces f tiene un máximo global y un mínimo global en $[a, b]$.

La demostración del teorema está fuera del alcance de este texto y se omitirá. Sin embargo, el resultado es muy intuitivo, y se ilustra en las Figuras 5.2 y 5.3. La Figura 5.2 muestra que la función puede alcanzar sus valores extremos en los extremos del intervalo $[a, b]$, y en la Figura 5.3 los valores extremos se alcanzan en el interior del intervalo $[a, b]$. La función debe ser continua y definida en un intervalo cerrado para poder concluir que debe tener un máximo global y un mínimo global. Pero hay que notar que el teorema de los valores extremos sólo nos dice que los extremos globales existen, no donde están. Además, no tienen por qué ser únicos, lo que significa que una función puede tener más de un máximo global o de un mínimo global.

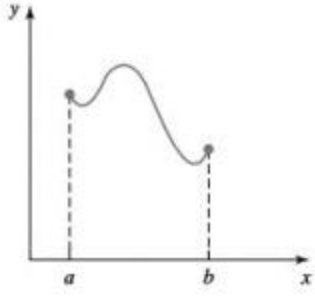
Ejemplo 1 **(Estrategia óptima)** Suponga que una planta tiene dos estrategias reproductivas: una asexual mediante clonación y la otra sexual mediante producción de semillas. La salud de la planta depende de cómo asigna sus recursos a las dos estrategias. Supongamos que una planta asigna un número fijo de recursos para la reproducción. Una fracción p de ellos se asignan a la reproducción por clonación ($0 \leqslant p \leqslant 1$) y una fracción $1 - p$ a la reproducción sexual. Se denomina $f(p)$ a la salud de la planta en función de p. Suponiendo que $f(p)$ es una función continua, ¿por qué hay una estrategia de asignación de recursos (denominada estrategia óptima) que maximiza la salud de la planta?

Solución

Como $f(p)$ es continua en el intervalo cerrado [0, 1], tiene un máximo global (y un mínimo global) en dicho intervalo, de acuerdo con el teorema de los valores



◀ **Figura 5.2**
Valores extremos en los extremos del intervalo



◀ **Figura 5.3**
Valores extremos en el interior del intervalo

extremos. Nótese que dicho teorema sólo garantiza la existencia de una estrategia óptima pero no indica de qué estrategia se trata. Además, podría haber más de un máximo global, lo que significa que habría más de una estrategia óptima de asignación de recursos. ◀

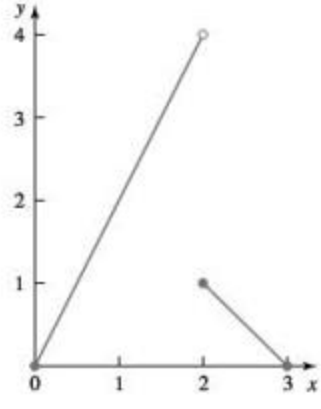
La Figura 5.2 muestra la importancia de uno de los supuestos del teorema de los valores extremos, concretamente que el intervalo es *cerrado* si el intervalo de a y b de la Figura 5.2 no incluyera los extremos, no existiría un máximo global ni un mínimo global.

Los dos ejemplos siguientes ilustran que el teorema no se puede utilizar si f no es continua o el intervalo no es cerrado.

Ejemplo 2

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 - x & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$



▲ **Figura 5.4**
Gráfica de $f(x)$ del Ejemplo 2

Nótese que $f(x)$ está definida en un intervalo *cerrado*, concretamente [0, 3]. Sin embargo, f es discontinua en $x = 2$, como se puede ver en la Figura 5.4. La gráfica de $f(x)$ muestra que no existe un valor $c \in [0, 3]$ donde $f(c)$ tiene un máximo global. No hay que cometer el error de decir que habría un máximo cercano a $x = 2$. Para cualquier candidato de máximo global cercano a $x = 2$ que podamos buscar, siempre se podrá encontrar un punto cuya coordenada y supere a la coordenada y del candidato anterior. La razón de esto es que

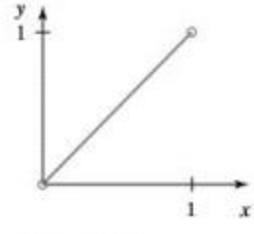
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

pero la función f toma el valor 1 en $x = 2$. Se concluye entonces que la función no tiene un máximo global. Sin embargo tiene mínimos globales, concretamente en $x = 0$ y $x = 3$, donde $f(x)$ toma el valor de 0 (es una función con más de un mínimo global). ◀

Ejemplo 3

Sea

$$f(x) = x \quad \text{para } 0 < x < 1$$



▲ **Figura 5.5**
Gráfica de $f(x)$ del Ejemplo 3

Nótese que $f(x)$ es continua en su dominio (0, 1), pero *no* está definida en un intervalo cerrado (Figura 5.5). La función $f(x)$ no tiene ni máximo global ni mínimo global. Aunque

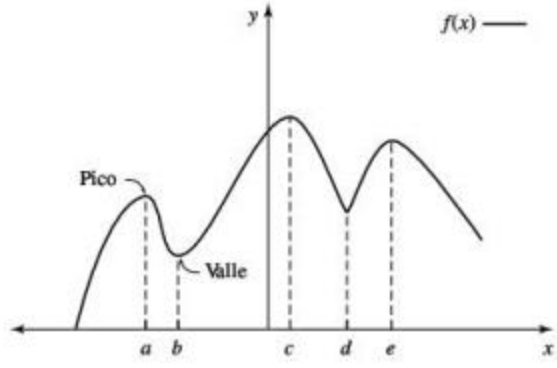
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

y $0 < f(x) < 1$ para todo $x \in (0, 1)$, no existe ningún número c en el intervalo abierto (0, 1) para el que $f(c) = 0$ o $f(c) = 1$. ◀

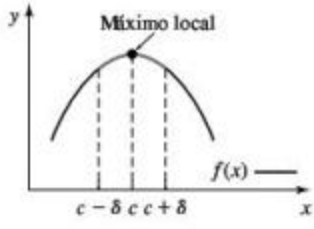
5.1.2 Extremos locales

Presentaremos a continuación los extremos locales (o relativos), que son puntos donde la gráfica es mayor o menor que todos sus puntos *cercanos*. Esto permitirá identificar los picos y los valles de la gráfica de una función (*véase* la Figura 5.6). La gráfica de la función de la Figura 5.6 tiene tres picos, en $x = a$, c y e, y dos valles, en $x = b$ y d. Un pico (o máximo local) tiene la propiedad de que la gráfica es menor en su cercanía. Un valle (o mínimo local) tiene la propiedad de que la gráfica es mayor en su cercanía.

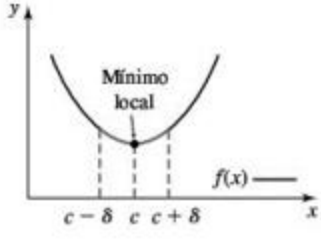
A continuación se presenta la definición formal (*véanse* las Figuras 5.7 y 5.8).



◀ **Figura 5.6**
La función $f(x)$ tiene valles en $x = b$ y d y picos en $x = a$, c y e



◀ **Figura 5.7**
La función $f(x)$ tiene un máximo local en $x = c$



◀ **Figura 5.8**
La función $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = c$

Definición Una función f definida en un conjunto D tiene un máximo local (o relativo) en un punto c si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(c) \geqslant f(x) \quad \text{para todo } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D$$

Una función f definida en un conjunto D tiene un mínimo local (o relativo) en un punto c si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(c) \leqslant f(x) \quad \text{para todo } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D$$

Los máximos y mínimos locales se denominan colectivamente extremos locales (o relativos). Si D es un intervalo y c está en el interior de D (es decir, no es un punto en el extremo), entonces la definición se simplifica: la función f tiene un máximo local en c si existe un intervalo abierto I tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I$. Asimismo, la función f tiene un mínimo local en c si existe un intervalo abierto I tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I$. En la definición, se ha escrito $(c - \delta, c + \delta) \cap D$. Si c es un punto en el interior de D, δ se puede escoger lo suficientemente pequeño como para que $(c - \delta, c + \delta)$ esté incluido en D, y se puede hacer por tanto $I = (c - \delta, c + \delta)$. La intersección del intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ con D es importante cuando c es un punto del extremo del intervalo, como veremos en el Ejemplo 4.

En los dos ejemplos siguientes se examinan los extremos locales y globales. La presentación se basa en la observación de las gráficas de las funciones. En el primer ejemplo se considera una función que está definida en un intervalo cerrado.

Esto permite calcular el valor de la función en los dos extremos de su dominio. En el segundo ejemplo, se considera una función definida en un intervalo semiabierto. En este caso, el valor de la función se puede calcular en un extremo del intervalo, pero no en el otro.

Ejemplo 4 Sea

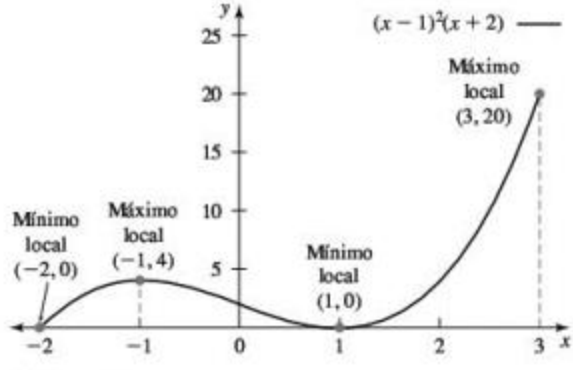
$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2) \quad \text{para } -2 \leqslant x \leqslant 3$$

(a) Utilice la gráfica de $f(x)$ para calcular todos los extremos locales.

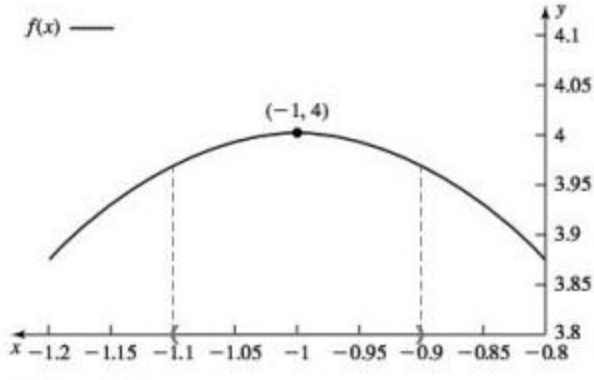
(b) Calcule los extremos globales.

Solución

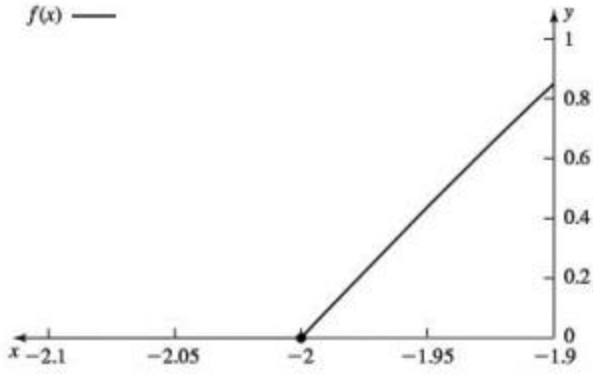
(a) La gráfica de $f(x)$ se muestra en la Figura 5.9. La función f está definida en el intervalo cerrado $[-2, 3]$. Empezaremos con los extremos locales que aparecen en los puntos del interior del dominio $D = [-2, 3]$. Observando la Figura 5.9, puede verse que en $x = -1$ se produce un máximo local, ya que no existen en las cercanías de ese punto valores mayores de f. Es decir, se puede encontrar un pequeño intervalo I alrededor de $x = -1$ tal que $f(-1) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I$. Por ejemplo, en la definición anterior se puede escoger $\delta = 0.1$ y obtener $I = (-1.1, -0{,}9)$ (Figura 5.10).



▲ **Figura 5.9**
Gráfica de $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ para $-2 \leqslant x \leqslant 3$ en el Ejemplo 4



▲ **Figura 5.10**
Gráfica de $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ cerca de $x = -1$. El punto $(-1, 4)$ es un mínimo local: $f(-1) \geqslant f(x)$ para todo x cercano en el dominio de f



▲ **Figura 5.11**
Gráfica de $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ cerca de $x = -2$. El punto $(-2, 0)$ es un máximo local: $f(-2) \leqslant f(x)$ para todo x cercano en el dominio de f

En $x = 1$ hay un mínimo local, ya que no hay valores de f más pequeños en la cercanía. Esta vez, se necesita encontrar un pequeño intervalo alrededor de $x = 1$ tal que $f(1) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I$. Por ejemplo, $I = (0.9, 1.1)$.

En $x = -2$, uno de los extremos del dominio de f, hay un mínimo local. Como se comentó en la definición de mínimo local, se requiere un intervalo I alrededor de c tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I \cap D$, siendo D el dominio de la función. Si c es un punto del interior, siempre se puede escoger un intervalo I suficientemente pequeño para que $I \subset D$ y por tanto $I \cap D = I$, pero esto no es posible en un punto del extremo del intervalo. Para demostrar que en $x = -2$ hay un mínimo local, hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que $f(-2) \leqslant f(x)$ para todo $x \in (2-\delta, 2+\delta) \cap D = [-2, 2+\delta)$. Se puede escoger de nuevo $\delta = 0.1$ y ver así que $f(-2) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [-2, -1.9)$ (*véase* la Figura 5.11).

De forma similar, se puede ver que en $x = 3$ hay un máximo local ya que $f(3) \geqslant f(x)$ para todo $x \in (2.9, 3)$. Es decir, no hay en las cercanías ningún valor mayor de f.

(b) Los extremos globales son los puntos donde la función toma sus valores máximo o mínimo. Como f está definida en un intervalo cerrado, el teorema del valor extremo nos permite asegurar la existencia de un máximo y un mínimo global. Estos extremos globales pueden producirse en el interior o en los extremos del dominio $D = [-2, 3]$.

Para obtener el mínimo global, se comparan los mínimos locales. Como $f(-2) = 0$ y $f(1) = 0$, se deduce que los mínimos globales están situados en $x = -2$ y $x = 1$ (Figura 5.9). Para obtener el máximo global, se comparan los máximos locales. Como $f(3) = 20$ y $f(-1) = 4$, entonces $f(3) > f(-1)$ y por tanto el máximo global se produce en el extremo del intervalo $x = 3$ (Figura 5.9). ◀

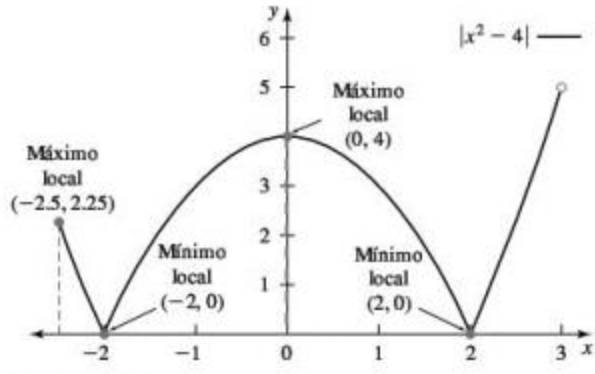
Ejemplo 5 Sea

$$f(x) = |x^2 - 4| \quad \text{para } -2.5 \leqslant x < 3$$

Calcule todos los extremos locales y globales.

Solución

La gráfica de $f(x)$, que se muestra en la Figura 5.12, revela que los mínimos locales están situados en $x = -2$ y $x = 2$, y los máximos locales están situados en $x = -2.5$ y $x = 0$. Nótese que $f(x)$ no está definida en $x = 3$ y, por tanto, $x = 3$



▲ **Figura 5.12**
Gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$ para $-2.5 \leqslant x \leqslant 3$ en el Ejemplo 5

no puede ser un máximo local. Para calcular los extremos globales, sin embargo, es necesario considerar también los valores de la función cerca de la frontera $x = 3$. Los candidatos a extremos globales son todos los extremos locales, con los que hay que comparar el valor de la función cerca del extremo en $x = 3$. Consideraremos en primer lugar el máximo global. Como

$$f(-2.5) = 2.25 \quad f(0) = 4 \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$$

la función es mayor cerca del punto $x = 3$. Pero como $f(x)$ no está definida en $x = 3$, esta función no tiene máximo global (esto no contradice el teorema del valor extremo ya que la función no está definida en un intervalo cerrado, que es lo que supone el teorema). Para calcular el mínimo global, sólo hay que comparar $f(-2)$ y $f(2)$. Como $f(-2) = 0$ y $f(2) = 0$, los mínimos globales están en $x = -2$ y $x = 2$. ◀

Observando las Figuras 5.9 y 5.12, se puede ver que si la función f es derivable en un punto interior donde hay un extremo local, entonces en ese punto la tangente es horizontal. Esto se conoce como teorema de Fermat (*véase* la Figura 5.13).

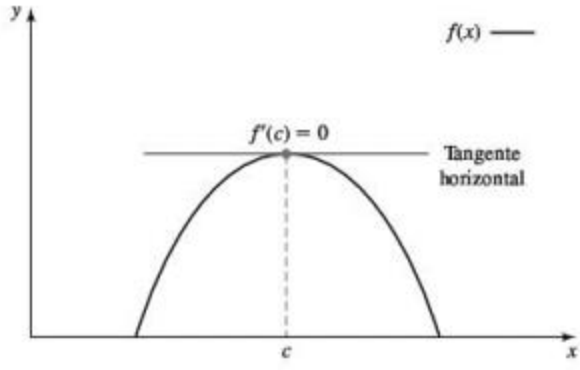
Teorema de Fermat Si f tiene un extremo local en un punto interior c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración Demostraremos el teorema de Fermat para el caso en el que el extremo local es un máximo; la demostración cuando el extremo local es un mínimo es similar. Hay que demostrar que $f'(c) = 0$. Para ello, se utiliza la definición formal de derivada, concretamente,

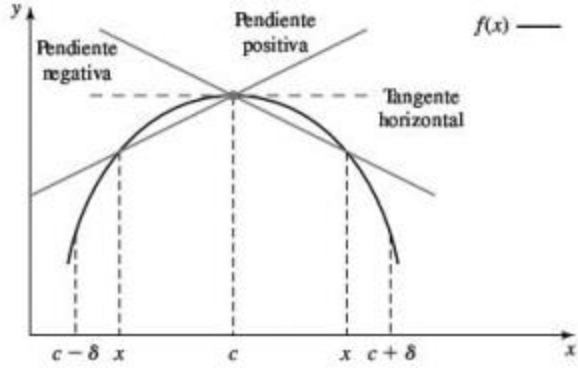
$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Para obtener el límite, se calcula el límite por la izquierda ($x \to c^-$) y el límite por la derecha ($x \to c^+$). Empezaremos con la siguiente observación (Figura 5.14): supongamos que f tiene un máximo local en un punto interior c. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant f(c) \quad \text{para todo } x \in (c - \delta, c + \delta)$$



▲ **Figura 5.13**
Teorema de Fermat



▲ **Figura 5.14**
Ilustración de la demostración del teorema de Fermat: para $x < c$, la pendiente de la recta secante es positiva, para $x > c$, la pendiente de la recta secante es negativa. En el límite $x = c$, la recta secante converge a la recta tangente horizontal.

Como $f(x) - f(c) \leqslant 0$ y $x - c < 0$ si $x < c$, el miembro izquierdo de la ecuación queda

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \tag{5.1}$$

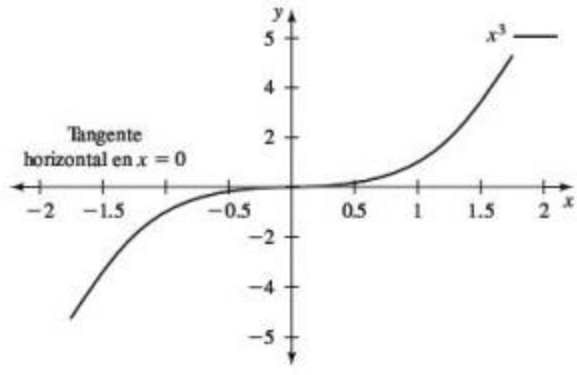
y como $f(x) - f(c) \leqslant 0$ y $x - c > 0$ si $x > c$, el miembro derecho de la ecuación queda

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \tag{5.2}$$

Como f es derivable en c,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Esto, junto con la Ecuación (5.1), demuestra que $f'(c) \geqslant 0$, y junto con la Ecuación (5.2), que $f'(c) \leqslant 0$, pero un número no puede ser simultáneamente positivo y negativo, salvo que sea 0. Por tanto, $f'(c) = 0$. ■



▲ **Figura 5.15**
La gráfica de $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en $x = 0$, pero (0, 0) no es un extremo

Ejemplo 6 Explique por qué $y = \tan x$ no tiene un extremo local en $x = 0$.

Solución

$y = \tan x$ es derivable en $x = 0$ con

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

y por tanto, la derivada de $y = \tan x$ en $x = 0$ es igual a 1. Si la derivada no es igual a 0, el teorema de Fermat implica que $x = 0$ no es un extremo local. ◀

Precaución

1. La condición de que $f'(c) = 0$ es necesaria pero no suficiente para que haya un extremo local en puntos interiores donde exista $f'(c)$. En particular, el hecho de que f sea derivable en c con $f'(c) = 0$ no dice nada acerca de la existencia de un extremo local de f en $x = c$. Por ejemplo, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$, pero en $x = 0$ no hay un extremo local. La Figura 5.15 muestra la gráfica de $y = x^3$. Aunque en $x = 0$ hay una tangente horizontal, no hay un extremo local. Sin embargo, el teorema de Fermat sí permite decir que si $x = c$ es un punto interior donde $f'(c) \neq 0$, no puede ser un extremo local (Ejemplo 6). Los puntos interiores con tangentes horizontales son *candidatos* a extremos locales.

2. La función f puede no ser derivable en un extremo local. Por ejemplo, en el Ejemplo 5, la función $f(x)$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$, pero ambos puntos son extremos locales. Esto significa que para identificar candidatos a extremos locales, no es bastante con buscar simplemente los puntos con tangentes horizontales. Hay que buscar también en los puntos donde la función $f(x)$ no es derivable.

3. Los extremos locales pueden estar en los extremos del dominio. Como el teorema de Fermat no predice nada de lo que ocurre en los extremos, deben considerarse separadamente.

Para resumir nuestra presentación, incluimos una guía para encontrar extremos locales:

1. No suponga que los puntos donde $f'(x) = 0$ son los extremos locales. Sólo son candidatos.
2. Compruebe los puntos donde la derivada no está definida.
3. Compruebe los extremos del dominio.

En la Sección 5.3 volveremos a los extremos locales, y se presentarán métodos para decidir si los candidatos son en realidad extremos locales o no.

5.1.3 Teorema del valor medio

El teorema del valor medio (TVM) es un resultado muy importante en cálculo y muy fácil de entender. Sus consecuencias son muy amplias, que utilizaremos en las restantes secciones de este capítulo para obtener importantes resultados que nos ayudarán a analizar funciones.

Para presentar el teorema del valor medio, consideremos

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

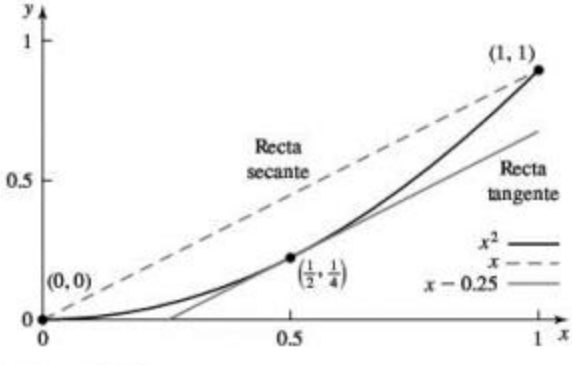
La pendiente de la recta secante que conecta los extremos de la gráfica de $f(x)$, (0, 0) y (1, 1) es

$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

La gráfica de $f(x)$ y de la recta secante se muestra en la Figura 5.16. Nótese que $f(x)$ es derivable en (0, 1), es decir, se puede dibujar una recta tangente en todos los puntos de la gráfica en el intervalo abierto (0, 1). Si se observa la gráfica de $f(x)$, puede verse que existe un número $c \in (0, 1)$ tal que la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (0, 0) y (1, 1). Es decir, existe un número $c \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$$

La existencia de ese valor c es lo que indica el teorema del valor medio.



▲ **Figura 5.16**
Las gráficas de $f(x) = x^2$, de la recta tangente que pasa por (0, 0) y (1, 1) y de la recta tangente paralela a la recta secante

En este ejemplo se puede calcular el valor de c. Como $f'(x) = 2x$ y la pendiente de la recta secante es $m = 1$, hay que resolver

$$1 = 2c \quad \text{o} \quad c = \frac{1}{2}$$

Utilizando la forma punto-pendiente $[y - y_0 = m(x - x_0)]$, se puede obtener la ecuación de la recta tangente en $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, concretamente,

$$y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{o} \quad y = x - \frac{1}{4}$$

(esta recta tangente se muestra también en la Figura 5.16).

Teorema del valor medio (TVM) Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

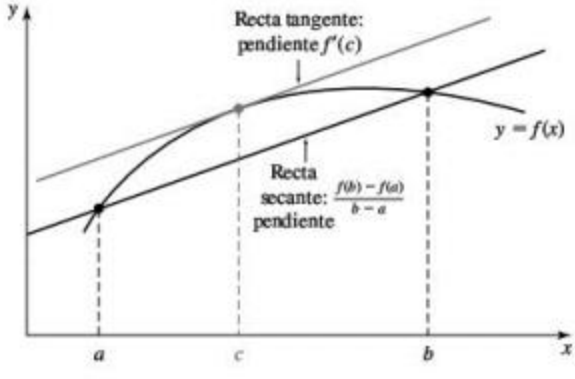
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La fracción en el miembro izquierdo de la ecuación del teorema es la pendiente de la recta secante que conecta los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y la cantidad que aparece en el miembro derecho es la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ (*véase* la Figura 5.17).

Geométricamente, el TVM es fácil de entender: indica que existe un punto en la gráfica entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ donde la tangente es paralela a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ [este punto se ha denominado $(c, f(c))$]. El TVM es un resultado de «existencia». No dice ni cuántos puntos con esa característica existen ni donde están en el intervalo (a, b).

Volviendo al ejemplo, $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ se puede ver que $f(x)$ cumple los supuestos del TVM, concretamente, $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, 1)$. El TVM garantiza entonces la existencia de al menos un número $c \in (0, 1)$ tal que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$.

En este punto, podríamos preguntarnos por qué un teorema que parece tan simple puede ser tan importante. En las secciones siguientes encontraremos este teorema en la mayor parte de las demostraciones de otros importantes resultados que nos permitirán entender las propiedades de las funciones utilizando el cálculo. Se presenta a continuación un resultado que da sentido físico al teorema.



◀ **Figura 5.17**
El teorema del valor medio garantiza la existencia de un número $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente en $(c, f(c))$ tiene la misma pendiente que la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Ejemplo 7 Un coche se mueve en línea recta. En el instante t (medido en segundos) su posición (medida en metros) es

$$s(t) = \frac{1}{25}t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$$

Demuestre que hay un instante $t \in (0, 10)$ donde la velocidad es igual a la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 10$.

Solución

La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 10$ es

$$\frac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \frac{\frac{1}{25} \cdot 1000 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

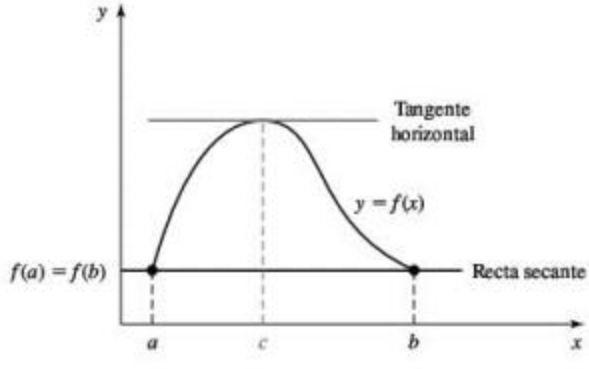
Esto corresponde a la pendiente de la recta secante que une los puntos (0, 0) y (10, 1000). Como $s(t)$ es continua en [0, 10] y derivable en (0, 10), el TVM indica que debe existir un número $c \in (0, 10)$ tal que $s'(c) = 4$ m/s. $s'(c)$ es la velocidad instantánea. Por tanto en algún punto durante este corto viaje, el velocímetro debe haber marcado 4 m/s. ◀

El resto de esta sección está dedicado a la demostración del TVM. El TVM se demuestra generalmente demostrando primero un caso especial del teorema, denominado teorema de Rolle.

Teorema de Rolle Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La Figura 5.18 ilustra el teorema de Rolle. La función de la gráfica está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma los mismos valores en los extremos de dicho intervalo [es decir, $f(a) = f(b)$]. Por tanto la recta secante que conecta los dos extremos es una recta horizontal. Se demostrará que existe un punto en (a, b) con una recta tangente horizontal.

Antes de demostrar el teorema de Rolle, comprobaremos por qué es un caso especial del TVM. Si se comparan los supuestos de los dos teoremas, puede verse



▲ **Figura 5.18**
Ilustración del teorema de Rolle

que el teorema de Rolle tiene un requisito adicional: $f(a) = f(b)$, es decir, los valores de la función deben coincidir en los extremos del intervalo en donde está definida. Si se aplica el TVM a esta función, debe existir un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero como $f(b) = f(a)$, se deduce que la expresión del miembro derecho es igual a 0, es decir, $f'(c) = 0$, que es la conclusión del teorema de Rolle.

Demostración del teorema de Rolle Si f es la función constante, entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y el resultado es cierto. En lo que sigue se supone que f no es constante. Como $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, el teorema de los valores extremos permite deducir que la función tiene un máximo global y un mínimo global en dicho intervalo cerrado. Para ver que la función debe tener un extremo global en el interior del intervalo abierto (a, b), se puede observar que si f no es constante, entonces existe un valor $x_0 \in (a, b)$ tal que, o bien $f(x_0) > f(a) = f(b)$, o $f(x_0) < f(a) = f(b)$. Este extremo global es también un extremo local. Supongamos este extremo local está en $c \in (a, b)$. El teorema de Fermat permite deducir que $f'(c) = 0$ (en la Figura 5.18, el mínimo global se produce en los extremos del intervalo $[a, b]$, pero el máximo global se produce en el intervalo abierto (a, b), donde la tangente es horizontal). ■

El teorema del valor medio es una consecuencia del teorema de Rolle y se puede ver como una versión «inclinada» de dicho teorema (las rectas secante y tangente en el TVM no son necesariamente horizontales [Figura 5.17], como en el teorema de Rolle [Figura 5.18], sino «inclinadas», aunque todavía son paralelas).

Demostración del TVM Se define la siguiente función:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La función F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además,

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

y, por tanto, $F(a) = F(b)$. Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $F(x)$. Existe entonces un valor $c \in (a, b)$ con $F'(x) = 0$. Como

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

se deduce que para este valor de c,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y por tanto

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ ■

Se presentan a continuación dos consecuencias del teorema del valor medio.

Corolario 1 Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), tal que

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M \quad \text{para todo } x \in (a, b)$$

entonces

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

Este corolario es útil para obtener información de una función basándose en su derivada.

Ejemplo 8 Denomine $N(t)$ al tamaño de una población en el instante t y asuma que $N(t)$ es continua en el intervalo $[0, 10]$ y derivable en el intervalo $(0, 10)$ con $N(0) = 100$ y $|dN/dt| \leqslant 3$ para todo $t \in (0, 10)$. ¿Qué se puede decir sobre $N(10)$?

Solución

Como $|dN/dt| \leqslant 3$ implica que $-3 \leqslant dN/dt \leqslant 3$, se puede hacer $m = -3$ y $M = 3$ para aplicar el Corolario 1. Con $a = 0$ y $b = 10$, el Corolario 1 produce la siguiente estimación

$$(-3)(10 - 0) \leqslant N(10) - N(0) \leqslant (3)(10 - 0)$$

Simplificando y despejando $N(10)$ resulta

$$-30 + N(0) \leqslant N(10) \leqslant 30 + N(0)$$

Como $N(0) = 100$, se obtiene

$$70 \leqslant N(10) \leqslant 130$$

Es decir, el tamaño de la población en el instante $t = 10$ está limitado entre 70 y 130. ◀

Ejemplo 9 Demuestre que

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leqslant |b - a|$$

Solución

Si $a = b$, entonces $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} a| \leqslant |a - a|$ es una sentencia verdadera. Se puede suponer por tanto que $a < b$ (el caso de $a > b$ es similar). Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a \leqslant x \leqslant b$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Como $f'(x) = \cos x$ se deduce que

$$-1 \leqslant f'(x) \leqslant 1$$

para todo $x \in (a, b)$. Aplicando el Corolario 1, con $m = -1$ y $M = 1$, se obtiene

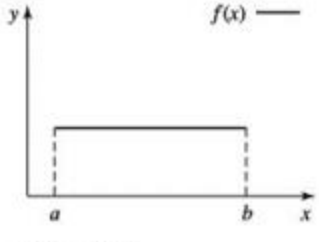
$$-(b - a) \leqslant \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \leqslant (b - a)$$

que es lo mismo que

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leqslant |b - a|$$ ◀

El siguiente corolario es importante, y lo veremos de nuevo en la Sección 5.8.

Corolario 2 Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), con $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.



▲ **Figura 5.19**
Ilustración del Corolario 2

La Figura 5.19 explica por qué el resultado debe ser cierto. Todos los puntos de la gráfica tienen una tangente horizontal, por lo que la función debe ser constante.

Ejemplo 10 Suponga que f es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$, con $f(0) = 2$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Obtenga $f(x)$.

Solución

El Corolario 2 indica que $f(x)$ es constante. Como se sabe que $f(0) = 2$, esto implica que $f(x) = 2$ para todo $x \in [-1, 1]$. ◀

Demostración del Corolario 2 Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Entonces f cumple los supuestos del TVM en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$. Por tanto, existe un número $c \in (x_1, x_2)$, tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Como $f'(c) = 0$, se deduce que $f(x_2) = f(x_1)$. Como x_1, x_2 son números arbitrarios en el intervalo (a, b), se concluye que f es constante. ■

Ejemplo 11 Demuestre que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{para todo } x \in [0, 2\pi]$$

Solución

Esta igualdad se puede demostrar sin utilizar el Cálculo. Pero veamos lo que ocurre si se utiliza el Corolario 2. Se define $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Entonces $f(x)$ es continua en $[0, 2\pi]$ y derivable en $(0, 2\pi)$ con

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos x \operatorname{sen} x = 0$$

Utilizando el Corolario 2, se concluye que $f(x)$ es constante en $[0, 2\pi]$. Para calcular la constante, sólo se necesita evaluar $f(x)$ en un punto del intervalo, por ejemplo, $x = 0$. Se obtiene

$$f(0) = \operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 = 1$$

Esto demuestra la igualdad. ◀

5.1.4. Problemas

(5.1.1)

En los Problemas 1-8, cada una de las funciones es continua y está definida en un intervalo cerrado. Por tanto cumple los supuestos del teorema de los valores extremos. Con la ayuda de una calculadora gráfica, dibuje las funciones y localice los extremos globales (note que una función puede tener un extremo global en más de un punto).

1. $f(x) = 2x - 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

2. $f(x) = -x^2 + 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

4. $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

5. $f(x) = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

6. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$

7. $f(x) = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

8. $f(x) = \ln(x + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

9. Dibuje la gráfica de una función que sea continua en el intervalo cerrado $[0, 3]$ y que tenga un máximo global en el extremo izquierdo del intervalo y un mínimo global en el extremo derecho de intervalo.

10. Dibuje la gráfica de una función que sea continua en el intervalo cerrado $[-2, 1]$ y que tenga un máximo global y un mínimo global en el interior del dominio de dicha función.

11. Dibuje la gráfica de una función que sea continua en el intervalo abierto $(0, 2)$ y que no tenga un máximo global ni un mínimo global en su dominio.

12. Dibuje la gráfica de una función que sea continua en el intervalo cerrado $[1, 4]$ excepto en $x = 2$ y que no tenga un máximo global ni un mínimo global en su dominio.

(5.1.2)

En los Problemas 13-18, utilice una calculadora gráfica para determinar todos los extremos locales y globales de las funciones en sus respectivos dominios.

13. $f(x) = 2 - x$, $x \in [-1, 3)$

14. $f(x) = 5 + 2x$, $x \in (-2, 1)$

15. $f(x) = x^2 - 2$, $x \in [-1, 1]$

16. $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x \in [0, 3]$

17. $f(x) = -x^2 + 1$, $x \in [-2, 1]$

18. $f(x) = x(x - 1)$, $x \in [0, 1]$

19. Demuestre que $f(x) = x^2$ tiene un mínimo local en $x = 0$, y calcule $f'(0)$.

20. Demuestre que $f(x) = (x - 1)^2$ tiene un mínimo local en $x = 1$, y calcule $f'(1)$.

21. Demuestre que $f(x) = -x^2$ tiene un máximo local en $x = 0$, y calcule $f'(0)$.

22. Demuestre que $f(x) = -(x - 2)^2$ tiene un máximo local en $x = 2$, y calcule $f'(2)$.

23. Suponga que $f(x) = x^3$. Demuestre que $f'(0) = 0$ pero $x = 0$ no es un extremo local.

24. Suponga que $f(x) = x^5$. Demuestre que $f'(0) = 0$ pero $x = 0$ no es un extremo local.

25. Suponga que $f(x) = (x + 2)^3$. Demuestre que $f'(-2) = 0$ pero $x = -2$ no es un extremo local.

26. Suponga que $f(x) = -(x - 1)^5$. Demuestre que $f'(1) = 0$ pero $x = 1$ no es un extremo local.

27. Demuestre que $f(x) = |x|$ tiene un mínimo local en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$.

28. Demuestre que $f(x) = |x - 1|$ tiene un mínimo local en $x = 1$ pero $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

29. Demuestre que $f(x) = |x^2 - 1|$ tiene un mínimo local en $x = 1$ y $x = -1$ pero no es derivable en $x = 1$.

30. Demuestre que $f(x) = -|x^2 - 4|$ tiene máximos locales en $x = 2$ y $x = -2$ pero $f(x)$ no es derivable en $x = 2$ ni en $x = -2$.

31. Dibuje

$$f(x) = |1 - |x||, \quad -1 \leqslant x \leqslant 2$$

y determine todos los extremos locales y globales en $[-1, 2]$.

32. Dibuje

$$f(x) = -\,||x| - 2|, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$$

y determine todos los extremos locales y globales en $[-3, 3]$.

33. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es $N(t)$, y que su velocidad de crecimiento se expresa mediante la función de crecimiento logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad t \geqslant 0$$

siendo r y K constantes positivas.

(a) Dibuje la velocidad de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ en función de N para $r = 2$ y $K = 100$, y calcule el tamaño de la población para el que la velocidad de crecimiento es máxima.

(b) Demuestre que $f(N) = rN(1 - N/K)$, $N \geqslant 0$, es derivable para $N > 0$, y calcule $f'(N)$.

(c) Demuestre que $f'(N) = 0$ para el valor de N que determinó en el apartado (a) cuando $r = 2$ y $K = 100$.

34. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es $N(t)$, y que su velocidad de crecimiento viene dada por la función de crecimiento logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad t \geqslant 0$$

siendo r y K constantes positivas. La velocidad de crecimiento per cápita se define como

$$g(N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$$

(a) Demuestre que

$$g(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

(b) Dibuje $g(N)$ en función de N para $N \geqslant 0$ cuando $r = 2$ y $K = 100$, y calcule el tamaño de la población para el que la velocidad de crecimiento per cápita es máxima.

(5.1.3)

35. Suponga que $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$.

(a) Calcule la pendiente de la recta secante que conectan los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$.

(b) Calcule un número $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c)$ sea igual a la pendiente de la recta secante que se calculó en el apartado (a) y explique por qué debe existir ese número en el intervalo $(0, 2)$.

36. Suponga que $f(x) = 1/x$, $x \in [1, 2]$.

(a) Calcule la pendiente de la recta secante que conectan los puntos $(1, 1)$ y $(2, 1/2)$.

(b) Calcule un número $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c)$ sea igual a la pendiente de la recta secante que se calculó en el apartado (a) y explique por qué debe existir ese número en el intervalo $(1, 2)$.

37. Suponga que $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. Utilice el TVM para demostrar que existe un punto $c \in [-1, 1]$ con una tangente horizontal. Calcule c.

38. Suponga que $f(x) = x^2 - x - 2$, $x \in [-1, 2]$. Utilice el TVM para demostrar que existe un punto $c \in [-1, 2]$ con una tangente horizontal. Calcule c.

39. Sea $f(x) = x(1 - x)$. Utilice el TVM para obtener un intervalo que contenga un número c tal que $f'(c) = 0$.

40. Sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Utilice el TVM para obtener un intervalo que contenga un número c tal que $f'(c) = 0$.

41. Suponga que $f(x) = -x^2 + 2$. Explique por qué existe un punto c en el intervalo $(-1, 2)$ tal que $f'(c) = -1$.

42. Suponga que $f(x) = x^3$. Explique por qué existe un punto c en el intervalo $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 1$.

43. Dibuje la gráfica de una función $f(x)$ que sea continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, 1)$, tal que exista exactamente un punto en su gráfica, $(c, f(c))$, en el que la pendiente de la recta tangente sea igual a la pendiente de la recta secante que une los puntos $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$. ¿Por qué se puede suponer que existe ese punto?

44. Dibuje la gráfica de una función $f(x)$ que sea continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, 1)$, tal que existan exactamente dos puntos en su gráfica, $(c_1, f(c_1))$ y $(c_2, f(c_2))$, en los que la pendiente de las rectas tangentes sean iguales a la pendiente de la recta secante que une los puntos $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$. ¿Por qué se puede suponer que existe al menos uno de esos puntos?

45. Suponga que $f(x) = x^2$, $x \in [a, b]$.

(a) Calcule la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

(b) Calcule el punto $c \in (a, b)$ tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$ sea igual a la pendiente de la recta secante determinada en el apartado (a). ¿Cómo se puede saber que ese punto existe? Demuestre que c es el punto medio de intervalo (a, b), es decir, $c = (a + b)/2$.

46. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Demuestre que si $f(a) < f(b)$, entonces f' es positiva en algún punto entre a y b.

47. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además, suponga que $f(a) = f(b) = 0$ pero que f no es constante en $[a, b]$. Explique por qué debe existir un punto $c_1 \in (a, b)$ con $f'(c_1) > 0$, y un punto $c_2 \in (a, b)$ con $f'(c_2) < 0$.

48. Un coche se mueve en línea recta. En el instante t (medido en segundos) su posición (medida en metros) es

$$s(t) = \frac{1}{10}t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 10$$

(a) Calcule su velocidad media entre $t = 0$ y $t = 10$.

(b) Calcule su velocidad instantánea para $t \in (0, 10)$.

(c) ¿En qué momento es la velocidad instantánea del coche igual a su velocidad media?

49. Un coche se mueve en línea recta. En el instante t (medido en segundos) su posición (medida en metros) es

$$s(t) = \frac{1}{100}t^3,\ 0 \leqslant t \leqslant 5$$

(a) Calcule su velocidad media entre $t = 0$ y $t = 5$.

(b) Calcule su velocidad instantánea para $t \in (0, 5)$.

(c) ¿En qué momento es la velocidad instantánea del coche igual a su velocidad media?

50. Denomine $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t y suponga que $N(0) = 50$ y $|dN/dt| \leqslant 2$ para todo $t \in [0, 5]$. ¿Qué se puede decir sobre $N(5)$?

51. Denomine $B(t)$ la biomasa en el instante t y suponga que $B(0) = 3$ y $|dB/dt| \leqslant 1$ para todo $t \in [0, 3]$. ¿Qué se puede decir sobre $B(3)$?

52. Suponga que f es derivable para todo $x \in \mathbf{R}$ y, además, que f cumple que $f(0) = 0$ y $1 \leqslant f'(x) \leqslant 2$ para todo $x > 0$.

(a) Utilice el Corolario 1 del TVM para demostrar que

$$x \leqslant f(x) \leqslant 2x$$

para todo $x \geqslant 0$.

(b) Utilice el resultado obtenido en el apartado (a) para explicar por qué $f(1)$ no puede ser igual a 3.

(c) Calcule un límite superior e inferior para el valor de $f(1)$.

53. Suponga que f es derivable para todo $x \in \mathbf{R}$ con $f(2) = 3$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Calcule $f(x)$.

54. Suponga que $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in [-2, 2]$.

(a) Demuestre que $f(-2) = f(2)$.

(b) Calcule $f'(x)$, donde esté definida.

(c) Demuestre que no existe ningún número $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

(d) Explique por qué sus resultados de los apartados (a) y (c) no contradicen el teorema de Rolle.

(e) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $f(x)$.

55. Utilice el Corolario 2 del TVM para demostrar que si $f(x)$ es derivable para todo $x \in \mathbf{R}$ y satisface

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2 \tag{5.3}$$

para todo x, $y \in \mathbf{R}$, entonces es constante. [*Sugerencia*: demuestre que (5.3) implica que

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0 \tag{5.4}$$

y utilice la definición de derivada para interpretar el miembro izquierdo de la Ecuación (5.4)].

56. Hemos visto que

$$f(x) = f_0 e^{rx}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{df}{dx} = rf(x)$$

con $f(0) = f_0$. En este ejercicio se demostrará que de hecho esta es la única solución. Suponga que r es una constante y f una función derivable, siendo

$$\frac{df}{dx} = rf(x) \tag{5.5}$$

para todo $x \in \mathbf{R}$ y siendo $f(0) = f_0$. Los siguientes pasos servirán para demostrar que $f(x) = f_0 e^{rx}$, $x \in \mathbf{R}$, es la única solución de la Ecuación (5.5).

(a) Defina la función

$$F(x) = f(x)e^{-rx},\quad x \in \mathbf{R}$$

Utilice la regla del producto para demostrar que

$$F'(x) = e^{-rx}[f'(x) - rf(x)]$$

(b) Utilice el apartado (a) y la Ecuación (5.5) para demostrar que $F'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

(c) Utilice el Corolario 2 para demostrar que $F(x)$ es constante, y por tanto que $F(x) = F(0) = f_0$.

(d) Demuestre que (c) implica que

$$f_0 = f(x)e^{-rx}$$

y por tanto que

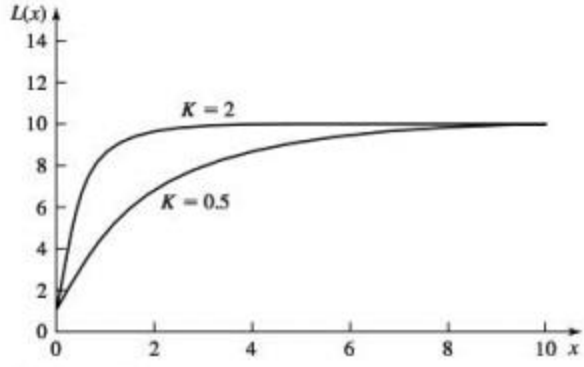
$$f(x) = f_0 e^{rx}$$

5.2 MONOTONÍA Y CONCAVIDAD

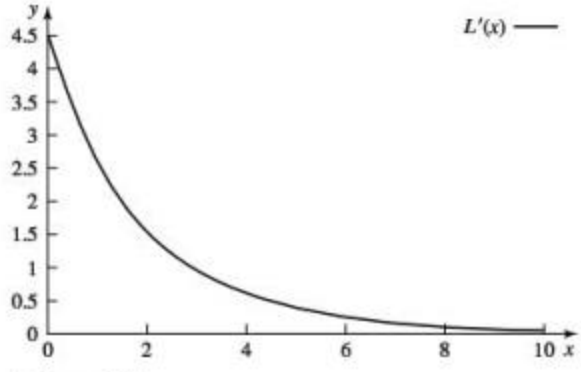
Los peces crecen indefinidamente, es decir, incrementan el tamaño de su cuerpo durante toda su vida. Sin embargo, a medida que aumenta su edad, crecen proporcionalmente de forma más lenta. Su crecimiento se describe a menudo de forma matemática mediante la ecuación de von Bertalanffy, que se ajusta a un gran número de peces tanto de agua dulce como de agua salada. Dicha ecuación se expresa como

$$L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-Kx}$$

siendo $L(x)$ la longitud a la edad x, L_0 la longitud a edad 0, y L_∞ la máxima longitud alcanzable asintóticamente. Se supone que $L_\infty > L_0$. K está relacionada con la rapidez de crecimiento del pez. La Figura 5.20 muestra ejemplos para dos valores



▲ **Figura 5.20**
La función $L(x)$ para $L_0 = 1$, $L_\infty = 10$ y $K = 0.5$ y $K = 2$



▲ **Figura 5.21**
Gráfica de $L'(x)$ para $L_0 = 1$, $L_\infty = 10$ y $K = 0.5$

diferentes de K. L_∞ y L_0 valen lo mismo en los dos casos. Observando las gráficas, puede verse que cuanto mayor es K, la longitud asintótica L_∞ se alcanza más rápidamente.

El hecho de que los peces aumentan el tamaño de su cuerpo durante toda su vida se puede expresar matemáticamente utilizando la primera derivada de la función $L(x)$. Observando la gráfica de $L(x)$, puede verse que es una función creciente con x. La recta tangente en cualquier punto de la gráfica tiene una pendiente positiva, o, de forma equivalente, $L'(x) > 0$. Se puede calcular $L'(x)$, concretamente,

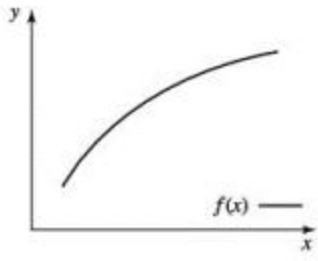
$$L'(x) = K(L_\infty - L_0)e^{-Kx}$$

Como $L_\infty > L_0$ (por hipótesis) y $e^{-Kx} > 0$ (esto se cumple para todo x, independientemente de K), se puede ver que de hecho $L'(x) > 0$. La Figura 5.21 ilustra la gráfica de $L'(x)$.

La gráfica de $L'(x)$ muestra que es una función decreciente con x. Aunque los peces aumentan el tamaño de su cuerpo durante toda su vida, lo hacen con una velocidad que disminuye con su edad. Matemáticamente, esto se puede expresar utilizando la segunda derivada de $L(x)$, es decir, la derivada de su primera derivada. La recta tangente en cualquier punto de la gráfica de $L'(x)$ tiene una pendiente negativa, es decir, la derivada de $L'(x)$ es negativa: $L''(x) < 0$. El hecho de que la velocidad de crecimiento disminuye con la edad se puede ver también directamente en la gráfica de $L(x)$. Se curva hacia abajo. Por tanto, la segunda derivada proporciona alguna información sobre la forma en la que se curva la gráfica de $L(x)$.

En esta sección se presentan los importantes conceptos de monotonía, que se relaciona con el carácter creciente o de creciente de una función, y de concavidad, que se relaciona con la curvatura hacia arriba o hacia abajo de la función.

5.2.1 Monotonía



▲ **Figura 5.22**
Función creciente

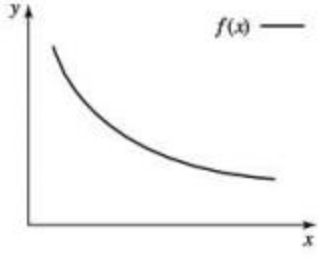
En el ejemplo inicial hemos visto que la primera derivada nos dice algo sobre si la función crece o decrece. No todas las funciones son derivables, sin embargo, por lo que la definición de función creciente y decreciente se expresará en términos de la propia función f (*véanse* las Figuras 5.22 y 5.23).

Definición Una función f definida en un intervalo I se denomina **(estrictamente) creciente** en I si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se denomina **(estrictamente) decreciente** en I si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$



▲ **Figura 5.23**
Función decreciente

Las funciones crecientes o decrecientes se denominan **monótonas**. La palabra *estrictamente* en la definición anterior se refiere a tener una inecuación estricta ($f(x_1) < f(x_2)$ y $f(x_1) > f(x_2)$). Frecuentemente omitiremos la palabra *estrictamente*. Si en lugar de la inecuación estricta $f(x_1) < f(x_2)$ tenemos la inecuación $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I, se dice que f es no decreciente. Si $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I, f se denomina no creciente (*véanse* las Figuras 5.24 y 5.25).

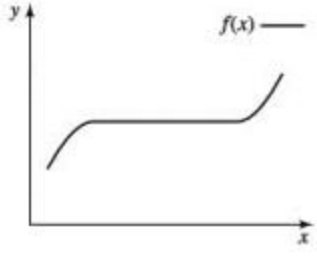
Cuando la función f es derivable, existe un test útil para determinar si es creciente o decreciente. Es una consecuencia del teorema del valor medio.

TEST DE LA PRIMERA DERIVADA PARA COMPROBAR LA MONOTONÍA

Sea una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

(a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

(b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.



▲ **Figura 5.24**
Una función no decreciente puede tener regiones donde su valor es constante

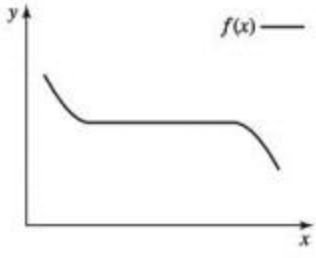
Demostración (*Véase* la Figura 5.26). Se escogen dos números x_1 y x_2 en $[a, b]$, $x_1 < x_2$. Entonces f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). Por tanto se puede aplicar el teorema de valor medio a f definida en $[x_1, x_2]$: existe un número $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

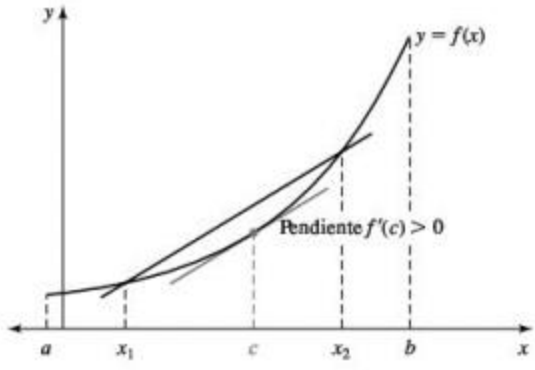
En la parte (a) del teorema, se supone que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Como $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, se deduce que $f'(c) > 0$. Como además $x_1 < x_2$, resulta que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$$

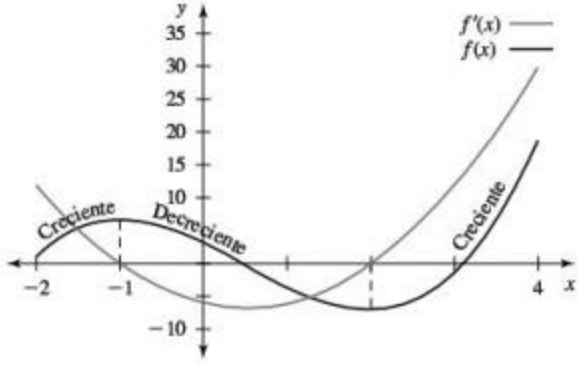
lo que implica que $f(x_1) < f(x_2)$. Como x_1 y x_2 son números arbitrarios en $[a, b]$ que cumplen $x_1 < x_2$, se deduce que f es creciente. La demostración de la parte (b) es similar y se considerará en el Problema 24. ■



▲ **Figura 5.25**
Una función no creciente puede tener regiones donde su valor es constante



◀ **Figura 5.26**
Ilustración de la demostración de «$f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ implica que $f(x)$ es creciente en $[a, b]$»



▲ **Figura 5.27**
Gráficas de $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$ y de $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

Ejemplo 1 Determine dónde es creciente y decreciente la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3, \quad x \in \mathbf{R}$$

Solución

Como $f(x)$ es continua y derivable para todo $x \in \mathbf{R}$, se puede usar la prueba de la primera derivada para comprobar la monotonía de funciones. Si se deriva $f(x)$ se obtiene

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x - 2)(x + 1), \quad x \in \mathbf{R}$$

Las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$ se muestran en la Figura 5.27. La gráfica de $f'(x)$ es una parábola que corta al eje x en $x = 2$ y $x = -1$. Por tanto, la función $f'(x)$ cambia de signo en $x = -1$ y $x = 2$. Entonces

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 2 \\ < 0 & \text{si } -1 < x < 2 \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente para $x < -1$ o $x > 2$ y decreciente para $-1 < x < 2$. Esto se puede confirmar observando la gráfica de $f(x)$ de la Figura 5.27. ◀

Ejemplo 2 Los parasitoides son insectos cuyas larvas se desarrollan dentro de otros insectos huéspedes. Esto puede matar al huésped. Un ejemplo es el parasitoide *Macrocentrus grandii*, una avispa, que parasita a la *Ostrinia nubilis*, un insecto del maíz

europeo. Para entender las interacciones entre el parasitoide y su huésped, se han desarrollado un gran número de modelos. La función

$$f(N) = \left(1 + \frac{a\beta P}{k(\beta + aN)}\right)^{-k}$$

es un ejemplo de la verosimilitud de que un huésped escape al parasitismo en función de la densidad de huéspedes N, siendo a, β y k parámetros positivos y P la densidad de parasitoides. Basándose en $f(N)$, ¿cuál es el efecto de incrementar la densidad de huéspedes en la verosimilitud de escapar al parasitismo?

Solución

Para obtener el efecto de incrementar la densidad de huéspedes, se calcula la derivada de $f(N)$:

$$\frac{df}{dN} = (-k)\left[1 + \frac{a\beta P}{k(\beta + aN)}\right]^{-k-1} \frac{-a^2\beta P}{k(\beta + aN)^2}$$

$$= \left[1 + \frac{a\beta P}{k(\beta + aN)}\right]^{-k-1} \frac{a^2\beta P}{(\beta + aN)^2}$$

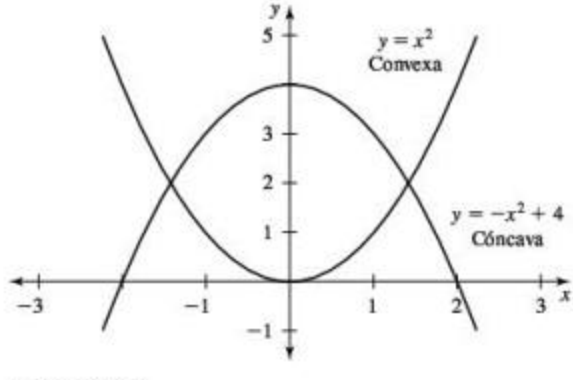
Ambos factores en la expresión final son positivos. Por tanto, $df/dN > 0$. Expresando en palabras, si la densidad de parasitoides es fija y la densidad de huéspedes aumenta, es más verosímil que los huéspedes escapen al parasitismo en los casos donde la interacción se describa mediante la función $f(N)$. ◀

5.2.2 Concavidad

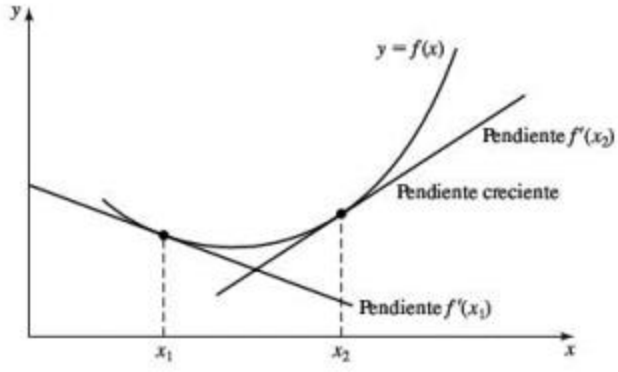
En el ejemplo inicial de esta sección se ha visto que la segunda derivada nos indica algo acerca de la curvatura de la función. Se llegó a esta conclusión comprobando si la primera derivada era creciente o decreciente.

Una función se denomina **convexa** si se curva hacia arriba y se denomina **cóncava** si se curva hacia abajo. Antes de dar una definición precisa de concavidad para funciones derivables, se darán dos ejemplos, que se ilustran en la Figura 5.28.

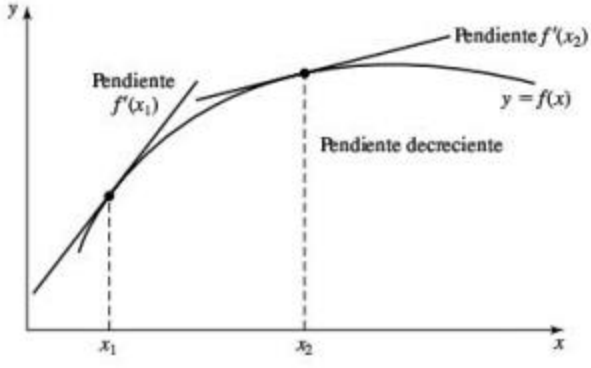
Obsérvese en primer lugar la gráfica de la función derivable $y = x^2$. Se curva hacia arriba, por lo que es convexa. Curvarse hacia arriba significa que las pendientes de las rectas tangentes aumentan al aumentar x. Esto se puede comprobar



▲ **Figura 5.28**
Gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 4$



▲ **Figura 5.29**
Una función es convexa si su derivada es creciente



▲ **Figura 5.30**
Una función es cóncava si su derivada es decreciente

calculando la pendiente de la recta tangente en x, que está dada por la primera derivada $y' = 2x$. Como $y' = 2x$ es una función creciente, las pendientes de las rectas tangentes aumentan al crecer x.

Observando la gráfica de la función derivable $y = -x^2 + 4$, se puede ver que se curva hacia abajo, por lo que se trata de una función cóncava. Curvarse hacia abajo significa que las pendientes de las rectas tangentes decrecen al aumentar x. Esto se puede comprobar calculando la primera derivada de y, que es $y' = -2x$, una función decreciente.

La definición siguiente, válida para funciones derivables, se basa en el razonamiento anterior (*véanse* las Figuras 5.29 y 5.30).

Definición Una función derivable $f(x)$ es **convexa** en un intervalo I si su primera derivada $f'(x)$ es una función creciente en I. Es **cóncava** en un intervalo I si su primera derivada es una función decreciente en I.

Nótese que la definición asume que $f(x)$ es derivable. Existe una definición más general que no requiere esta condición (después de todo, no todas las funcio-

nes son derivables). La definición más general es más difícil de utilizar. La definición dada aquí es suficiente para nuestros propósitos y tiene el valor añadido de que proporciona un criterio para determinar si una función derivable dos veces es cóncava o convexa.

TEST DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA COMPROBAR LA CONCAVIDAD

Suponga que f es derivable dos veces en un intervalo abierto I.

(a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I.

Demostración Como f es derivable dos veces, se puede aplicar el criterio de la primera derivada a la función $f'(x)$. La demostración de la parte (a) es entonces como sigue. Si $f''(x) > 0$ en I, entonces $f'(x)$ es una función creciente en I. Utilizando la definición de función convexa, se deduce que f es convexa en I. La demostración de la parte (b) es similar y se considerará en el Problema 25. ■

Se puede utilizar la función $y = x^2$ para recordar fácilmente la forma de las funciones convexas, ya que dicha función es convexa. Además, esta función se puede utilizar también para recordar el criterio de la segunda derivada. Ya sabemos que $y = x^2$ es convexa, y su segunda derivada se puede calcular fácilmente: $y'' = 2 > 0$.

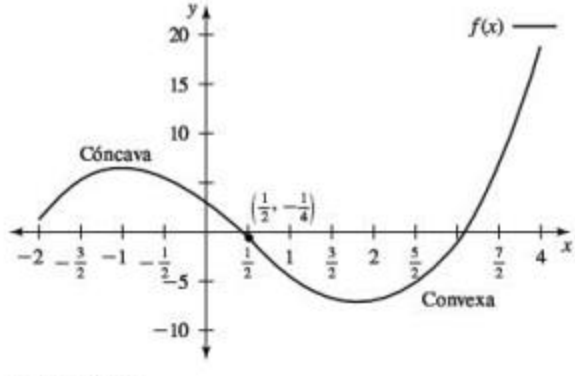
Ejemplo 3 Determine dónde es cóncava y convexa la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3, \quad x \in \mathbf{R}$$

Solución

Es la misma función utilizada en el Ejemplo 1 (que se vuelve a presentar en la Figura 5.31). Como $f(x)$ es un polinomio, es derivable dos veces. En el Ejemplo 1, vimos que $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Derivando $f'(x)$, se obtiene la segunda derivada de f,

$$f''(x) = 6x - 3$$



▲ **Figura 5.31**
Gráfica de $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$

Se obtiene

$$f''(x)\begin{cases} > 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \\ < 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ es convexa para $x > 1/2$ y cóncava para $x < 1/2$. Observando la Figura 5.31 se confirma este resultado. ◀

Un error muy común es asociar monotonía y concavidad. No tienen nada que ver. Por ejemplo, una función creciente puede curvarse hacia arriba o hacia abajo (esto se verá en el Problema 21).

Existen muchos ejemplos biológicos de funciones crecientes que tienen una derivada decreciente y por tanto son cóncavas.

Ejemplo 4 La respuesta de una producción de maíz Y al nivel de nitrógeno en el suelo N se puede modelar frecuentemente mediante una función de la forma

$$Y(N) = Y_{\max}\frac{N}{K+N}, \quad N \geqslant 0$$

siendo $Y_{\max}$ la máxima producción posible y K una constante positiva. La Figura 5.32 muestra la gráfica de la función $Y(N)$. Observando la gráfica, resulta obvio que $Y(N)$ es una función creciente con N. La gráfica se curva hacia abajo, y por tanto es una función cóncava. Antes de continuar, comprobaremos esto utilizando los resultados de esta sección. Utilizando la regla del cociente, se obtiene

$$Y'(N) = Y_{\max}\frac{K+N-N}{(K+N)^2} = Y_{\max}\frac{K}{(K+N)^2}$$

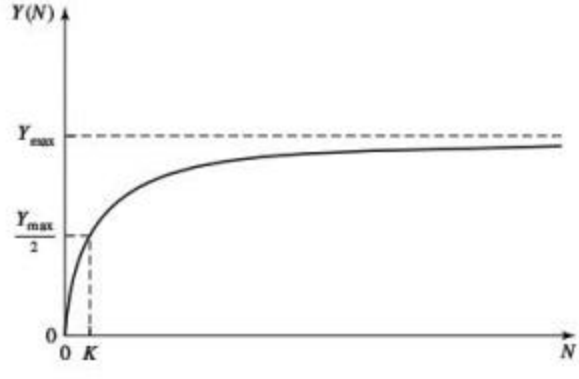
Y utilizando la regla de la cadena,

$$Y''(N) = \frac{d}{dN}\left(Y_{\max}K(K+N)^{-2}\right)$$

$$= Y_{\max}K(-2)(K+N)^{-3}(1) = -Y_{\max}\frac{2K}{(K+N)^3}$$

Como $Y_{\max}$ y K son constantes positivas y $N \geqslant 0$, se deduce que

$$Y'(N) > 0$$



▲ **Figura 5.32**
Gráfica de $Y(N)$ en el Ejemplo 4

lo que implica que $Y(N)$ es una función creciente. Además

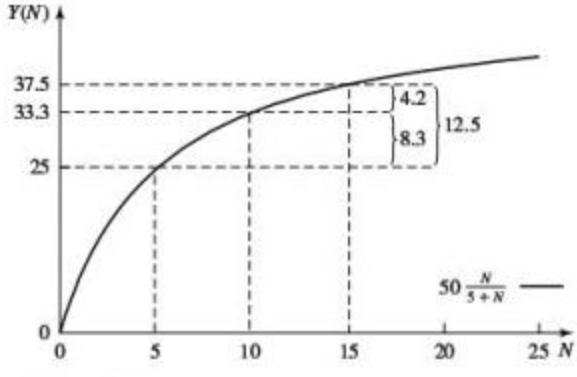
$$Y''(N) < 0$$

lo que implica que $Y(N)$ es cóncava. Es decir, $Y(N)$ es una función creciente pero la velocidad con la que crece esta disminuyendo. Se dice que Y crece a *velocidad decelerada* ¿Qué significa esto? A medida que se aumentan los niveles de fertilizante, la producción se incrementará pero con una velocidad proporcionalmente menor. Esto se denomina *retorno en disminución*. Para concretar, escogeremos unos valores para Y_{max} y K:

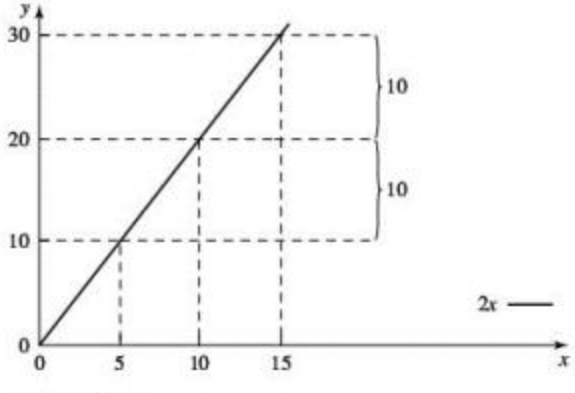
$$Y(N) = 50\,\frac{N}{5+N}, \quad N \geqslant 0$$

La Figura 5.33 muestra la gráfica de esta función.

Supongamos que inicialmente $N = 5$. Si se incrementa N en 5 unidades, es decir, desde 5 hasta 10, entonces $Y(N)$ cambia desde $Y(5) = 25$ hasta $Y(10) = 33.3$, un incremento de 8.3. Si se aumenta N el doble, concretamente 10, es decir, desde 5 hasta 15, entonces $Y(15) = 37.5$ y el incremento en la producción es solamente de 12.5, que es menor que el doble de 8.3. Esto se puede explicar también comparando incrementos sucesivos. Si empieza con $N = 5$ y se incrementa en 5 unidades hasta $N = 10$, entonces el cambio en Y (el incremento de Y) es 8.3. Al aumentar N en la misma cantidad empezando en 10, el incremento de Y es $Y(5) - Y(10) = 4.2$.



▲ **Figura 5.33**
Gráfica de $Y(N)$ en el Ejemplo 4 para $Y_{max} = 50$ y $K = 5$



▲ **Figura 5.34**
Gráfica de una función lineal: los incrementos son proporcionales

El cambio de N en incrementos iguales tiene menos efecto para valores grandes de N, por lo que se dice que el retorno disminuye.

Es interesante comparar esto con una función lineal, por ejemplo $f(x) = 2x$, que no es ni cóncava ni convexa (*véase* la Figura 5.34). Si se incrementa x desde 5 hasta 10, $f(x)$ cambia desde 10 hasta 20, es decir, $f(x)$ se incrementa en 10. Cuando x se incrementa desde 10 hasta 15, $f(x)$ cambia desde 20 hasta 30, de nuevo un incremento de 10. Es decir, en funciones lineales los incrementos son proporcionales. ◀

5.2.3. Problemas

En los Problemas 1-20, determine si las funciones son crecientes, decrecientes, cóncavas y convexas. Con la ayuda de una calculadora gráfica, dibuje las gráficas de las funciones y etiquete los intervalos dónde sean crecientes, decrecientes, cóncavas y convexas. Compruebe que sus gráficas y sus cálculos concuerdan.

1. $y = 3x - x^2$, $x \in \mathbf{R}$
2. $y = x^2 + 5x$, $x \in \mathbf{R}$
3. $y = x^2 + x - 4$, $x \in \mathbf{R}$
4. $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$
5. $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + 4$, $x \in \mathbf{R}$
6. $y = (x-2)^3 + 3$, $x \in \mathbf{R}$
7. $y = \sqrt{x+1}$, $x \geqslant -1$
8. $y = \sqrt[3]{2x-3}$, $x \in \mathbf{R}$
9. $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
10. $y = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$
11. $(x^2+1)^{1/3}$, $x \in \mathbf{R}$
12. $y = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$
13. $y = \frac{1}{(1+x)^2}$, $x \neq -1$
14. $y = \frac{x}{x+1}$, $x \geqslant 0$
15. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
16. $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
17. $y = e^x$, $x \in \mathbf{R}$
18. $y = e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$
19. $y = e^{-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$
20. $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbf{R}$
21. Dibuje la gráfica de una función que sea

(a) Creciente con velocidad acelerada.

(b) Creciente con velocidad decelerada.

(c) Suponga que sus funciones de (a) y (b) son derivables dos veces. Comente en cada caso cómo se podrían explicar las propiedades respectivas utilizando las derivadas primera y segunda ¿Cuál de las funciones es convexa y cuál es cóncava?

22. Demuestre que si $f(x)$ es la función lineal $y = mx + b$, entonces los incrementos en $f(x)$ son proporcionales a los incrementos en x. Es decir, si x se incrementa en Δx, entonces $f(x)$ se incrementa en la misma cantidad Δy independientemente del valor de x. Calcule Δy en función de Δx. Ilustre esta idea gráficamente.

23. Es frecuente tener que resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. Cuando $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces el teorema del valor intermedio garantiza que existe al menos una solución a la ecuación $f(x) = 0$ en $[a, b]$.

(a) Explique con palabras por qué hay exactamente una solución en (a, b) si, además, $f(x)$ es derivable en (a, b) y $f'(x)$ es o bien estrictamente positiva estrictamente negativa en el intervalo (a, b).

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para demostrar que

$$x^3 - 4x + 1 = 0$$

tiene exactamente una solución en $[-1, 1]$.

24. (*Test de la primera derivada para comprobar la monotonía*) Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Demuestre que si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

25. (*Test de la segunda derivada para comprobar la concavidad*) Suponga que f es dos veces derivable en un intervalo abierto I. Demuestre que si $f''(x) < 0$, entonces f es cóncava.

26. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es $N(t)$, y su velocidad de crecimiento se expresa mediante la función de crecimiento logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad t \geqslant 0$$

siendo r y K constantes positivas.

(a) Dibuje la velocidad de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ en función de N para $r = 3$ y $K = 10$.

(b) La función $f(N) = rN(1 - N/K)$, $N \geqslant 0$, es derivable para $N > 0$. Calcule $f'(N)$ y determine dónde es $f(N)$ creciente y dónde es decreciente.

27. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es $N(t)$, y su velocidad de crecimiento se expresa mediante la función de crecimiento logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad t \geqslant 0$$

siendo r y K constantes positivas. La velocidad de crecimiento per cápita se define como

$$g(N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

(a) Dibuje $g(N)$ en función de N para $N \geqslant 0$ para $r = 3$ y $K = 10$.

(b) La función $g(N) = r(1 - N/K)$, $N \geqslant 0$, es derivable para $N > 0$. Calcule $g'(N)$ y determine dónde es $g(N)$ creciente y dónde es decreciente.

28. La velocidad de crecimiento de una planta depende de la cantidad de recursos disponibles. Un modelo simple y frecuentemente utilizado para el crecimiento dependiente de los recursos es el modelo de Monod, en el que la velocidad de crecimiento es igual a

$$f(R) = \frac{aR}{k + R}, \quad R \geqslant 0$$

Aquí, R indica el nivel del recurso, y a y k son constantes positivas ¿Cuándo es creciente en la velocidad de crecimiento? ¿Cuándo es decreciente?

29. Suponga que la velocidad de crecimiento de una población se expresa como

$$f(N) = N\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right)$$

siendo N el tamaño de la población, K una constante positiva que indica la capacidad de alojamiento, y θ un parámetro mayor que 1. Calcule $f'(N)$ y determine dónde es creciente y decreciente la velocidad de crecimiento.

30. Los gusanos de las yemas del abeto son una importante plaga que desfolia los pinos del Canadá. Sus depredadores son los pájaros. Un modelo para la velocidad de depredación per cápita es el siguiente

$$f(N) = \frac{aN}{k^2 + N^2}$$

siendo N la densidad de gusanos y a y k constantes positivas. Calcule $f'(N)$ y determine dónde es creciente y decreciente la velocidad de depredación.

31. Los parasitoides son insectos que depositan huevos en el interior o cerca de otros insectos (huéspedes). Las larvas de los parasitoides devoran al insecto huésped. El resultado es la muerte de dicho insecto. La verosimilitud de escapar al parasitismo puede depender de la densidad de parasitoides. Uno de los modelos establece que la probabilidad de escapar al parasitismo es igual a

$$f(P) = e^{-aP}$$

siendo P la densidad de parasitoides y a y k constantes positivas. Determine si la probabilidad de escapar al parasitismo crece o decrece con la densidad de parasitoides.

32. Los parasitoides son insectos que depositan huevos en el interior o cerca de otros insectos (huéspedes). Las larvas de los parasitoides devoran al insecto huésped. El resultado es la muerte de dicho insecto. La verosimilitud de escapar al parasitismo puede depender de la densidad de parasitoides. Uno de los modelos establece que la probabilidad de escapar al parasitismo es igual a

$$f(P) = \left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k}$$

siendo P la densidad de parasitoides y a y k constantes positivas. Determine si la probabilidad de escapar al parasitismo crece o decrece con la densidad de parasitoides.

33. Suponga que la altura en pies (y) de un árbol es función de la edad del árbol en años (x), y está dada por

$$y = 117e^{-10/x}, \quad x > 0$$

(a) Demuestre que la altura del árbol se incrementa con su edad ¿Cuál es la máxima altura alcanzable?

(b) ¿Dónde es convexa la gráfica de la altura en general y dónde es cóncava?

(c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de la altura frente a la edad.

(d) Utilice una calculadora gráfica para verificar que la velocidad de crecimiento es máxima en el punto donde la gráfica de (c) cambia su concavidad.

34. Las plantas emplean dos estrategias reproductivas básicas: policárpica, en la que la reproducción se produce repetidamente durante el tiempo de vida del organismo, y monocárpica, en la que la reproducción sólo se produce una vez durante el tiempo de vida del organismo (el bambú, por ejemplo, es una planta monocárpica). La siguiente cita está extraída de Iwasa *et al.* (1995):

> La estrategia óptima es policárpica (reproducción repetida) si el éxito reproductivo se incrementa con la inversión en reproducción con velocidad decreciente, y es monocárpica (reproducción «big bang») o intermitente si el éxito reproductivo se incrementa con velocidad creciente.

(a) Dibuje la gráfica del éxito reproductivo en función de la inversión en reproducción para los casos de (i) reproducción policárpica y (ii) reproducción monocárpica.

(b) Dado que la segunda derivada describe si una función se curva hacia arriba o hacia abajo, explique la cita en términos de la segunda derivada de la función de éxito reproductivo.

35. Suponga que la siguiente fórmula (Iwasa *et al.*, 1995) expresa la relación entre el número de flores de una planta, F, y el número medio de visitas de polinizadores, $X(F)$:

$$X(F) = cF^{\gamma}$$

siendo c una constante positiva. Calcule el intervalo de valores del parámetro γ para los que el número medio de visitas de polinizadores a una planta se incrementa con el número de flores F pero la velocidad de incremento disminuye con F. Explique su respuesta en términos de las derivadas apropiadas de la función $X(F)$.

36. Suponga que la dependencia del número medio de polinizadores que visitan una planta, X, con el número de flores, F, está dada por

$$X(F) = cF^{\gamma}$$

siendo γ una constante positiva menor que 1 y c una constante positiva (Iwasa *et al.*, 1995). ¿Cómo varía el número medio de granos de polen exportados por flor, $E(F)$, en función del número de flores de la planta, F, si $E(F)$ es proporcional a

$$1 - \exp\left[-k\frac{X(F)}{F}\right]$$

siendo k una constante positiva?

37. Denomine $N(t)$ el tamaño de una población y suponga que cumple

$$\frac{dN}{dt} = Ne^{-aN} - N^2$$

siendo a una constante positiva.

(a) Demuestre que el equilibrio no trivial N^* cumple

$$e^{-aN^*} = N^*$$

(b) Suponga ahora que el equilibrio no trivial N^* es función del parámetro a. Utilice derivación implícita para demostrar que N^* es una función decreciente de a.

38. Denomine $N(t)$ el tamaño de una población y suponga que cumple

$$\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - N\ln N$$

siendo K una constante positiva.

(a) Demuestre que si $K > 1$, existe entonces un equilibrio no trivial $N^* > 0$ que cumple

$$1 - \frac{N^*}{K} = \ln N^*$$

(b) Asuma ahora que el equilibrio no trivial N^* es una función del parámetro K. Utilice derivación implícita para demostrar que N^* es una función creciente de K.

39. (*Un modelo simple de competición intraespecífica*) (Adaptado de Bellows, 1981). Suponga que una parcela de estudio contiene N plantas anuales, cada una de las cuales produce S semillas que se siembran en la misma parcela. El número de plantas supervivientes al año siguiente se expresa como

$$A(N) = \frac{NS}{1 + (aN)^b} \tag{5.6}$$

para algunas constantes positivas a y b. Este modelo matemático incorpora mortalidad dependiente de la densidad. Concretamente, cuanto mayor es el número de plantas en la parcela, menor es el número de los descendientes supervivientes por planta, que está dado por $A(N)/N$ y se denomina *velocidad reproductiva neta*.

(a) Utilice el cálculo para demostrar que $A(N)/N$ es una función decreciente de N.

(b) La siguiente cantidad, denominada *valor k*, se puede utilizar para cuantificar los efectos de la competición intraespecífica (de decir, competición entre individuos de la misma especie):

$$k = \log[\text{densidad inicial}] - \log[\text{densidad final}]$$

donde log indica logaritmo en base 10. La densidad inicial es el producto del número de plantas (N) por el número de semillas que produce cada planta (S). La densidad final está dada por la expresión (5.6). Demuestre que para el modelo dado

$$k = \log[NS] - \log\left[\frac{NS}{1 + (aN)^b}\right] = \log[1 + (aN)^b]$$

Generalmente, se dibuja k en función de $\log N$. La pendiente de la curva resultante se utiliza para cuantificar los efectos de la competición.

(i) Demuestre que

$$\frac{d \log N}{dN} = \frac{1}{N \ln 10}$$

donde ln indica logaritmo natural.

(ii) Demuestre que

$$\frac{dk}{d \log N} = (\ln 10)\, N \frac{dk}{dN} = \frac{b}{1 + (aN)^{-b}}$$

(iii) Calcule

$$\lim_{N \to \infty} \frac{dk}{d \log N}$$

(iv) Demuestre que si

$$\frac{dk}{d \log N} < 1$$

entonces $A(N)$ es creciente, mientras que si

$$\frac{dk}{d \log N} > 1$$

entonces $A(N)$ es decreciente (*Sugerencia*: calcule $A'(N)$]. Explique con palabras qué debería significar esto con respecto a variar la densidad inicial de semillas y observar el número de plantas supervivientes al año siguiente [*Nota*: el primer caso se denomina *subcompensación* y el segundo caso se denomina *sobrecompensación*).

(v) El caso

$$\frac{dk}{d \log N} = 1$$

se denomina *compensación exacta*. Suponga que se dibuja k en función de N, y se observa en un cierto intervalo de valores de N la pendiente de la curva resultante es igual a 1. Explique qué significa esto.

40. (*Adaptado de Reiss*, 1989) Suponga que la velocidad de cambio del peso del cuerpo W con la edad x es

$$\frac{dW}{dx} \propto W^a \tag{5.7}$$

siendo a una constante positiva especifica de la especie.

(a) La velocidad de crecimiento relativa (porcentaje de peso ganado por unidad de tiempo) se define como

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dx}$$

¿Cuál es la relación entre la velocidad de crecimiento relativa y el peso del cuerpo? ¿Para qué valores de a la velocidad de crecimiento relativa crece y para qué valores decrece?

(b) A medida que los peces crecen, su peso se incrementa cada día pero la velocidad de crecimiento relativa decrece. Si la velocidad de crecimiento se describe mediante la Ecuación (5.7), ¿qué valores de a se pueden excluir, basándose en los resultados del apartado (a)? Explique con palabras cómo difiere el incremento del porcentaje de peso (relativo al peso del cuerpo actual) de los peces jóvenes y de los peces adultos.

41. (*Ecuaciones alométricas*) Las ecuaciones alométricas describen la relación de escala entre las medidas, tales como el peso de un árbol en función de su diámetro o la longitud de un cráneo en función de la longitud de la espina dorsal. Frecuentemente, estas ecuaciones son de la forma

$$Y = bX^a \tag{5.8}$$

siendo b una constante positiva y a una constante que puede ser positiva, negativa o cero.

(a) Suponga que X e Y son medidas del cuerpo (y por tanto positivas) y su relación se describe mediante una ecuación alométrica de la forma (5.8). ¿Para qué valores de a es Y una función creciente de X, pero de forma que la relación Y/X disminuya al aumentar X? ¿Es Y una función convexa de X o es en este caso cóncava?

(b) En los vertebrados, generalmente se cumple

$$[\text{longitud del cráneo}] \propto [\text{longitud del cuerpo}]^a$$

para algún valor de $a \in (0, 1)$. Utilice la respuesta al apartado (a) para explicar lo que esto significa para la longitud del cráneo en función de la longitud del cuerpo en ejemplares jóvenes frente a ejemplares adultos. Es decir, ¿en qué estado de desarrollo tienen los vertebrados cráneos mayores en relación con la longitud de sus cuerpos?

42. El valor del pH de una solución mide la concentración de iones de hidrógeno, denominados $[H^+]$. Se define como

$$\text{pH} = -\log[H^+]$$

Utilice el cálculo para decidir si el valor del pH de una solución crece o decrece con la concentración de H^+.

43. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$$

describe el crecimiento alométrico, siendo k una constante positiva. Suponga que x e y son variables positivas y que $y = f(x)$ es derivable dos veces. Utilice derivación implícita para determinar para qué valores de k una función $y = f(x)$ es convexa.

44. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t y suponga que $N(t)$ es derivable dos veces y cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

siendo r un número real. Derive la ecuación diferencial con respecto a t para determinar si $N(t)$ es cóncava o convexa.

5.3 EXTREMOS, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y GRÁFICAS DE FUNCIONES

5.3.1 Extremos

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces tiene un máximo y un mínimo globales en $[a, b]$. Esto es lo que indica el teorema de los valores extremos: un resultado de existencia. Sólo indica que existen extremos globales bajo ciertas condiciones, pero no indica cómo encontrarlos.

La estrategia para calcular extremos globales en el caso de que f sea una función continua definida en un intervalo cerrado será, en primer lugar, identificar todos los extremos locales de la función y después seleccionar el extremo global del conjunto de extremos locales. Si f es una función continua definida en un intervalo abierto o semiabierto, la existencia de extremos globales no está garantizada, y hay que comparar los extremos locales con el comportamiento de la función en la cercanía de los límites abiertos del dominio (*véase* el Ejemplo 5 de la Sección 5.1). En particular, si $f(x)$ está definida en $\mathbf{R}$, es necesario investigar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$, ya que si la función $f(x)$ tiende a $+\infty$ (respectivamente, a $-\infty$) cuando , $x \to +\infty$, o $-\infty$, no puede tener un máximo global (respectivamente, un mínimo global). Esto se comentará en el Ejemplo 1 de esta sección.

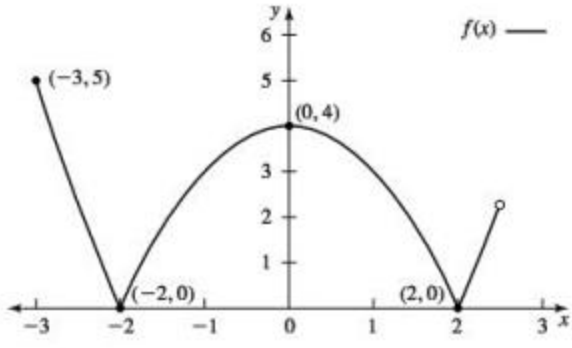
Los extremos locales se pueden calcular de forma muy sistemática, utilizando una receta simple para identificar candidatos a extremos locales. En la Sección 5.1 se demostró que si f tiene un extremo local en un punto interior c y existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$ (teorema de Fermat). Es decir, los puntos en los que f es derivable y su primera derivada es igual a 0 son ciertamente candidatos a extremos locales en el interior del dominio. Por supuesto, sólo son candidatos, como se explicó en la Sección 5.1 (recuérdese que $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en $x = 0$, pero en ese punto no tiene ningún extremo local). Además de los puntos donde la primera derivada es igual a cero, hay que comprobar los puntos donde la función no es derivable (por ejemplo, $y = |x|$ tiene un mínimo local en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto). Los puntos donde la primera derivada es igual a cero o no existe se denominan **puntos críticos**. Además de los puntos críticos, hay que comprobar siempre los extremos del intervalo en donde f está definida (suponiendo que existen dichos extremos).

No hay ningún otro punto donde pueda haber extremos locales. Por tanto, disponemos de un método sistemático para buscar *candidatos* a extremos locales:

1. Obtener los puntos donde $f'(c) = 0$.
2. Obtener los puntos c donde $f'(c)$ no existe.
3. Obtener los extremos del dominio de f.

En el siguiente ejemplo se ilustra este procedimiento. Se desea calcular todos los extremos locales y globales de la función

$$f(x) = |x^2 - 4|, \quad -3 \leqslant x < 2.5$$



▲ **Figura 5.35**
Gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ para $-3 \leqslant x \leqslant 2.5$

Ya conocemos del Ejemplo 5 de la Subsección 5.1.2 el aspecto de la gráfica de esta función. En la Figura 5.35 se representa de nuevo, para facilitar la comprensión del procedimiento de obtención de extremos relativos. Pero hay que tener en cuenta que en muchas ocasiones no se conoce cómo es la gráfica, y de hecho, la búsqueda de extremos relativos se hace frecuentemente para saber cómo es la gráfica.

En primer lugar se escribe $f(x)$ en forma de función definida por tramos, para evitar el signo de valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{para } -3 \leqslant x \leqslant -2 \quad \text{o} \quad 2 \leqslant x < 2.5 \\ -x^2 + 4 & \text{para } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Esta función definida por tramos es derivable en los intervalos abiertos $(-3, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, 2.5)$. Se obtiene

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } -3 < x < -2 \quad \text{o} \quad 2 < x < 2.5 \\ -2x & \text{para } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Como $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $0 \in (-2, 2)$, $(0, f(0))$, es un punto crítico y nuestro primer candidato a extremo local. No hay más puntos que cumplan que $f'(x) = 0$.

El segundo paso es identificar puntos interiores donde la función no sea derivable. Como la función es derivable en los intervalos abiertos $(-3, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, 2.5)$, hay que mirar en los puntos intermedios de dichos intervalos, concretamente $x = -2$ y $x = 2$. Se obtiene

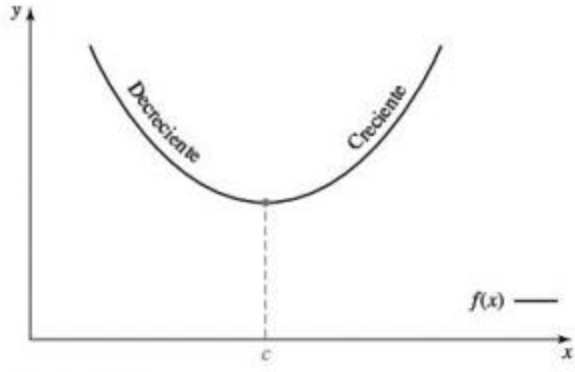
$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = -4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^+} f'(x) = 4$$

y

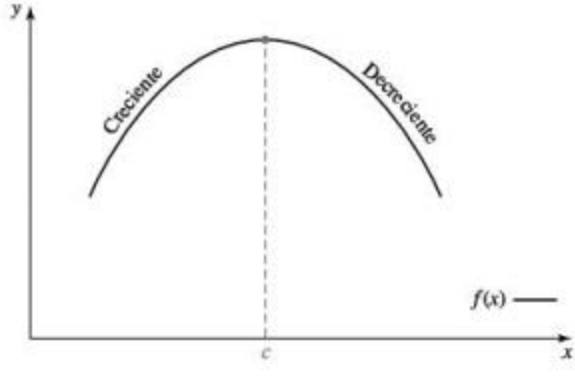
$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = 4$$

Esto demuestra que la función no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$. Por tanto, $x = -2$ y $x = 2$ son puntos críticos y son también candidatos a extremos locales.

El tercer paso es identificar los extremos del dominio. Como f está definida en $[-3, 2.5)$, uno de los extremos es $x = -3$. El cuarto candidato es por tanto $x = -3$. El intervalo $[-3, 2.5)$ es abierto en $x = 2.5$ y por tanto 2.5 no pertenece al dominio de la función. Por tanto, el punto 2.5 no es candidato a extremo local.



▲ **Figura 5.36**
La función $y = f(x)$ tiene un mínimo local en $x = c$



▲ **Figura 5.37**
La función $y = f(x)$ tiene un máximo local en $x = c$

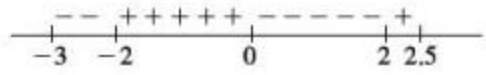
El procedimiento sistemático ha proporcionado cuatro candidatos a extremos locales en $x = -3, -2, 0$ y 2. Para cada candidato, hay que decidir si es de hecho un extremo local y, si es así, si se trata de un máximo o un mínimo. La siguiente observación, aunque algo obvia, es la clave (*véanse* las Figuras 5.36 y 5.37):

> Una función continua tiene un mínimo local en c si la función es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c. Una función tiene un máximo local en c si la función es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha de c.

Si la función es derivable, como en nuestro ejemplo, se puede utilizar la primera derivada para identificar las regiones donde es creciente y donde es decreciente.

Como $f'(x) = 2x$ para $-3 < x < -2$ y $2 < x < 2.5$, puede verse que $f'(x) > 0$ para $2 < x < 2.5$ y $f'(x) < 0$ para $-3 < x < -2$. Como $f'(x) = -2x$ para $-2 < x < 2$, puede verse que $f'(x) > 0$ para $x \in (-2, 0)$ y $f'(x) < 0$ para

$x \in (0, 2)$. Esto se ilustra en la siguiente recta de x. Los signos más (menos) indican donde $f'(x)$ es positiva (negativa).



Empezamos con los puntos interiores. En $x = -2$, la función cambia de decreciente a creciente, es decir, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = -2$. En $x = 0$, la función cambia de creciente a decreciente, es decir, $f(x)$ tiene un máximo local en $x = 0$. En $x = 2$, la función cambia de decreciente a creciente, es decir, $f(x)$ tiene un máximo local en $x = 2$.

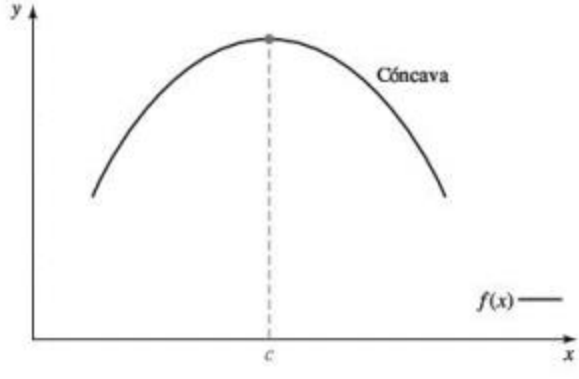
Queda por analizar el extremo del dominio $x = -3$. Puede verse que la función es decreciente a la derecha de $x = -3$, por lo que $f(x)$ tiene un máximo local en $x = -3$. Es conveniente comparar los resultados obtenidos con la gráfica de $f(x)$.

El último paso es escoger los extremos globales del conjunto de extremos locales. Como el dominio de f no es un intervalo cerrado, hay qie comparar los valores de los extremos locales con el valor en la frontera $x = 2.5$.

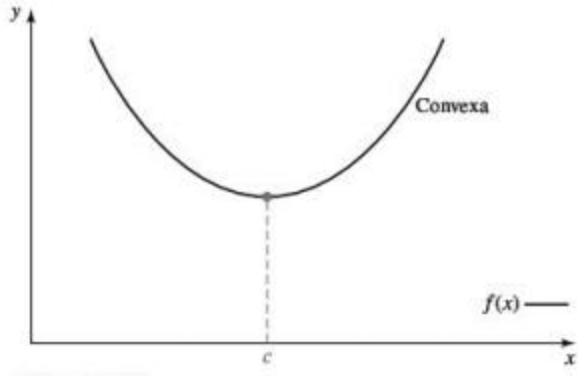
$$f(-3) = 5 \quad f(-2) = 0 \quad f(0) = 4 \quad f(2) = 0 \quad \lim_{x \to 2.5^-} f(x) = 2.25$$

Como 5 es el valor máximo y 0 el mínimo, entonces el máximo absoluto se produce en $x = -3$ y los mínimos globales (existen dos) se producen en $x = -2$ y en $x = 2$.

Cuando una función es derivable dos veces en el punto donde su derivada es igual a 0, hay una forma más simple de determinar si existe un mínimo o un máximo global (*véase* la Figura 5.38). Supongamos que la función $f(x)$ es derivable dos veces. La gráfica de $f(x)$ de la Figura 5.38 tiene un máximo local en $x = c$, ya que la función es creciente a la izquierda de $x = c$ y decreciente a la derecha de $x = c$. Si se observa cómo cambian las pendientes de las rectas tangentes cuando se cruza $x = c$ desde la izquierda, puede verse que las pendientes son decrecientes, es decir, $f''(c) < 0$. En otras palabras, la función es cóncava en $x = c$ (lo que se puede ver inmediatemante al observar la gráfica, pero hay que recordar que en general no se dispondrá de la gráfica). Existe un resultado análogo cuando f tiene un mínimo local en $x = c$ (*véase* la Figura 5.39). Por tanto, se puede utilizar el siguiente test.



▲ **Figura 5.38**
La función $y = f(x)$ tiene un máximo local en $x = c$



▲ **Figura 5.39**
La función $y = f(x)$ tiene un mínimo local en $x = c$

TEST DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

Suponga que f es derivable dos veces en un intervalo abierto que contiene a c.

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, *entonces f tiene un máximo en $x = c$.*

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, *entonces f tiene un mínimo en $x = c$.*

Nótese que el punto c donde $f'(c) = 0$ nos da un candidato a extremo local. Si la segunda derivada $f''(c) \neq 0$, se establece con certeza su naturaleza. Este test es sencillo de aplicar, puesto que sólo es necesario comprobar el signo de la segunda derivada en $x = c$. No es necesario comprobar el comportamiento de la función en las cercanías de $x = c$. El test de la segunda derivada no funciona siempre. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. Basándonos en la gráfica de $y = f(x)$ se puede saber que esta función tiene un mínimo local en $x = 0$. Pero se obtiene que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Por tanto, el teorema no se puede utilizar para obtener conclusiones sobre $y = f(x)$ en $x = 0$. Se presentan a continuación dos ejemplos en los que se puede aplicar este test.

Ejemplo 1 Calcule los extremos locales y globales de

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2, \quad x \in \mathbf{R}$$

Solución

La gráfica de $f(x)$ se puede ver en la Figura 5.40. Como $f(x)$ es dos veces derivable para todo $x \in \mathbf{R}$, comenzaremos por calcular las dos primeras derivadas de f. La primera derivada es

$$f'(x) = 6x^3 - 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)(x + 1)$$

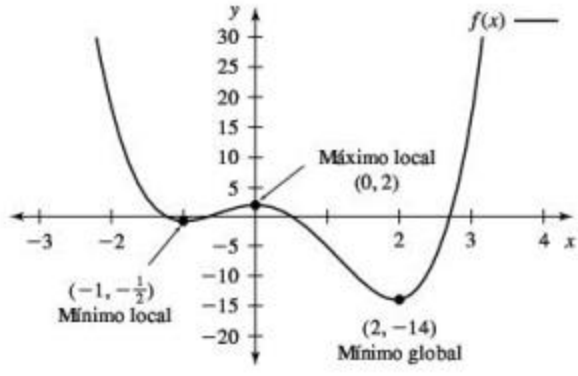
Al factorizar $f'(x)$ se facilita la tarea de calcular sus raíces. La segunda derivada es

$$f''(x) = 18x^2 - 12x - 12$$

Como $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$ y el dominio de la función no tiene extremos, los únicos candidatos a extremos locales son los puntos donde $f'(x) = 0$:

$$6x(x - 2)(x + 1) = 0$$

Se obtienen $x = 0$, $x = 2$ y $x = -1$. Como $f''(x)$ existe, se puede utilizar el test de la segunda derivada para determinar si los candidatos son extremos locales y de



▲ **Figura 5.40**
Gráfica de $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2$ del Ejemplo 1

qué tipo. Es necesario evaluar la segunda derivada para cada candidato.

$$f''(0) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{máximo local en } x = 0$$
$$f''(2) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo local en } x = 2$$
$$f''(-1) = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo local en } x = -1$$

La función $f(x)$ está definida en $\mathbf{R}$. Como se mencionó al principio de esta sección, para calcular los extremos globales, hay que comparar los valores de la función en los extremos locales con los valores de la función cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

$$f(0) = 2 \quad f(2) = -14 \quad f(-1) = -\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

Aunque el máximo local toma el valor de 2 cuando $x = 0$, el punto (0, 2) no es un máximo global. Como la función tiende a ∞ cuando $|x| \to \infty$, toma valores mayores que 2. De hecho, no existe un máximo global. Sin embargo, existe un mínimo global en $x = 2$. ◀

Ejemplo 2 Calcule los extremos locales y globales de

$$f(x) = x(1 - x)^{2/3}, \quad x \in \mathbf{R}$$

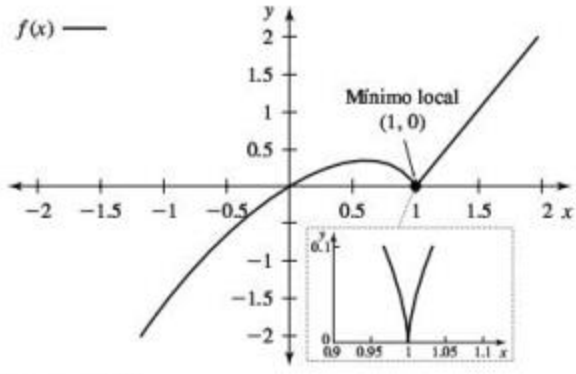
Solución

La Figura 5.41 muestra la gráfica de $f(x)$. Se deriva $f(x)$ utilizando la regla del producto:

$$f'(x) = (1 - x)^{2/3} + x\frac{2}{3}(1 - x)^{-1/3}(-1)$$

$$= (1 - x)^{2/3} - \frac{2x}{3(1 - x)^{1/3}} \quad \text{para } x \neq 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}(1 - x)^{-1/3}(-1) - \frac{2}{3}\left[(1 - x)^{-1/3} + x\left(-\frac{1}{3}\right)(1 - x)^{-4/3}(-1)\right]$$



▲ **Figura 5.41**
Gráfica de $f(x) = x(1-x)^{2/3}$

$$= -\frac{2}{3(1-x)^{1/3}} - \frac{2}{3(1-x)^{1/3}} - \frac{2x}{9(1-x)^{4/3}}$$

$$= -\frac{4}{3(1-x)^{1/3}} - \frac{2x}{9(1-x)^{4/3}} \quad \text{para } x \neq 1$$

Se obtienen primero los puntos donde $f'(x) = 0$. Si $x \neq 1$, entonces $f'(x) = 0$ si

$$(1-x)^{2/3} = \frac{2x}{3(1-x)^{1/3}}$$

$$3(1-x) = 2x$$

$$3 = 5x$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Se comprueba la segunda derivada en $x = \frac{3}{5}$:

$$f''\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3\left(\frac{2}{5}\right)^{1/3}} - \frac{(2)\left(\frac{3}{5}\right)}{9\left(\frac{2}{5}\right)^{4/3}} < 0$$

Es decir, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = \frac{3}{5}$.

La primera derivada no está definida en $x = 1$. Por tanto, hay que investigar la función en las proximidades de dicho punto. Nótese que $f(x)$ es continua en $x = 1$. Se busca dónde crece y decrece la función. Los únicos valores de x donde la derivada de la función puede cambiar de signo son $x = \frac{3}{5}$ y $x = 1$. Para determinar si $f'(x)$ es positiva o negativa en cada uno de los intervalos, sólo se necesita evaluar $f'(x)$ en un punto de cada intervalo. Por ejemplo, $f'(0) = 1 > 0$. Es decir, $f'(x) > 0$ para $x < 3/5$. Se puede realizar un cálculo similar para los otros subintervalos. Se obtiene que $f'(x)$ es positiva a la izquierda de $\frac{3}{5}$, negativa entre $\frac{3}{5}$ y 1, y positiva para $x > 1$. Este comportamiento se resume en la siguiente recta numérica

Se concluye por tanto que $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = 1$. Se puede decir algo más sobre lo que sucede en $x = 1$ (*véase* el inserto en la Figura 5.41).

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \left[(1-x)^{2/3} - \frac{2x}{3(1-x)^{1/3}} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[(1-x)^{2/3} - \frac{2x}{3(1-x)^{1/3}} \right] = \infty$$

Se puede ver que en $x = 1$ la tangente es vertical. Estos puntos se denominan **vértices**.

Como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

no existen extremos absolutos. ◀

5.3.2 Puntos de inflexión

Comenzaremos por presentar la definición verbal de **punto de inflexión**, y después presentaremos un procedimiento para calcular dichos puntos (*véase* la Figura 5.42).

> Los puntos de inflexión son puntos donde cambia la concavidad de la función. Es decir, donde la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Si la función es dos veces derivable, existe una condición algebraica para obtener candidatos a puntos de inflexión. Recuérdese que si una función f es dos veces derivable, es convexa si $f'' > 0$ y cóncava si $f'' < 0$. En un punto de inflexión, por tanto, f'' debe cambiar de signo, y por tanto la segunda derivada debe valer cero en el punto de inflexión.

> Si $f(x)$ es dos veces derivable y tiene un punto de inflexión en $x = c$, entonces $f''(c) = 0$.

Nótese que $f''(c) = 0$ es una condición necesaria pero no suficiente para que exista un punto de inflexión en una función dos veces derivable. Por ejemplo,

▲ **Figura 5.42**
Punto de inflexión

$f(x) = x^4$ cumple que $f''(0) = 0$ pero no existe un punto de inflexión en $x = 0$. Esta función es convexa y tiene un mínimo local en $x = 0$ (*véase* la Figura 5.43). En el teorema de Fermat apareció una situación similar; allí aparecía una condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremos locales. Este test, por tanto, sólo se puede utilizar para encontrar candidatos a puntos de inflexión. Para determinar si un candidato es un punto de inflexión, se debe comprobar si la segunda derivada cambia de signo.

Ejemplo 3 Demuestre que la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

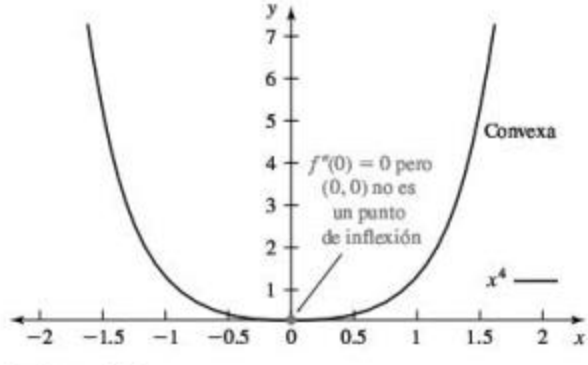
tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

Solución

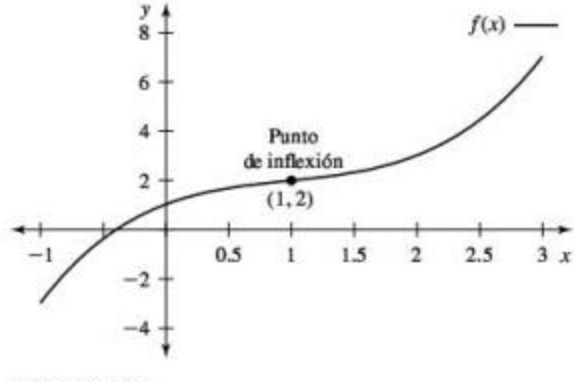
La Figura 5.44 muestra la gráfica de $f(x)$. Se calculan las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$$

$$f''(x) = 3x - 3$$



▲ **Figura 5.43**
La función $f(x) = x^4$ cumple $f''(0) = 0$, pero no tiene un punto de inflexión en $x = 0$



▲ **Figura 5.44**
Gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$

Entonces $f''(x) = 0$ para $x = 1$. Por tanto, $x = 1$ es un candidato a punto de inflexión. Como $f''(x)$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $x < 1$, cambia de signo en $x = 1$. Por tanto, se concluye que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$. ◀

5.3.3 Gráficas y asíntotas

Utilizando las derivadas primera y segunda de una función derivable dos veces se puede obtener una buena cantidad de información sobre dicha función. Se pueden determinar los intervalos donde la función es creciente, decreciente, cóncava y convexa. Se pueden identificar los extremos locales y globales y los puntos de inflexión. Para dibujar la función, es necesario conocer también cómo se comporta en las proximidades de los puntos donde o bien la propia función o su derivada no está definida, y es necesario conocer también el comportamiento de la función en los extremos de su dominio (o, si la función está definida para todo $x \in \mathbf{R}$, cómo se comporta la función cuando $x \to \pm\infty$).

Necesitaremos utilizar de nuevo los límites, esta vez para determinar el comportamiento de la función en los puntos donde no está definida y cuando $x \to \pm\infty$. Ilustraremos estas ideas con el siguiente ejemplo. Considérese

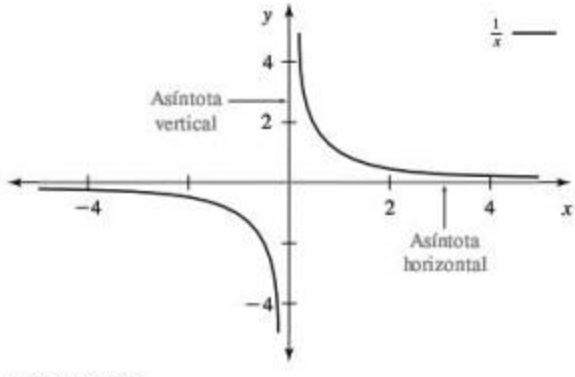
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

La gráfica de esta función nos resultará familiar (*véase* la Figura 5.45). Puede verse que la gráfica de $f(x)$ se aproxima a la recta $y = 0$ cuando $x \to \infty$ y también cuando $x \to -\infty$. Esta recta se denomina **asíntota**, y se dice que $f(x)$ se aproxima asintóticamente a la recta $y = 0$ cuando $x \to \infty$ y también cuando $x \to -\infty$. Como $y = 0$ es una recta horizontal, se denomina **asíntota horizontal**. Esto se puede demostrar matemáticamente utilizando límites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$. Observando la gráfica de dicha función, puede verse que se aproxima a la recta $x = 0$ asintóticamente. Como $x = 0$ es una recta vertical, se denomina **asíntota vertical**. Esto también se puede demostrar matemáticamente utilizando límites:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



▲ **Figura 5.45**
Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ con asíntota horizontal $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$

Definición Una recta $y = b$ es una asíntota **horizontal** si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Una recta $x = c$ es una asíntota **vertical** si

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

o

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

Además de asíntotas verticales y horizontales, existen asíntotas **oblicuas** (*véase* la Figura 5.46). Se trata de rectas que no son horizontales ni verticales y tales que la gráfica de la función se aproxima a dichas rectas cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente forma. Si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua. El caso más simple de asíntota oblicua aparece cuando en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

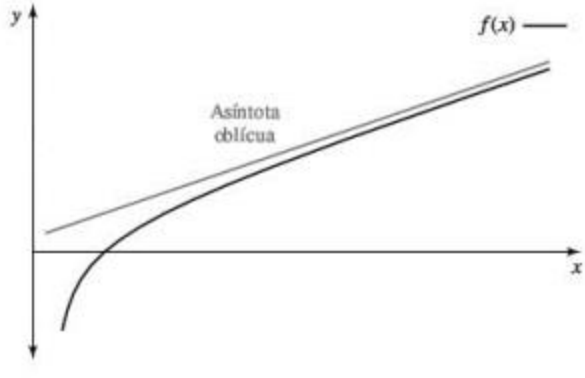
Ejemplo 4 **Asíntota oblicua** Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$$

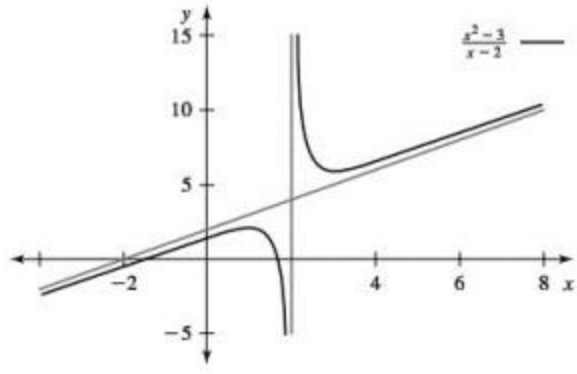
Para determinar si $f(x)$ tiene una asíntota oblicua, se utiliza división de polinomios. Se obtiene

$$\frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2}$$

Puede verse que $f(x)$ es la suma de un término lineal, concretamente $x + 2$, y de un resto, concretamente $\frac{1}{x-2}$, que tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$. Para comprobar si



▲ **Figura 5.46**
La función $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua



▲ **Figura 5.47**
Gráfica de $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ con asíntota oblicua $g(x) = x + 2$ (y con una asíntota vertical en $x = 2$)

la recta $y = x + 2$ es verdaderamente una asíntota oblicua, se realiza el siguiente cálculo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2}-(x+2)\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x+2+\frac{1}{x-2}-(x+2)\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2} = 0$$

Por tanto, $y = x + 2$ es una asíntota oblicua. La gráfica de $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ junto con su asíntota oblicua se muestra en la Figura 5.47. Obsérvese la existencia de una asíntota vertical en $x = 2$. ◀

Se pueden combinar ahora los resultados que se han obtenido hasta el momento para construir la gráfica de una función dada. Los dos ejemplos siguientes ilustran los pasos a seguir para construir la gráfica.

Ejemplo 5 Dibuje aproximadamente la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

Solución

Paso 1. Se calcula $f'(x)$ y $f''(x)$.

$$f'(x) = 2x^2 - 2 = 2(x-1)(x+1), \quad x \in \mathbf{R}$$

$$f''(x) = 4x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Paso 2. Se calculan los lugares donde $f'(x)$ es positiva, negativa, cero o no está definida. Se identifican los intervalos donde la función es creciente y decreciente. Se calculan los extremos locales.

Comenzaremos por hacer $f'(x) = 0$, es decir,

$$2(x-1)(x+1) = 0$$

Se obtienen dos soluciones, concretamente $x = 1$ y $x = -1$. La siguiente recta numérica ilustra dónde es $f'(x)$ positiva y negativa. Como $f'(x)$ es un polinomio, es derivable para todo $x \in \mathbf{R}$, y sólo puede cambiar de signo en $x = 1$ y $x = -1$. Esto

divide la recta numérica en tres intervalos, $x < -1$, $-1 < x < 1$ y $x > 1$. Para determinar si $f'(x)$ es positiva o negativa en cada uno de esos intervalos, sólo es necesario evaluar $f'(x)$ en un punto de cada intervalo. Por ejemplo, $f'(-2) = 2(-3)(-1) = 6 > 0$, es decir, $f'(x) > 0$ para $x < -1$. Se puede realizar un cálculo similar para los otros subintervalos.

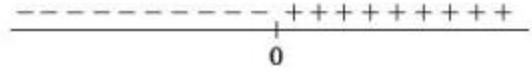
Es decir, $f(x)$ es creciente para $x < -1$ y $x > 1$, y decreciente para $-1 < x < 1$. Esto demuestra también que la función tiene un máximo local en $x = -1$, concretamente $(-1, \frac{7}{3})$ y un mínimo local en $x = 1$, concretamente $(1, -\frac{1}{3})$ (también se podría haber utilizado el test de la segunda derivada).

Paso 3. Se calcula dónde es $f''(x)$ positiva, negativa, cero, o no está definida. Se obtienen los puntos de inflexión.

Se hace $f''(x) = 0$, es decir,

$$4x = 0$$

Se obtiene una solución, concretamente, $x = 0$. Como $f''(x)$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$, sólo puede cambiar de signo en $x = 0$. Evaluando $f''(x)$ en un valor a la izquierda de 0, por ejemplo, en $x = -1$, se obtiene que $f''(x) < 0$ para $x < 0$. De forma similar, evaluando $f''(x)$ en un valor a la derecha de 0, por ejemplo, en $x = 1$, se obtiene que $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Esto se ilustra en la siguiente recta numérica



Como $f''(x)$ cambia de signo en $x = 0$, se concluye que la función tiene un punto de inflexión en ese punto, concretamente, en el punto $(0, 1)$. La función es cóncava para $x < 0$ y convexa para $x > 0$.

Paso 4. Determinar el comportamiento en los extremos del dominio.

El dominio es $(-\infty, +\infty)$. Por tanto, hay que comprobar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Se obtiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Combinando los resultados de estos cuatro pasos se puede bosquejar la gráfica de la función, como se muestra en la Figura 5.48. Es conveniente etiquetar todos los extremos y puntos de inflexión. ◀

Ejemplo 6 Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

Solución

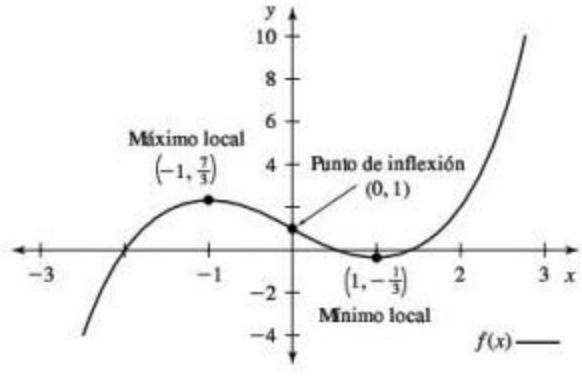
Paso 1.

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

y

$$f''(x) = (-1)e^{-x^2/2} + (-x)(-x)e^{-x^2/2}$$

$$= e^{-x^2/2}(x^2 - 1), \quad x \in \mathbf{R}$$



▲ **Figura 5.48**
Gráfica de $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$

PASO 2. Como $f'(x)$ está definida para todo $x \in \mathbf{R}$, sólo es necesario identificar los puntos para los que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \quad \text{para } x = 0$$

El signo de $f'(x)$ se muestra en la siguiente recta numérica de x.

$$\underset{0}{+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}$$

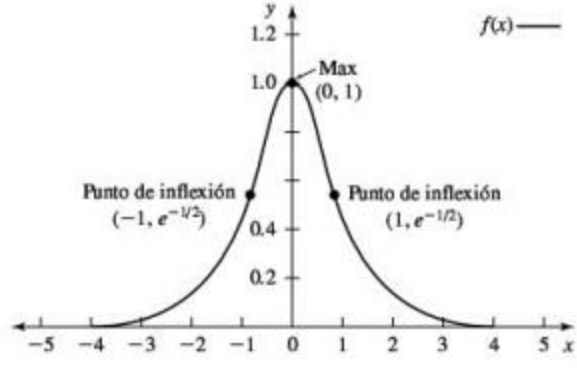
Se obtiene que $f(x)$ es creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$. Por tanto, $f(x)$ tiene un máximo local en $x = 0$, concretamente en el punto (0, 1).

PASO 3. $f''(x) = 0 \quad \text{para } x = 1 \quad \text{y } x = -1$

El signo de $f''(x)$ se muestra en la siguiente recta numérica de x.

$$\underset{-1 \qquad\qquad 1}{+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+}$$

Se obtiene que $f(x)$ es convexa para y $x < -1$, y $x > 1$ es cóncava para $-1 < x < 1$. Hay dos puntos de inflexión, uno en $x = -1$, concretamente en el



▲ **Figura 5.49**
Gráfica de $f(x) = e^{-x^2/2}$

punto $(-1, e^{-1/2})$ y otro en $x = 1$, concretamente en el punto $(1, e^{-1/2})$. No hay más puntos de inflexión, ya que $f''(x)$ está definida para todo $x \in \mathbf{R}$.

Paso 4. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Esto demuestra que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

La Figura 5.59 muestra la gráfica de $f(x)$. ◀

5.3.4. Problemas

(5.3.1)

Obtenga los máximos y los mínimos locales de las funciones de los Problemas 1-16. Determine si dichas funciones tienen máximos y mínimos absolutos y calcule sus coordenadas. Calcule los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes.

1. $y = 4 - x^2, \ -2 \leqslant x \leqslant 3$
2. $y = \sqrt{x}, \ 0 \leqslant x \leqslant 4$
3. $y = \operatorname{sen} x, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
4. $y = \ln x, \ x > 0$
5. $y = e^{-x}, \ x \geqslant 0$
6. $y = |16 - x^2|, \ -5 \leqslant x \leqslant 8$
7. $y = (x-1)^3 + 1, \ x \in \mathbf{R}$
8. $y = \tan x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
9. $y = \cos x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$
10. $y = \ln(x^2 + 1) - x, \ x \in \mathbf{R}$
11. $y = e^{-|x|}, \ x \in \mathbf{R}$
12. $y = e^{-x^2/4}, \ x \in \mathbf{R}$
13. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2, \ x \in \mathbf{R}$
14. $y = x^2(1 - x), \ x \in \mathbf{R}$
15. $y = \operatorname{sen}(\pi x^2), \ -1 \leqslant x \leqslant 1$
16. $y = \sqrt{1 + x^2}, \ x \in \mathbf{R}$
17. [Este problema ilustra el hecho de que $f'(c) = 0$ no es una condición suficiente para que exista un extremo local en una función derivable.] Demuestre que la función $f(x) = x^3$ tiene una tangente horizontal en $x = 0$, es decir, $f'(0) = 0$, pero $f'(x)$ no cambia de signo en $x = 0$ y por tanto, no tiene un extremo local en $x = 0$.
18. Suponga que $f(x)$ es derivable dos veces en $\mathbf{R}$ con $f(x) > 0$ para $x \in \mathbf{R}$. Demuestre que si $f(x)$ tiene un máximo local en $x = c$, entonces $g(x) = \ln(x)$ también tiene un máximo local en $x = c$.

(5.3.2)

En los Problemas 19-24, determine todos los puntos de inflexión.

19. $f(x) = x^3 - 2, \ x \in \mathbf{R}$
20. $f(x) = \cos x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$
21. $f(x) = e^{-x^2}, \ x \geqslant 0$
22. $f(x) = xe^{-x}, \ x \geqslant 0$
23. $f(x) = \tan x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
24. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}, \ x > 0$
25. [Este problema ilustra el hecho de que $f''(c) = 0$ no es una condición suficiente para que exista un punto de inflexión en una función dos veces derivable.] Demuestre que la función $f(x) = x^4$ cumple que $f''(0) = 0$, pero $f''(x)$ no cambia de signo en $x = 0$ y por tanto, dicha función no tiene un punto de inflexión en $x = 0$.
26. (*Ecuación logística*) Suponga que se denomina $N(t)$ al tamaño de una población en el instante t, y que $N(t)$ se expresa como

$$N(t) = \frac{100}{1 + 3e^{-2t}}$$

para $t \geqslant 0$.

(a) Demuestre que $N(0) = 25$.

(b) Demuestre que $N(t)$ es estrictamente creciente.

(c) Demuestre que

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = 100$$

(d) Demuestre que $N(t)$ tiene un punto de inflexión cuando $N(t) = 50$, es decir, cuando el tamaño de la población es la mitad de su valor límite.

(e) Utilice sus resultados de los apartados (a) − (d) para dibujar la gráfica de $N(t)$.

(5.3.3)

Obtenga los máximos y los mínimos locales de las funciones de los Problemas 27-34. Determine si las funciones tienen máximos y mínimos absolutos y calcule sus coordenadas. Calcule los puntos de inflexión. Calcule los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes, cóncavas y convexas. Dibuje aproximadamente las gráficas de las funciones.

27. $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 2$ para $-2 \leqslant x \leqslant 5$
28. $y = x^4 - 2x^2, \ x \in \mathbf{R}$
29. $y = |x^2 - 9|, \ -4 \leqslant x \leqslant 5$
30. $y = \sqrt{|x|}, \ x \in \mathbf{R}$
31. $y = x + \cos x, \ x \in \mathbf{R}$
32. $y = \tan x - x, \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
33. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \ x \in \mathbf{R}$
34. $y = \ln(x^2 + 1), \ x \in \mathbf{R}$
35. Sea

$$f(x) = \frac{x}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

(a) Demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Es decir, $y = 1$ es una asíntota horizontal de la curva $y = \frac{x}{x-1}$.

(b) Demuestre que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Es decir, $x = 1$ es una asíntota vertical de la curva $y = \frac{x}{x-1}$.

(c) Determine dónde $f(x)$ es creciente y dónde es decreciente. ¿Tiene $f(x)$ extremos locales?

(d) Determine dónde es $f(x)$ convexa y dónde es cóncava. ¿Tiene $f(x)$ puntos de inflexión?

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas.

36. Sea

$$f(x) = -\frac{2}{x^2 - 1}, \quad x \neq -1, 1$$

(a) Demuestre que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Es decir, $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

(b) Demuestre que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

y que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

Es decir, $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de $f(x)$.

(c) Determine dónde es $f(x)$ creciente y dónde es decreciente. ¿Tiene $f(x)$ extremos locales?

(d) Determine dónde es $f(x)$ convexa y dónde es cóncava. ¿Tiene $f(x)$ puntos de inflexión?

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas.

37. Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x + 2}, \quad x \neq -2$$

(a) Demuestre que $x = -2$ es una asíntota vertical.

(b) Determine dónde es $f(x)$ creciente y dónde es decreciente. ¿Tiene $f(x)$ extremos locales?

(c) Determine dónde es $f(x)$ convexa y dónde es cóncava. ¿Tiene $f(x)$ puntos de inflexión?

(d) Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, $f(x)$ tiene una asíntota oblicua. Calcúlela.

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas.

38. Sea

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad x \neq 0$$

(a) Demuestre que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

(b) Como $f(x)$ no está definida en $x = 0$, ¿significa eso que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$? Calcule el $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y el $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

(c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $f(x)$.

39. Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Determine dónde es $f(x)$ creciente y decreciente.

(b) ¿Dónde es $f(x)$ cóncava y dónde es convexa? Calcule todos los puntos de inflexión de $f(x)$.

(c) Calcule el $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, y decida si $f(x)$ tiene una asíntota horizontal.

(d) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas y sus puntos de inflexión (si existen).

40. Sea

$$f(x) = \frac{x^k}{1 + x^k}, \quad x \geqslant 0$$

siendo k un entero positivo mayor que 1.

(a) Determine dónde es $f(x)$ creciente y decreciente.

(b) ¿Dónde es $f(x)$ cóncava y dónde es convexa? Calcule todos los puntos de inflexión de $f(x)$.

(c) Calcule el $\lim_{x \to \infty} f(x)$, y decida si $f(x)$ tiene una asíntota horizontal.

(d) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas y sus puntos de inflexión (si existen).

41. Sea

$$f(x) = \frac{x}{a + x}, \quad x \geqslant 0$$

siendo a una constante positiva.

(a) Determine dónde es $f(x)$ creciente y decreciente.

(b) ¿Dónde es $f(x)$ cóncava y dónde es convexa? Calcule todos los puntos de inflexión de $f(x)$.

(c) Calcule el $\lim_{x \to \infty} f(x)$, y decida si $f(x)$ tiene una asíntota horizontal.

(d) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas y sus puntos de inflexión (si existen).

42. Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{a^2 + x^2}, \quad x \geqslant 0$$

siendo a una constante positiva.

(a) Determine dónde es $f(x)$ creciente y decreciente.

(b) ¿Dónde es $f(x)$ cóncava y dónde es convexa? Calcule todos los puntos de inflexión de $f(x)$.

(c) Calcule el $\lim_{x \to \infty} f(x)$, y decida si tiene una asíntota horizontal.

(d) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$, junto con sus asíntotas y sus puntos de inflexión (si existen).

43. Suponga que la velocidad de crecimiento de una población se expresa como

$$f(N) = N\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right) N \geqslant 0$$

siendo N el tamaño de la población, K una constante positiva que indica la capacidad de alojamiento y θ un parámetro mayor que 1. Calcule el tamaño de población para la que la velocidad de crecimiento es máxima.

44. Los gusanos de yema del abeto son una plaga importante que desfolia los pinos del Canadá. Sus depredadores son los pájaros. Un modelo de la velocidad de depredación per cápita es el siguiente

$$f(N) = \frac{aN}{k^2 + N^2}$$

siendo N la densidad de gusanos y a y k constantes positivas. ¿Para qué densidad de gusanos es máxima la velocidad de depredación?

5.4 OPTIMIZACIÓN

Existen muchas situaciones en las que se desea maximizar o minimizar ciertas cantidades. Por ejemplo, en una reacción química, se desea saber bajo qué condiciones la velocidad de reacción es máxima. En una explotación agrícola, se desea saber la cantidad de fertilizante que maximiza la cosecha. Los problemas de optimización surgen también en el estudio de la evolución de historias de vida, e involucran cuestiones como cuándo debe empezar a reproducirse un organismo para maximizar el número de descendientes supervivientes. En todos casos. El interés está en encontrar extremos globales.

Ejemplo 1 **Reacción química** Se considera la reacción química

$$A + B \rightarrow AB$$

En el Ejemplo 5 de la Subsección 1.2.2, se obtuvo que la velocidad de reacción se puede expresar como la función

$$R(x) = k(a - x)(b - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \min(a, b)$$

siendo x la concentración del producto AB y $\min(a, b)$ el mínimo de los valores a y b. Las constantes a y b son las concentraciones de los reactivos A y B al comienzo de la reacción. Para concretar, se escogen $k = 2$, $a = 2$ y $b = 5$. Entonces

$$R(x) = 2(2 - x)(5 - x) \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 2$$

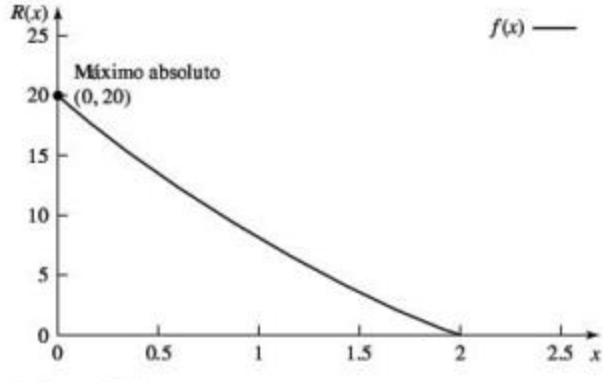
(*véase* la Figura 5.50).

Nuestro interés es calcular la concentración x que maximiza la velocidad de reacción, es decir, el máximo absoluto de $R(x)$. Como $R(x)$ es derivable en $(0, 2)$, se pueden calcular todos los extremos locales en dicho intervalo observando la primera derivada. Para calcular la primera derivada de $R(x)$ se opera ésta, obteniendo

$$R(x) = 20 - 14x + 2x^2 \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 2$$

Derivando con respecto a x resulta

$$R'(x) = -14 + 4x \quad \text{para } 0 < x < 2$$



▲ **Figura 5.50**
La reacción química $R(x)$ del Ejemplo 1. La gráfica de $R(x) = 2(2 - x)(5 - x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ presenta un máximo en (0, 20)

Para calcular candidatos a extremos locales, se hace $R'(x) = 0$

$$-14 + 4x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{7}{2}$$

Como $\frac{7}{2} \notin (0, 2)$, no existen puntos con tangente horizontal en el intervalo $(0, 2)$. Dado que

$$R'(x) = -14 + 4x < 0 \quad \text{para} \quad x \in (0, 2)$$

se concluye que $R(x)$ es decreciente en $(0, 2)$. El máximo absoluto se alcanza entonces en el extremo izquierdo del intervalo $[0, 2]$, concretamente en $x = 0$. Es decir, la velocidad de reacción es máxima cuando la concentración del producto AB es igual a 0. Es interesante comparar este resultado con al gráfica de $R(x)$ de la Figura 5.50. Como la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B, y A y B reaccionan para formar el producto AB, su concentración disminuye durante la reacción y por tanto la velocidad de reacción debe ser máxima al comienzo de la misma, cuando las concentraciones de A y B son máximas. ◀

Ejemplo 2 **Cosecha de maíz** Sea $Y(N)$ la cosecha de una explotación agrícola de maíz en función del nivel de nitrógeno en el suelo, N. Un modelo de esta situación puede ser

$$Y(N) = \frac{N}{1 + N^2} \quad \text{para } N \geq 0$$

(donde N se mide en las unidades apropiadas). Calcule el nivel de nitrógeno que maximiza la cosecha.

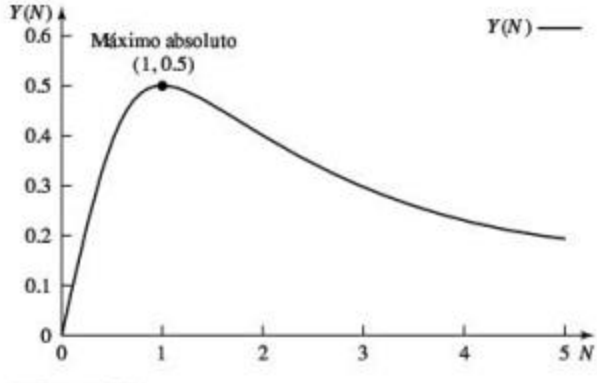
Solución

La función $Y(N)$, que se muestra en la Figura 5.51, es derivable para $N > 0$. Se obtiene

$$Y'(N) = \frac{(1 + N^2) - N \cdot 2N}{(1 + N^2)^2} = \frac{1 - N^2}{(1 + N^2)^2}$$

Haciendo $Y'(N) = 0$, se obtienen candidatos a extremos locales

$$Y'(N) = 0 \quad \text{si} \quad 1 - N^2 = 0 \quad \text{o} \quad N = \pm 1$$



▲ **Figura 5.51**
Cosecha de maíz $Y(N)$ del Ejemplo 2. La gráfica de $Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$, $N \geq 0$, tiene un máximo absoluto en $(1, \frac{1}{2})$

Como $N = -1$ no está en el dominio de $Y(N)$, se puede descartar este candidato. El otro candidato $N = 1$ sí está en el dominio, y se puede ver que

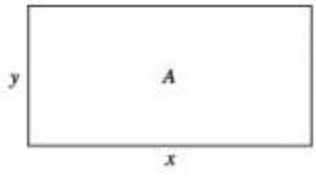
$$Y'(N) \begin{cases} > 0 & \text{para } 0 < N < 1 \\ < 0 & \text{para } N > 1 \end{cases}$$

Como $Y(N)$ cambia de creciente a decreciente en $N = 1$, este punto es un máximo local. Para calcular el máximo global, es necesario comprobar los extremos del dominio. Se obtiene

$$Y(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{N \to \infty} Y(N) = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{1 + N^2} = 0$$

Como $Y(1) = \frac{1}{2}$, se concluye que $N = 1$ es el máximo global. Es decir, $N = 1$ es el nivel de nitrógeno que maximiza la cosecha. ◀

Ejemplo 3 **Maximización de un área** Un biólogo de campo desea cercar un campo de estudio rectangular. Dispone de 1600 pies de cerca. Utilizando esta cerca, ¿cuáles serán las dimensiones del campo de estudio de área máxima?



▲ **Figura 5.52**
El campo de estudio rectangular del Ejemplo 3

Solución

La Figura 5.52 ilustra la situación. El área A del campo de estudio se expresa como

$$A = xy \tag{5.9}$$

y el perímetro del campo de estudio es

$$1600 = 2x + 2y \tag{5.10}$$

Despejando y en la Ecuación (5.10) se obtiene

$$y = 800 - x$$

Sustituyendo en la Ecuación (5.9),

$$A(x) = x(800 - x) = 800x - x^2 \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 800$$

Es importante establecer el dominio de la función. Claramente, el menor valor de x es 0, en cuyo caso el área encerrada será también 0, ya que $A(0) = 0$. El máximo valor posible de x es 800, lo que producirá también un rectángulo en el que un lado tiene de longitud 0, y el área correspondiente será $A(800) = 0$.

Se desea maximizar el área encerrada $A(x)$. La función $A(x)$ es derivable para $x \in (0, 800)$:

$$A'(x) = 800 - 2x \quad \text{para } 0 < x < 800$$

$$A''(x) = -2 \quad \text{para } 0 < x < 800$$

Para obtener candidatos a extremos locales, se hace $A'(x) = 0$.

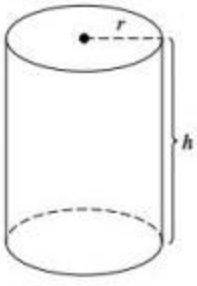
$$800 - 2x = 0 \quad \text{o} \quad x = 400$$

Como $A''(400) < 0$, $x = 400$ es un máximo local. Para obtener el máximo global, es necesario estudiar la función $A(x)$ en los extremos del intervalo $[0, 800]$.

$$A(0) = A(800) = 0$$

Como $A(400) = (400)^2 = 160\,000$, el área se maximiza para $x = 400$, lo que implica que el campo de estudio es cuadrado. Esto es cierto en general. Dado un rectángulo de perímetro fijo, el área máxima se produce cuando dicho rectángulo es un cuadrado (*véase* el Problema 2 de esta sección). ◀

Ejemplo 4 **Minimización de material** Las latas de aluminio de refrescos se modelan en forma de cilindro circular recto y almacenan unas 12 onzas de líquido. La producción de aluminio requiere mucha energía, por lo que es deseable diseñar las latas de refresco de forma que utilicen la mínima cantidad posible de material. ¿Qué dimensiones debe tener la lata de refresco óptima?



▲ **Figura 5.53**
Un cilindro circular recto de altura h y radio r

Solución

Se aproxima la forma de la lata de refresco mediante un cilindro circular recto en el que las paredes y las tapas están hechas de aluminio. Se denomina h a la altura del cilindro y r al radio de las tapas (*véase* la Figura 5.53).

Si h y r se miden en centímetros, hay que convertir el volumen dado en onzas en un volumen dado en centímetros cúbicos (cm^3). Para esto, es necesario saber que 12 onzas son aproximadamente 0.355 litros, y que un litro equivale a 1000 cm^3.

Ahora estamos listos para resolver el problema. La lata con la mínima cantidad de material será aquella cuya área superficial sea mínima para un volumen dado. Utilizando fórmulas de geometría, el área superficial de un cilindro circular recto con tapa y base cerradas se expresa como

$$A = \underbrace{2\pi rh}_{\text{pared del cilindro}} + \underbrace{2(\pi r^2)}_{\text{tapas del cilindro}}$$

El volumen V del cilindro recto es

$$V = \pi r^2 h$$

Por tanto, es necesario minimizar A cuando el volumen $V = 12$ onzas $= 355$ cm^3. Despejando h de $\pi r^2 h = 355$ se obtiene

$$h = \frac{355}{\pi r^2}$$

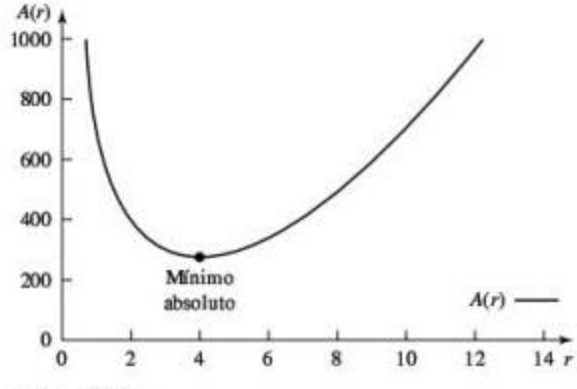
Sustituyendo este valor de h en la fórmula de A, se obtiene

$$A(r) = 2\pi r \frac{355}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{710}{r} + 2\pi r^2 \quad \text{para } r > 0$$

La Figura 5.54 muestra la gráfica de $A(r)$.

Para calcular el mínimo global, se deriva $A = A(r)$ y se hace la derivada igual a 0.

$$A'(r) = -\frac{710}{r^2} + 4\pi r = 0$$



▲ **Figura 5.54**
Área superficial de un cilindro recto de volumen dado en función del radio r

Despejando r se obtiene

$$4\pi r = \frac{710}{r^2} \quad \text{o} \quad r^3 = \frac{710}{4\pi} = \frac{355}{2\pi}$$

Por tanto,

$$r = \left(\frac{355}{2\pi}\right)^{1/3} = 3.84 \text{ cm}$$

Para comprobar si se trata en realidad de un mínimo, se calcula la segunda derivada de $A(r)$:

$$A''(r) = 2\frac{710}{r^3} + 4\pi > 0 \quad \text{para } r > 0$$

Como $A''(r) > 0$, $r = (\frac{355}{2\pi})^{1/3}$ es un mínimo local. Para determinar si este valor de r es un mínimo global, hay que calcular el área superficial en los límites del dominio. Dado que

$$\lim_{r \to 0^+} A(r) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{r \to \infty} A(r) = \infty$$

se deduce que el mínimo global se alcanza en $r = (\frac{355}{2\pi})^{1/3}$.

Para calcular h, se utiliza

$$h = \frac{355}{\pi r^2} = \frac{355}{\pi(\frac{355}{2\pi})^{2/3}} = \frac{\frac{355}{\pi}}{(\frac{355}{2\pi})^{2/3}}$$

$$= 2\left(\frac{355}{2\pi}\right)^{1/3} = 2r = 7.67 \text{ cm}$$

Por tanto, hemos obtenido que la lata que utiliza la mínima cantidad de material es aquella en la que su altura es igual a su diámetro.

Las latas de refrescos reales tienen $h = 12.5$ cm y $r = 3.1$ cm. En nuestros cálculos, hemos supuesto que el material utilizado para fabricar la lata es de igual espesor. La tapa de la lata de refresco real, sin embargo, es de material más espeso, lo que podría explicar por qué las latas de refrescos no tienen las dimensiones que se han calculado en este ejemplo. ◀

Los cuatro ejemplos anteriores ilustran los tipos básicos de problemas de optimización. En los dos primeros ejemplos, se dan las funciones que se desean optimizar. En el tercer y cuarto ejemplos, hay que construir las ecuaciones de las funciones que se desean optimizar. Una vez obtenida la función a optimizar, hay que utilizar los resultados de las secciones anteriores de este capítulo para calcular el extremo global. Es importante establecer el dominio de la función, ya que los extremos globales pueden aparecer en los límites del dominio.

Se piensa que las historias de vida de organismos evolucionan hacia algún estado óptimo dentro de unas restricciones dadas. Los modelos teóricos pueden servir de ayuda para obtener estos estados óptimos. Como ejemplo, consideremos el tamaño de nidada. Supongamos que un organismo puede producir más de una cría cada vez. ¿Cuál es el tamaño óptimo de la nidada? Su tamaño está determinado por la cantidad de recursos que los padres pueden suministrar a cada cría. Si los recursos son limitados (como ocurre realmente), cuantas más crías haya por nidada, habrá menos recursos disponibles para cada cría. Por otro lado, si el número de crías es demasiado pequeño, las probabilidades de que las crías sobrevivan hasta la edad reproductiva pueden ser muy pequeñas por otras razones diferentes a la de recursos insuficientes. Este compromiso entre insuficiencia de recursos por cría si hay demasiadas crías y probabilidad de perder la nidada completa si hay pocas crías sugiere que un número intermedio de crías podría ser óptimo. En el ejemplo siguiente se presenta un modelo simple que considera este compromiso.

Ejemplo 5 **(Adaptado de Roff, 1992)** Lloyd (1987) propuso el siguiente modelo para determinar el tamaño óptimo de la nidada. Si el tamaño de la nidada es igual a N y la cantidad total de recursos disponibles es R, entonces la cantidad de recursos disponibles por cría es $x = R/N$. La probabilidad de supervivencia de un individuo, denominada $f(x)$, se relaciona con la inversión de recursos por individuo, x. Lloyd propuso una curva sigmoidal, o en forma de S. Es decir, las probabilidades de supervivencia son muy bajas cuando la inversión de recursos es pequeña, y sufre una saturación para inversiones de recursos mayores. Siendo $N = N(x) = R/x$, el éxito de una nidada, o **aptitud**, se puede medir como

$$\begin{aligned} w(x) &= [\text{número de crías}] \times [\text{probabilidad de supervivencia de cría}] \\ &= N(x)f(x) = \frac{R}{x} f(x) \quad \text{para } x > 0 \end{aligned}$$

siendo R una constante positiva. Se desea calcular el valor de de x que maximiza la aptitud $w(x)$. Si se supone que $f(x)$ es derivable para $x > 0$, entonces, al derivar $w(x)$ con respecto a x resulta

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= R \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \\ &= R \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{R}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) \quad \text{para } x > 0 \end{aligned}$$

Haciendo $w'(x) = 0$ se obtiene

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \tag{5.11}$$

Denominaremos $\hat{x}$ a la solución de la Ecuación (5.11). Si $f(x)$ es derivable dos veces en $\hat{x}$, se puede utilizar el test de la segunda derivada para comprobar si se trata de un máximo o de un mínimo local. Se obtiene

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{R}{x^2}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) + \frac{R}{x}\left(f''(x) - \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{x}\right)$$

Como $f'(\hat{x}) = f(\hat{x})/\hat{x}$, el primer término del miembro derecho es igual a 0 cuando $x = \hat{x}$. Además, debido a la Ecuación (5.11), $\frac{d}{dx}[f(x)/x] = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$ cuando $x = \hat{x}$. Por tanto,

$$\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=\hat{x}} = \frac{R}{\hat{x}} f''(\hat{x})$$

Si se escoge una función $f(x)$ que sea cóncava en $\hat{x}$, entonces $f''(\hat{x}) < 0$ y $w(x)$ tiene un máximo local en $\hat{x}$.

Una elección típica de $f(x)$ es

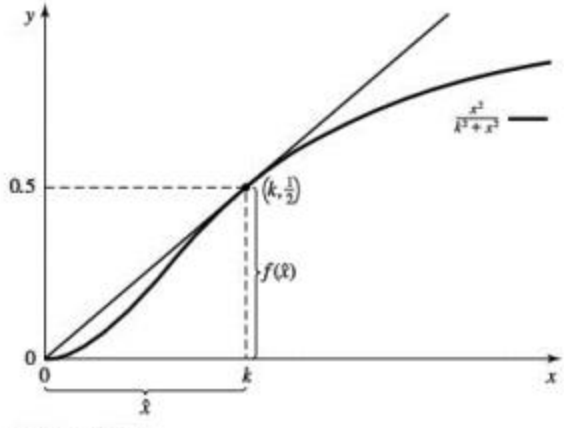
$$f(x) = \frac{x^2}{k^2 + x^2} \quad \text{para } x \geqslant 0$$

siendo k una constante positiva. La Figura 5.55 muestra la gráfica de $f(x)$. La curva es sigmoidal. Derivando $f(x)$ con respecto a x resulta

$$f'(x) = \frac{2x(k^2 + x^2) - x^2(2x)}{(k^2 + x^2)^2} = \frac{2k^2x}{(k^2 + x^2)^2}$$

Como

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{para } f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$



▲ **Figura 5.55**
Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{k^2+x^2}$, junto con la recta tangente en $(k, 1/2)$

se obtiene

$$\frac{2k^2x}{(k^2+x^2)^2} = \frac{1}{x}\frac{x^2}{k^2+x^2}$$

con lo que resulta

$$2k^2 = k^2 + x^2 \quad \text{o} \quad k^2 = x^2$$

Como k es una constante positiva y $x \geqslant 0$, se puede descartar la solución $x = -k$, obteniéndose así $\hat{x} = k$. Para ver si $\hat{x} = k$ es un máximo local de la función $w(x)$, se calcula $w''(x)$. Es necesario calcular primero $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{2k^2(k^2+x^2)^2 - (2k^2x)2(k^2+x^2)(2x)}{(k^2+x^2)^4}$$

$$= \frac{2k^2(k^2+x^2) - 8k^2x^2}{(k^2+x^2)^3} = \frac{2k^4 - 6k^2x^2}{(k^2+x^2)^3}$$

Como

$$\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=k} = \frac{R}{k}f''(k) = \frac{R}{k}\frac{-4k^4}{(2k^2)^3} < 0$$

se concluye que en $\hat{x} = k$ hay un máximo local. Para ver si es un máximo global, se compara $w(k)$ con $w(0)$ y con $\lim_{x\to\infty} w(x)$. Como

$$w(x) = \frac{R}{x}f(x) = \frac{R}{x}\frac{x^2}{k^2+x^2} = R\frac{x}{k^2+x^2}$$

se obtiene

$$w(0) = 0 \quad w(k) = \frac{R}{2k} \quad \lim_{x\to\infty} w(x) = 0$$

Por tanto, $\hat{x} = k$ es el máximo absoluto. Para la función elegida, $f(x) = \frac{x^2}{k^2+x^2}$, el tamaño óptimo de la nidada N_{opt} es $N_{\text{opt}} = R/k$ [otras elecciones de la función $f(x)$ producirían resultados diferentes].

Hay un método geométrico para calcular $\hat{x}$. Concretamente, como

$$f'(\hat{x}) = \frac{f(\hat{x})}{\hat{x}}$$

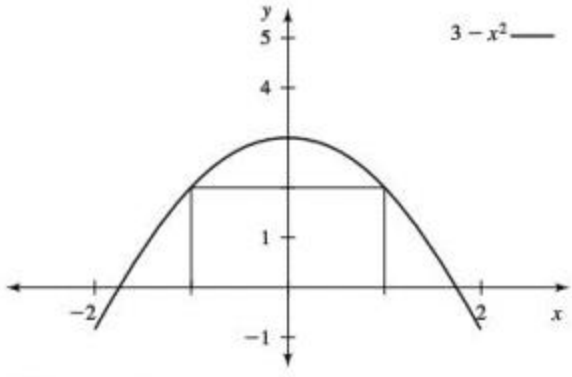
la recta tangente en $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ tiene pendiente $\frac{f(\hat{x})}{\hat{x}}$. Esta recta se puede obtener dibujando una línea recta que pasa por el origen y que toca a la gráfica de $y = f(x)$, como ilustra la Figura 5.55. ◀

5.4.1. Problemas

1. Calcule el mínimo perímetro posible de un rectángulo cuyo área sea 25 pulgadas cuadradas.

2. Demuestre de todos los rectángulos con un perímetro dado, el cuadrado es el que tiene el área máxima.

3. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores en la parábola $y = 3 - x^2$, como muestra la Figura 5.56. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo?



▲ **Figura 5.56**
Gráfica de $y = 3 - x^2$ junto con el rectángulo inscrito en el Problema 3

4. Un área de estudios rectangular se va a rodear por una valla y a dividir en dos partes iguales, con la valla que marca la división paralela a uno de los lados. Si el área total es de 384 pies cuadrados, calcule las dimensiones del área de estudio que minimizan la longitud total de la valla. ¿Cuánta valla se necesita?

5. Un campo rectangular está limitado por uno de sus lados por un río y los otros tres lados por una valla. Calcule las dimensiones del campo que maximizarán el área cerrada si la valla tiene una longitud total de 320 pies.

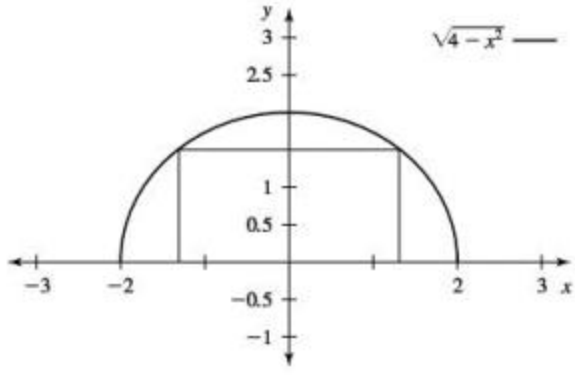
6. Calcule la máxima área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 4 cm.

7. Suponga que a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm. ¿Cuál es el mínimo perímetro posible?

8. Suponga que a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm. Demuestre que el área del triángulo es máxima cuando $a = b$.

9. Un rectángulo tiene su base en el eje x, su esquina inferior izquierda en (0, 0) y su esquina superior derecha en la curva $y = 1/x$. ¿Cuál es el mínimo perímetro que puede tener el rectángulo?

10. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus esquinas superiores izquierda y derecha en la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, como se muestra en la Figura 5.57. Las esquinas superiores izquierda y derecha guardan igual distancia al eje vertical ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo?



▲ **Figura 5.57**
Gráfica de $y = (4 - x^2)^{1/2}$ junto con el rectángulo inscrito en el Problema 10

11. Sea (x, y) un punto de la línea recta $y = 4 - 3x$ (*véase* la Figura 5.58).

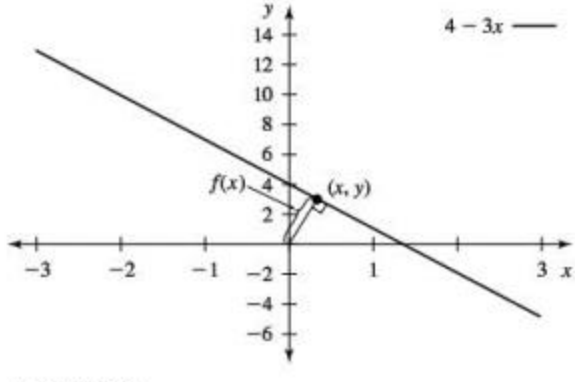
(a) Demuestre que la distancia de (x, y) al origen se expresa como

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (4 - 3x)^2}$$

(b) Calcule las coordenadas del punto de la recta $y = 4 - 3x$ más cercano al origen. [*Sugerencia*: calcule el valor de x que minimiza la distancia calculada en el apartado (a)].

(c) Demuestre que el *cuadrado* de la distancia entre el punto (x, y) de la recta y el origen se expresa como

$$g(x) = [f(x)]^2 = x^2 + (4 - 3x)^2$$



▲ **Figura 5.58**
Gráfica de $y = 4 - 3x$ en el Problema 11

y calcule el mínimo de $g(x)$. Demuestre que coincide con la respuesta del apartado (b).

12. ¿Cuánto se acerca la curva $y = 1/x$ al origen? (*Sugerencia*: calcule el punto de la curva que minimiza el *cuadrado* de la distancia entre el origen y un punto de la curva. Si se utiliza el

cuadrado de la distancia en vez de la distancia, se evita tener que trabajar con raíces cuadradas.)

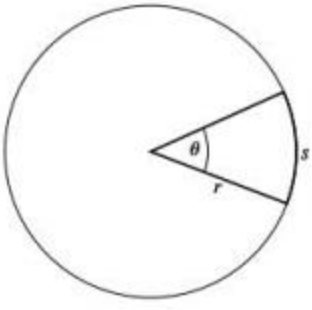
13. Demuestre que si $f(x)$ es una función positiva derivable que tiene un mínimo local en $x = c$, entonces $g(x) = [f(x)]^2$ también tiene un mínimo local en $x = c$.

14. Demuestre que si $f(x)$ es una función derivable con $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y con un máximo local en $x = c$, entonces $g(x) = [f(x)]^2$ tiene un mínimo local en $x = c$.

15. Calcule las dimensiones de una lata con forma de cilindro circular recto (con tapa y base) cuyo volumen sea de 1 litro y que minimice la cantidad de material utilizado. (*Nota*: un litro corresponde a 1000 cm^3.)

16. Calcule las dimensiones de un cilindro circular recto abierto en su tapa pero cerrado por su base, que tenga 1 litro de capacidad y minimice la cantidad total de material utilizado.

17. Un sector circular de radio r y ángulo θ tiene un área de A. Calcule r y θ de forma que el perímetro sea mínimo cuando (a) $A = 2$ y (b) $A = 10$. (*Nota*: $A = \frac{1}{2} r^2\theta$ y la longitud del arco es $s = r\theta$ cuando θ se mide en radianes; *véase* la Figura 5.59.)



▲ **Figura 5.59**
El sector circular de los Problemas 17 y 18

18. Un sector circular de radio r y ángulo θ tiene un área de A. Calcule r y θ de forma que el perímetro sea mínimo para un área A dada. (*Nota*: $A = \frac{1}{2} r^2\theta$ y la longitud del arco es $s = r\theta$ cuando θ se mide en radianes; *véase* la Figura 5.59.)

19. Repita el Ejemplo 4 bajo el supuesto de que la tapa de la lata está hecha de aluminio tres veces más espeso que el aluminio utilizado para las paredes y la base.

20. (*Modelo clásico de selección de viabilidad*) Considere una población de organismos diploides (es decir, cada organismo posee dos copias de cada cromosoma). Los genes residen en los cromosomas, y la localización de un gen en un cromosoma se denomina **locus**. Las diferentes versiones de un mismo gen se denominan **alelos**. Se considera el caso de un locus con dos posibles alelos, A_1 y A_2. Como los individuos son diploides, pueden aparecer los siguientes tipos, denominados **genotipos**: A_1A_1, A_1A_2 y A_2A_2 (se consideran equivalentes A_1A_2 y A_2A_1). Si unos padres se aparean y producen una cría, ésta recibe un gen de cada padre. Si el apareamiento es aleatorio, sería como si los genes se pusieran en un gran recipiente del que se escogerían dos aleatoriamente. Si se supone que la frecuencia de A_1 en la población es p y la frecuencia de A_2 es $q = 1 - p$, la combinación A_1A_1 se escogerá con probabilidad p^2, la combinación A_1A_2 con probabilidad $2pq$ (el factor 2 aparece porque A_1 puede provenir del padre o de la madre), y la combinación A_2A_2 con probabilidad q^2.

Se supone que las probabilidades de supervivencia de la cría dependen de sus genotipos. Se definen las cantidades w_{11}, w_{12} y w_{22} para describir las probabilidades diferenciales de supervivencia de los tipos A_1A_1, A_1A_2 y A_2A_2. La proporción A_1A_1: A_1A_2: A_2A_2 entre adultos está dada por

$$p^2w_{11} : 2pqw_{12} : q^2w_{22}$$

La aptitud media de la población se define como

$$\bar{w} = p^2w_{11} + 2pqw_{12} + q^2w_{22}$$

Se estudiará esta función. Como $q = 1 - p$, $\bar{w}$ sólo es función de p:

$$\bar{w}(p) = p^2w_{11} + 2p(1 - p)w_{12} + (1 - p)^2w_{22}$$

para $0 \leqslant p \leqslant 1$. Se consideran los tres casos siguientes:

(i) Selección direccional:

$$w_{11} > w_{12} > w_{22}$$

(ii) Sobredominio:

$$w_{12} > w_{11}, w_{22}$$

(iii) Subdominio:

$$w_{12} < w_{11}, w_{22}$$

(a) Demuestre que

$$\bar{w}(p) = p^2(w_{11} - 2w_{12} + w_{22}) + 2p(w_{12} - w_{22}) + w_{22}$$

y dibuje $\bar{w}(p)$ para los tres casos, escogiendo los parámetros como sigue:

(i) $w_{11} = 1$, $w_{12} = 0.7$, $w_{22} = 0.3$

(ii) $w_{11} = 0.7$, $w_{12} = 1$, $w_{22} = 0.3$

(iii) $w_{11} = 1$, $w_{12} = 0.3$, $w_{22} = 0.7$

(b) Demuestre que

$$\frac{d\bar{w}}{dp} = 2p(w_{11} - 2w_{12} + w_{22}) + 2(w_{12} - w_{22})$$

(c) Calcule el máximo global de $\bar{w}(p)$ en los tres casos considerados en (a). (Note que el máximo global puede estar en el límite del dominio de $\bar{w}$.)

(d) Se puede demostrar que bajo cierto esquema de apareamiento las frecuencias de los genes cambian hasta que $\bar{w}$ alcanza su máximo global. Suponga que este es el caso, e indique para los tres casos considerados en (a) cuál será la frecuencia de equilibrio.

21. (*Continuación del Problema* 94 *de la Subsección* 4.3.3) Se consideraron las propiedades de la función de incubación de crías por unidad de tiempo, $w(t)$, en la especie *Eleutherodactylus caqui*. La función $w(t)$ era

$$w(t) = \frac{f(t)}{C + t}$$

siendo $f(t)$ proporción de crías supervivientes si t es el tiempo empleado en cuidar a las crías, y C es el coste asociado con el tiempo empleado en buscar otras parejas.

Supongamos ahora que $f(t)$, $t \geqslant 0$, es cóncava con $f(0) = 0$ y $0 \leqslant f \leqslant 1$. El tiempo óptimo de incubación de crías se define como el tiempo que maximiza $w(t)$.

(a) Demuestre que el tiempo óptimo de incubación se puede obtener calculando el punto de la curva $f(t)$ donde la recta que pasa por el punto $(-C, 0)$ es tangente a $f(t)$.

(b) Utilice el procedimiento de (a) para calcular el tiempo de incubación óptimo para $f(t) = \frac{t}{1+t}$ y $C = 2$. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 0)$ y es tangente a la curva $f(t) = \frac{t}{1+t}$, y dibuje en una misma gráfica $f(t)$ y dicha recta tangente.

22. (*Edad óptima de reproducción*) (de Roff, 1992) Hay organismos que se reproducen sólo una vez en su vida. Se pueden encontrar ejemplos de este tipo de reproducción en el Pacífico del salmón y del bambú. La velocidad de incremento per cápita, r, se puede considerar como una medida de aptitud reproductiva. Cuanto mayor sea r, más crías produce un individuo. La velocidad de incremento intrínseca, s, es en general una función de la edad, x. Los modelos de poblaciones de organismos de este tipo estructuradas por edades predicen que la velocidad de incremento intrínseca en función de x se expresa como

$$r(x) = \frac{\ln [l(x)m(x)]}{x}$$

siendo $l(x)$ la probabilidad de sobrevivir hasta la edad x y $m(x)$ el número de nacimientos de hembras a la edad x. La edad óptima de reproducción es aquél valor de x que maximiza $r(x)$.

(a) Calcule la edad óptima de reproducción para

$$l(x) = e^{-ax}$$

y

$$m(x) = bx^c$$

siendo a, b y c constantes positivas.

(b) Utilice una calculadora gráfica para dibujar $r(x)$ para $a = 0.1$, $b = 4$ y $c = 0.9$.

23. (*Edad óptima de la primera reproducción*) (de Lloyd, 1987) Muchos organismos se reproducen más de una vez en su vida. Se considera un modelo donde la velocidad de incremento intrínseca, r, depende de la edad de la primera reproducción, x, y satisface la ecuación

$$\frac{e^{-x(r(x)+L)}(1 - e^{-kx})^3 c}{1 - e^{-(r(x)+L)}} = 1 \qquad (5.12)$$

siendo k, L y c constantes positivas que describen la historia de vida del organismo. La edad óptima de la primera reproducción es aquella edad x que maximiza $r(x)$. Como no se puede despejar $r(x)$ de la ecuación anterior, debe utilizarse derivación implícita para obtener el candidato a óptimo para la edad de la primera reproducción.

(a) Obtenga una ecuación para $\frac{dr}{dx}$. [*Sugerencia*: tome logaritmos en los dos miembros de (5.12) antes de derivar con respecto a x.]

(b) Haga $\frac{dr}{dx} = 0$ y demuestre que así se obtiene

$$r(x) = \frac{3ke^{-kx}}{1 - e^{-kx}} - L$$

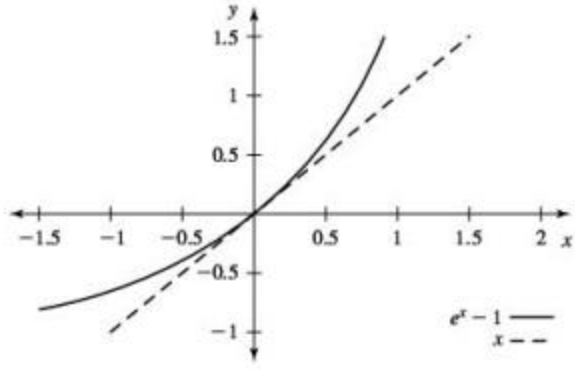
[Para calcular el candidato a edad óptima x, habría que sustituir $r(x)$ en la Ecuación (5.12) y resolverla numéricamente. Sería necesario comprobar que esto realmente proporciona el máximo absoluto, cosa que, de hecho, se puede hacer.]

5.5 REGLA DE L'HÔPITAL

Guillaume François l'Hôpital nació en Francia en 1661. Comenzó a interesarse por el cálculo hacia 1690, cuando comenzaron a aparecer artículos de Leibniz y de los hermanos Bernoulli sobre el nuevo cálculo. Johann Bernoulli estaba en París en 1691, y l'Hôpital le pidió que le enseñara cálculo. Bernouilli dejó París un año más tarde, pero continuó proporcionando a l'Hôpital material nuevo sobre el cálculo. Bernouilli recibía un salario mensual por este servicio y se acordó que no proporcionaría a nadie más acceso a ese material. Una vez l'Hôpital pensó que había comprendido suficientemente el material, decidió escribir un libro sobre la materia, que fue publicado con su nombre y obtuvo un gran éxito. Bernoulli no se sintió particularmente feliz, ya que sus contribuciones apenas se reconocían en el libro. Quizá l'Hôpital pensó que como había pagado por el material del curso, tenía derecho a publicarlo.

Hoy en día, l'Hôpital es famoso sobre todo por su tratamiento de los límites de fracciones en las que tanto el numerador como el denominador tienden a cero en el límite. La regla que lleva su nombre fue descubierta por Johann Bernoulli, pero se publicó en el libro de l'Hôpital. La regla funciona también cuando el numerador y el denominador tienden a infinito. Ya han aparecido ejemplos anteriormente, por ejemplo,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$



▲ **Figura 5.60**
Gráficas de $y = e^x$ y de $y = x$

o

$$\lim_{x \to \infty} \frac{kx}{1 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{k}{\frac{1}{x} + 1} = k$$

En ambos ejemplos el límite se calculó mediante operaciones algebraicas.

En el siguiente ejemplo, sin embargo, eso no es posible:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 0$ (*véase* la Figura 5.60). No hay forma de simplificar la fracción algebraicamente. Como alternativa, se puede linealizar el numerador y el denominador en $a = 0$. La linealización sirve como aproximación. Recuérdese la Sección 4.8 donde la aproximación lineal de una función $f(x)$ en $x = a$ se definió como

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si $f(x) = e^x - 1$, entonces $f'(x) = e^x$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Es decir, la aproximación lineal del numerador en $a = 0$ es

$$L(x) = 0 + (1)(x - 0) = x$$

El denominador ya es una función lineal, concretamente, $g(x) = x$. Se utilizará la linealización para aproximar $\frac{e^x - 1}{x}$. Resulta entonces el cociente $\frac{x}{x} = 1$. Es razonable esperar entonces que el valor límite de $\frac{e^x - 1}{x}$ cuando $x \to 0$ sea 1. De hecho, eso se puede demostrar.

Para ver claramente lo que hemos hecho, veamos el caso general

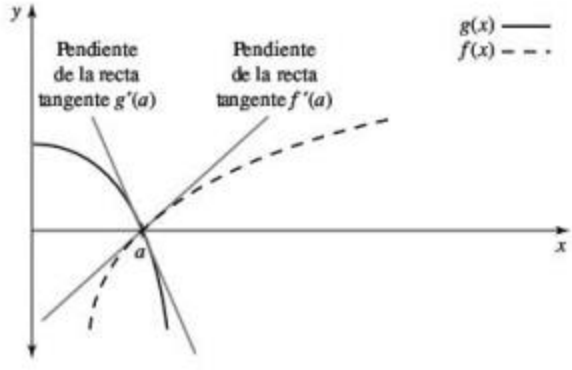
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y supongamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

(*véase* la Figura 5.61). Utilizando una aproximación lineal como antes, se obtiene que para x cercano a a,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(a) + f'(a)(x - a)}{g(a) + g'(a)(x - a)}$$



▲ **Figura 5.61**
Regla de l'Hôpital

Como $f(a) = g(a) = 0$ y $x \neq a$, el miembro derecho es igual a

$$\frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

suponiendo que $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ está definido. Por tanto, tenemos que algo como

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

se cumple cuando $\frac{f(a)}{g(a)}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ está definido. De hecho, algo así efectivamente se cumple, y se denomina regla de l'Hôpital. Esta regla es más general que como se ha presentado, La demostración de este resultado requeriría una versión generalizada del teorema del valor medio, que está fuera del alcance de este texto.

REGLA DE L'HÔPITAL

Suponga que f y g son funciones derivables y que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

La regla de l'Hôpital se cumple también para $a = +\infty$ o $-\infty$. También se puede aplicar a límites laterales.

Utilizando la regla de l'Hôpital, se pueden rehacer los tres primeros ejemplos. En cada uno de ellos, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una **expresión indeterminada**. Al sustituir x por a, quedan o bien de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. En cada caso se aplicará la regla de

l'Hôpital: se derivan el numerador y el denominador y se toma el límite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cuando $x \to a$. Si el límite existe, es igual al límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \to a$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{kx}{1+x} = \lim_{x\to \infty} \frac{k}{1} = k$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Como se acaba de decir, si existe el límite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cuando $x \to a$, entonces se concluye que existe el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \to a$ y que ambos límites coinciden. Por tanto las tres primeras igualdades de los tres ejemplos anteriores son ciertas *porque* las segundas igualdades se cumplen. Es conveniente tener esto en cuenta en los ejemplos siguientes. Consideraremos algunos ejemplos más. En cada uno de ellos, puede ser interesante dibujar la función con una calculadora gráfica. Los primeros tres ejemplos son aplicación directa de la regla de l'Hôpital.

Ejemplo 1 **Expresión indeterminada 0/0** Evalúe

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^6-64}{x^2-4}$$

Solución

El límite es de la forma $\frac{0}{0}$, ya que $2^6 - 64 = 0$ y $2^2 - 4 = 0$. Aplicando la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^6-64}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{6x^5}{2x} = \frac{(6)(2^5)}{(2)(2)} = (6)(2^3) = 48$$ ◀

Ejemplo 2 **Expresión indeterminada 0/0** Evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Solución

El límite es de la forma $\frac{0}{0}$, ya que $1 - \cos^2 0 = 0$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$. Aplicando la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} 2\operatorname{sen} x = 0$$ ◀

Ejemplo 3 **Expresión indeterminada ∞/∞** Evalúe

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$$

Solución

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se puede aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$ ◀

Ejemplo 4 **Expresión indeterminada ∞/∞—Límite lateral** Evalúe

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\tan x}{1+\tan x}$$

Solución

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se aplica la regla de l'Hôpital y se obtiene

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\tan x}{1+\tan x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)} 1 = 1$$ ◀

Ejemplo 5 **Aplicación repetida de la regla de l'Hôpital** Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{3x^3-2x^2}$$

Solución

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3}{9x^2-4x}$$

que todavía es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando de nuevo la regla de l'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3}{9x^2-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{18x-4}$$

Como el límite todavía es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica una vez más la regla de l'Hôpital, resultando

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x}{18x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

En este ejemplo, podríamos haber obtenido el resultado sin aplicar la regla de l'Hôpital, dividiendo el numerador y el denominador por x^3. Concretamente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$$ ◀

Cuando se aplica la regla de l'Hôpital, puede ocurrir que el límite sea infinito, como ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 **Límite infinito** Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$$

Solución

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se aplica la regla de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty \quad \text{(el límite no existe)}$$ ◀

La regla de l'Hôpital se puede aplicar algunas veces a límites de la forma

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$$

siendo

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

ya que el límite se puede expresar de la forma

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

que es de nuevo de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 7 **Expresión indeterminada de la forma $0\cdot\infty$** Evalúe

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

Solución

Este límite es de la forma $(0)(-\infty)$. Se aplica la regla de l'Hôpital tras escribirlo en la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{1}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Se podría haber escrito el límite en la forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

y aplicar después la regla de l'Hôpital. En este caso,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(-1)(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-\ln x} = 0$$

Probablemente estemos de acuerdo en que la primera forma es más fácil, ya que es más difícil derivar $1/\ln x$ que $\ln x$. Antes de aplicar la regla de l'Hôpital a expresiones de la forma $0\cdot\infty$, es conveniente determinar primero qué forma será más fácil de evaluar. ◀

Ejemplo 8 **Expresión indeterminada de la forma $0\cdot\infty$** Evalúe

$$\lim_{x\to 0^+} x\cot x$$

Solución

El límite es de la forma $0\cdot\infty$. Hay dos opciones. Se puede evaluar

$$\lim_{x\to 0^+} x\cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x}$$

donde se ha utilizado que $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, o

$$\lim_{x\to 0^+} x\cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\frac{1}{x}}$$

Parece más simple aplicar la regla de l'Hôpital a la primera forma

$$\lim_{x\to 0^+} x\cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \cos^2 x = 1$$

En el penúltimo paso, se ha utilizado que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. ◀

Los límites de la forma $\infty - \infty$ se pueden evaluar algunas veces utilizando la regla de l'Hôpital si se pueden transformar algebraicamente en límites de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 9 **Expresión indeterminada de la forma $\infty - \infty$** Evalúe

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\tan x - \sec x)$$

Solución

Este límite es de la forma $\infty - \infty$. Nótese que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Utilizando las dos igualdades anteriores, el límite se puede escribir en la forma

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\tan x - \sec x) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x}$$

que es ahora de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que se puede aplicar la regla de l'Hôpital y obtener

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{0}{-1} = 0$$ ◀

Ejemplo 10 **Expresión indeterminada de la forma $\infty - \infty$** Evalúe

$$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

Solución

El límite es de la forma $\infty - \infty$. Es necesario obtener un producto o cociente. Para ello se puede sacar factor común x, con lo que resulta

$$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \to \infty} x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

que es de la forma $\infty \cdot 0$. Se puede transformar en la forma $\frac{0}{0}$ y aplicar a continuación la regla de l'Hôpital.

$$\lim_{x \to \infty} x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{x})^{-1/2} (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2}$$ ◀

Finalmente, se consideran expresiones de la forma

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

cuando son de los tipos 0^0, ∞^0 o 1^∞. La clave para resolver estos límites es escribirlos en la forma

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\exp\left\{\ln[f(x)]^{g(x)}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\exp[g(x)\cdot\ln f(x)]$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to a}(g(x)\cdot\ln f(x))\right]$$

El último paso, donde se han intercambiado lim y exp, utiliza el hecho de que la función exponencial es continua. Escribiendo los límites de esta forma se transforman así:

0^0 en $\exp[0\cdot(-\infty)]$

∞^0 en $\exp[0\cdot(\infty)]$

1^∞ en $\exp[\infty\cdot\ln 1] = \exp[\infty\cdot 0]$

Como ya sabemos tratar los límites de la forma $0\cdot\infty$ estamos en terreno conocido. Se presentan dos ejemplos.

Ejemplo 11 **Expresión indeterminada de la forma 0^0** Evalúe

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Solución

Este límite es de la forma 0^0. En primer lugar se transforma

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+}\exp[\ln x^x] = \lim_{x\to 0^+}\exp[x\ln x]$$

$$= \exp[\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)]$$

Este límite se evaluó en el Ejemplo 7, encontrándose que

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \exp[\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)] = \exp[0] = 1$$

(*véase* la Figura 5.62). ◀

Ejemplo 12 **Expresión indeterminada de la forma 1^∞** Evalúe

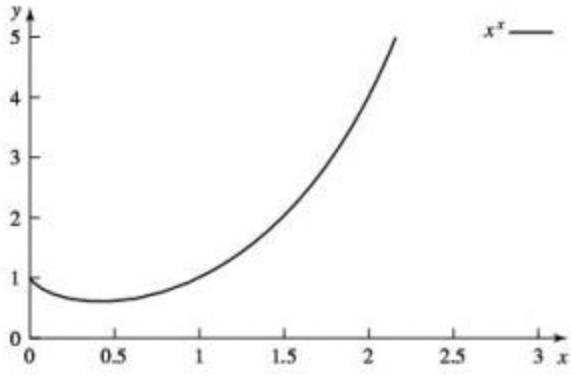
$$\lim_{x\to(\pi/4)^-}(\tan x)^{\tan(2x)}$$

Solución

Como $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ y $\tan(2\frac{\pi}{4}) = \infty$, el límite es de la forma 1^∞. Se puede transformar en la forma

$$\lim_{x\to(\pi/4)^-}(\tan x)^{\tan(2x)} = \lim_{x\to(\pi/4)^-}\exp[\tan(2x)\cdot\ln\tan x]$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to(\pi/4)^-}(\tan(2x)\cdot\ln\tan x)\right]$$



▲ **Figura 5.62**
Gráfica de $y = x^x$

El límite es ahora de la forma $\infty \cdot 0$ (ya que $\ln \tan \frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$). Se evalúa el límite escribiéndolo en la forma $\frac{0}{0}$ y aplicando después la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to (\pi/4)^-} (\tan(2x) \cdot \ln \tan x) = \lim_{x \to (\pi/4)^-} \frac{\ln \tan x}{\frac{1}{\tan(2x)}}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/4)^-} \frac{\ln \tan x}{\cot(2x)}$$

Como

$$\frac{d}{dx} \ln \tan x = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

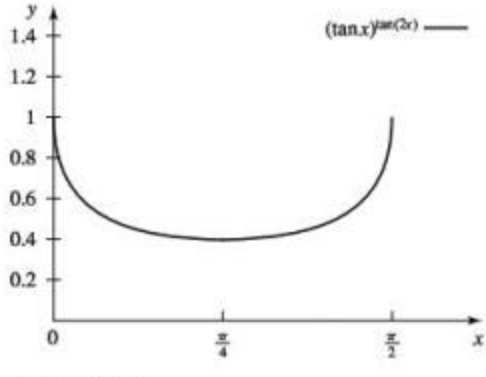
y

$$\frac{d}{dx} \cot(2x) = -(\csc^2(2x)) \cdot 2 = \frac{-2}{\operatorname{sen}^2(2x)}$$

se obtiene

$$\lim_{x \to (\pi/4)^-} \frac{\ln \tan x}{\cot(2x)} = \lim_{x \to (\pi/4)^-} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}}{\frac{-2}{\operatorname{sen} 2(2x)}} = \lim_{x \to (\pi/4)^-} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{-2 \operatorname{sen} x \cos x}$$

$$= \frac{1}{(-2)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = -1$$



▲ **Figura 5.63**
Gráfica de $y = (\tan x)^{\tan(2x)}$

Por tanto,

$$\lim_{x\to(\pi/4)^-}(\tan x)^{\tan(2x)} = \exp\Big[\lim_{x\to(\pi/4)^-}(\tan(2x)\ln\tan x)\Big]$$
$$= \exp[-1] = e^{-1}$$

La gráfica de $f(x) = (\tan x)^{\tan(2x)}$ se muestra en la Figura 5.63. ◀

5.5.1. Problemas

Utilice la regla de l'Hôpital para calcular los límites en los Problemas 1-40.

1. $\lim_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$
2. $\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$
3. $\lim_{x\to-2}\dfrac{2x^2+x-6}{x+2}$
4. $\lim_{x\to-3}\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$
5. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x}$
6. $\lim_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{2x}$
7. $\lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x\cos x}$
8. $\lim_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}$
9. $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$
10. $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}$
11. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)}$
12. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
13. $\lim_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$
14. $\lim_{x\to0}\dfrac{2^{-x}-1}{5^x-1}$
15. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$
16. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$
17. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x^2}$
18. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$
19. $\lim_{x\to(\pi/2)}\dfrac{\tan x}{\sec^2 x}$
20. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen}x}$
21. $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}$
22. $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$
23. $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x$
24. $\lim_{x\to0^+}x^2\ln x$
25. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\sec x$
26. $\lim_{x\to1^-}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$
27. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$
28. $\lim_{x\to\infty}x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$
29. $\lim_{x\to0^+}(\cot x-\csc x)$
30. $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$
31. $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}-\dfrac{1}{x}\right)$
32. $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2x}-\dfrac{1}{x}\right)$
33. $\lim_{x\to0^+}x^{2x}$
34. $\lim_{x\to0^+}x^{\operatorname{sen}x}$
35. $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$
36. $\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{1/x}$
37. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$
38. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^x$
39. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$
40. $\lim_{x\to0^+}(\cos(2x))^{3/x}$

Calcule los límites de los Problemas 41-50. Asegúrese de comprobar si se puede aplicar la regla de l'Hôpital antes de calcular el límite.

41. $\lim_{x\to0}xe^x$
42. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{x}$
43. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x+\sec x)$
44. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\dfrac{\tan x}{1+\sec x}$
45. $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+5}{x+1}$

46. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sec x}$

47. $\lim_{x\to -\infty} xe^{x}$

48. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

49. $\lim_{x\to 0^+} x^{3x}$

50. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

51. Utilice la regla de l'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1}$$

siendo $a, b > 0$.

52. Utilice la regla de l'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^{x}$$

siendo c una constante.

53. Para $p > 0$, determine los valores de p para los que el siguiente límite vale 1, ∞ o una constante distinta de 1:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{c}{x^p}\right)^{x}$$

54. Demuestre que

$$\lim_{c\to\infty} x^p e^{-x} = 0$$

para cualquier número positivo p. Dibuje $f(x) = x^p e^{-x}$, $x > 0$, para $p = 1/2$, 1 y 2. Como $f(x) = x^p e^{-x} = x^p/e^x$, esto demuestra que la función exponencial crece más rápido que cualquier potencia de x cuando $x \to \infty$.

55. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica crece más lento que cualquier potencia de x cuando $x \to \infty$.

56. Cuando l'Hôpital presentó los límites indeterminados en su libro de texto, su *primer* ejemplo fue

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

siendo a una constante positiva (este ejemplo le fue comunicado por Bernoulli). Demuestre que este límite es igual a $(16/9)a$.

57. La altura en pies (y) de un árbol es función de su edad (x), y se expresa como

$$y = 121e^{-17/x} \quad \text{para } x > 0$$

(a) Determine la velocidad de crecimiento cuando $x \to 0^+$ y el límite de la altura cuando $x \to \infty$.

(b) Calcule la edad a la que la velocidad de crecimiento es máxima.

(c) Demuestre que la altura del árbol es una función creciente de la edad. ¿A qué edad la altura aumenta de forma acelerada, y a qué edad de forma decelerada?

(d) Dibuje la gráfica de la altura y la velocidad de crecimiento en función de la edad.

5.6 ECUACIONES EN DIFERENCIAS: ESTABILIDAD (OPCIONAL)

En el Capítulo 2 se presentaron las ecuaciones en diferencias y se vio que las ecuaciones en diferencias de primer orden se pueden representar mediante ecuaciones recursivas de la forma

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.13}$$

siendo $f(x)$ una función. En ese capítulo sólo aprendimos a analizar las ecuaciones en diferencias numéricamente (excepto en el caso del crecimiento exponencial, que fuimos capaces de resolver). Vimos que los puntos fijos (o de equilibrio) tenían un papel especial. Un punto fijo x^* de (5.13) cumple la ecuación

$$x^* = f(x^*) \tag{5.14}$$

y tiene la propiedad de que si $x_0 = x^*$, entonces $x_t = x^*$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$ También vimos en diversas aplicaciones que bajo ciertas condiciones, x_t convergía al punto fijo cuando $t \to \infty$ incluso si $x_0 \neq x^*$. Sin embargo, no fuimos capaces de predecir cuándo se producía este comportamiento.

En esta sección, volveremos a los puntos fijos y utilizaremos el cálculo para encontrar una condición que permita predecir cuándo ocurre la convergencia a un punto fijo. Empezaremos con el caso más simple, el crecimiento exponencial.

5.6.1 Crecimiento exponencial

El crecimiento exponencial en tiempo discreto se expresa mediante la ecuación recursiva

$$N_{t+1} = RN_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.15}$$

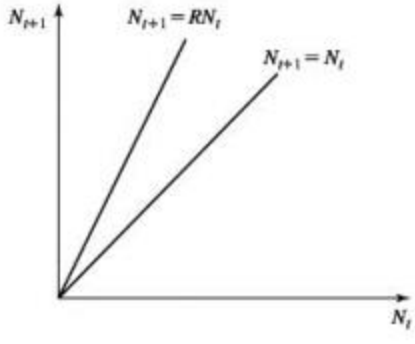
siendo N_t el tamaño de la población en el instante t y $R > 0$ el parámetro de crecimiento. Se supone que $N_0 \geqslant 0$ lo que implica que $N_t \geqslant 0$.

El punto fijo de la Ecuación (5.15) se puede obtener resolviendo $N = RN$. La única solución es $N^* = 0$ a menos que $r = 1$. Si $R = 1$, el tamaño de la población no cambia nunca independientemente de N_0. Una consecuencia de ser punto fijo es que si $N_0 = N^*$, entonces $N_t = N^*$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$ Es decir, con $N^* = 0$, si $N_0 = 0$, entonces $N_t = 0$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$ Pero ¿qué sucede si se comienza con un valor distinto de 0? En el Capítulo 2, vimos que $N_t = N_0R^t$ es una solución de la Ecuación (5.15) con condición inicial N_0. Utilizando este hecho, concluimos que si $N_0 > 0$ y $0 < R < 1$, entonces $N_t \to 0$ cuando $t \to \infty$. Pero si $N_0 > 0$ y $R > 1$, entonces $N_t \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Si $r = 1$, entonces $N_t = N_0$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$

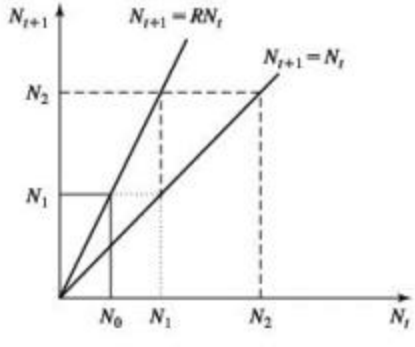
El comportamiento de N_t se puede interpretar como sigue: si $0 < R < 1$ y $N_0 > 0$, entonces N_t volverá al equilibrio $N^* = 0$. Si $R \geqslant 1$ y $N_0 > 0$, entonces N_t no volverá al equilibrio $N^* = 0$. Si $R = 1$, N_t se quedará en N_0. Si $R > 1$, N_t se irá a infinito. Se dice que $N^* = 0$ es **estable** si $0 < R < 1$, e **inestable** si $R > 1$. El caso $R = 1$ se denomina **neutro** ya que, independientemente del valor de N_0, es $N_t = N_0$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$

Telaraña Existe un método gradual para determinar si un punto fijo es estable o inestable. Los puntos fijos de la Ecuación (5.15) se obtuvieron gráficamente como aquellos puntos donde se cortaban las gráficas de $N_{t+1} = RN_t$ y de $N_{t+1} = N_t$, como ya se comentó en el Capítulo 2. Puede verse (Figura 5.64) que las dos gráficas sólo se cortan en $N_t = 0$ cuando $R \neq 1$, confirmando lo que se obtuvo anteriormente.

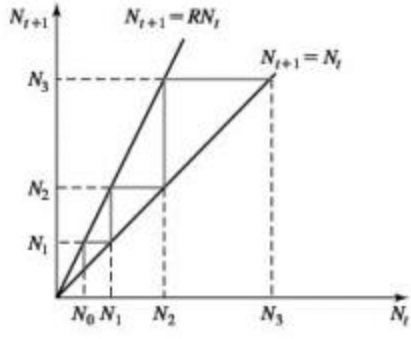
Podemos utilizar las dos gráficas sucesivas de la Figura 5.65 para seguir tamaños sucesivos de la población ($R > 1$ en la Figura 5.65). Se empieza con N_0 en el eje horizontal. Como $N_1 = RN_0$, se obtiene N_1 en el eje vertical, como muestran las rectas continuas de la Figura 5.65. Utilizando la recta $N_{t+1} = N_t$, se puede localizar N_1 en el eje horizontal, como muestra la Figura 5.65 con las rectas de puntos horizontal y vertical. Utilizando la recta $N_{t+1} = RN_t$ de nuevo, se obtiene N_2 en el eje vertical, como muestra la Figura 5.65 con las rectas de rayas horizontal y



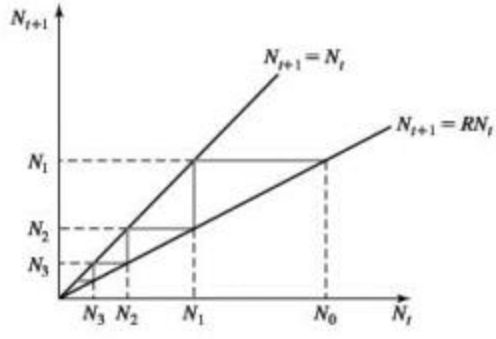
◀ **Figura 5.64**
Las gráficas de $N_{t+1} = N_t$ y $N_{t+1} = RN_t$ sólo se cortan en $N = 0$ para $R \neq 1$



◀ **Figura 5.65**
Las gráficas de $N_{t+1} = N_t$ y $N_{t+1} = RN_t$ se pueden utilizar para determinar tamaños sucesivos de la población



◀ **Figura 5.66**
El procedimiento en telaraña cuando $R > 1$



◀ **Figura 5.67**
El procedimiento en telaraña cuando $0 < R < 1$

vertical. Utilizando la recta $N_{t+1} = N_t$, se puede localizar N_2 en el eje vertical, y repetir los pasos anteriores para obtener N_3 en el eje vertical, y así sucesivamente. Este procedimiento es como realizar una telaraña.

En las Figuras 5.64-5.66, $R > 1$, y se puede ver que si $N_0 > 0$, entonces N_t no convergerá al punto fijo $N^* = 0$, sino que se separará de 0 (y de hecho tenderá a infinito cuando t tienda a infinito).

En la Figura 5.67 se utiliza este procedimiento cuando $0 < R < 1$. Puede verse que si $N_0 > 0$, entonces N_t convergerá al punto fijo $N^* = 0$.

Al considerar el caso general, veremos que la pendiente de la función $N_{t+1} = f(N_t)$ en el punto fijo [es decir, $f'(N^*)$] determina si la solución se aleja del punto fijo o converge al mismo. En el ejemplo del crecimiento exponencial, $N^* = 0$ y $f'(0) = R$. Para $0 < R < 1$, es estable. Si $R > 1$, N^* es inestable.

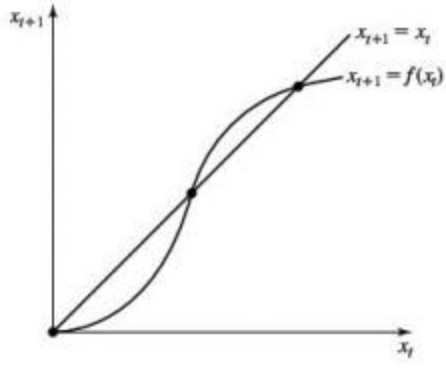
5.6.2 Estabilidad: caso general

La forma general de una ecuación recursiva de primer orden es

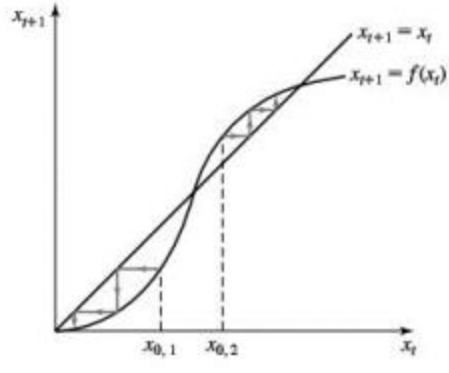
$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.16}$$

Se supone que la función f es derivable en su dominio. Para obtener algebraicamente los puntos fijos, se resuelve la ecuación $x = f(x)$. Para obtenerlos gráficamente, se buscan los puntos de intersección de las gráficas de $x_{t+1} = f(x_t)$ y $x_{t+1} = x_t$ (*véase* la Figura 5.68). Las gráficas de la Figura 5.68 se cortan más de una vez, lo que significa que existen múltiples puntos fijos o de equilibrio.

El procedimiento descrito en la subsección anterior se puede utilizar para investigar gráficamente el comportamiento de la ecuación en diferencias para distintos valores iniciales. La Figura 5.69 muestra dos casos, uno que comienza en $x_{0,1}$ y otro que comienza en $x_{0,2}$. Puede verse que x_t converge a diferentes valores de-



◀ **Figura 5.68**
Múltiples equilibrios



◀ **Figura 5.69**
Dependiendo del valor inicial, el sistema dinámico converge a diferentes valores límite

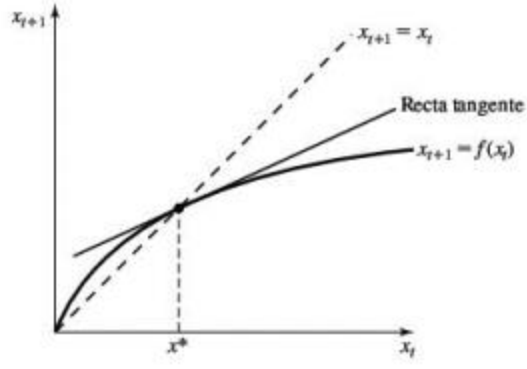
pendiendo del valor inicial. Es importante tener esto en cuenta en la presentación que sigue.

Estabilidad Para determinar la **estabilidad** de un equilibrio, es decir, si es estable o inestable, se procederá como la subsección anterior, concretamente, comenzaremos con un valor que sea diferente del equilibrio y comprobaremos si la solución vuelve al equilibrio. Hay una diferencia importante: *no* se permite cualquier valor inicial que sea diferente del equilibrio, sino sólo aquellos valores iniciales que están «cerca» del equilibrio. Esto se puede ver como una **perturbación** del equilibrio, y ya que el valor inicial está cerca de equilibrio, se denomina **perturbación pequeña**. La razón de utilizar sólo pequeñas perturbaciones es que si hay múltiples equilibrios y se comienza demasiado lejos del equilibrio de interés, podríamos terminar en un equilibrio diferente no porque el equilibrio de interés sea inestable sino simplemente porque nos desplazamos a otro equilibrio (como en la Figura 5.69).

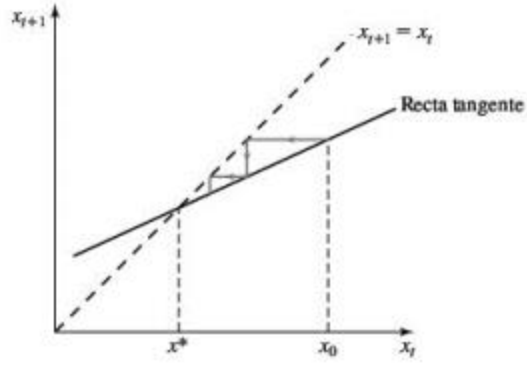
Si sólo se utilizan perturbaciones pequeñas, la función $f(x)$ se puede aproximar mediante la aproximación por recta tangente en el equilibrio x^* (Figura 5.70). Por tanto, se observan primero las gráficas donde se sustituye $f(x)$ por su aproximación mediante recta tangente en x^*.

Se pueden considerar cuatro casos diferentes en función de si la pendiente de la recta tangente en x^* está entre 0 y 1 (Figura 5.71a), mayor que 1 (Figura 5.71b), entre -1 y 0 (Figura 5.72a) y menor que -1 (Figura 5.72b).

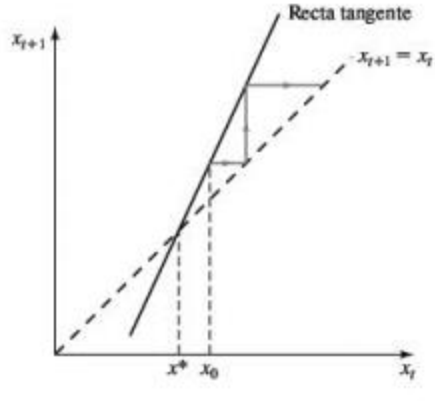
Puede verse que cuando la pendiente de la recta tangente está entre -1 y 1, x_t converge al equilibrio (Figuras 5.71a y 5.72a). La diferencia entre las Figuras 5.71a y 5.72a es que en la Figura 5.72a la solución se aproxima al equilibrio en espiral (exhibiendo por tanto un comportamiento oscilatorio), mientras que en la Figura 5.71a se aproxima en una dirección (exhibiendo así un comportamiento no



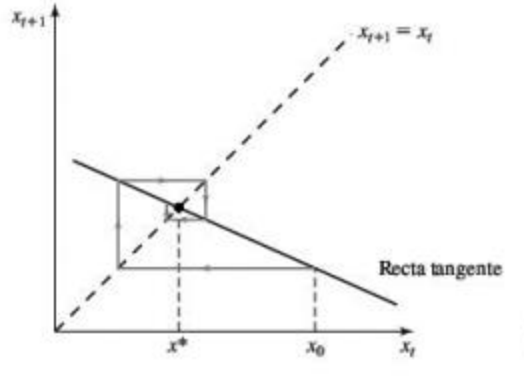
◀ **Figura 5.70**
Linealización cerca del equilibrio



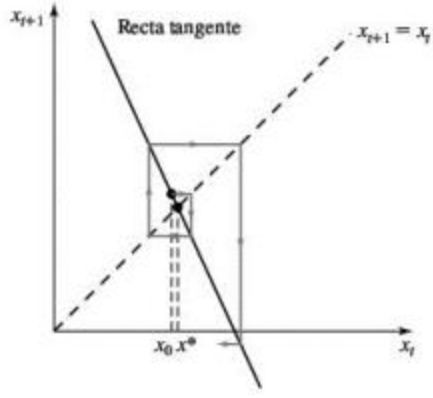
◀ **Figura 5.71a**
Un equilibrio localmente estable



◀ **Figura 5.71b**
Un equilibrio inestable



◀ **Figura 5.72a**
Un equilibrio localmente estable



◀ **Figura 5.72b**
Un equilibrio inestable

oscilatorio). Observando la Figura 5.71b, cuando la pendiente es mayor que 1, y la Figura 5.72b, donde la pendiente es menor que -1, puede verse que la solución x_t no vuelve al equilibrio. En la Figura 5.72b, la solución se aleja del equilibrio en espiral (exhibiendo así un comportamiento oscilatorio), mientras que en la Figura 5.71b se aleja en una dirección (exhibiendo así un comportamiento no oscilatorio). Los equilibrios de las Figuras 5.71a y 5.71b se denominan **localmente estables** y en las Figuras 5.71b y 5.72b **inestables**. Nótese que se ha añadido la palabra *localmente* a la palabra *estable* para resaltar que es una propiedad local ya que sólo se consideran perturbaciones cercanas al equilibrio.

Como la pendiente de la aproximación por recta tangente de $f(x)$ en x^* está dada por $f'(x^*)$, todo esto nos lleva al siguiente criterio, que demostraremos utilizando el cálculo.

CRITERIO

Un equilibrio x^* de $x_{t+1} = f(x_t)$ es localmente estable si

$$|f'(x^*)| < 1$$

Demostración En las Figuras 5.71 y 5.72, observamos la linealización de $f(x)$ alrededor del equilibrio x^* y estudiamos cómo afecta una pequeña perturbación al futuro de la solución. Trasladando esto a ecuaciones, denominaremos z_t a una pequeña perturbación en el instante t y escribiremos

$$x_t = x^* + z_t$$

Entonces

$$x_{t+1} = f(x_t) = f(x^* + z_t)$$

Recuérdese que la aproximación lineal de $f(x)$ en $x = a$ es $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Con $x = x^* + z_t$ y $a = x^*$, la aproximación lineal de $f(x^* + z_t)$ en x^* es

$$L(x^* + z_t) = f(x^*) + f'(x^*)z_t$$

Se puede aproximar $x_{t+1} = x^* + z_{t+1}$ por

$$x^* + z_{t+1} \approx f(x^*) + f'(x^*)z_t$$

Como $f(x^*) = x^*$ (x^* es un equilibrio), se obtiene

$$z_{t+1} \approx f'(x^*)z_t \tag{5.17}$$

Esta última expresión debe recordarnos el crecimiento exponencial $y_{t+1} = Ry_t$, donde se puede identificar y_t con z_t y R con $f'(x^*)$. Como la solución de

$y_{t+1} = Ry_t$ es igual a $y_t = y_0R^t$ y $R^t \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $|R| < 1$, se obtiene el criterio $|f'(x^*)| < 1$ para estabilidad local. Es decir, si $|f'(x^*)| < 1$, la perturbación z_t convergerá a $z^* = 0$. De forma equivalente, $x_t \to x^*$ cuando $t \to \infty$. ■

Volviendo a las Figuras 5.71 y 5.72, se puede ver, además, que la aproximación al equilibrio es sin oscilaciones si $f'(x^*) > 0$ y es con oscilaciones si $f'(x^*) < 0$.

Ejemplo 1 Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}x_t^2, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución

Para calcular el equilibrio hay que resolver

$$x = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}x^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

El miembro izquierdo se puede factorizar como $(5x - 1)(x + 1)$, con lo que se obtiene

$$(5x - 1)(x + 1) = 0 \quad \text{si} \quad x = \frac{1}{5} \quad \text{o} \quad x = -1$$

Para determinar la estabilidad, se necesita calcular la derivada de $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}x^2$ en el equilibrio. Entonces

$$f'(x) = -\frac{5}{2}x$$

y por tanto si $x = \frac{1}{5}$, entonces $|f'(\frac{1}{5})| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$ y si $x = -1$, entonces $|f'(-1)| = |\frac{5}{2}| = \frac{5}{2} > 1$. Por tanto, $x = \frac{1}{5}$ es localmente estable y $x = -1$ es inestable.

Puede decirse algo más, concretamente, como $f'(\frac{1}{5}) = -\frac{1}{2} < 0$, el equilibrio $x^* = \frac{1}{5}$ se alcanza con oscilaciones. ◀

Ejemplo 2 Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{x_t}{0.1 + x_t}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución

Para calcular el equilibrio hay que resolver

$$x = \frac{x}{0.1 + x}$$

Esto produce inmediatamente como solución $x = 0$. Si $x \neq 0$, entonces, tras dividir por x, tenemos

$$1 = \frac{1}{0.1 + x} \quad \text{o} \quad 0.1 + x = 1 \quad \text{o} \quad x = 0.9$$

Con $f(x) = \frac{x}{0.1+x}$, se obtiene

$$f'(x) = \frac{0.1 + x - x}{(0.1 + x)^2} = \frac{0.1}{(0.1 + x)^2}$$

Como $f'(0) = \frac{1}{0.1} = 10 > 1$, se concluye que $x^* = 0$ es inestable. Como $f'(0.9) = 0.1 \in (0, 1)$, se concluye que $x^* = 0.9$ es estable y su aproximación es sin oscilaciones. ◀

5.6.3 Ejemplos

En los ejemplos siguientes, revisaremos de nuevo tres modelos de crecimiento que se comentaron en el Capítulo 2. En dicho capítulo, se analizaron estos modelos por simulación y simplemente admitimos para qué parámetros existía una solución localmente estable no trivial. Ahora estamos en posición de determinar analíticamente la estabilidad utilizando el criterio de la subsección anterior.

Ejemplo 3 **(Curva de reclutamiento de Beverton-Holt)** Sea N_t el tamaño de una población en el instante t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ Dada la curva de reclutamiento de Beverton-Holt, calcule todos los equilibrios y determine su estabilidad

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K} N_t}$$

donde se supone que los parámetros R y K cumplen que $R > 1$ y $K > 0$.

Solución

Para calcular el equilibrio, se hace

$$N = \frac{RN}{1 + \frac{R-1}{K} N}$$

y se despeja N. Esto produce inmediatamente la solución trivial $N = 0$, y, tras dividir por $N \neq 0$,

$$1 = \frac{RN}{1 + \frac{R-1}{K} N}$$

Despejando N en esta última expresión, se obtiene la solución no trivial

$$1 + \frac{R-1}{K} N = R \quad \text{o} \quad N = K$$

Para determinar la estabilidad en los dos equilibrios, hay que derivar

$$f(N) = \frac{RN}{1 + \frac{R-1}{K} N}$$

Se obtiene (utilizando la regla del cociente)

$$f'(N) = \frac{R\left(1 + \frac{R-1}{K} N\right) - RN \frac{R-1}{K}}{\left(1 + \frac{R-1}{K} N\right)^2}$$

$$= \frac{R}{\left(1 + \frac{R-1}{K} N\right)^2}$$

Para determinar la estabilidad del equilibrio trivial $N^* = 0$, se calcula

$$f'(0) = R > 1$$

(ya que se supone $R > 1$). Por tanto, $N^* = 0$ es inestable. La estabilidad del equilibrio no trivial $N^* = K$ se puede determinar calculando

$$f'(K) = \frac{R}{\left(1 + \frac{R-1}{K} K\right)^2} = \frac{1}{R}$$

y por tanto $|f'(K)| < 1$ ya que $r > 1$. Entonces, $N^* = K$ es localmente estable cuando $R > 1$, como se obtuvo en el Capítulo 2. Como $f'(K) > 0$ la aproximación al equilibrio es sin oscilaciones. ◀

Ejemplo 4 **(Crecimiento logístico)** Sea N_t el tamaño de una población en el instante t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ Dada la ecuación del crecimiento logístico discreto, calcule todos los equilibrios y determine su estabilidad

$$N_{t+1} = N_t\left[1 + R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]$$

donde se supone que los parámetros R y K son ambos positivos.

Solución

Para calcular el equilibrio, se hace

$$N = N\left[1 + R\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right]$$

Esto produce la solución trivial $N = 0$ y la solución no trivial $N = K$.

Para determinar la estabilidad, hay que derivar

$$f(N) = N\left[1 + R\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right]$$

Se obtiene (aplicando la regla del producto)

$$f'(N) = 1 + R\left(1 - \frac{N}{K}\right) + N\left(-\frac{R}{K}\right)$$

$$= 1 + R - \frac{2NR}{K}$$

Como $f'(0) = 1 + R > 1$, se concluye que $N^* = 0$ es inestable. Entonces

$$f'(K) = 1 + R - 2R = 1 - R$$

Como $|f'(K)| = |1 - R| < 1$ si $-1 < 1 - R < 1$ o $2 > R > 0$, se concluye que $N^* = K$ es localmente estable si $0 < R < 2$, como vimos en el Capítulo 2. Ahora se puede decir algo más: si $0 < R < 1$, entonces la aproximación a $N^* = K$ es sin oscilaciones ya que $f'(K) > 0$. Si $1 < R < 2$, la aproximación es con oscilaciones ya que $f'(K) < 0$. ◀

Ejemplo 5 **(Curva de Ricker)** Sea N_t el tamaño de una población en el instante t, $t=0, 1, 2, \ldots$ Dada la curva de Ricker, calcule todos los equilibrios y determine su estabilidad

$$N_{t+1} = N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]$$

donde se supone que el parámetro R es positivo.

Solución

Para calcular el equilibrio, se hace

$$N = N\exp\left[R\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right]$$

Así se obtiene la solución trivial $N = 0$ y

$$1 = \exp\left[R\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right]$$

Despejando N resulta

$$R\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \quad \text{o} \quad N = K$$

Para determinar la estabilidad, hay que derivar

$$f(N) = N\exp\left[R\left(1-\frac{N}{K}\right)\right]$$

Utilizando la regla del producto y la regla de la cadena, se obtiene

$$f'(N) = \exp\left[R\left(1-\frac{N}{K}\right)\right] + N\exp\left[R\left(1-\frac{N}{K}\right)\right]\left(-\frac{R}{K}\right)$$

$$= \exp\left[R\left(1-\frac{N}{K}\right)\right]\left(1-\frac{NR}{K}\right)$$

Entonces,

$$f'(0) = e^R > 1$$

para $R > 0$ y entonces $N^* = 0$ es inestable. Como

$$f'(K) = 1 - R$$

Como $|f'(K)| = |1 - R| < 1$ si $-1 < 1 - R < 1$ o $0 < R < 2$, se concluye que $N^* = K$ es localmente estable si $0 < R < 2$. Ahora se puede decir algo más: si $0 < R < 1$, entonces la aproximación a $N^* = K$ es sin oscilaciones ya que $f'(K) > 0$. Si $1 < R < 2$, la aproximación es con oscilaciones ya que $f'(K) < 0$. ◀

5.6.4. Problemas

(5.6.1)

1. Suponga una población en tiempo discreto cuyo tamaño en la generación $t + 1$ está relacionado con su tamaño en la generación t mediante la ecuación

$$N_{t+1} = (1.03)N_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Si $N_0 = 10$, ¿cuál será el tamaño de la población en la generación $t = 5$?

(b) ¿Cuántas generaciones tardará la población en doblar el tamaño de la generación 0?

2. Suponga que una población en tiempo discreto evoluciona de acuerdo a

$$N_{t+1} = (0.9)N_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Si $N_0 = 50$, ¿cuál será el tamaño de la población en la generación $t = 6$?

(b) ¿Cuántas generaciones tardará la población en ser un cuarto del tamaño de la generación 0?

(c) ¿Qué le ocurrirá a la población a largo plazo, es decir, cuando $t \to \infty$?

3. Asuma el siguiente modelo de población en tiempo discreto

$$N_{t+1} = bN_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Suponga que el tamaño de la población disminuye el 2% en cada generación.

(a) Determine b.

(b) Calcule el tamaño de la población en la generación 10 cuando $N_0 = 20$.

(c) ¿Cuántas generaciones tardará la población en doblar su tamaño?

4. Asuma el siguiente modelo de población en tiempo discreto

$$N_{t+1} = bN_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Asuma además que el tamaño de la población disminuye un 3% en cada generación.

(a) Determine b.

(b) Calcule el tamaño de la población en la generación 10 cuando $N_0 = 50$.

(c) ¿Cuántas generaciones tardará la población en reducir su tamaño original a la mitad?

5. Asuma el siguiente modelo de población en tiempo discreto

$$N_{t+1} = bN_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Asuma además que el tamaño de la población disminuye un x% en cada generación.

(a) Determine b.

(b) ¿Después de cuántas generaciones se habrá doblado el tamaño de la población? Calcule el tiempo de doblaje para $x = 0.1, 0.5, 1, 2, 5$ y 10.

6. (a) Calcule todos los equilibrios de

$$N_{t+1} = 1.3N_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Utilice el procedimiento en telaraña para determinar la estabilidad del equilibrio calculado en (a).

7. (a) Calcule todos los equilibrios de

$$N_{t+1} = 0.9N_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Utilice el procedimiento en telaraña para determinar la estabilidad del equilibrio calculado en (a).

8. (a) Calcule todos los equilibrios de

$$N_{t+1} = N_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) ¿Cómo cambia el tamaño de la población N_t con el tiempo, empezando con N_0 en el instante 0?

(5.6.2)

9. Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_t^2, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

10. Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{3}{5}x_t^2 - \frac{2}{5}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

11. Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{x_t}{0.5 + x_t}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

12. Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{x_t}{0.3 + x_t}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

13. **(a)** Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{5x_t^2}{4 + x_t^2}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Utilice el procedimiento en telaraña para decidir a qué valor x_t converge cuando $t \to \infty$ si (i) $x_0 = 0.5$ y (ii) $x_0 = 2$.

14. **(a)** Utilice el criterio de estabilidad para caracterizar la estabilidad del equilibrio de

$$x_{t+1} = \frac{10x_t^2}{9 + x_t^2}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Utilice el procedimiento en telaraña para decidir a qué valor x_t converge cuando $t \to \infty$ si (i) $x_0 = 0.5$ y (ii) $x_0 = 3$.

(5.6.3)

15. La curva de Ricker se expresa

$$R(P) = \alpha P e^{-\beta P}$$

para $P \geqslant 0$, siendo P el tamaño del stock de padres y $R(P)$ el número de reclutas. Los parámetros α y β son constantes positivas.

(a) Demuestre que $R(0) = 0$ y $R(P) > 0$ para $P > 0$.

(b) Calcule

$$\lim_{P \to \infty} R(P)$$

(c) ¿Para qué tamaño del stock de padres es máximo el número de reclutas?

(d) ¿Tiene $R(P)$ puntos de inflexión? Si es así. Calcúlelos.

(e) Dibuje la gráfica de $R(P)$ cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 1/2$.

16. Suponga que el tamaño de una población de peces en la generación t se expresa como

$$N_{t+1} = 1.5N_t e^{-0.001N_t}$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Asuma que $N_0 = 100$. Calcule el tamaño de la población de peces en la generación t para $t = 1, 2, \ldots, 20$.

(b) Asuma que $N_0 = 800$. Calcule el tamaño de la población de peces en la generación t para $t = 1, 2, \ldots, 20$.

(c) Determine todos los puntos fijos. Basándose en los cálculos realizados en (a) y (b), ¿puede intuir lo que sucederá con la población a largo plazo empezando, respectivamente, en $N_0 = 100$ y en $N_0 = 800$?

(d) Utilice el procedimiento en telaraña para ilustrar su respuesta al apartado (a).

(e) Explique por qué el sistema dinámico converge al punto fijo no trivial.

17. Suponga que el tamaño de la población de peces en la generación t se expresa como

$$N_{t+1} = 10N_t e^{-0.01N_t}$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Asuma que $N_0 = 100$. Calcule el tamaño de la población de peces en la generación t para $t = 1, 2, \ldots, 20$

(b) Demuestre que si $N_0 = 100 \ln 10$, entonces $N_t = 100 \ln 100$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$ Es decir, $N^* = 100 \ln 100$ es un punto fijo o de equilibrio no trivial. ¿Cómo se calcularía N^*? ¿Existen otros equilibrios?

(c) Basándose en sus cálculos del apartado (a), ¿puede realizar una predicción sobre el comportamiento a largo plazo de la población de peces cuando $N_0 = 100$? ¿Cómo se compara este caso con su respuesta al apartado (b)?

(d) Utilice el procedimiento en telaraña para ilustrar su respuesta al apartado (c).

En los Problemas 18-20, considere el siguiente sistema dinámico en tiempo discreto, que se denomina modelo logístico discreto, para modelar el tamaño de la población con el tiempo:

$$N_{t+1} = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots$

18. **(a)** Calcule todos los equilibrios cuando $r = 0.5$.

(b) Investigue el sistema cuando $N_0 = 10$ y describa lo que ve.

19. **(a)** Calcule todos los equilibrios cuando $r = 2$.

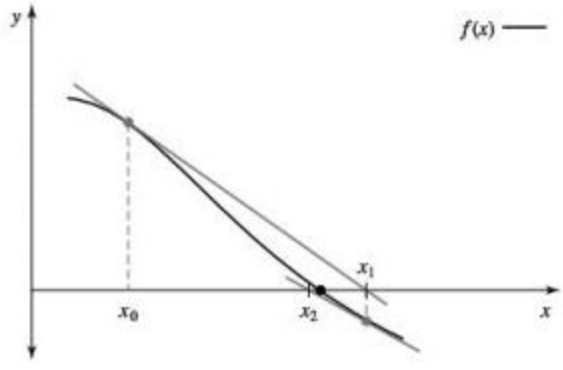
(b) Investigue el sistema cuando $N_0 = 10$ y describa lo que ve.

20. **(a)** Calcule todos los equilibrios cuando $r = 3.1$.

(b) Investigue el sistema cuando $N_0 = 10$ y describa lo que ve.

5.7 MÉTODOS NUMÉRICOS: EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (OPCIONAL)

Los métodos numéricos son muy importantes en las ciencias, ya que frecuentemente se encuentran situaciones donde es imposible encontrar soluciones exactas. En la Sección 3.5, encontramos un método, el método de la bisección, para resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. Se presenta ahora otro método que a menudo es mucho más eficiente el método de la bisección.



▲ **Figura 5.73**
Gráfica de $y = f(x)$ y de las dos primeras iteraciones del método de Newton- Raphson

El método de Newton-Raphson sirve para calcular soluciones a ecuaciones de la forma

$$f(x) = 0$$

La idea en la que se basa se explica mejor gráficamente (*véase* la Figura 5.73).

Suponga que se desea calcular las raíces de $f(x) = 0$. Se comienza por elegir un punto x_0 como estimación inicial. Después se sustituye la gráfica de $f(x)$ por su recta tangente $y = L(x)$ en el punto x_0. Como la pendiente de la tangente es igual a $f'(x_0)$, y $(x_0, f(x_0))$ es un punto de la recta tangente, se puede utilizar la forma punto-pendiente para expresar la ecuación de dicha recta tangente. Su expresión es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Esta recta cortará al eje x en algún punto $x = x_1$, suponiendo que $f'(x_0) \neq 0$. Para calcular x_1, se sustituye $x = x_1$ e $y = 0$ y se despeja x_1:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \text{o} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x_1 se utiliza como la siguiente estimación y se repite el procedimiento, que producirá una nueva estimación x_2, y así sucesivamente. El valor de x_{n+1} se expresa entonces como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.18}$$

Esto produce una secuencia de números $x_1, x_2, \ldots$ Si estos valores convergen a la raíz de $f(x) = 0$, denominada r, cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

entonces el cálculo de $x_1, x_2, \ldots$ proporciona un método numérico de aproximación a r. El método no siempre converge, pero antes de comentar situaciones en las que el método falla, daremos dos ejemplos donde el método funciona.

▶ Ejemplo 1 Utilice el método de Newton-Raphson para calcular una aproximación numérica a la solución de la ecuación

$$x^2 - 3 = 0$$

Solución

Las raíces de la ecuación $x^2 - 3 = 0$ son $r = \sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Calcular una aproximación numérica a una raíz de esta ecuación es por tanto lo mismo que calcular una aproximación numérica a $\sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}$. Podríamos preguntarnos por qué no utilizar directamente nuestra calculadora y obtener valor numérico de $\sqrt{3}$, y de hecho, esto es lo que haríamos si tuviéramos que resolver una ecuación como $x^2 - 3 = 0$, pero la idea es utilizar este ejemplo simple para ilustrar el método.

Vamos a calcular una aproximación numérica a $\sqrt{3}$ utilizando el método de Newton-Raphson. Como valor inicial, se escoge un número cercano a $\sqrt{3}$, por ejemplo, $x_0 = 2$. La función $f(x)$ es

$$f(x) = x^2 - 3$$

y su derivada se expresa como

$$f'(x) = 2x$$

Utilizando la Ecuación (5.18), se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

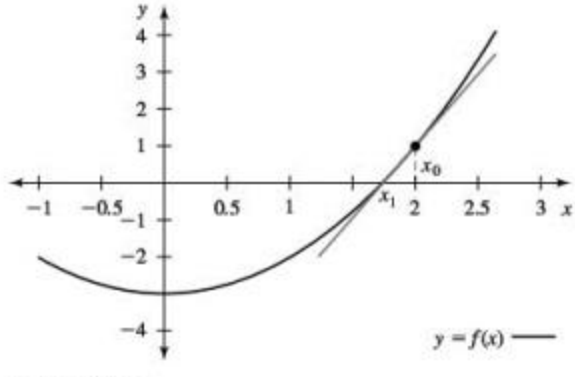
$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(El primer paso en la aproximación puede verse en la Figura 5.74).

La tabla que sigue muestra los resultados del procedimiento. Podemos utilizar la calculadora para comparar nuestra aproximación numérica con una aproximación numérica precisa de $\sqrt{3}$, concretamente, una calculadora produce la aproximación $\sqrt{3} = 1.732050080757$.

n	x_n	$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n}$	$\lvert\sqrt{3} - x_{n+1}\rvert$
0	2	1.75	0.0179
1	1.75	1.7321429	9.2×10^{-5}
2	1.7321429	1.7320508	2.45×10^{-9}

Con el valor inicial $x_0 = 2$, después de tres pasos se obtiene la aproximación 1.732050, que es correcta hasta seis decimales. Como se puede ver, este método



▲ **Figura 5.74**
Gráfica de $f(x) = x^2 - 3$ y del primer paso del método de Newton-Raphson

puede converger muy rápidamente. De hecho, se utiliza en muchas calculadoras para calcular raíces. ◀

En el siguiente ejemplo, no es posible despejar x con procedimientos algebráicos. Para calcular una solución de la ecuación dada, hay que recurrir a un método numérico.

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación

$$e^x + 1 + x = 0$$

Solución

En este caso, sólo se puede resolver numéricamente. Se utilizará el método de Newton-Raphson para determinar la raíz de $e^x + 1 + x = 0$. Como $e^x + 1 + x$ es positiva para $x = 0$ y negativa para $x = -2$, se concluye que existe una raíz de $e^x + 1 + x = 0$ el intervalo $(-2, 0)$. Por tanto, se escoge un valor inicial en este intervalo, por ejemplo $x_0 = -1$. Se obtiene

$$f(x) = e^x + x + 1$$
$$f'(x) = e^x + 1$$

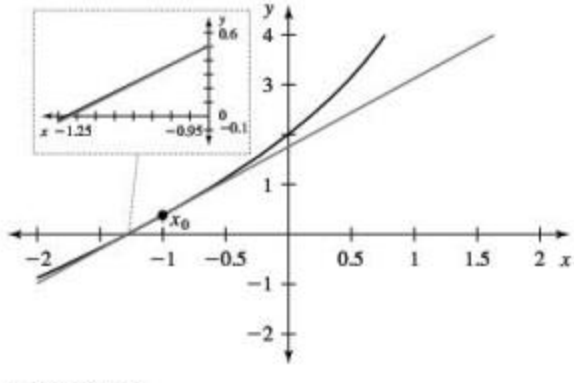
Por tanto,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= x_n - \frac{e^{x_n} + x_n + 1}{e^{x_n} + 1}$$
$$= x_n - 1 - \frac{x_n}{e^{x_n} + 1} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

El primer paso de la aproximación se muestra en la Figura 5.75.

La siguiente tabla muestra algunos pasos iniciales de la iteración, con $x_0 = -1$.

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - 1 - \frac{x_n}{e^{x_n}+1}$
0	−1	−1.26894142
1	−1.26894142	−1.27845462
2	−1.27845462	−1.27846454
3	−1.27846454	−1.27846454



▲ **Figura 5.75**
Gráfica de $f(x) = e^x + 1 + x$ y del primer paso de las aproximaciones del método de Newton-Raphson

Nótese que x_2 y x_3 coinciden hasta el cuarto decimal, y que x_3 y x_4 coinciden hasta ocho cifras decimales. Es sensato sospechar entonces que $x = -1.278464$ es una raíz de $e^x + 1 + x = 0$, exacta hasta seis decimales. Esto se puede confirmar, por ejemplo, utilizando una calculadora gráfica. ◀

No es nuestro objetivo dar una descripción completa del método de Newton. Raphson (cuándo funciones, rapidez de convergencia, etc.). Lo que haremos es dar algunos ejemplos que ilustren algunos problemas que pueden aparecer al emplear este método.

▶ Ejemplo 3 Este es un ejemplo de una situación donde el método no funciona en absoluto. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 2.5} & \text{para } x \geqslant 2.5 \\ -\sqrt{2.5 - x} & \text{para } x \leqslant 2.5 \end{cases}$$

Se desea resolver la ecuación $f(x) = 0$. Se ve inmediatamente que $x = 2.5$ es la solución. Supongamos que se desea utilizar el método de Newton-Raphson. Dado que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x - 2.5}} & \text{para } x > 2.5 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2.5 - x}} & \text{para } x < 2.5 \end{cases}$$

se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \begin{cases} x_n - \dfrac{\sqrt{x_n - 2.5}}{\frac{1}{2\sqrt{x_n - 2.5}}} & \text{para } x_n > 2.5 \\ x_n - \dfrac{-\sqrt{2.5 - x_n}}{\frac{1}{2\sqrt{2.5 - x_n}}} & \text{para } x_n < 2.5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_n - 2(x_n - 2.5) = -x_n + 5 & \text{para } x_n > 2.5 \\ x_n + 2(2.5 - x_n) = -x_n + 5 & \text{para } x_n < 2.5 \end{cases}$$

$$= -x_n + 5 \quad \text{para } x_n \neq 2.5$$

Si $x_0 = 2.5 + h$, entonces $x_1 = 2.5 - h$, $x_2 = 2.5 + h$, $x_3 = 2.5 - h$, y así sucesivamente. Es decir, las aproximaciones sucesivas oscilan entre $2.5 + h$ y $2.5 - h$, y nunca se aproximan a la raíz $r = 2.5$. La Figura 5.76 muestra la gráfica de $f(x)$ junto con las iteraciones. Conviene notar que las dos rectas tangentes son paralelas y se utilizan alternadamente en la aproximación. ◀

▶ Ejemplo 4 Este ejemplo muestra que una aproximación inicial puede no ser adecuada. Utilice el método de Newton-Raphson para calcular la raíz de

$$x^{1/3} = 0$$

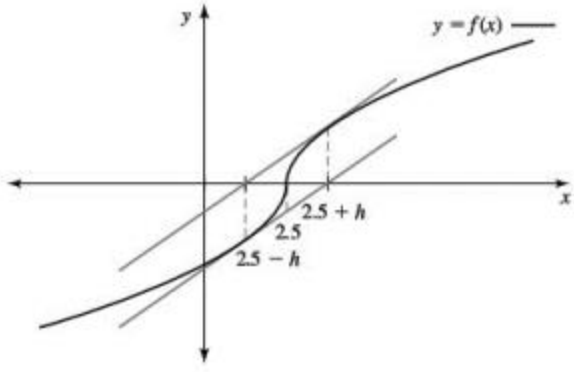
cuando el valor inicial es $x_0 = 1$.

Solución

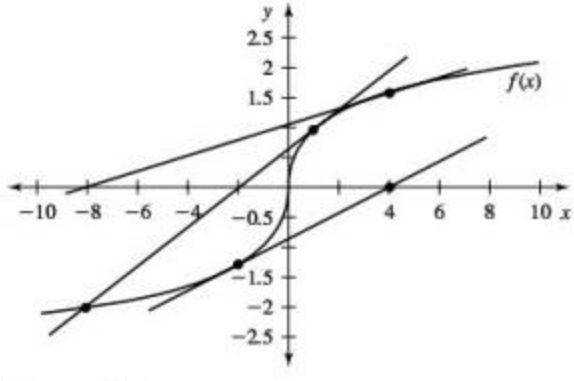
Sea $f(x) = x^{1/3}$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-2/3}$, y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$



▲ **Figura 5.76**
La gráfica de $f(x)$ en el Ejemplo 3 donde el método de Newton-Raphson no converge



▲ **Figura 5.77**
La gráfica de $f(x)$ en el Ejemplo 4 donde el método de Newton-Raphson no converge

n	x_n	$x_{n+1} = -2x_n$
0	1	−2
1	−2	4
2	4	−8
3	−8	16

La siguiente tabla muestra los valores sucesivos de x_n.

El procedimiento no converge a la raíz $r = 0$, como ilustra gráficamente la Figura 5.77.

Las calculadoras gráficas tienen una opción en el menú gráfico que permite calcular raíces de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ si se dibuja $f(x)$ y se coloca el cursor cerca de la raíz. En este ejemplo, la calculadora no puede producir una respuesta. ◀

Ejemplo 5 Este ejemplo muestra que no necesariamente se converge a la raíz más cercana. Se desea calcular una raíz de la ecuación

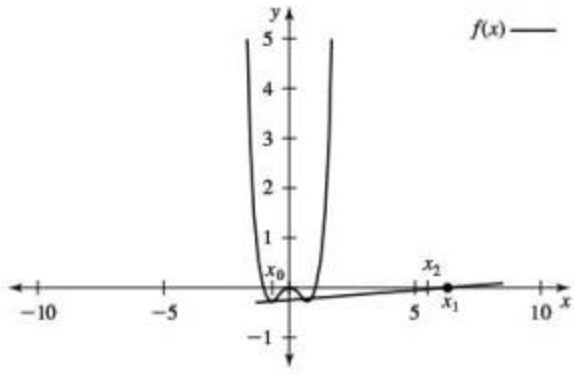
$$x^4 - x^2 = 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^4 - x^2$. Entonces $f'(x) = 4x^3 - 2x$ y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^4 - x_n^2}{4x_n^3 - 2x_n} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n}{4x_n^2 - 2}$$



▲ **Figura 5.78**
La gráfica de $f(x)$ en el Ejemplo 5 junto con las dos primeras aproximaciones

Se pueden obtener las raíces de $x^4 - x^2 = 0$. Como $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$, hay tres raíces: $r = 0$, -1 y 1. Supongamos que se comienza con $x_0 = -0.7$. La raíz más cercana es -1. Si se calcula x_1, se obtiene

$$x_1 = (-0.7) - \frac{(-0.7)^3 - (-0.7)}{4(-0.7)^2 - 2} = 8.225$$

Los valores sucesivos se presentan en la siguiente lista.

$$\begin{array}{ll} x_2 = 6.184 & x_7 = 1.613 \\ x_3 = 4.659 & x_8 = 1.306 \\ x_4 = 3.521 & x_9 = 1.115 \\ x_5 = 2.678 & x_{10} = 1.024 \\ x_6 = 2.059 & x_{11} = 1.001 \end{array}$$

Se concluye que el método converge a la raíz $r = 1$, como se ilustra en la Figura 5.78. ◀

5.7.1. Problemas

1. Utilice el método de Newton-Raphson para calcular una aproximación numérica a la solución de

$$x^2 - 7 = 0$$

que sea correcta hasta seis decimales.

2. Utilice el método de Newton-Raphson para calcular una aproximación numérica a la solución de

$$e^{-x} = x$$

que sea correcta hasta seis decimales.

3. Utilice el método de Newton-Raphson para calcular una aproximación numérica a la solución de

$$x^2 + \ln x = 0$$

que sea correcta hasta seis decimales.

4. La ecuación

$$x^2 - 5 = 0$$

tiene dos soluciones. Utilice el método de Newton-Raphson para aproximar las dos soluciones.

5. Utilice el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}x$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{para } x \geqslant 1 \\ -\sqrt{1-x} & \text{para } x \leqslant 1 \end{cases}$$

(a) Demuestre que si se utiliza el método de Newton-Raphson para resolver $f(x) = 0$, se cumple lo siguiente: si $x_0 = 1 + h$, entonces $x_1 = 1 - h$ y si $x_0 = 1 - h$, entonces $x_1 = 1 + h$.

(b) ¿Converge el método de Newton-Raphson? Utilice una gráfica para explicar lo que sucede.

7. En el Ejemplo 4, se presentó la obtención de la raíz de $x^{1/3} = 0$.

(a) Dado x_0, obtenga una fórmula para $|x_n|$.

(b) Calcule

$$\lim_{n \to \infty} |x_n|$$

(c) Dibuje $f(x) = x^{1/3}$ e ilustre lo que sucede cuando se aplica el método de Newton-Raphson.

8. En el Ejemplo 5, se consideró la ecuación

$$x^4 - x^2 = 0$$

(a) ¿Qué sucede si se elige

$$x_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

en el método de Newton-Raphson? De una ilustración gráfica.

(b) Repita el procedimiento de (a) para $x_0 = -0.71$, y compare con el resultado obtenido en el Ejemplo 5 cuando $x_0 = -0.70$. Proporcione una ilustración gráfica, y explíquela con palabras. ¿Qué sucede cuando $x_0 = -0.6$? (éste es un ejemplo en el que pequeños cambios en el valor inicial pueden cambiar drásticamente el resultado).

9. Utilice el método de Newton-Raphson para calcular una aproximación numérica a la solución de

$$x^2 - 16 = 0$$

cuando el valor inicial es (a) $x_0 = 3$ y (b) $x_0 = 4$.

10. Suponga que se desea resolver

$$f(x) = 0$$

numéricamente utilizando el método de Newton-Raphson. Si ocurre que el valor inicial x_0 elegido cumple $f(x_0) = 0$, ¿qué sucede con las iteraciones siguientes? Proporcione una ilustración gráfica de sus resultados [asuma que $f'(x_0) \neq 0$].

5.8 PRIMITIVAS

A lo largo de este capítulo y del anterior, hemos encontrado repetidamente ecuaciones diferenciales. Ocasionalmente, se demostró que una cierta función puede resolver una ecuación diferencial dada. En esta sección, se estudiará un tipo particular de ecuación diferencial y dos importantes cuestiones generales: primero, dada una ecuación diferencial, ¿cómo se pueden obtener soluciones? Segundo, dada una solución, ¿cómo se puede saber si es única?

Se considerarán ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es decir, donde la velocidad de cambio de y con respecto a x depende sólo de x. Nuestro objetivo es encontrar funciones y que cumplan que $y' = f(x)$. Veremos que si se puede encontrar una función que cumpla $y' = f(x)$, entonces existe una familia completa de funciones con esta propiedad, todas ellas relacionadas por traslaciones verticales. Si se desea seleccionar una de estas funciones, es necesario especificar una **condición inicial**, que consiste en un punto (x_0, y_0) de la gráfica de la función. Esa función se denomina **solución** del **problema de valor inicial**

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{con } y = y_0 \quad \text{cuando } x = x_0 \tag{5.19}$$

Antes de comenzar el tratamiento sistemático de la solución de ecuaciones diferenciales de la forma (5.19), se presentará un ejemplo. Considere una población cuyo tamaño en el instante t se denomina $N(t)$, y suponga que la velocidad de crecimiento se expresa como

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{para } t > 0 \tag{5.20}$$

y que el tamaño de la población en el instante cero es $N(0) = 20$ [es decir, la condición inicial es $N(0) = 20$]. Entonces

$$N(t) = \sqrt{t} + 20 \quad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5.21}$$

es una solución de la ecuación diferencial (5.20) que satisface la condición inicial $N(0) = 20$. Esto es fácil comprobar. Primero, nótese que $N(0) = \sqrt{0} + 20$. Segundo, derivando $N(t)$ se obtiene

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{t} + 20) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{para } t > 0$$

Es decir, $N(t) = \sqrt{t} + 20$ cumple la Ecuación (5.20) con $N(0) = 20$.

Este ejemplo demuestra que si se tiene una solución de una ecuación diferencial, se puede comprobar si la solución satisface verdaderamente dicha ecuación derivando dicha solución. Esto sugiere que, para obtener soluciones, se puede invertir el proceso de derivación, lo que nos lleva a lo que se denomina la primitiva, que se define a continuación.

Definición Una función F se denomina primitiva de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

¿Cómo se calculan primitivas? Sea

$$f(x) = 3x^2 \quad \text{para } x \in \mathbf{R}$$

Para calcular la primitiva de $f(x) = 3x^2$, es necesario obtener una función cuya derivada sea $3x^2$. Una respuesta puede ser

$$F(x) = x^3 \quad \text{para } x \in \mathbf{R}$$

que cumple $F'(x) = 3x^2$. Pero ésta no es la única solución. Si $F(x) = x^3 + 4$, entonces $F'(x) = 3x^2$, y por tanto $x^3 + 4$ es también una primitiva de $3x^2$. De hecho, $F(x) = x^3 + C$, $x \in \mathbf{R}$, siendo C cualquier constante, es una primitiva de $3x^2$ [pronto demostraremos que no existen otras funciones $F(x)$ que cumplan que $F'(x) = 3x^2$]. La Figura 5.79 muestra la función $f(x)$ y algunas de sus primitivas. Todas las primitivas están relacionadas por desplazamientos verticales ya que todas ellas tienen la misma derivada.

Aunque se van a presentar reglas que permiten el cálculo de primitivas, este proceso es en general mucho más difícil que calcular derivadas, y muchas veces lleva su ingenio encontrar la respuesta correcta. Además, incluso existen casos donde es imposible obtener una expresión de la primitiva.

Empezaremos con dos corolarios del teorema del valor medio que servirán de ayuda para obtener primitivas. El primero de ellos es el Corolario 2 de la Sección 5.1, que recordamos aquí.

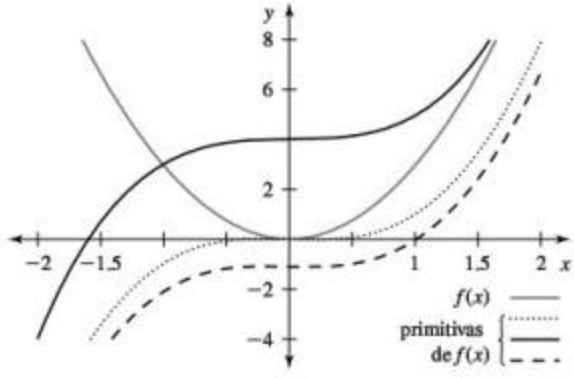
Corolario 2 Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), con $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.

Nótese que el Corolario 2 es el contrario de la regla que indica que $f'(x) = 0$ cuando $f(x) = c$, siendo c una constante. Indica que *todas* las primitivas de una función que sea idénticamente 0 son funciones constantes.

El siguiente corolario muestra que las funciones con derivadas idénticas se diferencian sólo en una constante. Es decir, para obtener todas las primitivas de una función dada, sólo es necesario calcular una.

Corolario 3 Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la función continua $f(x)$ en un intervalo I, entonces existe una constante C tal que

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{para todo } x \in I$$



▲ **Figura 5.79**
La función $f(x) = 3x^2$ y algunas de sus primitivas

Demostración Como $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = f(x)$. Es decir, $F'(x) = G'(x)$ o $F'(x) - G'(x) = 0$. Como

$$0 = F'(x) - G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) - G(x)]$$

aplicando el Corolario 2 a la función $F - G$, se deduce que $F(x) - G(x) = C$, siendo C una constante. ■

Ejemplo 1 Calcule primitivas generales de las funciones dadas. Suponga que todas las funciones están definidas en $x \in \mathbf{R}$.

(a) $f(x) = 3x^2$ **(b)** $f(x) = \cos x$ **(c)** $f(x) = e^x$

Solución

(a) Si $F(x) = x^3$, entonces $F'(x) = 3x^2$. Es decir, $F(x) = x^3$ es una primitiva particular de $3x^2$. Utilizando el Corolario 3, se obtiene la primitiva general añadiendo simplemente una constante. Es decir, la primitiva general de $f(x) = 3x^2$ es la función $G(x) = x^3 + C$, siendo C una constante.

(b) Si $F(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $F'(x) = \cos x$. Por tanto, la primitiva general de $f(x) = \cos x$ es la función $G(x) = \operatorname{sen} x + C$, siendo C una constante.

(c) Si $F(x) = e^x$, entonces $F'(x) = e^x$, y la primitiva general de $f(x) = e^x$ es la función $G(x) = e^x + C$, siendo C una constante. ◀

Ejemplo 2 Calcule primitivas generales de las funciones dadas (asuma el mayor dominio posible).

(a) $f(x) = 3x^5$ **(b)** $f(x) = x^2 + 2x - 1$

(c) $f(x) = e^{2x}$ **(d)** $f(x) = \sec^2(3x)$

Solución

(a) Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^6\right) = 3x^5$, $F(x) = \frac{1}{2}x^6 + C$ es la primitiva general de $f(x) = 3x^5$.

(b) Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right) = x^2 + 2x - 1$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + C$ es la primitiva general de $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

TABLA 5.1 Colección de primitivas

Función	Primitivas particulares
$kf(x)$	$kF(x)$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
$\operatorname{sen}(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax)$
$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$
$\sec^2(ax)$	$\dfrac{1}{a}\tan(ax)$

(c) Como $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{2x}) = \frac{1}{2}e^{2x}(2) = e^{2x}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ es la primitiva general de $f(x) = e^{2x}$.

(d) Como $\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}\tan(3x)) = \frac{1}{3}(\sec^2(3x))(3) = \sec^2(3x)$, $F(x) = \frac{1}{3}\tan(3x) + C$ es la primitiva general de $f(x) = \sec^2(3x)$. ◀

La Tabla 5.1 resume algunas de las reglas para calcular primitivas. Las funciones se denominan $f(x)$ o $g(x)$, y sus primitivas particulares, $F(x)$ o $G(x)$. La primitiva general se puede obtener entonces añadiendo simplemente una constante. Las cantidades a y k indican constantes distintas de cero.

Podemos volver ahora a nuestra pregunta inicial, concretamente, cómo resolver ecuaciones diferenciales de la forma (5.19).

▶ Ejemplo 3 Calcule la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^2} - 2x^2, \quad x \neq 0$$

Solución

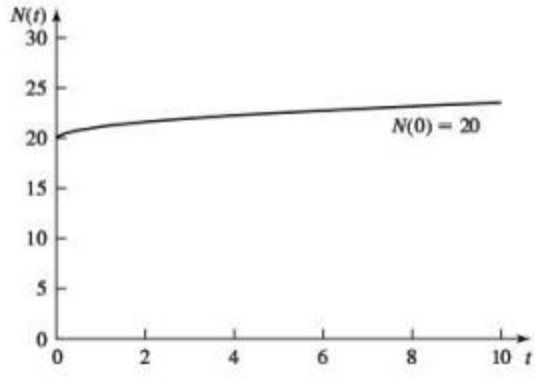
Calcular la solución general de esta ecuación diferencial significa calcular las primitivas de la función $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2x^2$. Utilizando la Tabla 5.1, se obtiene la primitiva particular

$$\frac{3}{-1}x^{-1} - \frac{2}{3}x^3 = -\frac{3}{x} - \frac{2}{3}x^3$$

Es decir, la solución general es

$$y = -\frac{3}{x} - \frac{2}{3}x^3 + C, \quad x \neq 0$$ ◀

En el Ejemplo 3, se ha obtenido la solución general de una ecuación diferencial dada. Frecuentemente, se desea calcular una solución particular. Por ejemplo, se sabe que la solución tiene que pasar por un punto concreto (x_0, y_0). Este



◀ **Figura 5.80**
La función $N(t)$ resuelve el problema de valor inicial con $N(0) = 20$

problema se denomina problema de valor inicial, cómo se comentó al principio de esta sección. Consideraremos de nuevo el ejemplo a continuación.

Ejemplo 4 Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{para } t > 0 \quad \text{con } N(0) = 20$$

Solución

La primitiva general de $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ es $F(t) = \sqrt{t} + C$. Como $N(0) = 20$, se obtiene

$$N(0) = \sqrt{0} + C = 20 \quad \text{o} \quad C = 20$$

Es decir, la definición

$$N(t) = \sqrt{t} + 20, \quad t \geqslant 0$$

resuelve el problema de valor inicial, y es la única solución (*véase* la Figura 5.80). ◀

Ejemplo 5 Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -2x^2 + 3 \quad \text{para } x \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad y = 10 \quad \text{cuando } x = 3$$

Solución

La primitiva general de $f(x) = -2x^2 + 3$ es $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x + C$. Como

$$F(3) = -\frac{2}{3}3^3 + (3)(3) + C = -9 + C = 10$$

se deduce que $C = 19$. Es decir

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 3x + 19, \quad x \in \mathbf{R}$$

resuelve el problema del valor inicial y es la única solución. ◀

Ejemplo 6 Un objeto que cae libremente en el vacío, cerca de la superficie de la Tierra, está sometido a una aceleración constante de

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Si el objeto parte del reposo, calcule su velocidad y la distancia que recorre t segundos después de iniciar el movimiento.

Solución

Si la función distancia se denomina $s(t)$, entonces la velocidad $v(t)$ es

$$v(t) = \frac{d}{dt}\, s(t)$$

y la aceleración se expresa como

$$a(t) = \frac{d}{dt}\, v(t) = \frac{d^2}{dt^2}\, s(t)$$

Se desea resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\, v(t) = 9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{cuando } v(0) = 0$$

Una solución general es

$$v(t) = \left(9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t + C$$

Como $v(0) = 0$, se deduce que $C = 0$. Entonces

$$v(t) = \left(9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t, \quad t \geqslant 0$$

Para calcular la distancia recorrida, hay que tener en cuenta que $s(0) = 0$ y

$$\frac{d}{dt}\, s(t) = v(t) = \left(9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t, \quad t \geqslant 0$$

Una solución general es

$$s(t) = \frac{1}{2} \left(9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2 + C$$

Como $s(0) = 0$, se deduce que $C = 0$. Entonces,

$$s(t) = \frac{1}{2} \left(9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2, \quad t \geqslant 0$$

Nótese que si t se mide en segundos, las unidades de $v(t)$ son m/s y las de $s(t)$ son m. ◀

5.8.1. Problemas

En los Problemas 1-36, calcule la primitiva general de las funciones dadas.

1. $f(x) = 2x^2$
2. $f(x) = 1 - 3x^2$
3. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
4. $f(x) = 2x - 4x^3$
5. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
6. $f(x) = 2x^2 + x - 5$
7. $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$
8. $f(x) = x - 2x^2 - 3x^3 - 4x^4$
9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
10. $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$
11. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$
12. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
14. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$
15. $f(x) = 5x^4 + \dfrac{5}{x^4}$
16. $f(x) = x^7 + \dfrac{1}{x^7}$
17. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{3+x}$
19. $f(x) = e^{-3x}$
20. $f(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}$
21. $f(x) = 2e^{2x}$

22. $f(x) = -3e^{-4x}$
23. $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$
24. $f(x) = \dfrac{3}{e^{-x}}$
25. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$
26. $f(x) = \cos(3x)$
27. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$
28. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{5}\right)$
29. $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$
30. $f(x) = -3\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x\right) + 4\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}x\right)$
31. $f(x) = \sec^2(2x)$
32. $f(x) = \sec^2(-4x)$
33. $f(x) = \sec^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$
34. $f(x) = \sec^2\left(\dfrac{x}{5}\right)$
35. $f(x) = \dfrac{\sec x + \cos x}{\cos x}$
36. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

En los Problemas 37-48, calcule la solución general de la ecuación diferencial.

37. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} - x,\ x > 0$
38. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x^2} - x^2,\ x > 0$
39. $\dfrac{dy}{dx} = x(1 + x),\ x > 0$
40. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x},\ x > 0$
41. $\dfrac{dy}{dx} = t(1 - t),\ t \geqslant 0$
42. $\dfrac{dy}{dx} = t^2(1 - t^2),\ t \geqslant 0$
43. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-t/2},\ t \geqslant 0$
44. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - e^{3t},\ t \geqslant 0$
45. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(\pi s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1$
46. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(2\pi s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1$
47. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right),\ -1 < x < 1$
48. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \sec^2\left(\dfrac{x}{4}\right),\ -1 < x < 1$

En los Problemas 49-62, resuelva el problema de valor inicial.

49. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$, para $x \geqslant 0$ con $y = 1$ cuando $x = 0$
50. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{3}$, para $x \geqslant 0$ con $y = 2$ cuando $x = 0$
51. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}$, para $x \geqslant 0$ con $y = 2$ cuando $x = 1$
52. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, para $x \geqslant 1$ con $y = 3$ cuando $x = 4$
53. $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{1}{t}$, para $t \geqslant 1$ con $N(1) = 10$
54. $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{t}{t+1}$, para $t \geqslant 0$ con $N(0) = 5$
55. $\dfrac{dW}{dt} = e^t$, para $t \geqslant 0$ con $W(0) = 1$
56. $\dfrac{dW}{dt} = e^{2t}$, para $t \geqslant 0$ con $W(0) = 5$
57. $\dfrac{dW}{dt} = e^{-3t}$, para $t \geqslant 0$ con $W(0) = 2/3$
58. $\dfrac{dW}{dt} = e^{-4t}$, para $t \geqslant 0$ con $W(0) = 3$
59. $\dfrac{dT}{dt} = \operatorname{sen}(\pi t)$, para $t \geqslant 0$ con $T(0) = 3$
60. $\dfrac{dT}{dt} = \cos(\pi t)$, para $t \geqslant 0$ con $T(0) = 3$
61. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2}$, para $x \geqslant 0$ con $y = 0$ cuando $x = 0$
62. $\dfrac{dN}{dt} = t^{-1/3}$, para $t > 0$ con $N(0) = 60$

63. Suponga que la longitud de un cierto organismo a la edad x está dada por $L(x)$, que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dL}{dx} = e^{-0.1x}, \quad x \geqslant 0$$

Calcule $L(x)$ si la longitud límite L_∞ se expresa como

$$L_\infty = \lim_{x \to \infty} L(x) = 25$$

¿Qué tamaño tiene el organismo a la edad $x = 0$?

64. Los peces crecen indefinidamente. Es decir, su longitud $L(x)$ aumenta con la edad x durante toda su vida. Si se dibuja la velocidad de crecimiento $\frac{dL}{dt}$ en función de la edad x en una gráfica semilogarítmica, resulta una línea recta con pendiente negativa. Obtenga una ecuación diferencial que relacione la velocidad de crecimiento con la edad. Resuelva esta ecuación bajo el supuesto de que $L(0) = 5$, $L(1) = 10$ y

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = 20$$

Dibuje la solución $L(x)$ en función de x.

65. Un objeto se deja caer desde una altura de 100 pies. La aceleración es de 32 pies/sg^2. ¿Cuándo golpeará el objeto el suelo, y con qué velocidad se producirá el impacto?

66. Suponga que la velocidad de crecimiento de una población en el instante t sufre variaciones estacionales en su tamaño de acuerdo con la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = 3\operatorname{sen}(2\pi t)$$

donde t se mide en años e indica el tamaño de la población en el instante t. Si $N(0) = 10$ (en unidades de miles), calcule una expresión de $N(t)$. ¿Cómo se reflejan las variaciones estacionales de la velocidad de crecimiento en el tamaño de la población?

67. Suponga que la cantidad de agua que contiene una planta en el instante t se denomina $V(t)$. Debido a la evaporación, $V(t)$ cambia con el tiempo. Suponga que el cambio de volumen en el instante t, medido en un periodo de 24 horas, es proporcional a $t(24 - t)$ medido en gramos por hora. Para compensar la pérdida de agua, se riega la planta a una velocidad constante de 4 gramos de agua por hora.

(a) Explique por qué

$$\frac{dV}{dt} = -at(24 - t) + 4$$

$0 \leqslant t \leqslant 24$, para alguna constante positiva a, describe esta situación.
(b) Determine la constante a para la que la pérdida neta de agua en un periodo de 24 horas es igual a 0.

5.9. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 5: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Extremo global o absoluto
2. Extremo local o relativo: mínimo local y máximo local
3. Teorema del valor extremo
4. Teorema de Fermat
5. Teorema del valor medio
6. Teorema de Rolle
7. Función creciente y decreciente
8. Monotonía y primera derivada
9. Concavidad y convexidad
10. Concavidad y segunda derivada
11. Retorno decreciente
12. Candidatos a extremos locales
13. Monotonía y extremos locales
14. Test de la segunda derivada para extremos locales
15. Puntos de inflexión
16. Puntos de inflexión y segunda derivada
17. Asíntotas: horizontales verticales y oblicuas
18. Uso del cálculo para dibujar funciones
19. Regla de l'Hôpital
20. Sistemas dinámicos: diagrama en telaraña
21. Estabilidad del equilibrio
22. Método de Newton-Raphson para calcular raíces
23. Primitiva

5.10. PROBLEMAS DE REPASO

1. Suponga que

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geqslant 0$$

(a) Demuestre que $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ para $x > 0$ y

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

(b) Calcule los extremos absolutos y locales.
(c) Calcule los puntos de inflexión.
(d) Utilice la información anterior para dibujar $f(x)$.

2. Suponga que

$$f(x) = x \ln x, \quad x > 0$$

(a) Defina $f(x)$ en $x = 0$ de forma que $f(x)$ será continua para todo $x \geqslant 0$.
(b) Calcule los extremos y los puntos de inflexión.
(c) Dibuje $f(x)$.

3. En el Problema de Repaso 17 del Capítulo 3, se presentaron las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Demuestre que $f(x) = \tanh x$, $x \in \mathbf{R}$, es una función estrictamente creciente en $\mathbf{R}$. Evalúe

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x$$

y

$$\lim_{x \to \infty} \tanh x$$

(b) Utilice los resultados del apartado (a) para explicar por qué $f(x) = \tanh x$, $x \in \mathbf{R}$, es invertible y demuestre que su función inversa $f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x$ se expresa como

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

¿Cuál es el dominio de $f^{-1}(x)$?
(c) Demuestre que

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

(d) Utilice el resultado del apartado (c) y el hecho de que

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

y

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

4. Sea

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Demuestre que $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
(b) Demuestre que $y = x$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

(c) Demuestre que

$$f'(x) = \frac{1 + e^{-x}(1 + x)}{(1 + e^{-x})^2}$$

(d) Utilice el resultado del apartado (c) para demostrar que $f(x)$ tiene exactamente un extremo local en $x = c$, donde c satisface la ecuación

$$1 + c + e^c = 0$$

[*Sugerencia*: utilice el resultado del apartado (c) para demostrar que $f'(x) = 0$ si y sólo si $1 + e^{-x}(1 + x) = 0$. Sea $g(x) = 1 + e^{-x}(1 + x)$. Demuestre que $g(x)$ es estrictamente creciente para $x < 0$ y que $g(0) > 0$ y $g(-2) < 0$. Esto implica que $g(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $(-2, 0)$. Como $g(-2) < 0$ y $g(x)$ es estrictamente creciente para $x < 0$, no hay soluciones de $g(x) = 0$ para $x < -2$. Además, $g(x) > 0$ para $x > 0$, y por tanto no existen soluciones de $g(x) = 0$ para $x > 0$].

(e) En la ecuación $1 + c + e^c = 0$, el valor de c sólo se puede calcular numéricamente. Con la ayuda de una calculadora, obtenga una aproximación numérica de c. [*Sugerencia*: del apartado (d), sabemos que $c \in (-2, 0)$].

(f) Demuestre que $f(x) < 0$ para $x < 0$ [esto implica que para $x < 0$ la gráfica de $f(x)$ está por debajo de la asíntota horizontal $y = 0$].

(g) Demuestre que $x - f(x) > 0$ para $x > 0$ [esto implica que para $x > 0$ la gráfica de $f(x)$ está por debajo de la asíntota oblicua $y = x$].

(h) Utilice los resultados de los apartados (a) – (g) y el dato de que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{2}$ para dibujar la gráfica de $f(x)$.

5. (*Modelo de reclutamiento*) La **curva de Ricker** describe la relación entre el tamaño del stock de padres de algún tipo de pez y el número de reclutas. Si se denomina P al tamaño de stock de padres y R al número de reclutas, entonces la curva de Ricker se expresa como

$$R(P) = \alpha P e^{-\beta P} \quad \text{para } P \geqslant 0$$

siendo α y β constantes positivas [nótese que $R(0) = 0$, es decir, sin padres no puede haber crías. Además, $R(P) > 0$ cuando $P > 0$].

Estamos interesados en conocer el tamaño del stock de padres (P) que maximiza el número de reclutas ($R(P)$). Como $R(P)$ es derivable, se puede utilizar su primera derivada para resolver este problema.

(a) Utilice la regla del producto para demostrar que para $P > 0$

$$R'(P) = \alpha e^{-\beta P}(1 - \beta P)$$
$$R''(P) = -\alpha\beta e^{-\beta P}(2 - \beta P)$$

(b) Demuestre que $R'(P) = 0$ si $P = 1/\beta$ y $R''(1/\beta) < 0$. Esto demuestra que $R(P)$ tiene un máximo *local* en $P = 1/\beta$. Demuestre que $R(1/\beta) = \frac{\alpha}{\beta} e^{-1} > 0$.

(c) Para calcular el máximo global, es necesario comprobar $R(0)$ y $\lim_{P\to\infty} R(P)$. Demuestre que

$$R(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{P\to\infty} R(P) = 0$$

y que esto implica que existe un máximo global en $P = 1/\beta$.

(d) Demuestre que $R(P)$ tiene un punto de inflexión en $P = 2/\beta$.

(e) Dibuje la gráfica de $R(P)$ para $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

6. La *curva de crecimiento de Gompertz* se utiliza algunas veces para estudiar el crecimiento de poblaciones. Sus propiedades son muy similares a las propiedades de la curva de crecimiento logístico. La ecuación de la curva de crecimiento de Gompertz es

$$N(t) = K\exp[-ae^{-bt}]$$

para $t \geqslant 0$, siendo K y b constantes positivas.

(a) Demuestre que $N(0) = Ke^{-a}$ y que entonces

$$a = \ln\frac{K}{N_0}$$

Si $N_0 = N(0)$.

(b) Demuestre que $y = K$ es una asíntota horizontal y que $N(t) < K$ si $N_0 < K$, $N(t) = K$ si $N_0 = K$ y $N(t) > K$ si $N_0 > K$.

(c) Demuestre que

$$\frac{dN}{dt} = bN(\ln K - \ln N)$$

y

$$\frac{d^2N}{dt^2} = b\frac{dN}{dt}[\ln K - \ln N - 1]$$

(d) Utilice los resultados de los apartados (b) y (c) para demostrar que $N(t)$ es estrictamente creciente si $N_0 < K$ y estrictamente decreciente si $N_0 > K$.

(e) ¿Cuándo tiene $N(t)$, $t \geqslant 0$ un punto de inflexión? Discuta su concavidad.

(f) Dibuje $N(t)$ cuando $K = 100$ y $b = 1$ si (i) $N_0 = 20$, (ii) $N_0 = 70$ y (iii) $N_0 = 150$. Compare las gráficas con las respuestas de (b) – (e).

7. La ecuación de la curva de crecimiento de Monod es

$$f(x) = \frac{cx}{k + x}$$

para $x \geqslant 0$, siendo c y k constantes positivas. Se puede utilizar para modelar la velocidad de crecimiento específica de una especie en función del nivel de un recurso x.

(a) Demuestre que $y = c$ es una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$. La constante c se denomina *valor de saturación*.

(b) Demuestre que $f(x)$, $x \geqslant 0$, es estrictamente creciente y cóncava. Explique por qué esto implica que la velocidad de saturación es igual a la máxima velocidad de crecimiento específica.

(c) Demuestre que si $x = k$, entonces $f(x)$ es igual a la mitad del valor de saturación (por esta razón, la constante k se denomina *constante de semisaturación*).

(d) Dibuje la gráfica de $f(x)$ para $k = 2$ y $c = 5$, marcando claramente el valor de saturación y la constante de semisaturación. Compare esta gráfica con otra en la que $k = 3$ y $c = 5$.

(e) Sin dibujar las tres curvas, explique cómo se puede usar el valor de saturación y la constante de semisaturación para decidir rápidamente que

$$\frac{10x}{3 + x} > \frac{10x}{5 + x} > \frac{8x}{5 + x}$$

para $x \geqslant 0$.

8. La ecuación de la curva de crecimiento logístico es

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}}$$

para $t \geqslant 0$, siendo K, N_0 y r constantes positivas y $N(t)$ el tamaño de la población en el instante t.

(a) Demuestre que $N(0) = N_0$ y que $y = K$ es una asíntota horizontal cuando $t \to \infty$.

(b) Demuestre que $N(t) < K$ si $N_0 < K$, $N(t) = K$ si $N_0 = K$ y $N(t) > K$ si $N_0 > K$.

(c) Demuestre que

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

y

$$\frac{d^2N}{dt^2} = r\frac{dN}{dt}\left(1 - \frac{2N}{K}\right)$$

(d) Utilice los resultados de los apartados (b) y (c) para demostrar que $N(t)$ es estrictamente creciente si $N_0 < K$ y estrictamente decreciente si $N_0 > K$.

(e) Demuestre que si $N_0 < K/2$, entonces $N(t)$, $t \geqslant 0$ tiene exactamente un punto de inflexión $(t^*, N(t^*))$, con $t^* > 0$ y

$$N(t^*) = \frac{K}{2}$$

(es decir, la mitad de la capacidad de alojamiento). ¿Qué sucede si $K/2 < N_0 < K$? ¿Dónde es la función $N(t)$, $t \geqslant 0$ cóncava y dónde es convexa?

(f) Dibuje las gráficas de $N(t)$ para $t \geqslant 0$ en los casos

(i) $K = 100$, $N_0 = 10$, $r = 1$

(ii) $K = 100$, $N_0 = 70$, $r = 1$

(iii) $K = 100$, $N_0 = 150$, $r = 1$

junto con sus respectivas asíntotas horizontales. Marque claramente los puntos de inflexión si existen.

9. Se dice que una población está en equilibrio de Hardy-Weinberg con respecto a un solo gen con dos alelos A y a si los tres genotipos AA, Aa y aa tienen frecuencias $p_{AA} = \theta^2$, $p_{Aa} = 2\theta(1 - \theta)$ y $p_{aa} = (1 - \theta)^2$ para algún valor $\theta \in [0, 1]$. Suponga que se toma una muestra aleatoria de tamaño n de la población. Se puede demostrar que la probabilidad de observar n_1 individuos de tipo AA, n_2 individuos de tipo Aa y n_3 individuos de tipo aa se expresa como

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\, p_{AA}^{n_1} p_{Aa}^{n_2} p_{aa}^{n_3}$$

siendo $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (se lee «n factorial»), y $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Esta probabilidad depende de θ. El siguiente método, denominado *método de máxima verosimilitud*, se puede utilizar para estimar θ. El principio es simple: se calcula el valor de que maximiza la probabilidad de obtener los datos observados. Como el coeficiente

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$$

no depende de θ, sólo es necesario maximizar

$$L(\theta) = p_{AA}^{n_1} p_{Aa}^{n_2} p_{aa}^{n_3}$$

(a) Suponga que $n_1 = 8$, $n_2 = 6$ y $n_3 = 3$. Calcule $L(\theta)$.

(b) Demuestre que si $L(\theta)$ es máxima para $\theta = \hat{\theta}$, entonces $\ln L(\theta)$ es también máxima para $\theta = \hat{\theta}$.

(c) Utilice el resultado del apartado (c) para calcular el valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ para los datos dados en (a). El número $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud.

10. Suponga que el volumen de una célula se incrementa a una velocidad constante de 10^{-12} cm^3/s.

(a) Si $V(t)$ indica el volumen de la célula en el instante t, defina un problema de valor inicial que describa esta situación si el volumen inicial es 10^{-10} cm^3/s.

(b) Resuelva el problema de valor inicial de (a) y determine el volumen de la célula después de 10 segundos.

11. Suponga que la concentración $c(t)$ de un fármaco en la corriente sanguínea en el instante t satisface la ecuación

$$\frac{dc}{dt} = -0.1e^{-0.3t}$$

para $t \geqslant 0$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial, bajo el supuesto de que al final no habrá restos del fármaco en la sangre.

(b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que la concentración alcance la mitad de su valor inicial?

12. Sterner (1997) investigó el efecto de la calidad de la comida en la dinámica del zooplancton. En su modelo, el zooplancton puede estar limitado bien por el carbono (C) o por el fósforo (P). Sterner argumentó que cuando la cantidad de alimento es baja, la demanda de carbono se incrementa con respecto a la demanda de fósforo para satisfacer los requisitos metabólicos básicos y que debería haber una curva que separara el crecimiento limitado por C y por P cuando la cantidad de alimento, C_F (medida en cantidad de carbono por litro) se dibuja en función de la razón de alimento C : P, $f = C_F : P_F$. Sterner obtuvo la siguiente ecuación de la curva que separa estas regiones:

$$C_F = \frac{m}{a_C g - \frac{C_Z a_P g}{P_Z f}}$$

siendo m la velocidad de respiración, g la velocidad de ingestión, y a_C (a_P) la velocidad de asimilación de carbono (fósforo). C_Z y P_Z son los contenidos de carbono y de fósforo del zooplancton.

(a) La gráfica de $C_F(f)$ tiene una asíntota horizontal. Demuestre que esta asíntota horizontal se produce cuando $m = a_C g C_F$, lo que se produce cuando la velocidad a la que se asimila el carbono se iguala a la velocidad metabólica.

(b) La gráfica de $C_F(f)$ tiene una asíntota vertical. Sea $f = C_F : P_F$ (la razón C : P del alimento). Demuestre que la asíntota vertical se produce en

$$\frac{C_F}{P_F} = \frac{C_Z}{P_Z}\frac{a_P}{a_C}$$

(c) Dibuje la gráfica de $C_F(f)$ en función de f.

(d) La gráfica de $C_F(f)$ separa el crecimiento limitado por C (por debajo de la curva) del crecimiento limitado por P (por encima de la curva). Explique por qué esta gráfica indica que cuando la cantidad de alimento es baja, la demanda de carbono relativa a fósforo crece.

13. Despreciando la resistencia del aire, la altura (en metros) de un objeto que se arroja verticalmente desde el suelo con velocidad inicial v_0 se expresa como

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

siendo $g = 9.81$ m/s^2 la constante gravitacional terrestre, y t el tiempo (en segundos) transcurrido desde que el objeto se lanza.

(a) Calcule el instante en el objeto alcanza su máxima altura.

(b) Calcule la máxima altura.

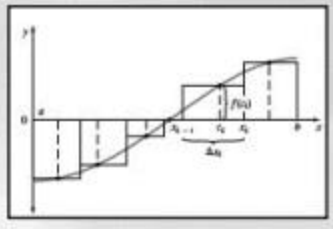
(c) Calcule la velocidad del objeto en el instante en el que alcanza su máxima altura.

(d) ¿En qué instante $t > 0$ el objeto alcanzará de nuevo su altura inicial?

CAPÍTULO 6

INTEGRACIÓN

6.1 LA INTEGRAL DEFINIDA



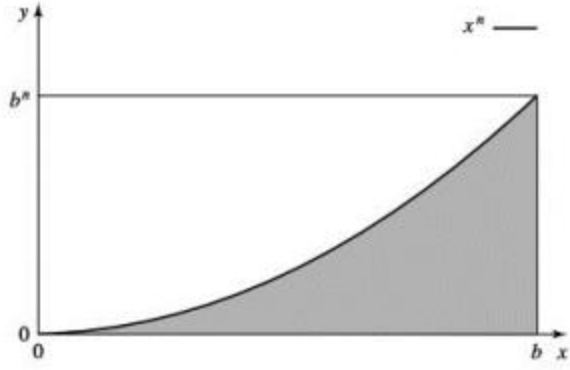
El cálculo del área de una región limitada por curvas es un problema antiguo que fue resuelto en ciertos casos por matemáticos griegos, el más importante Arquímedes (aproximadamente 287-212 a.c.), hace más de 2000 años. Los griegos utilizaron métodos denominados de agotamiento, que se remontan al matemático griego Eudoxo (408-355 a.C.). La idea básica es dividir un área de regiones muy pequeñas con forma de figuras rectilíneas de área conocida (como por ejemplo triángulos), de forma que el área total de las figuras rectilíneas sea parecida al área de la región de interés.

El interés en este problema volvió surgir en el siglo XVII, cuando se habían definido muchas curvas nuevas y se intentaba determinar las áreas de las regiones limitadas por esas curvas. Las primeras curvas que se consideraron eran de la forma $y = x^n$, siendo n un entero positivo. Fermat escribió una carta a Roberval el 22 de septiembre de 1636, en donde le contaba que había conseguido calcular el área bajo la curva $y = x^n$. Comentaba que su método era diferente al método empleado por los griegos, notablemente Arquímedes. Mientras que Arquímedes utilizaba triángulos para cubrir el área limitada por las líneas curvas, Fermat utilizó rectángulos. Esto parece una diferencia pequeña, pero permitió a Fermat calcular áreas limitadas por otras curvas, que no habían sido calculadas previamente. Encontró que el área bajo la curva $y = x^n$ inscrita en un rectángulo de anchura b y altura b^n es $1/(n + 1)$ veces el área del rectángulo, es decir,

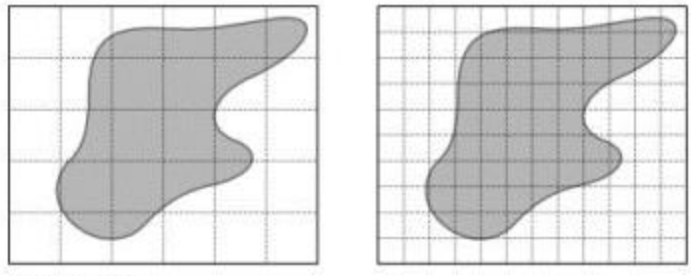
$$\frac{1}{n+1} b \cdot b^n = \frac{1}{n+1} b^{n+1}$$

(*Véase* la Figura 6.1). Este problema fue resuelto independientemente hacia el año 1640 por Cavalieri, Pascal, Roberval y Torriceli.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue el primero en definir áreas basadas en el límite de la suma de áreas por aproximación de rectángulos. La definición que utilizaremos se remonta a George Bernard Riemann (1826-1866). Esta definición es más general que la de Cauchy y permite que una clase mayor de funciones se puedan utilizar como curvas que limitan áreas.



▲ **Figura 6.1**
El área de la región sombreada bajo la curva $y = x^n$ inscrita en un rectángulo es $1/(n + 1)$ veces el área del rectángulo



▲ **Figura 6.2**
El contorno de un lago con una rejilla superpuesta. Cuanto más fina es la rejilla, más exactamente se puede determinar el área del lago

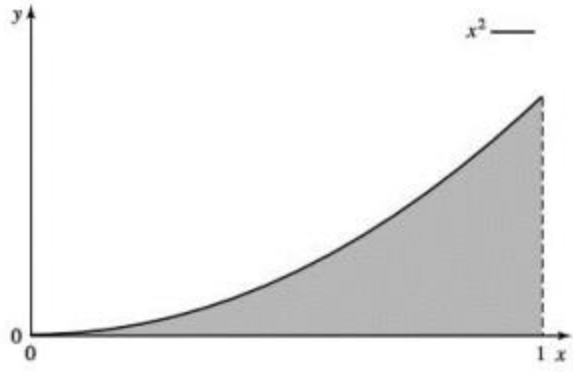
6.1.1 El problema del área

Se desea calcular el área de la superficie del lago que muestra la Figura 6.2. Para ello, se superpone una rejilla y se cuenta el número de cuadrados que tienen una intersección no vacía con el lago. Se obtiene así una aproximación al área del lago. Cuanto más fina sea la rejilla, mejor será nuestra aproximación al área verdadera del lago.

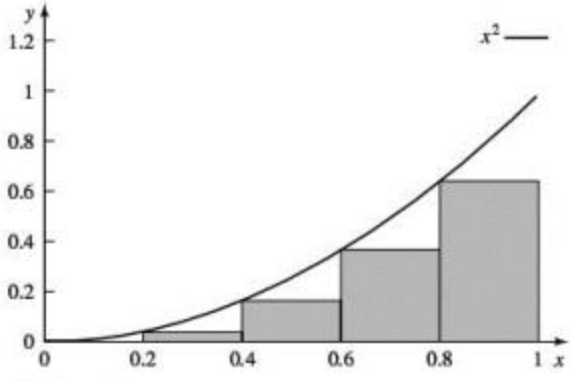
La división de una región en regiones más pequeñas de área conocida es el principio básico que se empleará en esta sección para calcular el área de una región limitada por curvas de funciones continuas.

Ejemplo 1 Se desea calcular el área de la región por debajo de la parábola $f(x) = x^2$ y por encima del eje x entre 0 y 1 (*véase* la Figura 6.3). Para ello, se divide el intervalo [0, 1] en n subintervalos de igual longitud y se aproxima el área de interés por una suma de áreas de rectángulos cuyas bases son los subintervalos y cuyas alturas son los valores de la función en los extremos izquierdos de dichos subintervalos. Esto se ilustra en la Figura 6.4 con $n = 5$.

En la Figura 6.4 la base de cada rectángulo tiene una anchura de $1/5 = 0.2$. La altura del primer rectángulo es $f(0) = 0$, la altura del segundo rectángulo es $f(0.2) = 0.2^2$, la altura del tercer rectángulo es $f(0.4) = (0.4)^2$, y así sucesiva-



▲ **Figura 6.3**
Región bajo la curva $y = x^2$ en el Ejemplo 1



▲ **Figura 6.4**
Aproximación del área bajo la curva $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ con cinco rectángulos

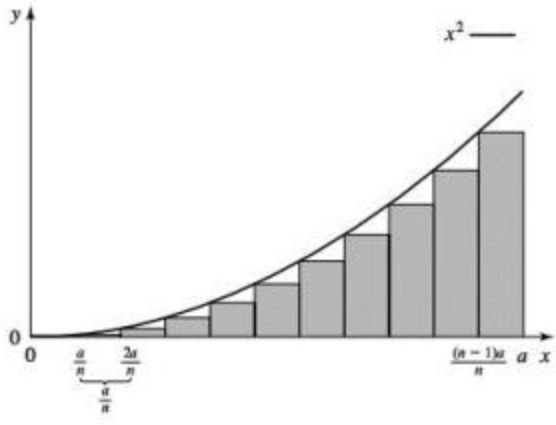
mente. El área de un rectángulo es base por altura, y sumando las áreas de sus rectángulos de aproximación de la Figura 6.4 se obtiene

$$(0.2)(0)^2 + (0.2)(0.2)^2 + (0.2)(0.4)^2 + (0.2)(0.6)^2 + (0.2)(0.8)^2$$

$$= (0.2)\left[0^2 + (0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.6)^2 + (0.8)^2\right] = 0.24$$

Por tanto, la aproximación al área entre 0 y 1 es 0.24 cuando se utilizan cinco subintervalos.

Volveremos ahora al caso general (ilustrado en la Figura 6.5), donde el intervalo es $[0, a]$ y el número de subintervalos es n. Como la longitud del intervalo $[0, a]$ es a y el número de subintervalos es n, la longitud de cada subintervalo es a/n. Los extremos izquierdos de los subintervalos sucesivos son por tanto 0, a/n, $2a/n$, $3a/n$, ..., $(n-1)a/n$. Las alturas de los rectángulos sucesivos son entonces $f(0) = 0$, $f(a/n) = (a/n)^2$, $f(2a/n) = (2a/n)^2$, ..., $f((n-1)a/n) = ((n-1)a/n)^2$. Denominaremos S_n a la suma de las áreas de n rectángulos, donde S indica suma



◀ **Figura 6.5**
Aproximación al área bajo la curva $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = a$ con rectángulos

y el subíndice n el número de subintervalos. Se obtiene que

$$s_n = \frac{a}{n}f(0) + \frac{a}{n}f\left(\frac{a}{n}\right) + \frac{a}{n}f\left(\frac{2a}{n}\right) + \cdots + \frac{a}{n}f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)$$

$$= \frac{a}{n}0^2 + \frac{a}{n}\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\frac{2^2a^2}{n^2} + \cdots + \frac{a}{n}\frac{(n-1)^2a^2}{n^2}$$

$$= \frac{a^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

Se puede calcular la suma de los cuadrados de los primeros k enteros:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad (6.1)$$

(Para una demostración de esta fórmula, *véase* el Problema 31). Utilizando esta fórmula con $k = n - 1$ se obtiene

$$S_n = \frac{a^3}{n^3}\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$$

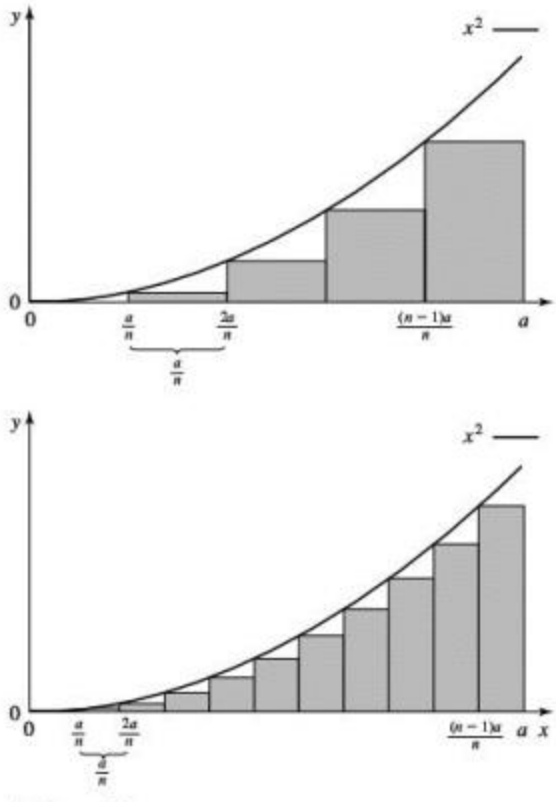
$$= \frac{a^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{6}\frac{n-1}{n}\frac{n}{n}\frac{2n-1}{n}$$

$$= \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Cuanto más fina sea la subdivisión del intervalo $[0, a]$ (es decir, cuanto mayor sea n), más exacta será la aproximación, como se ilustra en la Figura 6.6, donde se puede ver que el área de la región por debajo de la parábola y por encima del eje x entre 0 y 1 se aproxima con más exactitud cuándo se utiliza un número mayor de rectángulos. Escoger subdivisiones cada vez más finas significa hacer tender n a infinito. Se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{6}(1)(1)(2) = \frac{a^3}{3}$$

Es decir, el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta a es igual a $a^3/3$. ◀



▲ **Figura 6.6**
Al aumentar el número de rectángulos de la aproximación se mejora la exactitud de la misma

El Ejemplo 1 ilustra que el cálculo de áreas involucra la suma de un gran número de términos. Antes de continuar nuestra exposición sobre el cálculo de áreas, emplearemos algo de tiempo en considerar las sumas del tipo que encontramos en el Ejemplo 1.

Es conveniente disponer de una notación abreviada para las sumas que involucran un gran número de términos

Definición (notación sigma para sumas finitas) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y n un entero positivo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

La letra Σ es la letra griega sigma mayúscula, y el símbolo $\sum_{k=1}^{n}$ significa que la suma se realiza desde $k = 1$ hasta n, donde k se denomina índice de la suma, el número 1 es el límite inferior de la suma, y el número n es el límite superior de la suma. En vez de $\sum_{k=1}^{n}$ se puede escribir también $\sum_{k-1}^{n}$. Este último es preferible cuando se utiliza en el interior del texto.

Ejemplo 2 **(a)** Exprese cada suma en forma expandida

(i) $\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4$

(ii) $\sum_{k=3}^{6} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(iv) $\sum_{k=1}^{5} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

(b) Exprese cada suma en notación sigma

(i) $2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=2}^{5} k$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \sum_{k=1}^{4} k^3$

(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = \sum_{k=0}^{n} (2k + 1)$

(iv) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ ◀

Ocasionalmente, será necesaria una fórmula para sumar los primeros n enteros. El siguiente ejemplo ilustra cómo se hace.

Ejemplo 3 Demuestre que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Solución

El siguiente truco permite calcular la suma. Se escribe la suma en el orden natural y en orden inverso.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1$$

Sumando verticalmente, se obtiene

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots + (n + 1) \\ &= (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1) \end{aligned}$$

En el miembro derecho hay n términos (todos son $(n + 1)$). Por tanto

$$2S_n = n(n + 1) \quad \text{o} \quad S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Este método fue utilizado por Karl Friederich Gauss (1777-1855) cuando tenía 10 años: un día, para mantener ocupados a sus estudiantes, su profesor les pidió que sumarán todos los números del 1 al 100. Para sorpresa de su profesor, Karl Friederich encontró rápidamente la respuesta correcta: 5050. Para obtener dicha respuesta, él no sumó los números en orden numérico, sino que sumó $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ..., $50 + 51$ (como en el desarrollo anterior). Cada término es $= 101$ y hay 50 términos. Por lo tanto la respuesta es $50 \cdot 101 = 5050$ (Gauss se convirtió en uno de los grandes matemáticos de la historia, contribuyendo a la geometría, la teoría de números, la astronomía y otras áreas). ◀

Las siguientes reglas son de utilidad para calcular sumas finitas.

REGLAS ALGEBRAICAS

1. Regla del valor constante: $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.
2. Regla de la constante multiplicativa: $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{k} a_k$, siendo c una constante que no depende de k.
3. Regla de la suma: $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Ejemplo 4 Utilice las reglas algebraicas para simplificar las siguientes sumas

(a) $$\sum_{k=2}^{4} (3 + k) = \sum_{k=2}^{4} 3 + \sum_{k=2}^{4} k = (3 + 3 + 3) + (2 + 3 + 4) = 18$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$$

Para evaluar la primera suma se utilizado la Ecuación (6.1) y para la segunda suma el Ejemplo 3. ◀

6.1.2 Integrales de Riemann

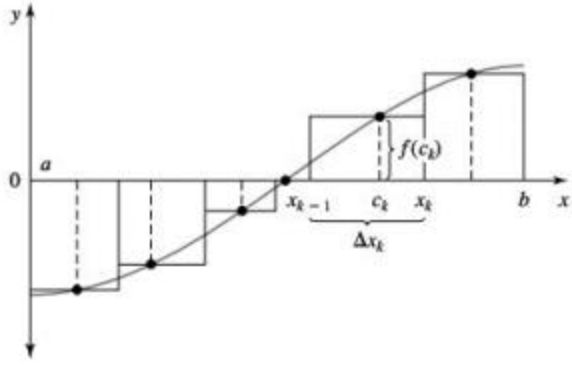
Desarrollaremos a continuación una solución más sistemática el problema del área. Aunque el procedimiento será muy similar al que realizamos en la subsección anterior, contemplaremos una situación más general. Permitiremos que la función cuya gráfica constituye el límite en el margen de interés tome también valores negativos. Además, los rectángulos que utilizaremos para aproximar el área podrán variar en anchura, y los puntos que se escojan para calcular las alturas de rectángulos podrán estar en cualquier parte de sus respectivos subintervalos (que forman las bases de los rectángulos).

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ (*véase* la Figura 6.7). Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos escogiendo $n - 1$ números $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, en (a, b) tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Los n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$



▲ **Figura 6.7**
Ilustración de la suma de Riemann

forman una **partición** del intervalo $[a, b]$, que se denominará $P = [x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$. La partición P depende del número de subintervalos n y de la selección de los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$. Por motivos de notación, sin embargo, denominaremos a la partición simplemente P. La longitud del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se denomina Δx_k. La longitud del mayor subintervalo se denomina **norma** de P y se denota $\|P\|$ (que se lee «norma de P»):

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$$

siendo $\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ el mayor elemento del conjunto $\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$. En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se escoge un punto c_k y se construye un rectángulo de base Δx_k y de altura $|f(c_k)|$, como se muestra en la Figura 6.7. Si $f(c_k)$ es positivo, entonces $f(c_k)\Delta x_k$ es el área del rectángulo. Si $f(c_k)$ es negativo, $f(c_k)\Delta x_k$ es el negativo del área del rectángulo. La suma de estos productos se denomina S_P. Es decir,

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

El valor de la suma depende de la elección de la partición P (de ahí el subíndice P en S_P) y de la elección de los puntos $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se denomina **suma de Riemann** de f en $[a, b]$.

Ejemplo 5 Calcule la suma de Riemann de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ utilizando 5 subintervalos iguales con (a) los extremos izquierdos, (b) los puntos medios y (c) los extremos derechos.

Solución

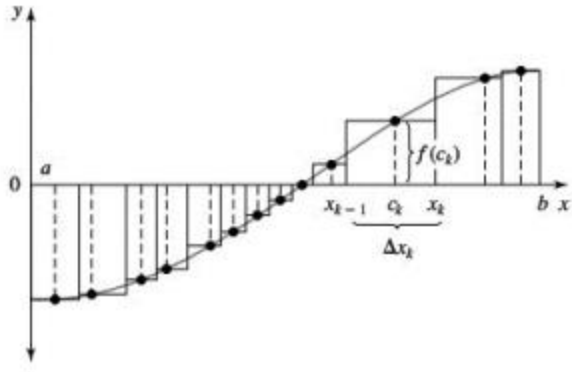
Se divide el intervalo $[0, 1]$ en cinco subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud 0.2: $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.4]$, $[0.4, 0.6]$, $[0.6, 0.8]$ y $[0.8, 1]$. La suma de Riemann se expresa como

$$S_P = \sum_{k=1}^{5} f(c_k)\,\Delta x_k$$

siendo $\Delta x_k = 0.2$ en los tres caso (a)-(c).

(a) Se utilizan los extremos izquierdos. Por tanto, $c_1 = 0$, $c_2 = 0.2$, $c_3 = 0.4$, $c_4 = 0.6$ y $c_5 = 0.8$. Se obtiene

$$S_P = (0.2)[0^2 + (0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.6)^2 + (0.8)^2] = 0.24$$



▲ **Figura 6.8**
Integral definida

(b) Se utilizan los puntos medios. Por tanto, $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.5$, $c_4 = 0.7$ y $c_5 = 0.9$. Se obtiene

$$S_P = (0.2)[(0.1)^2 + (0.3)^2 + (0.5)^2 + (0.7)^2 + (0.9)^2] = 0.33$$

(c) Se utilizan los extremos derechos. Por tanto, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.4$, $c_3 = 0.6$, $c_4 = 0.8$ y $c_5 = 1.0$. Se obtiene

$$S_P = (0.2)[(0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.6)^2 + (0.8)^2 + (1.0)^2] = 0.44$$

Comparando S_P en (a)-(c), puede verse que la suma de Riemann depende de la elección de los puntos $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$. ◀

Para obtener una mejor aproximación, sería necesario escoger particiones de $[a, b]$ cada vez más finas, de forma que los rectángulos llenaran la región entre la curva y el eje x de forma cada vez más precisa (*véase* la Figura 6.8). Una partición más fina significa que el número de subintervalos se hace mayor y la longitud del mayor subintervalo se hace menor de forma que la norma de la partición P disminuye. Una manera de hacer esto es escoger una secuencia de particiones $P = P(n) = [x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$, $n = 1, 2, 3, ...$, de forma que $\|P(n)\| > \|P(n+1)\|$ para $n = 1, 2, 3, ...$ De hecho, tomaremos el límite $\|P(n)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por motivos de notación, se omitirá n y se escribirá simplemente $\|P\| \to 0$. Pero hay que tener en mente que esto significa que, simultáneamente, el número de subintervalos tiende a infinito y la longitud del mayor subintervalo tiende a 0. El límite de S_P cuando $\|P\| \to 0$ (si existe) se denomina integral definida de f entre a y b.

Definición (integral definida) Sea $P = [x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$, $n = 1, 2, ...$, una secuencia de particiones de $[a, b]$ con $\|P\| \to 0$. Sea $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$. La **integral definida** de f entre a y b es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

si el límite existe, en cuyo caso se dice que f es **integrable** (en el sentido de Riemann) en el intervalo $[a, b]$.

El símbolo $\int$ es una S (de suma) alargada y fue introducido por Leibniz. Se denomina **signo integral**. En la notación $\int_b^a f(x)\,dx$ [que se lee «integral entre a y b de $f(x)\,dx$»], $f(x)$ se denomina **integrando**, el número a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Aunque el símbolo dx no tiene en sí mismo significado, sirve para recordar que, cuando se toma el límite, las anchuras de los subintervalos tienden a 0. La x de dx indica que x es la variable independiente y que se integra con respecto a x.

La frase «si el límite existe» significa, en particular, que el valor de $\lim_{\|P\|\to 0} S_P$ no depende de cómo se escogen las particiones ni los puntos $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ cuando se toma el límite. Un importante resultado establece que si f es continua en $[a, b]$, la integral definida de f en $[a, b]$ existe.

Teorema Todas las funciones continuas son integrables en el sentido de Riemann. Es decir, si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe.

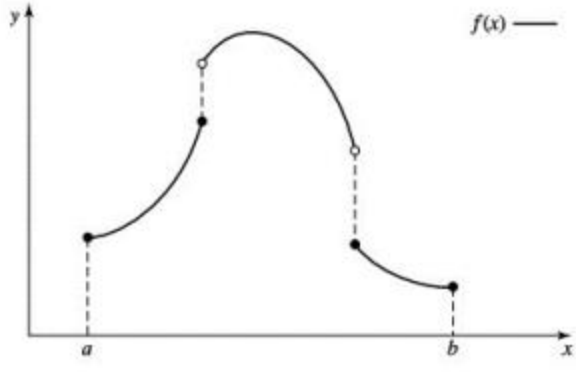
La clase de las funciones que son integrables en el sentido de Riemann es un poco mayor que el conjunto de las funciones continuas. Por ejemplo, las funciones que están acotadas (para las que existe un $M < \infty$ tal que $|f(x)| < M$ para todo x sobre el que se desea integrar) y continuas por tramos (continuas excepto en un número finito de discontinuidades) son integrables (*véase* la Figura 6.9). En este libro nuestro interés principal estará en las funciones continuas y por tanto saber que las funciones continuas son integrables en el sentido de Riemann será suficiente en la mayor parte de las ocasiones.

Nótese que $\int_b^a f(x)\,dx$ es un número que no depende de x. Se podría haber escrito $\int_b^a f(u)\,du$ (o cualquier otra letra en lugar de x) con el mismo significado.

Ejemplo 6 Exprese la integral definida

$$\int_3^7 (x^2 - 1)\,dx$$

como límite de sumas de Riemann.



▲ **Figura 6.9**
La función $y = f(x)$ es continua por tramos y acotada en $[a, b]$

Solución

$$\int_3^7 (x^2 - 1)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 1)\,\Delta x_k$$

siendo $x_0 = 3 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 7$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de particiones de $[3, 7]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, y el límite $\|P\| \to 0$ significa que la norma de la partición tiende a cero (y, simultáneamente, el número de subintervalos tiende a infinito). ◀

Ejemplo 7 Exprese el límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{c_k - 1}\,\Delta x_k$$

como una integral definida, siendo $P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de particiones de $[2, 4]$ en n subintervalos, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Solución

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{c_k - 1}\,\Delta x_k = \int_2^4 \sqrt{x - 1}\,dx$$ ◀

Ejemplo 8 Evalúe

$$\int_0^2 x^2\,dx$$

Solución

En el Ejemplo 1 se evaluó la suma de Riemann y su límite para $y = x^2$ desde 0 hasta a. El resultado fue

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Con $a = 2$, se tiene entonces

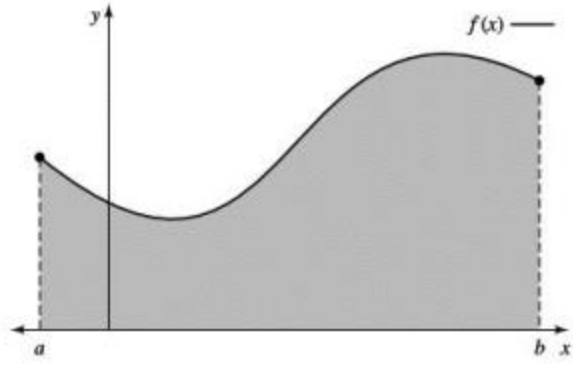
$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$$ ◀

Interpretación geométrica de las integrales definidas En el Ejemplo 1, se calculó el área de la región por debajo de la parábola $y = x^2$ y por encima del eje x entre 0 y a aproximando la región con n rectángulos de la misma anchura y tomando después el límite cuando $n \to \infty$. De forma más general, se puede definir ahora el **área** de una región A sobre el eje x (si existe) como se muestra en la Figura 6.10, como el valor límite de la suma de Riemann de la aproximación con rectángulos (nótese que un área es siempre un número positivo). Esta definición permite interpretar la integral definida de una función no negativa como un área.

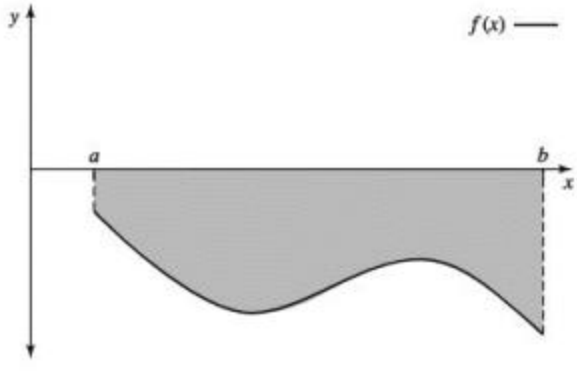
Si $f(x) \leqslant 0$ en $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_b^a f(x)\,dx$ es menor o igual que 0, y el valor es el negativo del área de la región por encima de la gráfica de f y por debajo del eje x entre a y b (*véase* la Figura 6.11). Diremos en este caso que se trata de un «área con signo» (un área con signo puede ser positiva o negativa).

En general, una integral definida puede ser interpretada por tanto como una diferencia de áreas, como ilustra la Figura 6.12. Si A_+ indica el área total de la región por encima del eje x y por debajo de la gráfica de f (donde $f \geqslant 0$), y A_- indica el área total de la región por debajo del eje x y por encima de la gráfica de f (donde $f \leqslant 0$), entonces

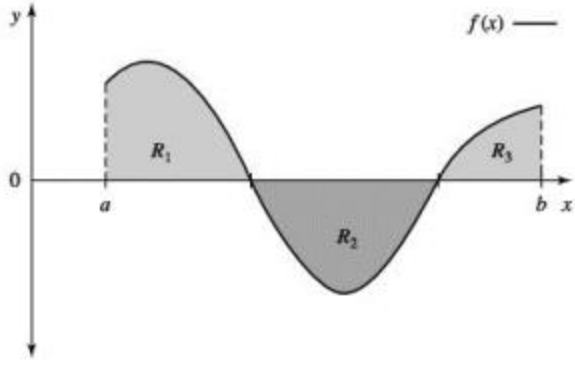
$$\int_a^b f(x)\,dx = A_+ - A_-$$



◀ **Figura 6.10**
El área de una región bajo la curva de una función positiva está dada por la integral definida $\int_b^a f(x)\,dx$



◀ **Figura 6.11**
El área de una región sobre la curva de una función negativa está dada por la integral definida $-\int_b^a f(x)\,dx$



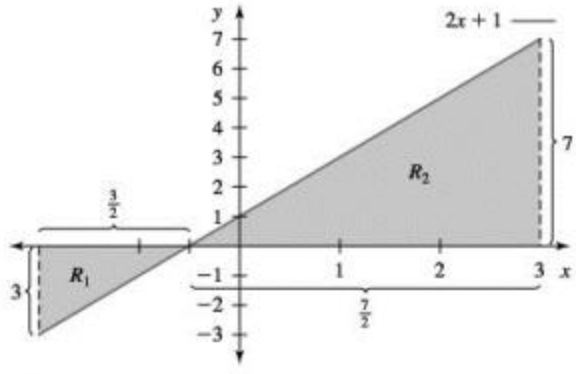
▲ **Figura 6.12**
A_+ es el área de R_1 y R_3, A_- es el área de R_2. Entonces $\int_b^a f(x)\,dx = A_+ - A_-$

1. Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{el área de la región entre la}\\ \text{gráfica de } f \text{ y el eje } x \text{ desde } a \text{ hasta } b\end{array}\right]$$

2. Si f es integrable en $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\text{área por encima del eje } x] - [\text{área por debajo del eje } x]$$



▲ **Figura 6.13**
El área de R_1 es A_-. El área de R_2 es A_+

Ejemplo 9 Calcule el valor de

$$\int_{-2}^{3} (2x + 1)\,dx$$

Interpretándolo como el área con signo de la región escogida apropiadamente.

Solución

Se dibuja $y = 2x + 1$ entre -2 y 3 (*véase* la Figura 6.13). La recta corta al eje x en $x = -1/2$. El área de la región a la izquierda de $-1/2$ entre la gráfica de $y = 2x + 1$ y el eje x se denomina A_-. El área de la región la derecha de $-1/2$ entre la gráfica de $y = 2x + 1$ y el eje x se denomina A_+. Ambas regiones son triángulos cuyas áreas se pueden calcular utilizando la fórmula de geometría.

$$A_- = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4}$$

$$A_+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 7 = \frac{49}{4}$$

Por tanto,

$$\int_{-2}^{3} (2x + 1)\,dx = A_+ - A_- = \frac{49}{4} - \frac{9}{4} = \frac{40}{4} = 10$$ ◀

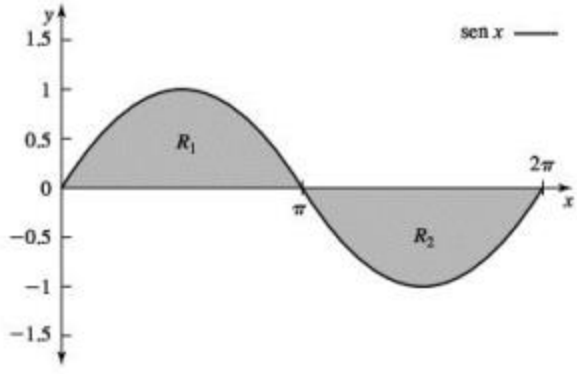
Ejemplo 10 Calcule el valor de

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

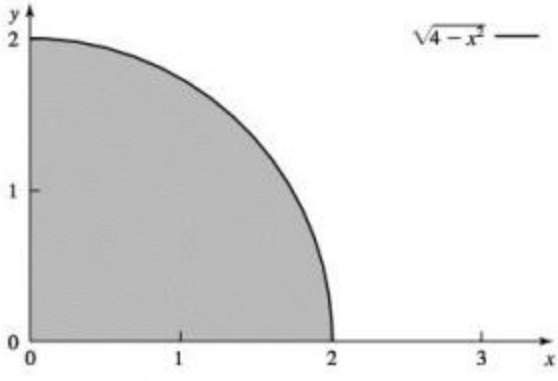
Interpretándolo como el área con signo de la región escogida apropiadamente.

Solución

Se dibuja $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y 2π (*véase* la Figura 6.14). La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es simétrica con respecto a $x = \pi$. De esta simetría, se deduce que el área de la región por debajo de la gráfica de f y por encima del eje x entre 0 y π (denominada A_+)



▲ **Figura 6.14**
Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, en el Ejemplo 10. El área de R_1 es A_+. El área de R_2 es A_-



▲ **Figura 6.15**
La gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es un cuarto de círculo. El área de la región sombreada es igual a $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

es la misma que el área de la región por encima de la gráfica de f y por debajo del eje x entre π y 2π (denominada $A_$). Por tanto, $A_+ = A_-$ y

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = A_+ - A_- = 0$$ ◀

Ejemplo 11 Calcule el valor de

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Interpretándolo como el área con signo de la región escogida apropiadamente.

Solución

La gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, es el cuarto de círculo centrado en (0, 0) de radio 2 que está en el primer cuadrante (*véase* la Figura 6.15). Como el área de un círculo de radio 2 es $\pi(2)^2$, $= 4\pi$, el área del cuarto de círculo es $4\pi/4 = \pi$. Por tanto,

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \pi$$ ◀

6.1.3 Propiedades de la integral de Riemann

En esta subsección se presentarán importantes propiedades que servirán de ayuda para evaluar integrales definidas.

PROPIEDADES

Asuma que f es integrable en el intervalo $[a, b]$. Entonces

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ y
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Ambas propiedades tienen sentido geométrico. La primera integral dice que el área con signo entre a y a es igual a 0. Dado que la anchura del área es igual a 0, es lógico esperar que el área sea también 0. La segunda propiedad da una orientación a la integral. Por ejemplo, si $f(x)$ es no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es no negativa y se puede interpretar como el área de la región entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x desde a hasta b. Si se invierte la dirección de integración, es decir, se calcula $\int_b^a f(x)\,dx$ se desea que la integral sea negativa.

Las tres propiedades siguientes se deducen inmediatamente de la definición de integral definida como límite de la suma de áreas de rectángulos de aproximación.

PROPIEDADES

Asuma que f y g son integrales en el intervalo $[a, b]$

3. Si k es una constante, entonces
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
4. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
5. Si f es integrable en un intervalo que contiene los tres números a, b y c, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Demostraremos la Propiedad (4) para ilustrar cómo se puede utilizar la definición de integral definida para probar estas propiedades.

Demostración de (4) Se escoge una secuencia de particiones $P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de $[a, b]$ en n subintervalos, $n = 1, 2, \ldots$, con $\|P\| \to 0$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se utiliza la definición de integrales definidas.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) + g(c_k)]\,\Delta x_k$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)\,\Delta x_k + g(c_k)\,\Delta x_k]$$

Aplicando la regla de la suma para sumas finitas, se obtiene

$$= \lim_{\|P\|\to 0}\left[\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\,\Delta x_k\right]$$

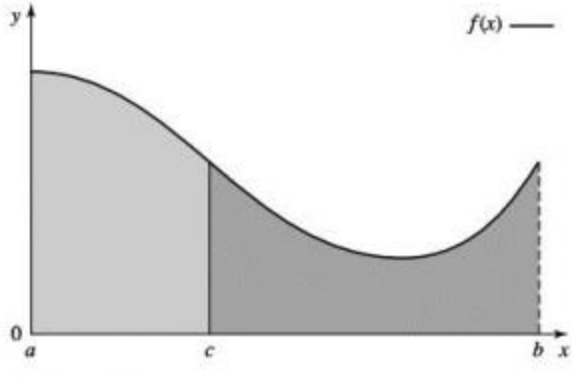
Como f y g son integrales, cada uno de los términos existe y entonces

$$= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k + \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(c_k)\,\Delta x_k$$

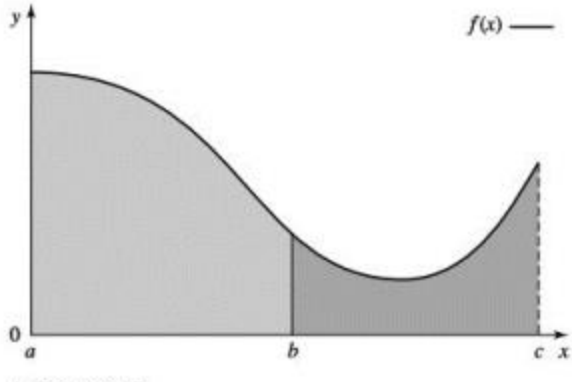
Utilizando ahora la definición resulta

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$ ■

La Propiedad (5) es una propiedad de suma. En vez de demostrarla, comentaremos dos casos especiales (que se ilustran en las Figuras 6.16 y 6.17). En el primer caso (Figura 6.16), $a < b < c$ y $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$. La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x entre a y b. En la Figura 6.16 se puede ver que este área está compuesta de dos áreas: el



▲ **Figura 6.16**
La Propiedad (5) cuando $a < c < b$



▲ **Figura 6.17**
La Propiedad (5) cuando $a < b < c$

área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x entre a y c y el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x entre c y b. Se puede expresar matemáticamente esta relación como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

que es la Propiedad (5) en este caso especial.

El segundo caso que se presenta, $a < b < c$ y $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, c]$ (Figura 6.17). A partir de la Figura 6.17, se puede ver que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

Pero debido la Propiedad (2),

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

y, por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

como indica la Propiedad (5).

La Propiedad (5) es mucho más general. No es necesario que la función f sea positiva como en las Figuras 6.16 y 6.17 (sólo es necesario que sea integrable), y los números a, b y c pueden estar en cualquier orden en la recta real (no sólo $a < b < c$ como la Figura 6.16 ni $a < c < b$ como las Figuras 6.17). El siguiente ejemplo muestra cómo se utiliza esta propiedad.

Ejemplo 12 Dado que $\int_0^a x^2\,dx = a^3/3$, evalúe

$$\int_1^4 (3x^2 + 2)\,dx$$

Solución

$$\int_1^4 (3x^2 + 2)\,dx = 3\int_1^4 x^2\,dx + \int_1^4 2\,dx$$

Para evaluar $\int_1^4 x^2\,dx$ se utiliza la Propiedad (5) de suma, con lo que se puede escribir

$$\int_1^4 x^2\,dx = \int_1^0 x^2\,dx + \int_0^4 x^2\,dx$$

Como

$$\int_1^0 x^2\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx$$

se deduce que

$$\int_1^4 x^2\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^4 x^2\,dx$$

que se puede evaluar utilizando que $\int_0^a x^2\,dx = a^3/3$. Para evaluar $\int_1^4 2\,dx$ hay que tener en cuenta que $y = 2$ es una recta horizontal que corta al eje y en $y = 2$.

La región bajo $y = 2$ desde 1 hasta 4 es por tanto un rectángulo de base $4 - 1 = 3$ y de altura 2. Entonces,

$$\int_1^4 (3x^2 + 2)\,dx = 3\left[\int_0^4 x^2\,dx - \int_0^1 x^2\,dx\right] + \int_1^4 2\,dx$$

$$= 3\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + (2)(3)$$

$$= 64 - 1 + 6 = 69$$ ◀

Las tres propiedades siguientes se denominan propiedades de orden. Permiten comparar integrales definidas, o decir algo sobre lo grande o pequeña que puede ser una integral definida concreta. Primero se enunciarán las propiedades y después se explicará su significado geométrico.

PROPIEDADES

Asuma que f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$.

6. Si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

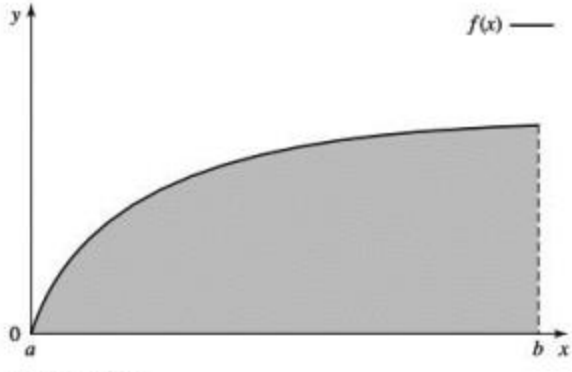
7. Si $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ en $[a, b]$, entonces

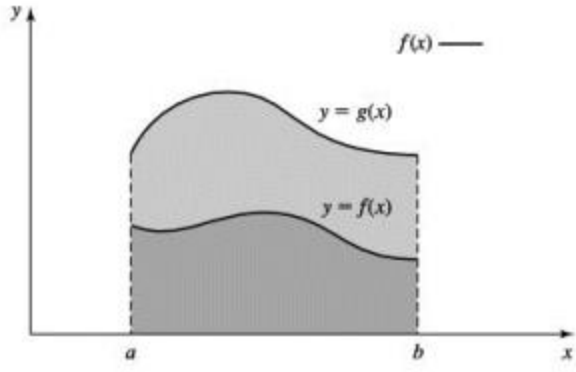
$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

La Propiedad (6), que se ilustra en la Figura 6.18, dice que si f es no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida en este intervalo es también no negativa. Esto se puede explicar a partir de la interpretación geométrica. Si $f(x) \geqslant 0$ para $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área encerrada entre la curva y el eje x entre a y b. Pero un área debe ser un número no negativo.

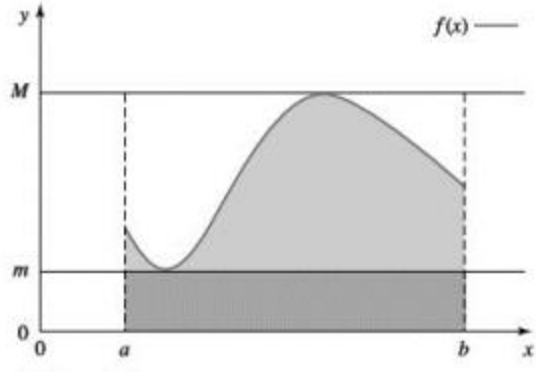
La Propiedad (7) se explica en la Figura 6.19 cuando f y g son funciones positivas en el intervalo $[a, b]$. En este caso, se utiliza el hecho de que la integral definida se puede interpretar como un área. Observando la Figura 6.19, se puede ver que la función f tiene un área menor que la función g. La Propiedad (7) se cumple sin necesidad de suponer que f y g deben ser positivas, y se puede dibujar una figura



▲ **Figura 6.18**
Ilustración de la Propiedad (6)



▲ **Figura 6.19**
Ilustración de la Propiedad (7)



▲ **Figura 6.20**
Ilustración de la Propiedad (8)

análoga para el caso general. En ese caso, la integral definida debe ser interpretada como un área con signo.

La Propiedad (8) se muestra en la Figura 6.20 para $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$. Puede verse que el rectángulo de altura m está contenido en el área entre la gráfica de f y el eje x, que a su vez está contenida en el rectángulo de altura M. Como el área del rectángulo pequeño es $m(b - a)$, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área entre la gráfica de f y el eje x siendo f no negativa y $M(b - a)$ es el área del rectángulo grande, se deducen las Ecuaciones de (8). Nótese que la propiedad no exige que f sea no negativa. Es posible dibujar una figura análoga cuando f es negativa en todo el intervalo $[a, b]$ o en parte de él.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se utilizan estas propiedades de orden.

Ejemplo 13 Demuestre que

$$0 \leqslant \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \pi$$

Solución

Nótese que $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para $x \in [0, \pi]$. Utilizando la Propiedad (6), se obtiene

$$\int_a^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \geqslant 0$$

Utilizando la Propiedad (8), resulta

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \leqslant (1)(\pi) = \pi$$

(*Véase* la Figura 6.21). ◀

El siguiente ejemplo servirá para profundizar en la comprensión de las áreas con signo. Se utilizan también las propiedades de orden.

▶ Ejemplo 14 Calcule el valor de $a \geqslant 0$ que maximiza

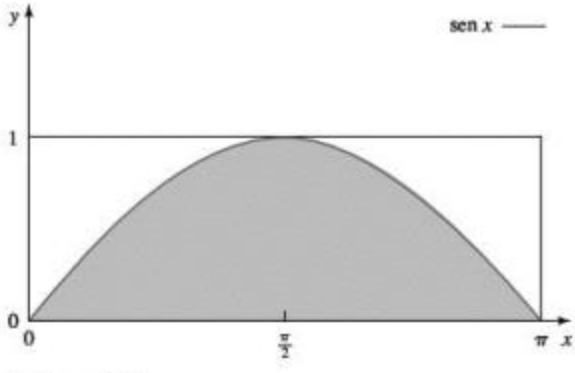
$$\int_0^a (1 - x^2)\,dx$$

Solución

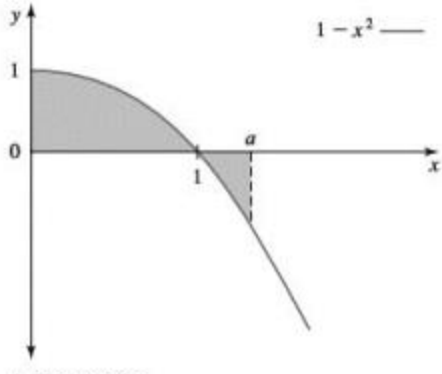
En la Figura 6.22 se dibuja el integrando $f(x) = 1 - x^2$ para $x \geqslant 0$. Utilizando la interpretación de la integral definida como área con signo, se puede ver observando la gráfica de $f(x)$ que $a = 1$ maximiza la integral, ya que la gráfica de $f(x)$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$.

Se puede dar un argumento más preciso. Nuestro objetivo es demostrar que

$$\int_0^a (1 - x^2)\,dx > \int_0^a f(x)\,d(x)$$



▲ **Figura 6.21**
Ilustración de la integral del Ejemplo 13. El área sombreada es no negativa y menor que el área del rectángulo cuya base tiene longitud π y altura 1



▲ **Figura 6.22**
Ilustración de la integral del Ejemplo 14.

para todo $a \geqslant 0$, supuesto $a \neq 1$. Esto implica entonces que $a = 1$ maximiza la integral

$$\int_0^a (1 - x^2)\,dx$$

Primero, hay que tener en cuenta que $f(x)$ es continua para $x \geqslant 0$ y que

$$f(x)\begin{cases} > 0 & \text{para } 0 \leqslant x < 1 \\ < 0 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

lo que a su vez implica que para $0 \leqslant a \leqslant 1$,

$$\int_a^1 f(x)\,dx > 0$$

y, por tanto, para $0 \leqslant a < 1$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \underbrace{\int_a^1 f(x)\,dx}_{>0} > \int_0^a f(x)\,dx \tag{6.2}$$

Por otra parte, para $a > 1$,

$$\int_1^a f(x)\,dx < 0$$

y, por tanto, para $a > 1$,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \underbrace{\int_1^a f(x)\,dx}_{<0} < \int_0^1 f(x)\,dx \tag{6.3}$$

Combinando las Ecuaciones (6.2) y (6.3), se demuestra que

$$\int_0^a f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx$$

para todo $a \geqslant 0$, y $a \neq 1$. Por tanto, $a = 1$ maximiza la integral $\int_0^a (1 - x^2)\,dx$. ◀

6.1.4. Problemas

(6.1.1)

1. Aproxime el área bajo la parábola $y = x^2$ entre 0 y 1, utilizando cuatro subintervalos iguales y los extremos izquierdos de los subintervalos.

2. Aproxime el área bajo la parábola $y = x^2$ entre 0 y 1, utilizando cuatro subintervalos iguales y los puntos medios de los subintervalos.

3. Aproxime el área bajo la parábola $y = x^2$ entre 0 y 1, utilizando cuatro subintervalos iguales y los extremos derechos de los subintervalos.

4. Aproxime el área bajo la parábola $y = 1 - x^2$ entre 0 y 1, utilizando cinco subintervalos iguales con (a) los extremos izquierdos de los subintervalos y (b) los extremos derechos de los subintervalos.

En los Problemas 5-14, exprese las sumas en forma expandida.

5. $\sum_{k=1}^{4} \sqrt{k}$

6. $\sum_{k=3}^{6} k^2$

7. $\sum_{k=0}^{5} 2^k$

8. $\sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1}$

9. $\sum_{k=0}^{4} x^k$

10. $\sum_{k=0}^{4} k^x$

11. $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k$

12. $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$

13. $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$

14. $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k\frac{\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$

En los Problemas 15-22, escriba las sumas en notación sigma.

15. $1+2+3+4+5+6$

16. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}$

17. $\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5$

18. $\frac{3}{5}+\frac{4}{6}+\frac{5}{7}+\frac{6}{8}+\frac{7}{9}$

19. $2+4+6+8+\cdots+2n$

20. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

21. $1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^{n-1}$

22. $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\cdots+(-1)^n a^n$

En los Problemas 23-30, utilice las reglas algebraicas de las sumas para evaluar dichas sumas. Recuerde que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

23. $\sum_{k=1}^{20} (3k+2)$

24. $\sum_{k=1}^{10} (2-k^2)$

25. $\sum_{k=0}^{6} k(k+1)$

26. $\sum_{k=1}^{n} 3k$

27. $\sum_{k=1}^{n} 2k^2$

28. $\sum_{k=1}^{n} (k+2)(k-2)$

29. $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k$

30. $\sum_{k=1}^{11} (-1)^k$

31. Los siguientes pasos demostrarán que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Demuestre que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} [(1+k)^3 - k^3] &= (2^3-1^3)+(3^3-2^3)+(4^3-3^3)\\ &\quad +\cdots+[(1+n)^3-n^3]\\ &= (1+n)^3-1^3\end{aligned}$$

(Las sumas que se «reducen» como ésta debido a la cancelación de términos se denominan sumas colapsantes o sumas que se pliegan).

(b) Utilice las reglas algebráicas de las sumas y el Ejemplo 3 para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} [(1+k)^3 - k^3] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

(c) En (a) y (b), se han obtenido dos expresiones de la suma

$$\sum_{k=1}^{n} [(1+k)^3 - k^3]$$

Por tanto, deben ser iguales. Es decir

$$(1+n)^3 - 1^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Resuelva esta ecuación despejando $\sum_{k=1}^{n} k^2$, y demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(6.1.2)

32. Aproxime

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

utilizando cinco subintervalos iguales y los extremos izquierdos de los subintervalos.

33. Aproxime

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

utilizando cinco subintervalos iguales y los puntos medios de los subintervalos.

34. Aproxime

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

utilizando cinco subintervalos iguales y los extremos derechos de los subintervalos.

35. Aproxime

$$\int_{-2}^{2} (2+x^2)\,dx$$

utilizando cuatro subintervalos iguales y los extremos izquierdos de los subintervalos.

36. Aproxime

$$\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx$$

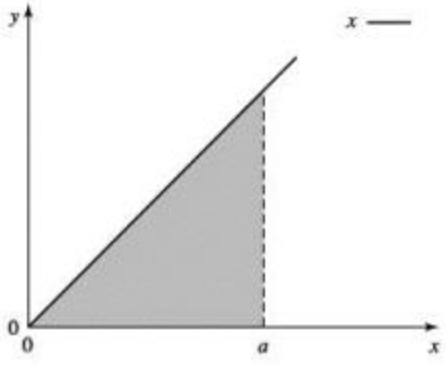
utilizando tres subintervalos iguales y los puntos medios de los subintervalos.

37. Aproxime

$$\int_{01}^{3\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$$

utilizando cinco subintervalos iguales y los extremos izquierdos de los subintervalos.

38. **(a)** Suponga que $a > 0$. Evalúe $\int_0^a x\,dx$ utilizando el hecho de que la región limitada por $y = x$ y el eje x entre 0 y a es un triángulo (*véase* la Figura 6.23).



▲ **Figura 6.23**
Región del Problema 38

(b) Suponga que $a > 0$. Evalúe $\int_0^a x\,dx$ aproximando con rectángulos la región limitada por $y = x$ y el eje x entre 0 y a. Utilice subintervalos iguales y tome los extremos derechos de los subintervalos. (*Sugerencia*: utilice el resultado del Ejemplo 3 para calcular la suma de las áreas de los rectángulos).

39. Suponga que $0 < a < b < \infty$. Utilice un argumento geométrico para demostrar que

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

40. Suponga que $0 < a < b < \infty$. Utilice un argumento geométrico para demostrar que

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Exprese los límites de los Problemas 41-47 como integrales definidas. Advierta que $P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, es una partición del intervalo indicado, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

41. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$, siendo P una partición de $[0, 1]$

42. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{c_k}\,\Delta x_k$, siendo P una partición de $[1, 4]$

43. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)\Delta x_k$, siendo P una partición de $[-3, 2]$

44. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k + 1}\,\Delta x_k$, siendo P una partición de $[1, 2]$

45. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k - 1)(c_k + 2)\Delta x_k$, siendo P una partición de $[-3, 3]$

46. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sen} c_k)\Delta x_k$, siendo P una partición de $[0, \pi]$

47. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} e^{c_k}\Delta x_k$, siendo P una partición de $[-5, 2]$

En los Problemas 48-53, exprese las integrales definidas como límites de sumas de Riemann.

48. $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{1 - x}\,dx$

49. $\int_{2}^{6} \sqrt{x + 1}\,dx$

50. $\int_{1}^{3} e^{-x}\,dx$

51. $\int_{1}^{e} \ln x\,dx$

52. $\int_{0}^{\pi} \cos(2x)\,dx$

53. $\int_{0}^{5} g(x)\,dx$, siendo $g(x)$ una función continua en $[0, 5]$

En los Problemas 54-60, utilice una gráfica para interpretar la integral definida en términos de áreas. No calcule las integrales.

54. $\int_{-2}^{3} (x - 3)\,dx$

55. $\int_{-1}^{2} (x^2 - 1)\,dx$

56. $\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x^3\,dx$

57. $\int_{0}^{5} e^{-x}\,dx$

58. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$

59. $\int_{1/2}^{4} \ln x\,dx$

60. $\int_{-3}^{2} \left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx$

En los Problemas 61-67, calcule el valor de las integrales interpretándolas como áreas (con signo) encerradas por la gráfica de una función escogida apropiadamente, y utilizando la fórmula geométrica del área.

61. $\int_{-2}^{3} |x|\,dx$

62. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

63. $\int_{2}^{5} \left(\frac{1}{2}x - 4\right)dx$

64. $\int_{1/2}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$

65. $\int_{-2}^{2} (\sqrt{4-x^2} - 2)\,dx$

66. $\int_{0}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx$

67. $\int_{-3}^{0} (4 - \sqrt{9-x^2})\,dx$

(6.1.3)

68. Dado que

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$$

evalúe lo siguiente:

(a) $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx$

(b) $\int_{-3}^{0} 2x^2\,dx$

(c) $\int_1^3 \frac{1}{3}x^2\,dx$

(d) $\int_1^1 3x^2\,dx$

(e) $\int_{-2}^{3} \frac{3}{2}x^2\,dx$

(f) $\int_2^4 (x-2)^2\,dx$

69. Calcule $\int_2^2 \cos(3x^2)\,dx$

70. Calcule $\int_{-3}^{-3} e^{-x^2/2}\,dx$

71. Calcule $\int_{-2}^{2} (x+1)\,dx$

72. Calcule $\int_0^{-5} (1-x))\,dx$

73. Calcule $\int_{-2}^{1} \tan x\,dx$

74. Explique geométricamente por qué

$$\int_1^2 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx - \int_0^1 x^2\,dx \qquad (6.4)$$

y demuestre que (6.4) se puede escribir como

$$\int_1^2 x^2\,dx = \int_1^0 x^2\,dx + \int_0^2 x^2\,dx \qquad (6.5)$$

Relacione (6.5) con la Propiedad de suma (7).

En los Problemas 75-79, verifique las inecuaciones sin calcular las integrales.

75. $\int_0^1 x\,dx \geqslant \int_0^1 x^2\,dx$

76. $\int_1^2 x\,dx \leqslant \int_1^2 x^2\,dx$

77. $0 \leqslant \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \leqslant 8$

78. $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \leqslant 1$

79. $\frac{\pi}{3} \leqslant \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \frac{2\pi}{3}$

80. Calcule el valor de $a \geqslant 0$ que maximiza $\int_0^a (4-x^2)\,dx$.

81. Calcule el valor de $a \in [0, 2\pi]$ que maximiza $\int_0^a \cos x\,dx$.

82. Calcule el valor de $a \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = 0$$

83. Calcule el valor de $a > 1$ tal que

$$\int_1^a (x-2)^3\,dx = 0$$

84. Calcule el valor de $a > 0$ tal que

$$\int_{-a}^{a} (1 - |x|)\,dx = 0$$

85. Para determinar la mortalidad específica con la edad, se realiza el seguimiento de un grupo de individuos nacidos todos al mismo tiempo. Si $N(t)$ indica el número de individuos vivos en el instante t, entonces $N(t)/N(0)$ es la fracción de supervivientes en el instante t. La cantidad $r(t)$, denominada función de tasa de daño, mide la velocidad a la que mueren individuos en el instante t. Concretamente, $r(t)\,dt$ es la probabilidad de que el individuo que está vivo en el instante t muera durante el intervalo de tiempo infinitesimal $(t, t+dt)$. El daño acumulativo durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, $\int_0^t r(s)\,ds$, se puede estimar como $-\ln \frac{N(t)}{N(0)}$. Demuestre que el daño acumulativo durante el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, $\int_t^{t+1} r(s)\,ds$, se puede estimar como $-\ln \frac{N(t+1)}{N(t)}$.

6.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En la Sección 6.1 se utilizó la definición de integral definida para calcular $\int_0^a x^2\,dx$. Para ello fue necesario realizar la suma de un gran número de términos, lo que se facilitó con la fórmula explícita de la suma $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Fermat y otros fueron capaces de realizar cálculos similares del área bajo curvas de la forma $y = x^r$, siendo r un número racional distinto de -1. La solución del caso $r = -1$ fue obtenida por el matemático belga Gregory de St. Vincent (1584-1667) y publicada en 1647.

En ese momento, parecía necesario desarrollar métodos específicos para calcular el área por debajo de la curva de una función dada. Esto no habría sido práctico.

Afortunadamente, resulta que el problema del área está relacionado con el problema de la tangente. Esto no es del todo obvio. Entre los primeros que advirtieron esta relación se encontraban Isaac Barrow (1630-1677) y James Gregory (1638-1675). Ambos presentaron esta relación en términos geométricos, sin darse cuenta de la importancia de su descubrimiento.

Tanto Newton como Leibniz son reconocidos por desarrollar sistemáticamente la conexión entre los problemas de la tangente y del área, que finalmente resultó en un método para calcular áreas y resolver problemas que se pueden transformar en problemas de áreas. El resultado se conoce como teorema fundamental del cálculo, que dice que los problemas de la tangente y del área están inversamente relacionados.

El teorema fundamental del cálculo tiene dos partes. La primera parte asocia primitivas con integrales y la segunda parte proporciona un método para calcular integrales definidas.

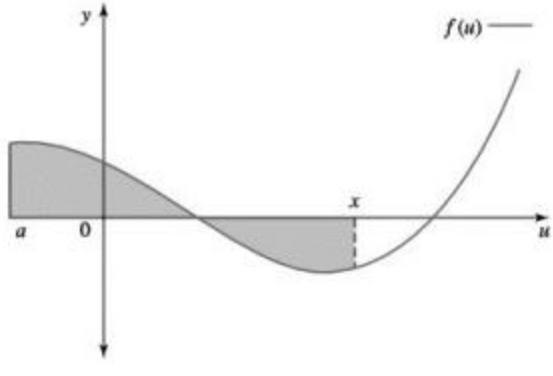
6.2.1 El teorema fundamental del cálculo (Parte I)

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

Geométricamente, $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$ representa el área con signo encerrada entre la gráfica de $f(u)$ y el eje horizontal entre a y x (*véase* la Figura 6.24). Adviértase que la variable independiente x aparece en el límite superior de la integral. Podemos preguntarnos ahora como varía el área con signo de $F(x)$ con las variaciones de x. Para responder a esta pregunta, se calcula $\frac{dF}{dx}$ utilizando la definición de derivada. Es decir,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du\right] \qquad (6.6)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du\end{aligned}$$



◀ **Figura 6.24**
El área con signo sombreada es $F(x)$

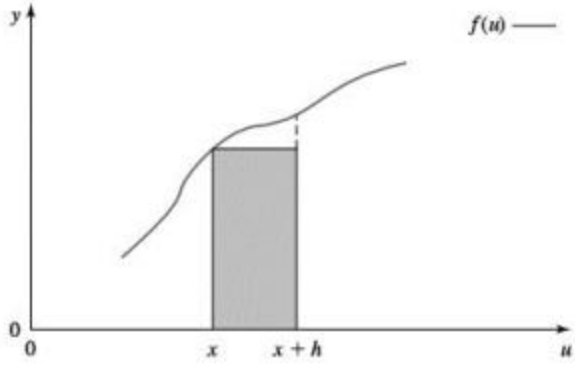


Figura 6.25
El rectángulo de aproximación en el teorema fundamental del cálculo

En el último paso, se ha utilizado la Propiedad (5) de la Subsección 6.1.3. Para evaluar

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du$$

recurriremos a la interpretación geométrica de las integrales definidas. El argumento siguiente se ilustra en la Figura 6.25. Nótese que

$$\int_x^{x+h} f(u)\,du$$

es el área con signo de la región limitada por la gráfica de $f(u)$ y el eje horizontal entre x y $x+h$. Si h es pequeña, entonces este área se puede aproximar bastante bien por el área de rectángulo inscrito de altura $|f(x)|$. El área con signo de este rectángulo es $f(x)h$. Entonces

$$\int_x^{x+h} f(u)\,du \approx f(x)h$$

Si se dividen los dos miembros por h y se hace tender h a 0 se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du = f(x) \tag{6.7}$$

(como se demostrará matemáticamente de forma rigurosa al final de esta subsección). Combinando (6.6) y (6.7) se llega al importante resultado

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Además, se puede ver que $F(x)$ es continua, ya que es diferenciable.

El anterior argumento se basa en la intuición geométrica. Para mostrar cómo se puede hacer este argumento matemáticamente riguroso, se proporcionará la demostración completa de este resultado al final esta subsección. El resultado está resumido en el siguiente teorema.

El teorema fundamental del cálculo (TFC) (parte I) Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función F definida así

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y se cumple

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Expresado en forma simple, el TFC (parte I) dice que si primero se integra $f(x)$ y después se deriva el resultado, se obtiene de nuevo $f(x)$. En este sentido, demuestra que la integración y la derivación son operaciones inversas. Comenzaremos presentando un ejemplo que se puede resolver inmediatamente utilizando el TFC.

Ejemplo 1 Calcule

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (\operatorname{sen} u - e^{-u})\,du$$

para $x > 0$.

Solución

Primero, nótese que $f(x) = \operatorname{sen} x - e^x$ es continua para $x \geqslant 0$. Si se hace $F(x) = \int_0^x (\operatorname{sen} u - e^{-u})$ y se aplica el TFC, entonces

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (\operatorname{sen} u - e^{-u})\,du = \operatorname{sen} x - e^{-x}$$ ◀

Ejemplo 2 Calcule

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \frac{1}{1+u^2}\,du$$

para $x > 3$.

Solución

Primero, nótese que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua para $x \geqslant 3$. Si se hace $F(x) = \int_3^x \frac{1}{1+u^2}\,du$ y se aplica el TFC, entonces

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_3^x \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{1+x^2}$$ ◀

El resto de esta subsección se puede omitir.

Regla de Leibniz (opcional) Combinando la regla de la cadena y el TFC (parte I) se pueden derivar integrales con respecto a x cuando los límites superior o inferior de la integral son funciones de x.

En el primer ejemplo el límite superior de integración es función de x.

Ejemplo 3 Calcule

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} (u^3 - 2)\,du, \quad x > 0$$

Solución

Nótese que $f(u) = u^3 - 2$ es continua para todo $u \in \mathbf{R}$. Se hace $F(v) = \int_0^v (u^3 - 2)\,du$, $v > 0$. Entonces, para $x > 0$,

$$F(x^2) = \int_0^{x^2} (u^3 - 2)\,du$$

Se desea calcular $\frac{d}{dx}F(x^2)$. Para ello, se puede aplicar la regla de la cadena. Se hace $v(x) = x^2$ y entonces

$$\frac{d}{dx}F(x^2) = \frac{dF(v)}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Para evaluar $\frac{d}{dv} F(v) = \frac{d}{dv} \int_0^v (u^3 - 2)\, du$ se utiliza el TFC:

$$\frac{d}{dv} \int_0^v (u^3 - 2)\, du = v^3 - 2$$

Como $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, se obtiene por tanto que

$$\frac{d}{dx} F(x^2) = (v^3 - 2)2x = [(x^2)^3 - 2]2x$$
$$= (x^6 - 2)2x$$ ◀

Hasta ahora, sólo se ha considerado el caso en el que el límite de integración superior depende de x. El siguiente ejemplo muestra lo que hay que hacer cuando el límite de integración inferior depende de x.

Ejemplo 4 Calcule

$$\frac{d}{dx} \int_{\operatorname{sen} x}^1 u^2\, du$$

Solución

Nótese que $f(u) = u^2$ es continua para todo $u \in \mathbf{R}$. Se utiliza el hecho de que

$$\int_{\operatorname{sen} x}^1 u^2\, du = -\int_1^{\operatorname{sen} x} u^2\, du$$

El límite superior depende ahora de x, pero se ha introducido un signo menos. Entonces

$$\frac{d}{dx} \int_{\operatorname{sen} x}^1 u^2\, du = -\frac{d}{dx} \int_1^{\operatorname{sen} x} u^2\, du$$
$$= -(\operatorname{sen} x)^2 \cos x$$ ◀

El ejemplo anterior pone de manifiesto un punto importante: hay que observar cuidadosamente si lo que depende de x es el límite de integración superior o el inferior. En el siguiente ejemplo se muestra lo que hay que hacer cuando ambos límites de integración dependen de x.

Ejemplo 5 Para $x \in \mathbf{R}$, calcule

$$\frac{d}{dx} \int_{x_2}^{x^3} e^u\, du$$

Solución

Nótese que $f(u) = e^u$ es continua para todo $u \in \mathbf{R}$. La integral dada está por tanto definida para todo $x \in \mathbf{R}$, y se puede dividir en dos integrales para cualquier $a \in \mathbf{R}$. Se escoge $a = 0$, con lo que resulta

$$\int_{x_2}^{x^3} e^u\, du = \int_{x_2}^0 e^u\, du + \int_0^{x^3} e^u\, du = -\int_0^{x^2} e^u\, du + \int_0^{x^3} e^u\, du$$

El miembro derecho está escrito de una forma que sabemos cómo derivar, y entonces

$$\frac{d}{dx} \int_{x_2}^{x^3} e^u\, du = -\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^u\, du + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} e^u\, du$$
$$= -\left[e^{x^2} \frac{d}{dx} x^2\right] + \left[e^{x^3} \frac{d}{dx} x^3\right]$$
$$= -e^{x^2} 2x + e^{x^3} 3x^2$$ ◀

El ejemplo anterior ilustra el caso más general que podemos encontrar, concretamente cuando los dos límites de integración dependen de x. El siguiente recuadro resume este caso conocido como regla de Leibniz.

REGLA DE LEIBNIZ

Si $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables y $f(u)$ es continua con u entre $g(x)$ y $h(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(u)\,du = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x)$$

Se puede comprobar que los Ejemplos 3-5 se pueden resolver utilizando esta fórmula. Por ejemplo, el Ejemplo 4, tenemos que $f(u) = u^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = 1$. Entonces $g'(x) = \cos x$ y $h'(x) = 0$. Por tanto, se obtiene que

$$f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x) = 0 - (\operatorname{sen} x)^2 \cos x$$

que es la respuesta obtenida en el Ejemplo 4.

Demostración del teorema fundamental del cálculo (parte I) (opcional)
Al comienzo de esta subsección, se obtuvo que si

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

entonces

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du \tag{6.8}$$

Proporcionaremos a continuación un argumento matemático riguroso que demostrará que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Comenzaremos con la observación de que la función $f(u)$ continua definida en el intervalo $[x, x + h]$ cerrado alcanza un mínimo absoluto y un máximo absoluto en dicho intervalo, de acuerdo con el teorema de los valores extremos. Es decir, existen unos valores m y M tales que m es el mínimo de f en $[x, x + h]$ y M es el máximo de f en $[x, x + h]$, lo que implica que

$$m \leqslant f(u) \leqslant M \quad \text{para todo } u \in [x, x + h] \tag{6.9}$$

Por supuesto, m y M dependen de x y de h. Aplicando la Propiedad (8) de la Subsección 6.1.3 a la Expresión (6.9), se obtiene

$$\int_x^{x+h} m\,du \leqslant \int_x^{x+h} f(u)\,du \leqslant \int_x^{x+h} M\,du$$

y por tanto

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(u)\,du \leqslant Mh$$

Dividiendo por h,

$$m \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du \leqslant M \tag{6.10}$$

Si hacemos

$$I = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du$$

entonces (6.10) se expresa como $m \leqslant I \leqslant M$. Es decir, I es un número entre m y M. Este resultado se puede comparar con (6.9), que dice que $f(u)$ también está entre m, el mínimo de f en el intervalo $[x, x + h]$, y M, el máximo de f en dicho intervalo, para todo $u \in [x, x + h]$. El teorema de los valores intermedios aplicado a $f(u)$ nos indica que dicha función alcanza cualquier valor entre m y M para algún número del intervalo $[x, x + h]$. Concretamente, debe existir un número $c_h \in [x, x + h]$ tal que $f(c_h) = I$, ya que I está entre m y M. Es decir,

$$f(c_h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u)\, du \tag{6.11}$$

Como $x \leqslant c_h \leqslant x + h$, se deduce que

$$\lim_{h \to 0} c_h = x$$

Como f es continua,

$$\lim_{h \to 0} f(c_h) = f\left(\lim_{h \to 0} c_h\right) = f(x) \tag{6.12}$$

Combinando (6.8), (6.11) y (6.12), se obtiene el resultado

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$ ■

6.2.2 Primitivas e integrales indefinidas

La primera parte del teorema fundamental del cálculo establece que si

$$F(x) = \int_a^x f(u)\, du$$

entonces $F'(x) = f(x)$ [suponiendo que $f(x)$ sea continua en el intervalo de integración]. Esto quiere decir que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ (las primitivas se presentaron en la Sección 5.8). Ahora, si hacemos

$$F(x) = \int_0^x f(u)\, du \quad \text{y} \quad G(x) = \int_b^x f(u)\, du$$

siendo a y b dos números, ambas integrales tienen la misma derivada, concretamente $F'(x) = G'(x) = f(x)$ [suponiendo que $f(x)$ sea continua en el intervalo de integración]. Es decir, tanto $F(x)$ como $G(x)$ son primitivas de $f(x)$. En la Sección 5.8 vimos que las primitivas de una función dada difieren sólo en una constante. Se puede comprobar esto para el caso de $F(x)$ y $G(x)$, concretamente,

$$F(x) = \int_a^x f(u)\, du = \int_a^b f(u)\, du + \int_b^x f(u)\, du = C + G(x)$$

siendo C una constante, que equivale al número $\int_a^b f(u)\, du$.

La primitiva general de una función $f(x)$ es $F(x) + C$, siendo $F'(x) = f(x)$ y C una constante. Por tanto, podemos ver que $C + \int_a^x f(u)\, du$ es la primitiva general de $f(x)$. Utilizaremos la notación $\int f(x)\, dx$ para indicar tanto la primitiva general de $f(x)$ como la función $C + \int_a^x f(u)\, du$, es decir,

$$\int f(x)\, dx = C + \int_a^x f(u)\, du \tag{6.13}$$

Denominaremos a $\int f(x)\, dx$ **integral indefinida**. Por tanto, la primera parte del TFC dice que las integrales indefinidas y las primitivas son la misma cosa.

Cuando se escribe $\int_a^x f(u)\,du$ se utiliza una letra distinta de x en el integrando porque x ya aparece en el límite de integración superior. Sin embargo, en la notación simbólica $\int f(x)\,dx$ se utiliza x. Esto se interpreta como se indica en la Ecuación (6.13). La notación $\int f(x)\,dx$ es una abreviatura conveniente de $C + \int_a^x f(u)\,du$. La elección del valor de a para el límite de integración inferior del miembro derecho de la Ecuación (6.13) no es importante, ya que las diferentes integrales indefinidas de la misma función $f(x)$ se diferencian sólo en una constante aditiva que se puede incorporar a la constante C.

Los Ejemplos 6-8 muestran cómo calcular integrales indefinidas.

Ejemplo 6 Calcule $\int x^4\,dx$.

Solución

Se necesita encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = x^4$. La solución es

$$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

siendo C una constante. Se puede comprobar que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right) = x^4$$ ◀

Ejemplo 7 Calcule $\int (e^x + \operatorname{sen} x)\,dx$.

Solución

Se necesita encontrar una primitiva de $f(x) = e^x + \operatorname{sen} x$. Como

$$\frac{d}{dx}(e^x - \cos x) = e^x - (-\operatorname{sen} x) = e^x + \operatorname{sen} x$$

se obtiene que

$$\int (e^x + \operatorname{sen} x)\,dx = e^x - \cos x + C$$ ◀

Cuando se calcula la integral indefinida $\int f(x)\,dx$, se desea conocer la primitiva general de $f(x)$. Por eso se ha añadido la constante C en los dos ejemplos anteriores.

Ejemplo 8 Demuestre que

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{para } x \neq 0$$

Solución

Como en el miembro derecho aparece el valor absoluto de x, dividiremos la demostración en dos partes, para $x \geqslant 0$ y para $x \leqslant 0$. Conviene recordar que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geqslant 0 \\ -x & \text{para } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Como $\ln x$ no está definido en $x = 0$, consideraremos los casos $x > 0$ y $x < 0$.

(i) $x > 0$: como $\ln|x| = \ln x$ cuando $x > 0$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \quad \text{para } x > 0$$

(ii) $x < 0$: como $\ln|x| = \ln(-x)$ cuando $x < 0$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C \quad \text{para } x < 0$$

Combinando (i) y (ii), se obtiene

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{para } x \neq 0$$ ◀

Cuando se presentaron las funciones exponencial y logarítmica en las Secciones 4.6 y 4.7, tuvimos que recurrir a la calculadora para convencernos de que e^x y $\ln x$ eran de hecho las funciones que conocíamos de estudios anteriores. Para dar una definición matemáticamente rigurosa de esas funciones, generalmente se empieza *definiendo* $\ln x$ como $\int_1^x \frac{1}{u}du$ y obteniendo después las reglas algebraicas de $\ln x$ a partir de esta representación integral. La función exponencial e^x se define como la función inversa de $\ln x$, y el número e se define de forma que $\ln e = 1$. Esta definición es entonces consistente con la definición dada en la Sección 4.6.

Hemos visto que para evaluar integrales indefinidas, hay que calcular primitivas. En la Tabla 6.1 se proporciona una lista de integrales indefinidas (es una versión ligeramente ampliada de la tabla de primitivas de la Sección 5.8). Los Ejemplos 9-10 muestran cómo utilizar esta tabla en el cálculo de integrales indefinidas.

Ejemplo 9 Evalúe

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x - 1}\,dx$$

Solución

Trabajaremos primero con el integrando. Utilizando el hecho de que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se obtiene

$$\frac{1}{\text{sen}^2 x - 1} = -\frac{1}{\cos^2 x} = -\sec^2 x$$

Tabla 6.1 Lista de integrales indefinidas

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$	$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\int \tan x\,dx = \ln\|\sec x\| + C$	$\int \cot x\,dx = -\ln\|\csc x\| + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{sen}^{-1} x + C$

por tanto,

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x - 1}\, dx = -\int \sec^2 x\, dx = -\tan x + C \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 10 Evalúe

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$$

Solución

Modificaremos en primer lugar el integrando. Bien por división de polinomios, o mediante las siguientes modificaciones algebraicas, se obtiene que

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Por tanto, utilizando la tabla de integrales indefinidas,

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \left[1 - \frac{1}{x^2+1}\right] dx = x - \tan^{-1} x + C \quad \blacktriangleleft$$

6.2.3 El teorema fundamental del cálculo (Parte II)

La primera parte del teorema fundamental del cálculo sólo permite calcular integrales de la forma $\int_a^x f(u)\, du$ a falta de una constante aditiva, por ejemplo,

$$F(x) = \int_1^x u^2\, du = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Para evaluar la integral definida $F(2) = \int_1^2 u^2\, du$, que representa el área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 2$, se necesitaría conocer el valor de la constante. Este valor lo proporciona la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, que permite evaluar integrales indefinidas. El siguiente cálculo sirve para mostrar cómo se determina la constante.

En la última subsección vimos que si se hace

$$G(x) = \int_a^x f(u)\, du$$

entonces $G(x)$ es la primitiva de $f(x)$. Además, si $F(x)$ es otra primitiva de $f(x)$, entonces $G(x)$ y $F(x)$ se diferencian sólo en una constante aditiva. Es decir,

$$G(x) = F(x) + C$$

siendo C una constante. Sea

$$G(a) = \int_a^a f(u)\, du = 0$$

Entonces,

$$0 = G(a) = F(a) + C$$

lo que implica que $C = -F(a)$ y, por tanto, $G(x) = F(x) - F(a)$, o, utilizando la representación integral de $G(x)$,

$$\int_a^x f(u)\, du = F(x) - F(a)$$

Si se hace $x = b$, entonces

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b) - F(a)$$

Esta fórmula permite evaluar integrales definidas y es el contenido de la segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

Teorema fundamental del cálculo (parte II) Suponga que f es una función continua en $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

¿Cómo se utiliza este teorema? Para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, siendo f continua en $[a, b]$, primero hay que calcular una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ (cualquier primitiva sirve), y después calcular $F(b) - F(a)$. El número resultante será igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. La tabla de integrales indefinidas de la subsección anterior servirá de ayuda para obtener las primitivas. Nótese que una integral indefinida es una función, mientras que una integral definida es simplemente un número.

Uso del TFC (parte II) para evaluar integrales definidas

Ejemplo 11 Evalúe $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x)\,dx$.

Solución

Nótese que $f(x) = x^2 - 3x$ es continua en $[-1, 2]$. Se necesita obtener una primitiva de $f(x) = x^2 - 3x$. Por ejemplo, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es una primitiva de $f(x)$ ya que $F'(x) = f(x)$. Hay que evaluar entonces $F(2) - F(-1)$:

$$F(2) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 = \frac{8}{3} - 6 = -\frac{10}{3}$$

$$F(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{6}$$

Se obtiene $F(2) - F(-1) = -\frac{10}{3} - (-\frac{11}{6}) = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$ y, por tanto,

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x)\,dx = F(2) - F(-1) = -\frac{3}{2}$$

En el cálculo anterior, se escogido la primitiva más simple, es decir, aquella en la que la constante C es igual a 0. Se podría haber elegido cualquier otra cons tante $C \neq 0$, y el resultado hubiera sido el mismo. Veamos por qué. La primitiva general de $f(x)$ es $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$, que se puede escribir como $G(x) = F(x) + C$, siendo $F(x)$ la primitiva utilizada anteriormente. Entonces, si se utiliza ahora $G(x)$ para calcular la integral, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^2 - 3)\,dx &= G(2) - G(-1)\\ &= [F(2) + C] - [F(-1) + C] = F(2) - F(-1)\end{aligned}$$

que es la misma respuesta que antes ya que la constante C se cancela. Por tanto, vemos que se puede utilizar la primitiva más simple (aquella en la que $C = 0$), y eso haremos a partir de ahora. ◀

Ejemplo 12 Evalúe $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución

Nótese que $\operatorname{sen} x$ es continua el intervalo $[0, \pi]$. Como $F(x) = -\cos x$ es una primitiva de $\operatorname{sen} x$,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$ ◀

Ejemplo 13 Evalúe

$$\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$$

Solución

Nótese que $\frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $[-5, -1]$. $\ln x$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$. Se utiliza esta primitiva para calcular la integral y se obtiene

$$\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = (\ln|-1|) - (\ln|-5|) = -\ln 5$$

ya que $\ln|-1| = \ln 1 = 0$ y $|-5| = 5$. ◀

Presentaremos a continuación notación adicional. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se escribe

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo,

$$\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\,]_{-5}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-5|$$

La notación $F(x)\,]_a^b$ indica que se evalúa la primitiva $F(x)$ en b y a, respectivamente, y se calcula la diferencia $F(b) - F(a)$.

Ejemplo 14 Evalúe

$$\int_0^3 2xe^{x^2}\, dx$$

Solución

Observé que $2xe^{x^2}$ es continua en el intervalo $[0, 3]$ y que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de $f(x) = 2xe^{x^2}$, ya que aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$F'(x) = e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}x^2\right) = e^{x^2}2x$$

Por tanto,

$$\int_0^3 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2}\Big]_0^3 = e^9 - e^0 = e^9 - 1$$ ◀

Ejemplo 15 Evalúe

$$\int_1^4 \frac{2x^2 - 3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Solución

El integrando es continuo en [1, 4]. Primero se simplifica el integrando:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2x^{3/2} - 3\sqrt{x} + 1$$

Por tanto, una primitiva de $f(x)$ es

$$F(x) = 2 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x = \frac{4}{5} x^{5/2} - 2x^{3/2} + x$$

lo que se puede comprobar derivando $F(x)$. Ahora se puede calcular la integral:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{2x^2 - 3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx &= \frac{4}{5} x^{5/2} - 2x^{3/2} + x \Big]_1^4 \\ &= \left(\frac{4}{5} \cdot 4^{5/2} - 2 \cdot 4^{3/2} + 4\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 1^{5/2} - 2 \cdot 1^{3/2} + 1\right) \\ &= \left(\frac{4}{5} \cdot 32 - (2)(8) + 4\right) - \left(\frac{4}{5} - 2 + 1\right) \\ &= \frac{68}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{69}{5}\end{aligned}$$

◀

Obtención de un integrando

Ejemplo 16 Suponga que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \cos(2x) + a$$

siendo a una constante. Calcule $f(x)$ y a.

Solución

Resolveremos el problema en dos pasos. Primero, utilizaremos el TFC, parte I, para deducir que

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)\, dt = f(x)$$

Por tanto,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [\cos(2x) + a] = -2\operatorname{sen}(2x)$$

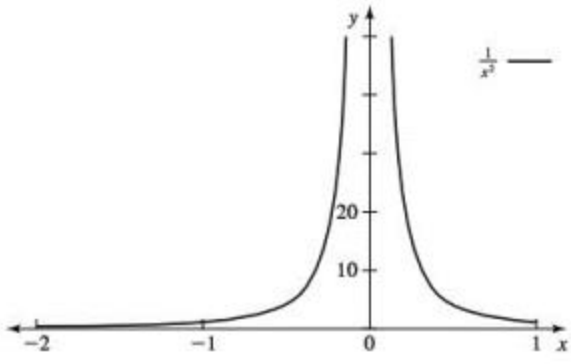
En el segundo paso, se utiliza el TFC, parte II, para determinar a. Concretamente,

$$\begin{aligned}\int_0^x (-2\operatorname{sen}(2t))\, dt &= \cos(2t)\,]_0^x \\ &= \cos(2x) - \cos(0) = \cos(2x) - 1\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $a = -1$. ◀

Podríamos preguntarnos por qué siempre se comprueba que el integrando sea continuo en el intervalo comprendido entre el límite superior y el límite inferior de integración. Se presenta a continuación un ejemplo de lo que puede ocurrir cuando el integrando es discontinuo. Intentemos calcular

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$



◀ **Figura 6.26**
Gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$ entre $x = -2$ y $x = 1$. La función es discontinua en $x = 0$

Una primitiva de $f(x) = 1/x^2$ puede ser $F(x) = -\frac{1}{x}$. Se obtiene que $F(1) = -1$ y $F(-2) = \frac{1}{2}$. Al calcular $F(1) - F(-2)$, se obtiene $-\frac{3}{2}$. Obviamente, ese valor no es igual a $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ ya que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es positiva en el intervalo $[-2, 1]$ (*véase* la Figura 6.26) y, por tanto, la integral de $f(x)$ entre -2 y 1 no puede ser negativa. La función $f(x)$ es discontinua en $x = 0$ (tiene una asíntota vertical en $x = 0$). Por tanto, la segunda parte del teorema fundamental del cálculo no se puede aplicar. Posteriormente, en la Sección 7.4, aprenderemos cómo tratar con estas discontinuidades. En cualquier caso, antes de calcular una integral, hay que comprobar siempre si el integrando es continuo entre los límites de integración.

6.2.4. Problemas

(6.2.1)

En los Problemas 1-14, calcule $\frac{dy}{dx}$.

1. $y = \int_0^x u^2\, du$
2. $y = \int_0^x (1 - u^3)\, du$
3. $y = \int_0^x (4u - 3)\, du$
4. $y = \int_0^x (1 + u^4)\, du$
5. $y = \int_0^x \sqrt{2 + u}\, du,\ x > 0$
6. $y = \int_0^x \sqrt{1 + u^2}\, du,\ x > 0$
7. $y = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u}\, du,\ x > 0$
8. $y = \int_0^x \sqrt{\tan^2 u + 2}\, du,\ x > 0$
9. $y = \int_3^x ue^{4u}\, du$
10. $y = \int_1^x ue^{-u^2}\, du$
11. $y = \int_{-2}^x \frac{1}{u + 3}\, du,\ x > -2$
12. $y = \int_{-2}^x \frac{1}{1 + u^2}\, du$
13. $y = \int_{\pi/2}^x \operatorname{sen}(u^2 + 1)\, du$
14. $y = \int_{\pi/4}^x \cos^2(u - 3)\, du$

En los Problemas 15-38, utilice la regla de Leibniz para calcular $\frac{dy}{dx}$.

15. $y = \int_0^{3x} (1 + t)\, dt$
16. $y = \int_0^{2x-1} (t^2 - 1)\, dt$
17. $y = \int_0^{1-4x} (2t^2 + 1)\, dt$
18. $y = \int_0^{3x+2} (1 + t^3)\, dt$
19. $y = \int_4^{x^2} \sqrt{t}\, dt,\ x > 0$
20. $y = \int_2^{x^2-2} \sqrt{3 + u}\, du,\ x > 0$
21. $y = \int_2^{3x} (1 + e^t)\, dt$
22. $y = \int_0^{2x^2-1} (e^{-2t} + 2)\, dt$

23. $y = \int_1^{3x^2+x} (1 + te^t)\,dt$

24. $y = \int_2^{\ln x} e^{-t}\,dt,\ x > 0$

25. $y = \int_x^3 (1 + t)\,dt$

26. $y = \int_x^5 (1 + e^t)\,dt$

27. $y = \int_{2x}^3 (1 + \operatorname{sen} t)\,dt$

28. $y = \int_{2x^2}^6 (1 + t^2)\,dt$

29. $y = \int_x^5 \frac{1}{u^2}\,du,\ x > 0$

30. $y = \int_{x^2}^3 \frac{1}{1+t}\,dt,\ x > 0$

31. $y = \int_{x^2}^1 \sec t\,dt,\ -1 < x < 1$

32. $y = \int_{1+x^2}^2 \tan t\,dt$

33. $y = \int_x^{2x} (1 + t^2)\,dt$

34. $y = \int_{-x}^x \tan u\,du,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$

35. $y = \int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt,\ x > 0$

36. $y = \int_{x^3}^{x^4} \ln(1 + t)\,dt,\ x > 0$

37. $y = \int_{2-x^2}^{x+x^3} \operatorname{sen} t\,dt$

38. $y = \int_{1+x^2}^{x^3-2x} \cos t\,dt$

(6.2.2)

En los Problemas 39-96, calcule las integrales indefinidas.

39. $\int (1 - x^2)\,dx$

40. $\int (x^3 - 4)\,dx$

41. $\int (3x^2 - 2x)\,dx$

42. $\int (4x^3 - 5x^2)\,dx$

43. $\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\right)dx$

44. $\int \left(\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - 1\right)dx$

45. $\int \frac{2x^2 - x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int \frac{x^2 + 2x}{2\sqrt{x}}\,dx$

47. $\int x^2\sqrt{x}\,dx$

48. $\int (1 + x^3)\sqrt{x}\,dx$

49. $\int (x^{7/2} + x^{2/7})\,dx$

50. $\int (x^{3/5} + x^{5/3})\,dx$

51. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

52. $\int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

53. $\int (x - 1)(x + 1)\,dx$

54. $\int (x - 1)^2\,dx$

55. $\int (x - 2)(3 - x)\,dx$

56. $\int (2x + 3)^2\,dx$

57. $\int e^{2x}\,dx$

58. $\int 2e^{3x}\,dx$

59. $\int 3e^{-x}\,dx$

60. $\int 2e^{-x/3}\,dx$

61. $\int xe^{-x^2/2}\,dx$

62. $\int e^x(1 - e^{-x})\,dx$

63. $\int \operatorname{sen}(2x)\,dx$

64. $\int \operatorname{sen}(1 - x)\,dx$

65. $\int \cos(3x)\,dx$

66. $\int \cos(2 - 4x)\,dx$

67. $\int \sec^2(3x)\,dx$

68. $\int \csc^2(2x)\,dx$

69. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

70. $\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$

71. $\int \tan(2x)\,dx$

72. $\int \cot(3x)\,dx$

73. $\int (\sec x + \tan x)\,dx$

74. $\int (\cot x - \csc^2 x)\,dx$

75. $\int \frac{4}{1+x^2}\,dx$

76. $\int \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$

77. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

78. $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

79. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$

80. $\int \frac{1}{x-1}\,dx$

81. $\int \frac{x-1}{x}\,dx$

82. $\int \frac{2x-3}{x}\,dx$

83. $\int \frac{x+3}{x^2-9}\,dx$

84. $\int \frac{x+4}{x^2-16}\,dx$

85. $\int \frac{3-x}{x^2-9}\,dx$

86. $\int \frac{4-x}{x^2-16}\,dx$

87. $\int \frac{5x^2}{x^2+1}\,dx$

88. $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$

89. $\int 3^x\,dx$

90. $\int 2^x\,dx$

91. $\int 2^{-x}\,dx$

92. $\int 4^{-x}\,dx$

93. $\int (x^2 + 2^x)\,dx$

94. $\int (x^{-3} + 3^{-x})\,dx$

95. $\int (\sqrt{x} + \sqrt{e^x})\,dx$

96. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)dx$

(6.2.3)

En los Problemas 97-122, calcule las integrales definidas.

97. $\int_2^4 (3 - 2x)\,dx$

98. $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 1)\,dx$

99. $\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})\,dx$

100. $\int_1^2 x^{5/2}\,dx$

101. $\int_1^8 x^{-2/3}\,dx$

102. $\int_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

103. $\int_0^2 (2t - 1)(t + 3)\,dt$

104. $\int_{-1}^2 (4 - 3t)^2\,dx$

105. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x)\,dx$

106. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

107. $\int_0^{\pi/8} \sec^2(2x)\,dx$

108. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\,dx$

109. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

110. $\int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{4}{1+x^2}\,dx$

111. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

112. $\int_{-1}^1 \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

113. $\int_0^{\pi/6} \tan(2x)\,dx$

114. $\int_{\pi/20}^{\pi/15} \sec(5x)\tan(5x)\,dx$

115. $\int_{-1}^0 e^{3x}\,dx$

116. $\int_0^2 2te^{t^2}\,dt$

117. $\int_{-1}^1 |x|\,dx$

118. $\int_{-1}^1 e^{-|s|}\,ds$

119. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

120. $\int_2^3 \frac{1}{z+1}\,dz$

121. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-u}\,du$

122. $\int_2^3 \frac{2}{t-1}\,dt$

123. Utilice la regla de l'Hôpital para calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$$

124. Utilice la regla de l'Hôpital para calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h e^x\,dx$$

125. Suponga que

$$\int_0^x f(t)\,dt = 2x^2$$

Calcule $f(x)$.

126. Suponga que

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\tan(2x)$$

Calcule $f(x)$.

6.3 APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

En esta sección, se presentarán diversas aplicaciones de las integrales. En la primera aplicación, revisaremos la interpretación de las integrales como áreas; la segunda interpretará las integrales como cambio acumulativo (o neto); la tercera permitirá calcular promedios utilizando integrales y, finalmente, utilizaremos las integrales para calcular volúmenes. En todas las aplicaciones veremos que las integrales se pueden interpretar como «suma de muchos pequeños incrementos».

6.3.1 Áreas

La primera aplicación ya debe resultarnos familiar. Si f es la función no negativa y continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

representa el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ entre a y b, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje x entre a y b. En todos los ejemplos anteriores, uno de los límites de la región cuya área deseábamos conocer era el eje x. Comentaremos ahora cómo calcular el área geométrica entre dos curvas arbitrarias. Hay que resaltar que se desean calcular áreas geométricas, es decir, las áreas que se calcule en esta subsección serán siempre positivas.

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Se desea calcular el área comprendida entre las gráficas de f y de g. Comenzaremos con un ejemplo simple (*véase* la Figura 6.27). Se supone por el momento que

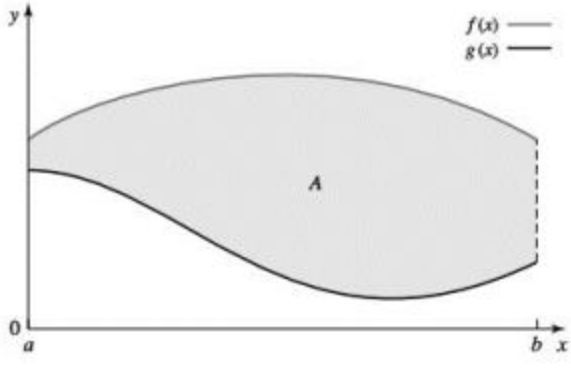


Figura 6.27
Cálculo del área entre dos curvas

tanto f como g son no negativas en $[a, b]$ y que $f(x) \geq g$ en $[a, b]$. La Figura 6.27 permite observar que

$$A = \begin{bmatrix} \text{área entre} \\ f \text{ y el eje } x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{área entre} \\ g \text{ y el eje } x \end{bmatrix}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Utilizando la Propiedad (4) de la Subsección 6.1.3, la expresión anterior se puede escribir así

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

La fórmula anterior se ha obtenido bajo el supuesto de que tanto f como g son no negativas en el intervalo $[a, b]$. Demostraremos ahora que este supuesto no es necesario. Para ello, se deducirá una fórmula para obtener el área comprendida entre dos curvas a partir de las sumas de Riemann.

Se supone que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. El área comprendida entre las dos curvas se aproximará con rectángulos. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud Δx. Es decir, se hace $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ con $\Delta x = x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$. El k-ésimo subintervalo está por tanto comprendido entre x_{k-1} y x_k. Para calcular las alturas de los rectángulos de la aproximación utilizaremos los extremos izquierdos de los intervalos. Observando la Figura 6.28, se puede ver que la altura del k-ésimo rectángulo es igual a $f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})$. Por tanto

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})]\,\Delta x$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Si f y g son continuas en el intervalo $[a, b]$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el área de la región comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ desde a hasta b es igual a

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

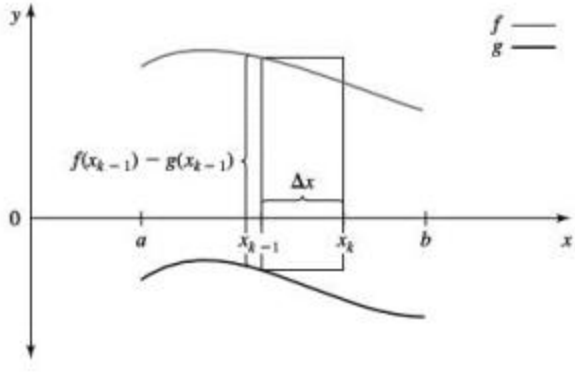
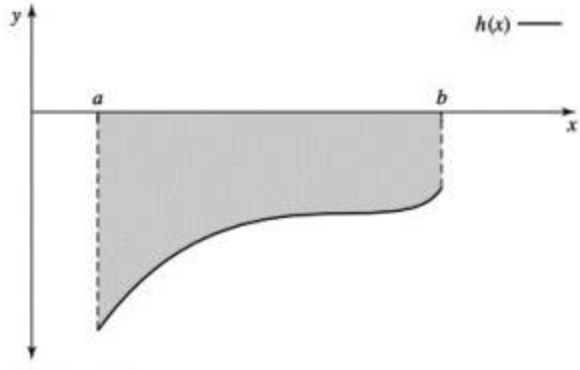


Figura 6.28
El k-ésimo rectángulo entre x_{k-1} y x_k



▲ **Figura 6.29**
La integral definida $\int_a^b h(x)\,dx$ representa un área con signo. En este caso es negativa

Antes de considerar algunos ejemplos, resaltaremos de nuevo que esta fórmula del área siempre produce un número no negativo ya que calcula el área geométrica. Para comparar con el concepto de área con signo, consideremos una función $h(x)$ en el intervalo $[a, b]$, con $h(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$ (*véase* la Figura 6.29). La integral definida $\int_a^b h(x)\,dx$ representa un área con signo y en este caso es negativa. De forma más precisa, $\int_a^b h(x)\,dx$ es el negativo del área geométrica de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de $h(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Esto es consistente con nuestra definición de área y se puede ver como sigue. La región de interés está limitada por las dos curvas $y = 0$ e $y = h(x)$. Como $h(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, la fórmula del área resulta

$$\text{Área} = \int_a^b [0 - h(x)]\,dx = -\int_a^b h(x)\,dx$$

que es un número positivo.

Al calcular el área de la región comprendida entre dos curvas, es conveniente dibujar siempre dichas curvas. Esto servirá de ayuda para formular las integrales apropiadas.

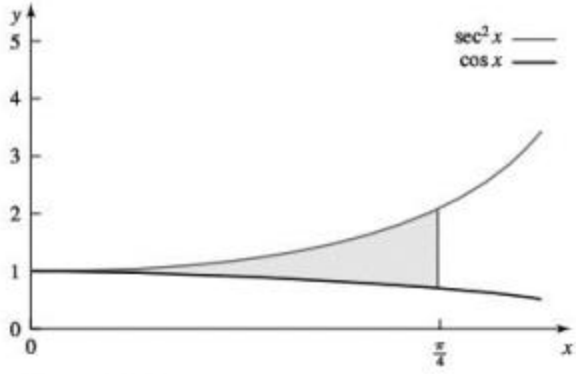
Ejemplo 1 Calcule el área comprendida entre las curvas $y = \sec^2 x$ e $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$.

Solución

Se dibujan primero las curvas que limitan la región, como se muestran en la Figura 6.30. Puede verse que tanto $\sec^2 x$ como $\cos x$ son continuas en el intervalo $[0, \pi/4]$ y que $\sec^2 x \geqslant \cos x$ en dicho intervalo. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^{\pi/4} [\sec^2 x - \cos x]\,dx \\
&= \tan x - \operatorname{sen} x]_0^{\pi/4} \\
&= \left(\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - \operatorname{sen} 0) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - (0 - 0) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

◀



▲ **Figura 6.30**
La región del Ejemplo 1

Ejemplo 2 Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = (x-1)^2$ e $y = -x + 2$.

Solución

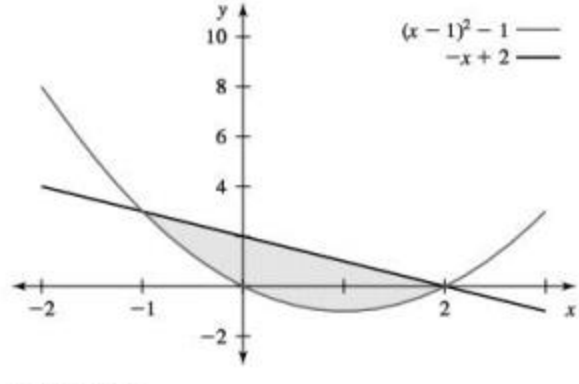
La Figura 6.31 muestra las curvas que delimitan la región. Para calcular los puntos donde se cortan las curvas hay que resolver

$$(x-1)^2 - 1 = -x + 2$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 = -x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$

Por tanto,

$$x = -1 \quad \text{y} \quad x = 2$$

son las coordenadas x de los puntos de intersección. Debe notarse que tanto $y = (x-1)^2 - 1$ como $y = -x + 2$ son continuas en el intervalo $[-1, 2]$. Como



▲ **Figura 6.31**
La región del Ejemplo 2

$-x+2 \geqslant (x-1)^2 - 1$ para $x \in [-1, 2]$, el área comprendida en la región es

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} [(-x+2) - ((x-1)^2 - 1)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [-x + 2 - x^2 + 2x - 1 + 1]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [-x^2 + x + 2]\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + (2)(2)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + (2)(-1)\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$ ◀

Ejemplo 3 Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, y el eje x.

Solución

Primero se dibujan en la Figura 6.32 las dos curvas. Puede verse que $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ se cortan. Para calcular el punto de intersección se resuelve

$$x - 2 = \sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros se obtiene

$$(x-2)^2 = (\sqrt{x})^2 \quad \text{y por tanto} \quad x^2 - 4x + 4 = x$$

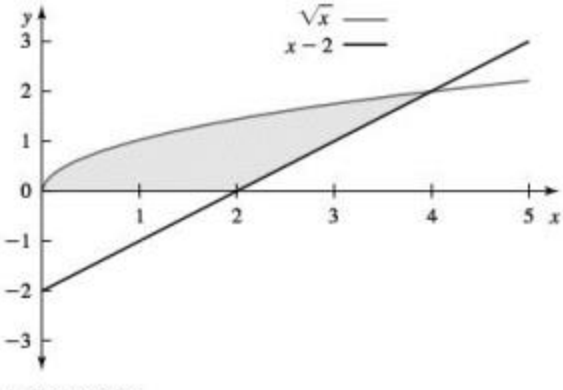
o

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Si se factoriza la ecuación,

$$(x-4)(x-1) = 0$$

con lo que se obtienen las soluciones $x = 4$ y $x = 1$. Como al elevar al cuadrado una ecuación se pueden introducir soluciones adicionales, es necesario comprobar si las soluciones satisfacen la ecuación $x - 2 = \sqrt{x}$. Cuando $x = 4$, se obtiene



▲ **Figura 6.32**
La región del Ejemplo 3

$4 - 2 = \sqrt{4}$, que es cierto. Cuando $x = 1$, se obtiene $1 - 2 = \sqrt{1}$, que es falso. Por tanto $x = 4$ es la única solución.

La gráfica de $y = x - 2$ corta al eje x en $x = 2$, para calcular el área, es necesario dividir la integral en dos partes, ya que las curvas que delimitan la región por su parte inferior están formada por dos tramos, concretamente, el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 2$ y la recta $y = x = -2$ desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Podemos ver en la gráfica que todas las curvas del límite son continuas en sus respectivos intervalos. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 [\sqrt{x} - (x-2)]\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} + \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} - \frac{1}{2}\cdot 16 + 8 - \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} + 2 - 4 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

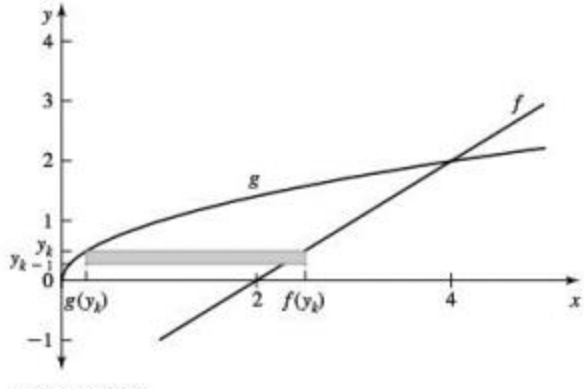
En el ejemplo anterior, ha sido necesario dividir la integral en dos partes ya que el límite inferior del área está formado por dos curvas diferentes que determinan las alturas de los rectángulos de aproximación de la integral de Riemann. Hay que recordar que los rectángulos se obtienen mediante una partición del eje x. Algunas veces es más conveniente realizar la partición en el eje y. La Figura 6.33 ilustra este caso para la región del Ejemplo 3. Se realiza una partición del intervalo $[0, 2]$ del eje y en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud Δy. En este caso, es necesario expresar las curvas que limitan la región en función de y. En el caso del Ejemplo 3, la curva del límite derecho es $x = f(y) = y + 2$ y la del límite izquierdo es $x = g(y) = y^2$.

Ahora, se hace $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 2$, siendo $y_k - y_{k-1} = \Delta y$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Como se muestra en la Figura 6.33, el k-ésimo rectángulo tiene una anchura de $y_k - y_{k-1}$ y una altura de $f(y_k) - g(y_k)$. Por tanto, el área del k-ésimo rectángulo es

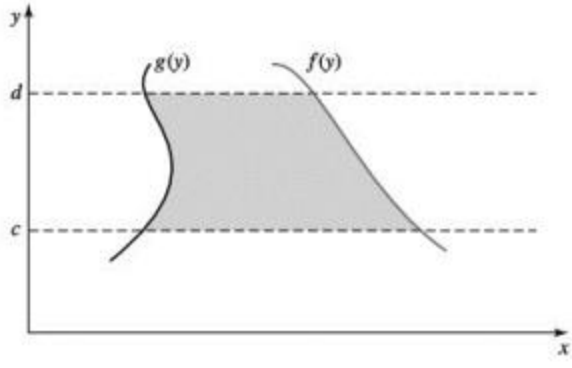
$$[f(y_k) - g(y_k)]\Delta y$$

Si se realiza la suma desde $k = 1$ hasta $k = n$ y se hace $\Delta y \to 0$, se obtiene

$$\lim_{\Delta y \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(y_k) - g(y_k)]\Delta y = \int_0^2 [f(y) - g(y)]\,dy$$



▲ **Figura 6.33**
Área entre $f(y)$ y $g(y)$ en el Ejemplo 3, junto con un rectángulo de la aproximación



▲ **Figura 6.34**
Área entre $f(y)$ y $y(y)$

Como cada rectángulo está limitado por las mismas dos curvas, no hay necesidad de dividir la integral. Utilizando $f(y) = y + 2$ y $g(y) = y^2$, se obtiene el área total

$$\text{Área} = \int_0^2 (y + 2 - y^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\Big]_0^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

que es el mismo resultado del Ejemplo 3.

Para resumir el caso general, como ilustra la Figura 6.34, supongamos que una región está limitada por $x = f(y)$ y $x = g(y)$, *con* $g(y) \leqslant f(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$. Es decir, $f(y)$ está a la derecha de $g(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Entonces el área de la región sombreada se expresa mediante la siguiente fórmula

$$\text{Área} = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

6.3.2 Cambio acumulativo

Considere una población cuyo tamaño en el instante t, $t \geqslant 0$, es $N(t)$ y cuya dinámica se expresa mediante el problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = f(t) \quad \text{con } N(0) = N_0$$

para alguna función $f(t)$ que es continua para $t \geqslant 0$. Para resolver este problema de valor inicial, hay que encontrar una primitiva de $f(t)$ y determinar la constante de forma que $N(0) = N_0$. Utilizando la Expresión (6.13) (es decir, el TFC, parte I), se obtiene que

$$N(t) = \int_0^t f(u)\,du + C$$

es la primitiva general de $N(t)$. Se ha escogido 0 como límite de integración inferior por motivos de conveniencia ya que así resulta una expresión simple de la constante cuando se tiene en cuenta la condición inicial. Concretamente, con

$$N(0) = \int_0^0 f(u)\,du + C = C$$

se deduce que $C = N(0) = N_0$. Por tanto,

$$N(t) = N_0 + \int_0^t f(u)\,du$$

o

$$N(t) - N_0 = \int_0^t f(u)\,du \tag{6.14}$$

Como $f(u) = dN/du$ y $N(0) = N_0$, se puede escribir

$$N(t) - N(0) = \int_0^t \frac{dN}{du}\,du$$

lo que nos permite interpretar la integral definida $\int_0^t \frac{dN}{du}\,du$ como el **cambio acumulativo** o **neto** en el tamaño de la población entre los instantes 0 y t, ya que es la «suma» de los cambios instantáneos acumulados con el tiempo. Es decir,

$$\begin{bmatrix}\text{cambio acumulativo}\\ \text{en } [0,t]\end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix}\text{velocidad instantánea}\\ \text{de cambio en el instante } u\end{bmatrix} du$$

Presentaremos a continuación otro ejemplo en el que la integral se puede interpretar como el cambio acumulativo de una cantidad. Recuérdese que la velocidad es la tasa de variación instantánea de la distancia. Es decir, si una partícula se mueve en línea recta, y se denomina $s(t)$ a la posición de la partícula en el instante t, con $s(0) = s_0$, y se denomina $v(t)$ a la velocidad en el instante t, entonces la relación entre $s(t)$ y $v(t)$ es

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \quad \text{para } t > 0 \text{ con } s(0) = s_0$$

Para resolver este problema de valor inicial, hay que obtener una primitiva que cumpla que $s(0) = s_0$. Es decir,

$$s(t) = \int_0^t v(u)\,du + C$$

con

$$s_0 = s(0) = \int_0^0 v(u)\,du + C = 0 + C$$

lo que implica que $C = s_0$. Por tanto,

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(u)\,du$$

o, con $s(0) = s_0$,

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(u)\,du$$

De nuevo, el cambio acumulativo en la distancia, $s(t) - s(0)$, se puede representar como la «suma» de cambios instantáneos.

6.3.3 Valores medios

Se mide metro a metro la concentración de nitrógeno en el suelo en g/m^3, en una sección transversal de tundra húmeda y se obtienen los siguientes datos.

Distancia al origen [m]	1	2	3	4	5
Concentración [g/m^3]	589.3	602.7	618.5	667.2	641.2
Distancia al origen [m]	6	7	8	9	10
Concentración [g/m^3]	658.3	672.8	661.2	652.3	669.8

Si se denomina $c(x)$ a la concentración a una distancia x del origen, entonces la concentración media, denominada $\bar{c}$ (que se lee «c barra»), es la media aritmética

$$\bar{c} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} c(k) = 643.3 \text{ g/m}^3$$

De forma más general, para calcular la concentración media entre dos puntos a y b a lo largo de una sección transversal, se mide la concentración a intervalos iguales. Para formular esto matemáticamente, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y se mide la concentración, por ejemplo, en el extremo derecho de cada subintervalo. Si se denomina $c(x_k)$ a la concentración en la posición x_k, la concentración media $\bar{c}$ es entonces

$$\bar{c} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c(x_k)$$

Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, se puede escribir $n = \frac{b-a}{\Delta x}$. Por tanto,

$$\bar{c} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} c(x_k)\,\Delta x$$

Si se hace crecer el número de subintervalos ($n \to \infty$), entonces la longitud de cada subintervalo tiende a 0 ($\Delta x \to 0$) y

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c(x_k)\,\Delta x \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b c(x)\,dx\end{aligned}$$

Es decir, la concentración media se puede expresar como la integral de $c(x)$ entre a y b, dividida por la longitud del intervalo $[a, b]$.

Suponga que $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$. El valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ es

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(a)\,dx$$

Ejemplo 4 Calcule el valor medio de $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución

Utilizaremos la fórmula para el cálculo de valores medios. Nótese que $f(x) = 4 - x^2$ es continua en el intervalo $[-2, 2]$. Entonces, el valor medio de f en el intervalo $[-2, 2]$ es

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \frac{1}{4}\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

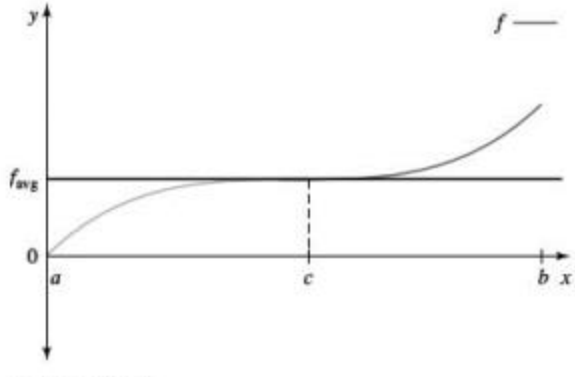
$$= \frac{1}{4}\left[8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{3} = \frac{8}{3}$$

El siguiente teorema dice algo más sobre el valor de f_{avg}.

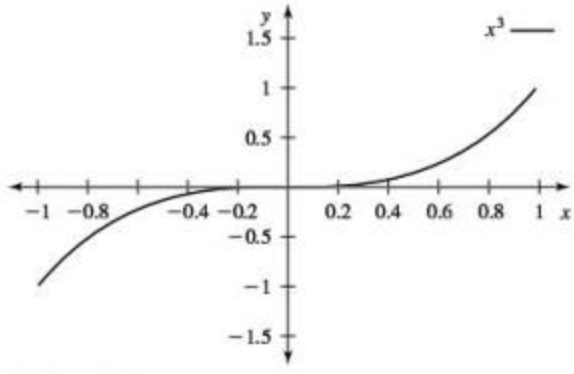
Teorema del valor medio para integrales definidas Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Existe un número $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Es decir, cuando se calcula el valor medio de una función que es continua en el intervalo $[a, b]$, existe un número c tal que $f(c) = f_{\text{avg}}$. Esto debe resultar obvio cuando se observa la gráfica de una función f y el valor f_{avg}. Por simplicidad, supongamos que $f(x) \geq 0$. Como $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x, y $f_{\text{avg}}(b - a)$ es igual al área de un rectángulo de altura f_{avg} y anchura $b - a$, y como las dos áreas son iguales, la recta horizontal $y = f_{\text{avg}}$ debe cortar a la gráfica de $f(x)$ en algún punto del intervalo $[a, b]$ (*véase* la Figura 6.35). La coordenada x de este punto de intersección es el valor c del teorema del valor medio para integrales definidas (nótese que ese número puede no ser único). Se puede construir un argumento similar sin necesidad de suponer que $f(x)$ tiene que ser positiva. En ese caso, «área» debe ser sustituido por «área con signo». La demostración de este teorema es corta, y se proporcionará al final de esta subsección.



▲ **Figura 6.35**
Ilustración del valor medio de una función $\int_a^b f(x)\, dx = f_{\text{avg}}(b - a)$



▲ **Figura 6.36**
Gráfica de $y = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. El valor medio es 0

Ejemplo 5 Calcule el valor medio de $y = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$, y determine el valor de $x \in [-1, 1]$ tal que el valor de $f(x)$ sea igual a su valor medio.

Solución

La función $f(x) = x^3$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{8}(1^4 - (-1)^4) = 0$$

La gráfica de $y = x^3$ (Figura 6.36) es simétrica respecto al origen, lo que explica por qué el valor medio es 0. Como $x^3 = 0$ para $x = 0$, la función $f(x)$ toma su valor medio en $x = 0$. ◀

Ejemplo 6 La velocidad del agua en un canal varía considerablemente con la profundidad. Debido al rozamiento, la velocidad es nula en el fondo y en los lados del canal, y es máxima cerca de la superficie del agua. La velocidad media de una corriente es útil en la caracterización de los ríos. Una forma de obtener este valor medio sería medir la velocidad de la corriente a varias profundidades en una sección vertical y después promediar estos valores. Sin embargo, en la práctica, se emplea un método mucho más simple: la velocidad medida al 60% de la profundidad desde la superficie es un valor muy cercano a la velocidad media. Explique por qué es posible que una medida a una profundidad coincida con la velocidad media de la corriente.

Solución

Suponiendo que el perfil de la velocidad de la corriente a lo largo de una sección vertical es una función continua de la profundidad, el teorema del valor medio para integrales definidas garantiza que existe una profundidad h a la que la velocidad es igual a la velocidad media de la corriente.

El teorema del valor medio sólo indica la existencia de dicha profundidad. No nos dice a qué profundidad la velocidad es igual a la velocidad media. Es sorprendente y afortunado que la profundidad donde la velocidad alcanza su valor medio sea bastante universal, es decir, que no dependa mucho de las características específicas de cada río (la regla de la profundidad 0.6 se obtiene en los Problemas 3-6 en la Sección 6.5). ◀

Demostración del teorema del valor medio para integrales definidas

Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, se puede aplicar el teorema del valor extremo para concluir que f debe alcanzar un máximo absoluto y un mínimo

absoluto en $[a, b]$. Si se denomina M al máximo absoluto y m al mínimo absoluto, entonces

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

y f toma ambos valores m y M en algunos puntos del intervalo $[a, b]$. Por tanto, tenemos que

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

o

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Sea $I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$; entonces, $m \leqslant I \leqslant M$.

Utilizando los hechos de que $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre m y M en el intervalo $[a, b]$ (esto es una consecuencia del teorema del valor intermedio) y que I es también un número comprendido entre m y M, se deduce (del teorema del valor intermedio) que debe existir un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = I$. Es decir,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ ■

6.3.4 Volumen de un sólido (opcional)

▲ **Figura 6.37**
Un cilindro recto con forma de la base irregular

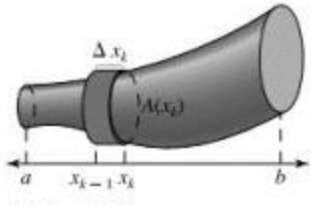
Para ciertos sólidos regulares, como el cilindro circular, se conocen fórmulas geométricas para calcular su volumen. Para calcular el volumen de un cuerpo sólido de forma menos regular, utilizaremos un método que es muy similar al del cálculo de áreas de regiones con forma regular. En este último caso, aproximamos el área por rectángulos cuyas áreas son muy fáciles de calcular utilizando fórmulas geométricas simples.

Comenzaremos con el volumen de un cilindro recto. Su volumen es el área de la base por la altura. La base puede ser una región de forma arbitraria (*véase* la Figura 6.37, por ejemplo).

Si se denomina A al área de la base y h a la altura del cilindro, entonces su volumen es

$$V = Ah$$

Como ejemplo, consideremos el cilindro circular cuya base es un disco. Si el disco tiene radio r y el cilindro tiene altura h, el volumen del cilindro circular es $\pi r^2 h$. Utilizaremos cilindros para aproximar el volumen de sólidos más complicados.



▲ **Figura 6.38**
Volumen de un sólido de forma irregular utilizando el método del disco

Supongamos que se desea calcular el volumen del sólido de la Figura 6.38. Podemos dividir el sólido en pequeñas rodajas cortándolo perpendicularmente al eje x en los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ que dividen el intervalo $[a, b]$ atravesando el sólido por planos. La intersección de esos planos y el sólido se denomina sección cruzada. Denominaremos $A(x_k)$ al área de la sección cruzada en x_k. Cortando el sólido por esos planos se obtienen rodajas, como si se cortara pan. Aproximaremos el volumen de una rodaja entre x_{k-1} y x_k por el volumen de un cilindro con área de la base igual a la de la rodaja en x_k y altura $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. Entonces, el volumen de la rodaja entre x_{k-1} y x_k es aproximadamente

$$A(x_k)\Delta x_k$$

Sumando los volúmenes de todas las rodajas se obtiene una aproximación al volumen total del sólido, es decir,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$$

Haciendo más fina la partición del intervalo $[a, b]$ se puede mejorar la aproximación.

Recuérdese que se ha utilizado $\|P\|$ (norma de P) como una medida de la finura de la partición, es decir, $\|P\| = \max_{k=1,2,\ldots,n} \Delta x_k$. Esto sugiere que se podría definir el volumen del sólido como límite de nuestra aproximación cuando $\|P\| \to 0$. Seguidamente se resume esta idea.

Definición El **volumen de un sólido** con sección cruzada de área integrable $A(x)$ entre a y b es

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

Ejemplo 7 Calcule el volumen de una esfera de radio r centrada en el origen.

Solución

La sección cruzada en x es perpendicular al eje x (*véase* la Figura 6.39). Es un disco de radio $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ cuya área es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Como el sólido está entre $-r$ y r, se obtiene

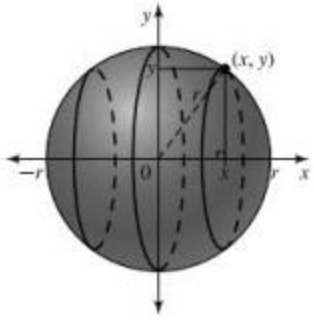
$$\text{Volumen} = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

El integrando es continuo en el intervalo $[-r, r]$. Calculando la integral resulta

$$= \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left[\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right] = \pi\left(\frac{2}{3}r^3 + \frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

que coincide con la fórmula del volumen de la esfera conocida de geometría. ◀



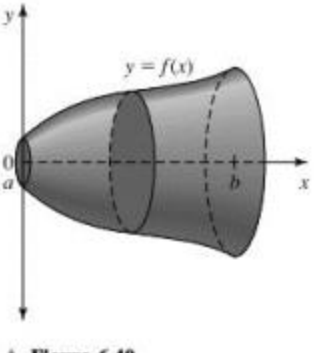
▲ **Figura 6.39**
Volumen de una esfera

La sección cruzada de la esfera del último ejemplo era de forma particularmente simple, concretamente discos. La esfera puede verse también como un **sólido de revolución**, es decir, un sólido que se obtiene cuando una curva gira alrededor del eje x (o del eje y). En este caso, se rota alrededor del eje x la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$, lo que crea secciones cruzadas circulares.

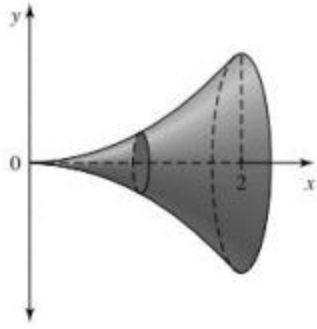
Se pueden utilizar otras curvas $y = f(x)$, rotarlas alrededor del eje x y obtener de esta forma nuevos sólidos. Esto se ilustra en la Figura 6.40, donde se rota alrededor del eje x la gráfica de $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. La sección cruzada perpendicular al eje x en el punto x es por tanto un disco de radio $f(x)$ y por tanto, el área de dicha sección cruzada es $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Si se utiliza la fórmula $\int_a^b A(x)\,dx$ para calcular el volumen del sólido, se obtiene que el **volumen** del sólido de revolución es

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \tag{6.15}$$

El cálculo de volúmenes utilizando (6.15) se denomina **método del disco**.



▲ **Figura 6.40**
Sólido de rotación que se forma al girar $f(x)$ alrededor del eje x



▲ **Figura 6.41**
El sólido de rotación del Ejemplo 8

Ejemplo 8 Calcule el volumen del sólido que se obtiene rotando la curva $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ alrededor del eje x.

Solución

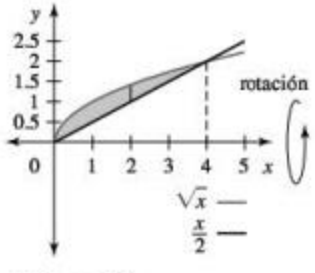
La Figura 6.41 ilustra este problema. Cuando se rota la gráfica alrededor del eje x, la sección cruzada en x es un disco de radio $y = f(x) = x^2$, es integrable en el intervalo [0, 2]. Por tanto el volumen es

$$V = \int_0^2 \pi[f(x)]^2\,dx = \int_0^2 \pi x^4\,dx$$

$$= \frac{\pi}{5}x^5\Big]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$ ◀

Ejemplo 9 Rote alrededor del eje x el área comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x/2$ y calcule el volumen del sólido de revolución.

Solución



▲ **Figura 6.42**
La región plana del Ejemplo 9

La Figura 6.42 muestra las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x/2$, junto con una barra vertical que indica la sección cruzada. Observando la gráfica, puede verse que las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 4$. Para calcular algebráicamente los puntos de intersección hay que igualar $\sqrt{x}$ y $x/2$, y despejar x:

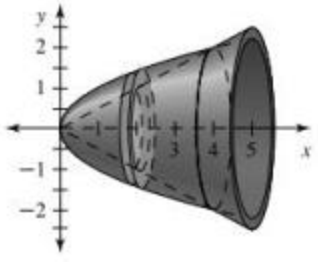
$$\sqrt{x} = \frac{x}{2}$$

Se obtiene inmediatamente $x = 0$. Si $x > 0$, se puede dividir por $\sqrt{x}$, resultando

$$1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad \text{o} \quad 2 = \sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado se obtiene $x = 4$. Por tanto, las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 4$. El volumen de este sólido de rotación se puede calcular rotando en primer lugar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$ alrededor del eje x, calculando el volumen de este sólido y después restando el volumen del sólido que se obtiene rotando la curva $y = x/2$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Haciendo este cálculo,

$$V = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2\,dx - \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx$$



▲ **Figura 6.43**
El sólido de rotación del Ejemplo 9

Ambos integrandos son continuos en el intervalo [0, 4], y se obtiene

$$V = \pi \frac{1}{2} x^2 \Big]_0^4 - \pi \frac{1}{2} x^3 \Big]_0^4$$

$$= 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

Observando la Figura 6.43, puede verse que la sección cruzada es como una arandela. En este caso, el método del disco se denomina también método de la arandela. ◀

También se puede rotar una curva alrededor del eje y, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

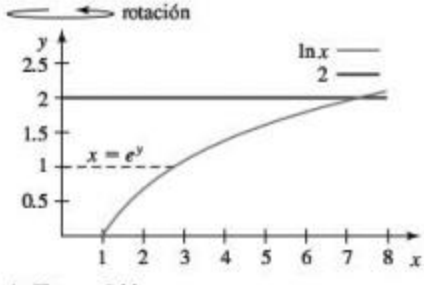
Ejemplo 10 Rote alrededor del eje y la región limitada por $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = \ln x$ y calcule el volumen del sólido resultante.

Solución

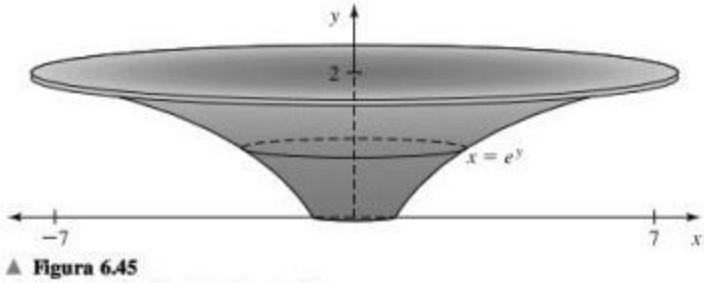
Cuando se rota alrededor del eje y, las secciones cruzadas son perpendiculares a dicho eje. En $y = \ln x$ el radio del disco de sección cruzada es x (*véase* la Figura 6.44). El sólido se muestra en la Figura 6.45. Como se «suman» las rodajas al largo del eje y, se pueden integrar con respecto a y. Como $y = \ln x$, se tiene que $x = e^y$. Por tanto, el área de la sección cruzada en y es $A(y) = \pi(e^y)^2$, que es integrable en el intervalo [0, 2], y el volumen es

$$V = \int_0^2 \pi(e^y)^2\, dy = \int_0^2 \pi e^{2y}\, dy$$

$$= \pi \frac{1}{2} e^{2y} \Big]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$$ ◀



▲ **Figura 6.44**
La región plana del Ejemplo 10



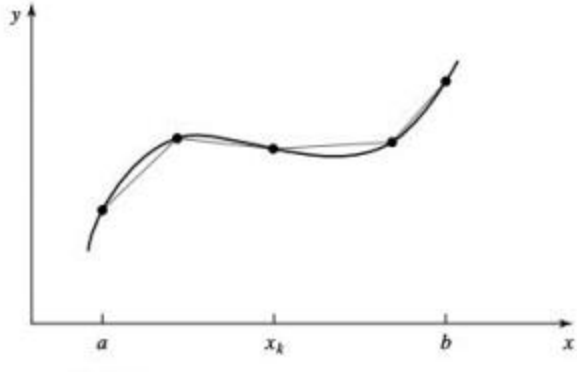
▲ **Figura 6.45**
El sólido de rotación del Ejemplo 10

6.3.5 Rectificación de curvas (opcional)

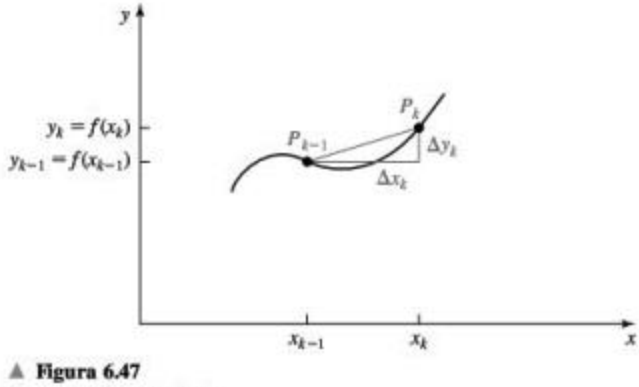
En esta subsección se estudia como calcular longitudes de curvas en el plano. Es otro ejemplo en el que las integrales aparecen cuando se suman un gran número de pequeños incrementos. La primera curva cuya longitud fue determinada fue la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, hecho que realizó William Neile (1637-1670) en 1657. Es interesante mencionar que sólo unos 20 años antes, Descartes afirmó que no había ninguna forma rigurosa para determinar la longitud exacta de una curva. Resulta que la fórmula exacta es en esencia una versión infinitesimal del teorema de Pitágoras.

¿Cómo se puede rectificar una curva (es decir, determinar su longitud) con una regla? Se podría aproximar la curva mediante segmentos rectos, medir la longitud de cada segmento y sumar estas longitudes, como se ilustra en la Figura 6.46. Escogiendo segmentos cada vez más pequeños la aproximación se hace cada vez mejor. Este es precisamente el método que utilizaremos para obtener una fórmula exacta.

Para obtener la fórmula exacta, supongamos que la curva cuya longitud deseamos calcular está dada por la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, cuya primera derivada es continua en el intervalo (a, b). Se divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos utilizando la partición $P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ siendo $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$, y se aproxima la curva por un polígono formado por segmentos rectos que conectan los puntos adyacentes sobre la curva, como se muestran en la Figura 6.46. La Figura 6.47 muestra un segmento recto típico que une los puntos P_{k-1} y P_k. Utili-



▲ **Figura 6.46**
Longitud de una curva en el plano



▲ **Figura 6.47**
Un segmento recto típico

zando el teorema de Pitágoras, se puede calcular su longitud. Sea $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. La longitud del segmento recto es entonces

$$\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

La longitud del polígono formado utilzando la partición P es

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.16}$$

Escogiendo particiones cada vez más finas, la longitud del polígono irá siendo cada vez una aproximación mejor a la longitud de la correspondiente curva. Sin embargo, antes de poder tomar este límite, hay que operar la suma.

La diferencia Δy_k es igual a $f(x_k) - f(x_{k-1})$. El teorema de valor medio garantiza que existe un número $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Como $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ se tiene que

$$\Delta y_k = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(c_k)\Delta x_k \tag{6.17}$$

Sustituyendo Δy_k en (6.16) por (6.17), la longitud del polígono se puede expresar como

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(c_k)\Delta x_k]^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\Delta x_k$$

Esta forma permite tomar el límite cuando $\|P\| \to 0$. Resulta

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\, \Delta x_k$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Si $f(x)$ es derivable en (a, b) y $f'(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)^2}\, dx$$

Como se ha mencionado, la primera curva rectificada fue $y = f(x) = x^{3/2}$. Escogeremos esta función para el primer ejemplo.

Ejemplo 11 Determine la longitud de la curva dada por la gráfica de $y = f(x) = x^{3/2}$ entre $a = 5/9$ y $b = 21/9$.

Solución

Para determinar la longitud de la curva, es necesario calcular primero $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

Entonces

$$L = \int_{5/9}^{21/9} \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}\, x^{1/2}\right]^2}\, dx = \int_{5/9}^{21/9} \sqrt{1 + \frac{9}{4}}\, dx$$

Una primitiva de $\sqrt{1 + \frac{9}{4}\, x}$ es $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + \frac{9}{4}\, x)^{3/2}$, como se puede comprobar derivando $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + \frac{9}{4}\, x)^{3/2}$ con respecto a x. Por tanto, la longitud es

$$L = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}\, x\right)^{3/2}\right]_{5/9}^{21/9} = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{21}{9}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{9}\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{8}{27} \left[\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^3\right] = \frac{8}{27} \left(\frac{125}{8} - \frac{27}{8}\right) = \frac{98}{27}$$

La longitud de la curva es por tanto 98/27. ◀

Antes de mostrar otro ejemplo, comentaremos la fórmula con más detalle. Concretamente, utilizando

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

se puede expresar la longitud como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Tratando dy y dx como números normales, se puede expresar

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

La expresión $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ se denomina **diferencial de longitud de arco**, y se denota ds. Podemos pensar que ds es un segmento de línea infinitesimal típico. El teorema de Pitágoras en esta forma infinitesimal se formula como $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. «Sumando» estos segmentos diferenciales (es decir, calculando $\int_a^b ds$) se obtiene la longitud de la curva.

Ejemplo 12 Determine la longitud de

$$f(x) = \frac{1}{4}\, x^2 - \frac{1}{2} \ln x \quad \text{desde } x = 1 \quad \text{hasta } x = e$$

Solución

Derivando $f(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

La longitud de la curva es entonces

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}\right)}\, dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx$$

La expresión bajo la raíz cuadrada es un cuadrado perfecto, concretamente,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$$

Por tanto la integral de la longitud se puede simplificar como

$$\begin{aligned} L &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx = \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\Big]_1^e \\ &= \frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^2+1) \end{aligned}$$

◀

Debido a la forma relativamente compleja de integrando en la fórmula del cálculo de longitud, muchas veces aparecerán problemas al intentar calcular la integral. Rara vez el integrando se simplifica lo bastante como para permitir un cálculo sencillo, como en el Ejemplo 12, donde el integrando resultó ser un cuadrado perfecto.

Incluso funciones de aspecto simple, como $y = 1/x$, se transforman rápidamente en integrales complicadas cuando se intenta calcular su longitud.

Ejemplo 13 Formule pero no calcule la longitud de la curva de la hipérbola $f(x) = 1/x$ entre $a = 1$ y $b = 2$.

Solución

Para determinar la longitud de la curva, es necesario calcular primero $f'(x)$.

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

La longitud de la curva se expresa entonces mediante la integral

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

◀

La primitiva del integrando del Ejemplo 13 es muy complicada, y no se puede calcular con las técnicas que se presentaron en este texto. En la Sección 7.5, aprenderemos métodos numéricos para evaluar integrales, que se podrán utilizar para calcular la integral del Ejemplo 13. Existen también paquetes software que pueden evaluar numéricamente estas integrales. Si se utilizaran estas técnicas para calcular la integral del Ejemplo 13, se obtendría que la longitud L vale aproximadamente 1.13.

6.3.6. Problemas

(6.3.1)

En los Problemas 1-12, calcule las áreas de las regiones limitadas por las rectas y curvas que se indican.

1. $y = e^x$, $y = -x$, $x = 0$, $x = 2$

2. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

3. $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$

4. $y = x^2$, $y = 2 - x^4$

5. $y = x^2 + 1$, $y = 4x - 2$ (en el primer cuadrante)

6. $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$ (en el primer cuadrante)

7. $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4$ (en el primer cuadrante)

8. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$

9. $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$ desde $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = \frac{3}{2}$

10. $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = 0$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$

11. $y = x^2$, $y = x^3$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$

12. $y = e^{-x}$, $y = x + 1$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$

En los Problemas 13-16, calcule las áreas de las regiones limitadas por las rectas y curvas que se indican expresando x en función de y e integrando con respecto a y.

13. $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = 0$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$

14. $y = x$, $yx = 1$, $y = \frac{1}{2}$ (en el primer cuadrante)

15. $x = (y-1)^2 + 3$, $x = 1 - (y-1)^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$ (en el primer cuadrante)

16. $x = (y-1)^2 - 1$, $x = (y-1)^2 + 1$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$

(6.3.2)

17. Considere una población cuyo tamaño en el instante t es $N(t)$ y cuya dinámica se expresa mediante el problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = e^{-t}$$

con $N(0) = 100$.

(a) Calcule $N(t)$ resolviendo el problema de valor inicial.

(b) Calcule el cambio acumulativo del tamaño de la población entre $t = 0$ y $t = 5$.

(c) Exprese en forma de integral el cambio acumulativo en el tamaño de la población entre el instante 0 y el instante t. Indique una interpretación geométrica de la expresión resultante.

18. Suponga que la variación de la biomasa $B(t)$ en el instante t durante el intervalo de tiempo [0, 12] tiene esta expresión

$$\frac{d}{dt}B(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

para $0 \leqslant t \leqslant 12$.

(a) Dibuje $\frac{dB}{dt}$ en función de t.

(b) Suponga que $B(0) = B_0$. Exprese en forma de integral el cambio acumulativo de la biomasa durante el intervalo de tiempo $[0, t]$. Proporcione una interpretación geométrica. ¿Cuál es el valor de la biomasa al final del intervalo [0, 12] comparado con el valor en el instante 0? ¿Cómo se relacionan estas dos cantidades con el cambio acumulativo de la biomasa durante el intervalo [0, 12]?

19. Una partícula se mueve por el eje x con velocidad

$$v(t) = -(t-2)^2 + 1$$

para $0 \leqslant t \leqslant 5$. Suponga que en el instante 0 la partícula está en el origen.

(a) Dibuje $v(t)$ en función de t.

(b) Utilice la gráfica de $v(t)$ para determinar cuándo se mueve la particula a la izquierda y cuándo se mueve a la derecha.

(c) Calcule la posición $s(t)$ de la partícula en el instante t para $0 \leqslant t \leqslant 5$. Proporcione una interpretación geométrica de $s(t)$ en función de la gráfica de $v(t)$.

(d) Dibuje $s(t)$ y calcule las posiciones más a la izquierda y más a la derecha.

20. Recuerde que la aceleración $a(t)$ de una partícula que se mueve en línea recta es la velocidad de cambio instantáneo en la velocidad $v(t)$, es decir,

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

Suponga que $a(t) = 32$ ft/s^2. Exprese en forma de integral definida el cambio acumulativo de la velocidad durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, y calcule dicha integral.

21. Si $\frac{dl}{dt}$ representa la velocidad de crecimiento de un organismo en el instante t (medido en meses), explique lo que representa

$$\int_2^7 \frac{dl}{dt}\,dt$$

22. Si $\frac{dw}{dx}$ representa la velocidad de variación del peso de un organismo a la edad x, explique lo que significa

$$\int_3^5 \frac{dw}{dx}\,dx$$

23. Si $\frac{dB}{dt}$ representa la velocidad de cambio de la biomasa en el instante t, explique lo que significa

$$\int_1^6 \frac{dB}{dt}\,dt$$

24. Sea $N(t)$ el tamaño de la población en el instante t, y suponga que

$$\frac{dN}{dt} = f(t)$$

Exprese en forma de integral el cambio acumulativo del tamaño de la población en el intervalo [2, 4].

(6.3.3)

25. Sea $f(x) = x^2 - 2$. Calcule el valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, 2].

26. Sea $g(t) = e^{-t}$. Calcule el valor medio de $g(t)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

27. Suponga que la temperatura T en una cámara de crecimiento (medida en grados Fahrenheit) varía en un periodo 24 horas de la siguiente forma

$$T(t) = 68 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

para $0 \leqslant t \leqslant 24$.

(a) Dibuje la temperatura T en función del tiempo t.

(b) Calcule la temperatura media y explique gráficamente su respuesta.

28. Suponga que se mide la concentración de nitrógeno en el suelo (medida en g m^{-3}) en una sección transversal de tundra húmeda y se tiene un conjunto de datos que siguen una línea recta de ecuación

$$y = 673.8 - 34.7x$$

para $0 \leqslant x \leqslant 10$, siendo x la distancia al inicio de la sección transversal ¿Cuánto vale la concentración media de nitrógeno en el suelo a lo largo de esta sección transversal?

29. Sea $f(x) = \tan x$. Proporcione un argumento geométrico para explicar por qué el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ es igual a 0.

30. Suponga que conduce de St. Paul a Duluth con una media de 50 mph. Explique por qué debe haber un instante durante su viaje en el que su velocidad esa exactamente de 50 mph.

31. Sea $f(x) = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Utilice un argumento geométrico para calcular el valor medio de f en el intervalo $[0, 2]$, y calcule el valor de x para el que $f(x)$ es igual a su valor medio.

32. Una partícula se mueve por el eje x con velocidad

$$v(t) = -(t-3)^2 + 5$$

para $0 \leqslant t \leqslant 6$.

(a) Dibuje $v(t)$ en función de t para $0 \leqslant t \leqslant 6$.

(b) Calcule la velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo $[0, 6]$.

(c) Calcule un instante $t^* \in [0, 6]$ tal que la velocidad en dicho instante sea igual a la velocidad media durante el intervalo de tiempo $[0, 6]$. ¿Está claro que ese punto existe? ¿Existe más de un punto en este caso? Utilice el gráfico del apartado (a) para explicar cómo se obtendría t^* gráficamente.

(6.3.4)

33. Calcule el volumen de un cono circular recto cuya base tiene radio r y de altura h.

34. Calcule el volumen de una pirámide con base cuadrada de lado a y de altura h.

En los Problemas 35-40, calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen rotando alrededor del eje x la región limitada por las curvas dadas. En todos los casos, dibuje la región y un disco elemental típico.

35. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ (en el primer cuadrante)

36. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

37. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y = 0$

38. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$

39. $y = \sec x$, $-\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, $y = 0$

40. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $y = 0$

En los Problemas 41-46, calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen rotando alrededor del eje x la región limitada por las curvas dadas. En todos los casos, dibuje la región y un disco elemental típico.

41. $y = x^2$, $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

42. $y = 1 - x^2$, $y = 1 + x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

43. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

44. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1$, $x = 1$ (en el primer cuadrante)

45. $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

46. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ (en el primer cuadrante)

En los Problemas 47-52, calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen rotando alrededor del eje y la región limitada por las curvas dadas. En todos los casos, dibuje la región y un disco elemental típico.

47. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

48. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ (en el primer cuadrante)

49. $y = \ln(x + 1)$, $y = \ln 3$, $x = 0$

50. $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

51. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

52. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$

(6.3.5)

53. Calcule la longitud de la recta

$$y = 2x$$

desde $x = 0$ hasta $x = 2$ mediante los siguientes métodos:

(a) Utilizando la geometría del plano.

(b) Utilizando la fórmula integral para calcular la longitud de curvas, obtenida en la Sección 6.3.5.

54. Calcule la longitud de la recta

$$y = mx$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$ mediante los siguientes métodos:

(a) Utilizando la geometría del plano.

(b) Utilizando la fórmula integral para calcular la longitud de curvas, obtenida en la Sección 6.3.5.

55. Calcule la longitud de la curva

$$y^2 = x^3$$

desde $x = 1$ hasta $x = 4$.

56. Calcule la longitud de la curva

$$2y^2 = 3x^3$$

desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

57. Calcule la longitud de la curva

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

58. Calcule la longitud de la curva

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$$

desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

En los Problemas 59-62, formule pero no evalúe las integrales que permiten calcular las longitudes de las siguientes curvas.

59. $y = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

60. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

61. $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

62. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$

63. Calcule la longitud del cuarto de círculo

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$ mediante los siguientes métodos:

(a) Utilzando una fórmula geométrica.

(b) Utilizando la fórmula integral para calcular la longitud de curvas, obtenida en la Sección 6.3.5.

64. Un cable que cuelga entre dos puntos en $x = -M$ y $x = M$ toma la forma de una catenaria, cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

siendo a una constante positiva. Calcule la longitud del cable cuando $a = 1$ y $M = \ln 2$.

65. Demuestre que si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

entonces la longitud de la curva de $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = a$ para cualquier $a > 0$ está dada por $f'(a)$.

6.4. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 6: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

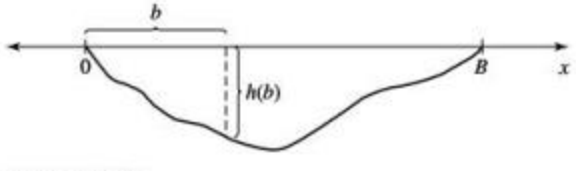
1. Área
2. Notación de sumas
3. Reglas algebraicas de las sumas
4. Partición de un intervalo y norma de una partición
5. Suma de Riemann
6. Integral definida
7. Integrable en el sentido de Riemann
8. Interpretación geométrica de las integrales definidas
9. Regla de la suma y de la multiplicación por constantes para integrales
10. Integral definida sobre una unión de intervalos
11. Reglas de comparación para integrales definidas
12. Teorema fundamental del cálculo, parte I
13. Regla de Leibniz
14. Primitivas
15. Teorema fundamental del cálculo, parte II
16. Evaluación de integrales definidas utilizando el TFC, parte II
17. Cálculo del área entre curvas utilizando integrales definidas
18. Cambio acumulativo e integrales definidas
19. Teorema del valor medio para integrales definidas
20. Volumen de un sólido e integrales definidas
21. Rectificación de curvas
22. Longitud de una curva
23. Diferencial de longitud de arco

6.5. PROBLEMAS DE REPASO

1. (Descarga de un río)
Cuando se estudia el flujo del agua en un canal abierto, como el cauce de un río, la cantidad de agua que pasa a través de una sección cruzada por segundo, denominada descarga (Q), resulta de interés. La siguiente fórmula se utiliza para calcular la descarga:

$$Q = \int_0^B \bar{v}(b)h(b)\,db \qquad (6.18)$$

siendo b la distancia desde una orilla del río al punto donde se miden la profundidad del río, $h(b)$, y la velocidad media del perfil de velocidad, $\bar{v}(b)$. La anchura total de la sección cruzada es B (*véase* la Figura 6.48).



▲ **Figura 6.48**
El río del Problema 1

Para calcular la integral de (6.18), es necesario conocer $h(b)$ y $\bar{v}(b)$ en cada posición b a lo largo de la sección cruzada. En la práctica, la sección cruzada se divide en un número finito de subintervalos, y se toman medidas de $\bar{v}$ y de h, por ejemplo en los extremos derechos de cada subintervalo. La siguiente tabla contiene un ejemplo de estas medidas. La posición 0 corresponde a la orilla izquierda y la posición $B = 16$ a la orilla derecha del río. Las unidades de posición y de h son metros, y las de $\bar{v}$, metros por segundo.

Posición	h	$\bar{v}$
0	0	0
1	0.28	0.172
3	0.76	0.213
5	1.34	0.230
7	1.57	0.256
9	1.42	0.241
11	1.21	0.206
13	0.83	0.187
15	0.42	0.116
16	0	0

Aproxime la integral de (6.18) por una suma de Riemann utilizando las posiciones de la tabla y calcule la descarga aproximada utilizando los datos de dicha tabla.

2. Suponga que se hacen crecer plantas en varias parcelas de estudio y se desea medir la respuesta de la biomasa total a los tratamientos respectivos en cada parcela. Una forma de medir esto es determinar la velocidad de crecimiento específica media de la biomasa en cada parcela durante el curso de la estación de crecimiento.

Se denomina $B(t)$ a la biomasa de una parcela dada en el instante t. Entonces, la velocidad de crecimiento específica de la biomasa en el instante t tiene la expresión

$$\frac{1}{B(t)}\frac{dB}{dt}$$

(a) Explique por qué

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{B(s)}\frac{dB(s)}{ds}\,ds$$

es una forma de expresar la velocidad de crecimiento específica media en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

(b) Utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{1}{B(t)}\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln B(t))$$

(c) Utilice los resultados de (a) y (b) para demostrar que la velocidad de crecimiento específica media de $B(s)$ durante el intervalo de tiempo $[0, t]$ está dada por

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}(\ln(B(s))\,ds = \frac{1}{t}\ln\frac{B(t)}{B(0)}$$

supuesto que $B(s) > 0$ para $s \in [0, t]$.

(d) Explique las medidas que habría que tomar si se desea determinar la velocidad de crecimiento específica media de la biomasa en una determinada parcela en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Los Problemas 3-6 tratan de perfiles de velocidad de corriente y dan una justificación a dos métodos de medida que se describen a continuación.

(*Adaptado de Herschy*, 1995) La velocidad del agua en un canal varía considerablemente con la profundidad. Debido al rozamiento, la velocidad es nula en el fondo y en los lados del canal. La velocidad es máxima cerca de la superficie de la corriente. Para calcular la velocidad media de un perfil vertical de velocidades, se emplean frecuentemente en la práctica dos métodos:

(a) El método de la profundidad 0.6: la velocidad se mide al 60% de la profundidad desde la superficie, y este valor se toma como velocidad media.

(b) El método de la profundidad 0.2 y 0.8: la velocidad se mide al 20% y al 80% de la profundidad desde la superficie, y la media de los dos datos se toma como velocidad media.

La distribución teórica de las velocidades del agua que fluye en un canal abierto se expresa aproximadamente como

$$v(d) = \left(\frac{D-d}{a}\right)^{1/c} \tag{6.19}$$

siendo $v(d)$ la velocidad a profundidad d por debajo de la superficie del agua, c una constante que varía desde 5 para cauces accidentados hasta 7 para cauces suaves, D la profundidad total del canal y a una constante igual a la distancia desde el fondo del canal del punto en el que la velocidad tiene valor unidad.

3. (a) Dibuje en la gráfica de $v(d)$ en función de d para $D = 3$ m y $a = 1$ m para (i) $c = 5$ y (ii) $c = 7$.

(b) Demuestre que la velocidad es igual a 0 en el fondo ($d = D$) y es máxima en la superficie ($d = 0$).

4. (a) Demuestre por integración que la velocidad media del perfil vertical ($\bar{v}$) está dada por

$$\bar{v} = \frac{c}{c+1}\left(\frac{D}{a}\right)^{1/c} \tag{6.20}$$

(b) ¿Qué fracción de la velocidad máxima es la velocidad media $\bar{v}$?

(c) Si supiera que la velocidad máxima se produce en la superficie del río [como se predice en la fórmula aproximada de $v(d)$], ¿cómo se calcularía $\bar{v}$? (en la práctica, la velocidad máxima puede producirse un poco por debajo de la superficie debido a la aparición entre el agua de la superficie y la atmósfera. Por tanto, la velocidad en la superficie no proporciona una medida precisa de la velocidad máxima).

5. Explique por qué la profundidad d_1, a la que $v = \bar{v}$ se da por la ecuación

$$\bar{v} = \left(\frac{D-d_1}{a}\right)^{1/c} \tag{6.21}$$

Se puede calcular d_1 igualando las expresiones (6.20) y (6.21). Demuestre que

$$\frac{d_1}{D} = 1 - \left(\frac{c}{c+1}\right)^c$$

y que d_1/D es aproximadamente 0.6 para valores de c entre 5 y 7, resultando así la regla

$$\bar{v} \approx v_{0.6}$$

donde $v_{0.6}$ es la velocidad a la profundidad $0.6D$. (*Sugerencia*: dibuje $1 - (c/(c+1))^c$ en función de c para $c \in [5, 7]$, y estudie el recorrido de esta función.)

6. Se denomina $v_{0.2}$ a la velocidad a profundidad $0.2D$. Calcularemos ahora la profundidad d_2 tal que

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_{0.2} + v_{d_2})$$

(a) Demuestre que d_2 cumple la ecuación

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D-0.2D}{a}\right)^{1/c} + \left(\frac{D-d_2}{a}\right)^{1/c}\right] = \frac{c}{c+1}\left(\frac{D}{a}\right)^{1/c}$$

[*Sugerencia*: utilice las Expresiones (6.19) y (6.20).]

(b) Demuestre que

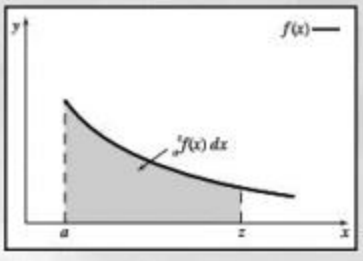
$$\frac{d_2}{D} = 1 - \left[\frac{2c}{c+1} - (0.8)^{1/c}\right]$$

y confirme que d_2/D vale aproximadamente 0.8 para valores de c entre 5 y 7, resultando así la regla

$$\bar{v} \approx \frac{1}{2}(v_{0.2} + v_{0.8})$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y MÉTODOS COMPUTACIONALES

CAPÍTULO 7



En las dos primeras secciones de este capítulo, aprenderemos dos importantes técnicas de integración que son esencialmente reglas de derivación aplicadas a la inversa (debido a la conexión entre la derivación y la integración, no debería sorprendernos que algunas técnicas de integración estén estrechamente relacionadas con reglas de derivación). La primera técnica, denominada cambio de variable, es la regla de la cadena aplicada la inversa. La segunda, denominada integración por partes, es la regla del producto aplicada la inversa. La tercera sección está dedicada a estas técnicas de integración y a una técnica adicional denominada descomposición en fracciones simples. La cuarta sección trata de integrales impropias, que son integrales en las que el integrando tiende a infinito en algún lugar del intervalo de integración o bien el intervalo de integración no está limitado. Finalmente, se dedica una sección para integración numérica, otra al uso de tablas para calcular integrales más complicadas y una última sección a la aproximación de funciones mediante polinomios.

7.1 MÉTODO DEL CAMBIO DE VARIABLE

7.1.1 Integrales indefinidas

El método del cambio de variable es la regla de la cadena en forma integral. Comenzaremos por tanto recordando la regla de la cadena. Supongamos que se desea derivar

$$f(x) = \operatorname{sen}(3x^2 + 1)$$

Claramente, se trata de una situación en la que es necesario utilizar la regla de la cadena. Sea

$$f(u) = \operatorname{sen} u \quad \text{y} \quad u = 3x^2 + 1$$

y por tanto $f'(u) = \cos u$. Para derivar la función interna $u = 3x^2 + 1$ utilizaremos la notación de Leibniz:

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

o, si se tratan du y dx como cualquier otra variable,

$$du = 6x\,dx$$

Esta última forma será de particular interés cuando se invierta la regla de la cadena. Pero utilizaremos primero dicha regla. Se obtiene

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(3x^2 + 1) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = (\cos u)(6x) = \cos(3x^2 + 1)\cdot 6x$$

Invirtiendo la expresión anterior resulta

$$\int \underbrace{\cos(3x^2+1)}_{\cos u} \cdot \underbrace{6x\,dx}_{du} = \int \cos u\,du = \underbrace{\operatorname{sen} u}_{\operatorname{sen}(3x^2+1)} + C = \operatorname{sen}(3x^2+1) + C$$

En el primer paso, se ha sustituido $3x^2 + 1$ por u y se ha utilizado que $du = 6x\,dx$. Estas sustituciones simplifican el integrando. Al final, se vuelve a sustituir u por $3x^2 + 1$ para obtener la respuesta final en función de x.

Para ver el principio general que hay detrás del desarrollo anterior, escribamos $u = g(x)$ [y por tanto $du = g'(x)\,dx$]. Nuestro integrando en el ejemplo anterior es de la forma

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx$$

Si se denomina $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ [es decir, $F'(x) = f(x)$], entonces, utilizando la regla de la cadena para derivar $F[g(x)]$ se obtiene

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = F'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x)$$

lo que demuestra que $F[g(x)]$ es una primitiva de $f[g(x)]g'(x)$. Por tanto, se puede escribir

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = F[g(x)] + C \tag{7.1}$$

Si se hace $u = g(x)$ entonces el miembro derecho de la Ecuación (7.1) se puede expresar como $F(u) + C$. Pero como $F(u)$ es una primitiva de $f(u)$, también tiene la representación

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \tag{7.2}$$

lo que demuestra que el miembro izquierdo entre Ecuación (7.1) coincide con el miembro izquierdo de la Ecuación (7.2). Al igualarlos, surge el método del cambio de variable.

MÉTODO DEL CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES INDEFINIDAS

Sea $u = g(x)$, entonces

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Presentaremos a continuación algunos ejemplos que ilustran cómo se utiliza está regla y cuándo se puede aplicar con éxito. Los primeros ejemplos son inmediatos.

Ejemplo 1 **Uso del cambio de variable** Evalúe

$$\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx$$

Solución

La expresión $2x + 1$ es la derivada de $x^2 + x$, es la función interna de e^{x^2+x}. Esto sugiere el siguiente cambio de variable:

$$u = x^2 + x \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = 2x + 1 \quad \text{o} \quad du = (2x+1)\,dx$$

Por tanto,

$$\int \underbrace{e^{x^2+x}}_{e^u} \underbrace{(2x+1)\,dx}_{du} = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2+x} + C$$

En el último paso, se ha vuelto a sustituir u por $x^2 + x$ ya que el resultado final debe quedar en función de x. ◀

Ejemplo 2 **Uso del cambio de variable** Evalúe

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$$

Solución

Puede verse que $1/x$ es la derivada de $\ln x$. Se puede probar con

$$u = \ln x \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

Entonces

$$\int \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{du} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$ ◀

Los Ejemplos 1 y 2 ilustran tipos de integrales que aparecen frecuentemente, y se incluyen en el siguiente recuadro para que sirvan de referencia.

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

En los dos ejemplos anteriores, la derivada de la función interna aparecía exactamente en el integrando. Este no siempre es el caso, como muestra el siguiente ejemplo, en el que la derivada de la función interna aparece en el integrando a falta de una constante multiplicativa.

Ejemplo 3 **Constante multiplicativa** Evalúe

$$\int 4x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Solución

Si hacemos $u = x^2 + 1$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{o} \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

El integrando contiene la derivada de la función interna, excepto por una constante multiplicativa. Pero esto no tiene importancia:

$$\int 4x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int 4\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{u}}\underbrace{x\,dx}_{\frac{du}{2}} = \int 4\sqrt{u}\,\frac{du}{2}$$

$$= \int 2\sqrt{u}\,du = 2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{4}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$ ◀

Ejemplo 4 **Reformulación del integrando** Evalúe

$$\int \tan x\,dx$$

Solución

El truco aquí está en escribir $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y advertir que la derivada de la función del denominador es la función del numerador (excepto por un signo $-$). La integral es por tanto del tipo $\int [g'(x)/g(x)]\,dx$, que presentamos anteriormente. Se utiliza el cambio de variable

$$u = \cos x \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x \quad \text{o} \quad -du = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{-du}$$

$$= -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

En la Tabla 6.1 de la Sección 6.2 aparece $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$. Este resultado coincide con el que hemos obtenido, ya que $-\ln[\cos x] = \ln|\cos x|^{-1} = \ln|\sec x|$. ◀

En el Problema 59 se calculará $\int \cot x\,dx$, con el mismo procedimiento utilizado en el Ejemplo 4. Es decir, tanto $\int \tan x\,dx$ como $\int \cot x\,dx$ son casos especiales de $\int [g'(x)/g(x)]\,dx$. El siguiente recuadro recoge los resultados.

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \tag{7.3}$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C \tag{7.4}$$

No siempre es obvio que el método del cambio de variable puede tener éxito, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 **Cambio de variable y raíces cuadradas** Evalúe

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx$$

Solución

Obviamente, x no es la derivada de $2x - 1$, por tanto, parece que esta integral no se ajusta a nuestro esquema. Pero veamos lo que podemos hacer. Sea

$$u = 2x - 1 \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad \text{con} \quad dx = \frac{du}{2}$$

Como $u = 2x - 1$, entonces $x = \frac{1}{2}(u + 1)$. Haciendo todos los cambios de variable, se obtiene

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{2}(u+1)\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C \quad \blacktriangleleft$$

Las funciones del integrando no siempre tienen que aparecer explícitamente, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 Sea $g(x)$ una función derivable cuya derivada $g'(x)$ es continua. Evalúe

$$\int g'(x)\cos[g(x)]\,dx$$

Solución

Sea

$$u = g(x) \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad \text{o} \quad du = g'(x)\,dx$$

entonces

$$\int g'(x)\cos[g(x)]\,dx = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$= \operatorname{sen}[g(x)] + C \quad \blacktriangleleft$$

7.1.2 Integrales definidas

Cuando se calcula una integral definida, el TFC (Parte II) dice que se debe obtener una primitiva del integrando y después evaluar dicha primitiva en los límites de integración. Cuando se utiliza el cambio de variable $u = g(x)$ para obtener una primitiva del integrando, dicha primitiva estará primero expresada en función de u. Para completar el cálculo, se puede proceder de dos formas: (1) se puede sustituir u por $g(x)$ en la primitiva y después evaluar dicha primitiva en los límites de integración en función de x, o (2) se puede dejar la primitiva en función de u y cambiar los límites de integración de acuerdo con $u = g(x)$.

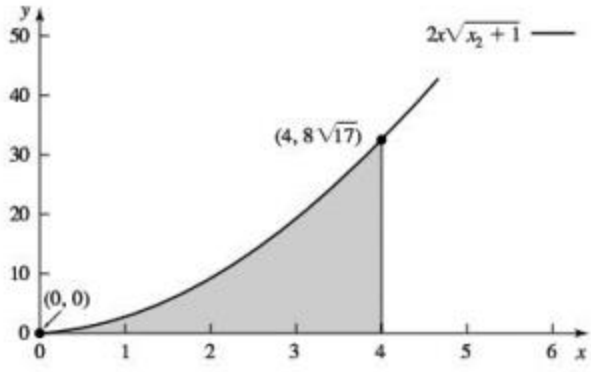
Ilustraremos estas dos formas en el siguiente ejemplo, en el que se desea evaluar

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Recuérdese que cuando se calculan integrales definidas, es necesario comprobar si el integrando es continuo en el intervalo de integración. Esto se cumple en este caso.

Primera forma Para calcular una primitiva de $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$, se utiliza el cambio de variable

$$u = x^2 + 1 \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \text{o} \quad du = 2x\,dx$$



▲ **Figura 7.1**
La región correspondiente a $\int_0^4 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ antes del cambio de variable tiene un área de $\frac{2}{3}[(17)^{3/2}-1]$

Entonces

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

y $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ es una primitiva de $2x\sqrt{x^2+1}$. Utilizando el TFC, Parte II, se puede calcular la integral definida

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = F(4) - F(0)$$

$$= \frac{2}{3}(17)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2} = \frac{2}{3}[(17)^{3/2} - 1]$$

La Figura 7.1 muestra la región correspondiente a la integral definida antes del cambio de variable.

Segunda forma Se cambian los límites de integración de acuerdo con el cambio de variable. Es decir,

$$u = x^2 + 1 \quad \text{con} \frac{du}{dx} = 2x \quad \text{o} \quad du = 2x\,dx$$

como antes, y debe notarse que

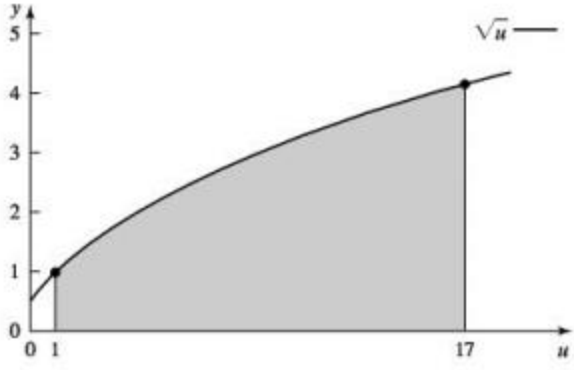
$$\text{si } x = 0 \quad \text{entonces } u = 1$$

$$\text{si } x = 4 \quad \text{entonces } u = 17$$

Entonces

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^{17} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^{17} = \frac{2}{3}[(17)^{3/2} - 1]$$

Tras el cambio de variable, el integrando es $\sqrt{u}$, y los límites de integración son $u = 1$ y $u = 17$. La Figura 7.2 muestra la región correspondiente a la integral definida tras el cambio de variable.



▲ **Figura 7.2**
La integral definida $\int_0^4 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ se transforma en $\int_1^{17}\sqrt{u}\,du$ tras el cambio de variable $u = x^2 + 1$. La región correspondiente a $\int_1^{17}\sqrt{u}\,du$ tiene un área de $\frac{2}{3}[(17)^{3/2} - 1]$

La segunda forma es a menudo más conveniente. El siguiente recuadro resume el procedimiento.

MÉTODO DEL CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Sea $u = g(x)$. Entonces

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Ejemplo 7 **Integral definida** Calcule

$$\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx$$

Solución

La Figura 7.3 muestra la región correspondiente a la integral definida. El integrando es continuo en [1, 2] y es de la forma $\frac{g'(x)}{g(x)}$. Sea

$$u = x^3 + x \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 1 \quad \text{o} \quad du = (3x^2+1)\,dx$$

y se cambian los límites de integración:

$$\text{si } x = 1 \quad \text{entonces } u = 2$$
$$\text{si } x = 2 \quad \text{entonces } u = 10$$

Por tanto,

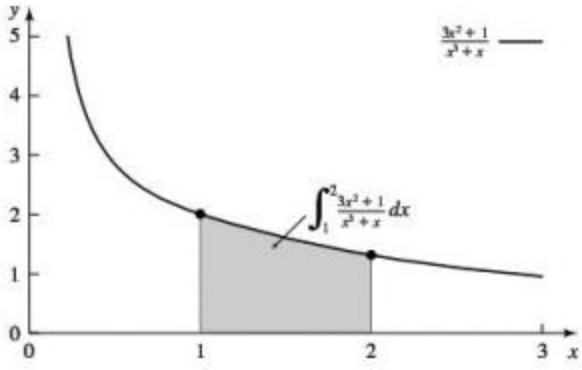
$$\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx = \int_2^{10} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big]_2^{10} = \ln 10 - \ln 2 = \ln\frac{10}{2} = \ln 5 \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 8 **La función de cambio de variable es decreciente** Calcule

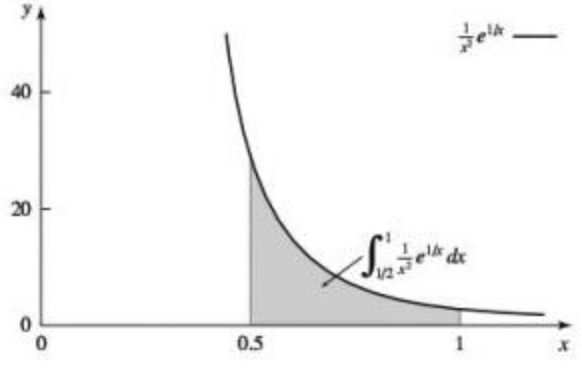
$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx$$

Solución

La Figura 7.4 muestra la región correspondiente a la integral definida. El integrando es continuo en el intervalo [1/2, 1]. Como $-1/x^2$ es la derivada de $1/x$, podemos hacer



▲ **Figura 7.3**
La región correspondiente a la integral definida del Ejemplo 7



▲ **Figura 7.4**
La región correspondiente a la integral definida del Ejemplo 8

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{o} \quad -du = \frac{1}{x^2}\,dx$$

y cambiar los límites de integración

$$\text{si } x = \frac{1}{2} \quad \text{entonces } u = 2$$

$$\text{si } x = 1 \quad \text{entonces } u = 1$$

Por tanto,

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx = -\int_{2}^{1} e^u du = \int_{1}^{2} e^u du = e^u]_1^2 = e^2 - e$$

Nótese que $\frac{1}{x}$ como es una función decreciente para $x > 0$, después del cambio de variable el límite inferior resulta ser mayor que el límite superior. Al invertir los límites de integración en el segundo paso, se elimina el signo menos.

Sin embargo, no es necesario invertir los límites de integración. Se puede calcular directamente

$$-\int_{2}^{1} e^u du = -e^u]_2^1 = -(e^1 - e^2) = e^2 - e$$ ◀

Ejemplo 9 **Cambios de variable trigonométricos** Calcule

$$\int_0^{\pi/6} \cos x e^{\operatorname{sen} x}\, dx$$

Solución

La Figura 7.5 muestra la región correspondiente a la integral definida. El integrando es continuo en el intervalo $[0, \pi/6]$ y es de la forma $g'(x)e^{g(x)}$, lo que sugiere el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = \cos x \quad \text{o} \quad du = \cos x\, dx$$

Cambiando ahora los límites de integración

$$\text{si } x = 0 \quad \text{entonces } u = \operatorname{sen} 0 = 0$$
$$\text{si } x = \frac{\pi}{6} \quad \text{entonces } u = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\int_0^{\pi/6} \cos x e^{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{1/2} e^u\, du = e^u \Big]_0^{1/2} = e^{1/2} - 1$$ ◀

Ejemplo 10 **Función racional** Calcule

$$\int_4^9 \frac{2}{x-3}\, dx$$

Solución

La Figura 7.6 muestra la región correspondiente a la integral definida. El integrando es continuo en el intervalo $[4, 9]$. Sea

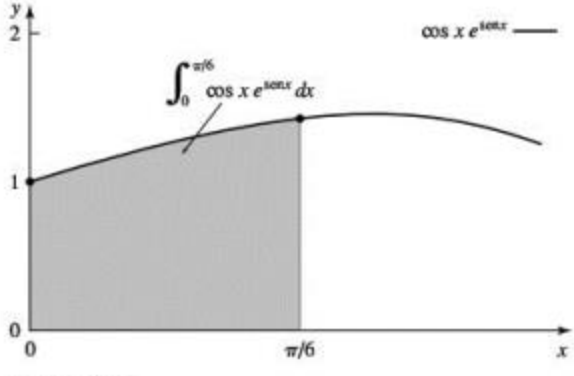
$$u = x - 3 \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad \text{o} \quad du = dx$$

y el cambio en los límites de integración:

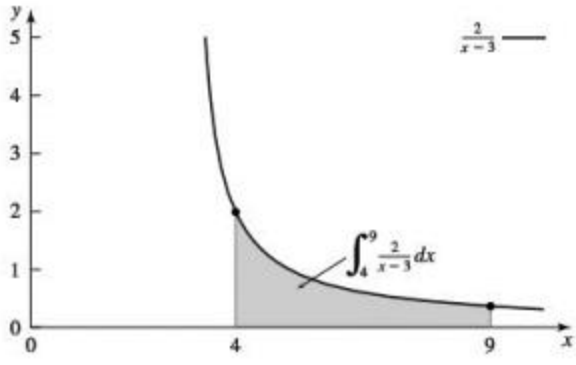
$$\text{si } x = 4 \quad \text{entonces } u = 1$$
$$\text{si } x = 9 \quad \text{entonces } u = 6$$

Por tanto,

$$\int_4^9 \frac{2}{x-3}\, dx = \int_1^6 \frac{2}{u}\, du = 2 \ln |u| \Big]_1^6 = 2(\ln 6 - \ln 1) = 2 \ln 6$$ ◀



▲ **Figura 7.5**
La región correspondiente a la integral definida del Ejemplo 9



▲ **Figura 7.6**
La región correspondiente a la integral definida del Ejemplo 10

Es fácil pasar una gran cantidad de tiempo empleando técnicas de integración. Los problemas pueden ser muy complejos. Para resolverlos todos necesitaríamos una gran cantidad de trucos. Existen excelentes programas software (tales como *Mathematica* o *Matlab*) que pueden integrar simbólicamente. Sin embargo, estos programas no convierten en inútiles las técnicas de integración; de hecho, las utilizan. Entender conceptualmente las técnicas básicas y ser capaces de aplicarlas en situaciones simples hacen que estos paquetes software no se conviertan en una »caja negra». No obstante, su disponibilidad ha hecho que sea menos importante aprender una gran cantidad de trucos.

Hasta ahora, sólo hemos aprendido una técnica: integración por cambio de variable. A menos que seamos capaces de reconocer inmediatamente una primitiva, el cambio de variable es el único método que podemos emplear en este momento.

A medida que avancemos, aprenderemos otras técnicas. Una complicación adicional surge de la necesidad de identificar qué técnica utilizar. Si no vemos directamente lo que hacer, podemos empezar intentando algo, sin esperar que el primer intento tenga éxito. Con la práctica, seremos capaces de ver mucho más rápidamente si una determinada técnica puede o no tener éxito. Si nuestro intento no parece funcionar, es interesante intentar determinar la razón. De esa forma, los intentos fallidos pueden ser muy útiles para ganar experiencia en integración.

7.1.3. Problemas

(7.1.1)

En los Problemas 1-16, calcule las integrales indefinidas realizando los cambios de variable dados.

1. $\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$, con $u = x^2+3$
2. $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$, con $u = x^3+1$
3. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$, con $u = 1-x^2$
4. $\int x^3\sqrt{4+x^4}\,dx$, con $u = 4+x^4$
5. $\int 5\cos(3x)\,dx$, con $u = 3x$
6. $\int 5\,\mathrm{sen}(1-2x)\,dx$, con $u = 1-2x$
7. $\int 7x^2\,\mathrm{sen}(4x^3)\,dx$, con $u = 4x^3$
8. $\int x\cos(x^2-1)\,dx$, con $u = x^2-1$
9. $\int e^{2x+3}\,dx$, con $u = 2x+3$
10. $\int 3e^{1-x}dx$, con $u = 1-x$
11. $\int xe^{-x^2/2}\,dx$, con $u = -x^2/2$
12. $\int xe^{1-3x^2}\,dx$, con $u = 1-3x^2$
13. $\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx$, con $u = x^2+4x$

14. $\int \frac{2x}{3-x^2}\,dx$, con $u = 3 - x^2$

15. $\int \frac{3}{x+4}\,dx$, con $u = x + 4$

16. $\int \frac{1}{5-x}\,dx$, con $u = 5 - x$

En los Problemas 17-36, utilice el método del cambio de variable para calcular las integrales indefinidas.

17. $\int \sqrt{x+3}\,dx$

18. $\int \sqrt{4-x}\,dx$

19. $\int (4x-2)\sqrt{2x^2-3x+2}\,dx$

20. $\int (x^2-2x)\sqrt{x^3-3x^2+3}\,dx$

21. $\int \frac{4x-1}{1+x-2x^2}\,dx$

22. $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}\,dx$

23. $\int \frac{x}{1+2x^2}\,dx$

24. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x}\,dx$

25. $\int 2xe^{x^2}\,dx$

26. $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x}\,dx$

27. $\int \frac{1}{x} e^{1+\ln x}\,dx$

28. $\int \sec^2 x e^{\tan x}\,dx$

29. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)dx$

30. $\int \cos(2x-1)\,dx$

31. $\int \tan x \sec^2 x\,dx$

32. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos dx$

33. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

34. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln(x-3)}$

35. $\int x\sqrt{5+x}\,dx$

36. $\int \sqrt{1+\ln x}\,\frac{\ln x}{x}\,dx$

En los Problemas 37-42, a, b y c son constantes y g(x) es una función continua cuya derivada g'(x) es también continua. Utilice el método del cambio de variable para calcular las integrales indefinidas.

37. $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx$

38. $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$

39. $\int g'(x)[g(x)]^n\,dx$

40. $\int g'(x)\operatorname{sen}[g(x)]\,dx$

41. $\int g'(x)e^{-g(x)}\,dx$

42. $\int \frac{g'(x)}{[g(x)]^2+1}\,dx$

(7.1.2)

En los Problemas 43-58, utilice el método del cambio de variable para evaluar las integrales definidas.

43. $\int_0^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

44. $\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

45. $\int_2^3 \frac{2x+3}{(x^2+3x)^3}\,dx$

46. $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{4x^2+3}}\,dx$

47. $\int_2^5 (x-2)e^{-(x-2)^2/2}\,dx$

48. $\int_{\ln 4}^{\ln 7} \frac{e^x}{(e^x-3)^2}\,dx$

49. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

50. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

51. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$

52. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

53. $\int_5^9 \frac{x}{x-3}\,dx$

54. $\int_0^2 \frac{x}{x+2}\,dx$

55. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

56. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}$

57. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

58. $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx$

59. Utilice el hecho de que

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

para evaluar

$$\int \cot x\, dx$$

7.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

Como se mencionó al comienzo de este capítulo, la integración por partes es la regla del producto en forma integral. Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones derivables. Derivando su producto con respecto a x

$$(uv)' = u'v + uv'$$

que se puede expresar como

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Integrando los dos miembros con respecto a x se obtiene

$$\int uv'\, dx = \int (uv)'\, dx - \int u'v\, dx$$

Como uv es una primitiva de $(uv)'$,

$$\int (uv)'\, dx = uv + C$$

Por tanto, tenemos que

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$$

Nótese que la constante C se puede incorporar a la integral indefinida del miembro derecho. Como $u' = du/dx$ y $v' = dv/dx$, podemos escribir en forma abreviada

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

El siguiente recuadro resume este resultado.

REGLA DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables. Entonces

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

o, de forma abreviada,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Probablemente nos estemos preguntando en qué nos puede ayudar esto, dado que hemos cambiado la integral por otra. Veamos un primer ejemplo.

Ejemplo 1 **Integración por partes** Calcule

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx$$

Solución

El integrando x sen x es un producto de dos funciones, una de las cuales se denominará u y la otra v'. Como aplicar la regla de integración por partes produce otra

integral de la forma $\int u'v\,dx$, hay que escoger u y v' de forma que $u'v$ sea una expresión más simple. Esto sugiere la elección siguiente

$$u = x \quad \text{y} \quad v' = \operatorname{sen} x$$

Como $v = -\cos x$ y $u' = 1$, la integral $\int u'v\,dx$ es entonces de la forma $-\int \cos x\,dx$ que es de hecho más simple. Se obtiene

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= (-\cos x)(x) - \int (-\cos x)(1)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Si se hubiera elegido $v' = x$ y $u = \operatorname{sen} x$, entonces habría resultado $v = \frac{1}{2}x^2$ y $u' = \cos x$. La integral $\int u'v\,dx$ hubiera sido entonces de la forma $\int \frac{1}{2}x^2 \cos x\,dx$, que es incluso más complicada que $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Utilizando la forma abreviada $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ se escribiría

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

y

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} &= \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\underbrace{dx}_{du} \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 2 **Integración por partes** Calcule

$$\int x \ln x\,dx$$

Solución

Como no conocemos la primitiva de $\ln x$, probamos con

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad v' = x$$

Entonces

$$u' = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

y

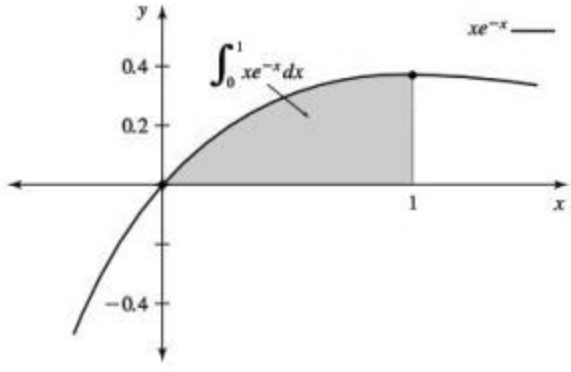
$$\begin{aligned}\int x \ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

◀

Antes de presentar algunos trucos más, mostraremos cómo se calculan integrales definidas con este método.

Ejemplo 3 **Integral definida** Calcule

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$



▲ **Figura 7.7**
La región correspondiente a la integral definida del Ejemplo 3

Solución

La Figura 7.7 representa la integral definida. El integrando es continuo en [0, 1]. Hacemos

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^{-x}dx$$

Entonces

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -e^{-x}$$

Por tanto,

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$

$$= -1e^{-1} - (-0e^{-0}) + \int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + (-e^{-1} - (-e^{-0}))$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$$ ◀

En los dos ejemplos siguientes, mostraremos un truco que algunas veces resulta útil al integrar por partes. La técnica se denomina «multiplicación por 1».

Ejemplo 4 **Multiplicación por 1** Calcule

$$\int \ln x\,dx$$

Solución

El integrando no es un producto de dos funciones, pero se puede escribir como $(1)(\ln x)$ y entonces

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad v' = 1$$

Por tanto

$$u' = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad v = x$$

Se obtiene entonces

$$\int \ln x\,dx = \int (1)(\ln x)\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

La elección realizada de u y de v' puede parecer sorprendente, ya hemos dicho que nuestro objetivo es simplificar la integral, lo que a menudo significa que debemos intentar disminuir el exponente de funciones de la forma x^n. Sin embargo, en este caso, integrando 1 y derivando $\ln x$ se obtiene una integral más simple. De hecho, si hubiéramos escogido $u' = \ln x$ y $v = 1$, no habríamos podido realizar la integración por partes ya que habríamos necesitado la primitiva de $\ln x$ para calcular uv y $\int uv'\,dx$.

Si preferimos la notación abreviada, no es necesario multiplicar por 1 ya que

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad dv = dx$$

con

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = x$$

produce inmediatamente

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx$$
$$= x\ln x - x + C$$ ◀

Ejemplo 5 **Multiplicación por 1** Calcule

$$\int \tan^{-1} x\,dx$$

Solución

Se escribe $\tan^{-1}x = (1)(\tan^{-1}x)$, y

$$u = \tan^{-1}x \quad \text{y} \quad v' = 1$$

Entonces

$$u' = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{y} \quad v = x$$

Por tanto

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

Ahora es necesario utilizar el método del cambio de variable para calcular la integral del miembro derecho. Con

$$w = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad \frac{dw}{dx} = 2x$$

se obtiene

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln|w| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$$

siendo C_1 la constante de integración. Entonces,

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - C_1$$

La respuesta final se puede poner entonces como

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

siendo C la constante de integración, con $C = -C_1$. La sustitución de $-C_1$ por C se realiza por razones puramente estéticas. ◀

Ejemplo 6 **Uso repetido de la integración por partes** Calcule

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx$$

Solución

Al calcular una integral definida utilizando integración por partes, a menudo es más fácil calcular primero la integral indefinida y después utilizar el TFC, Parte II, para calcular la integral definida. Para calcular $\int x^2 e^x\,dx$ hacemos

$$u = x^2 \quad \text{y} \quad v' = e^x$$

Entonces

$$u' = 2x \quad \text{y} \quad v = e^x$$

Por tanto

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx \tag{7.5}$$

Para calcular la integral $\int xe^x\,dx$ hay que utilizar integración por partes una segunda vez. Sea

$$u = x \quad \text{y} \quad v' = e^x$$

Entonces

$$u' = 1 \quad \text{y} \quad v = e^x$$

Por tanto

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \tag{7.6}$$

Combinando (7.5) y (7.6) se obtiene

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - 2[xe^x - e^x + C] \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2c\end{aligned}$$

Tras calcular la integral indefinida, podemos evaluar la integral definida. Nótese que el integrando es continuo en [0, 1]. Sea $F(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x\,dx &= F(1) - F(0) \\ &= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2\end{aligned}$$ ◀

Ejemplo 7 **Uso repetido de la integración por partes** Calcule

$$\int e^x \cos x\,dx$$

Solución

Se puede comprobar que no importa a qué función denominemos u o a cuál denominemos v'. Sea

$$u = \cos x \quad \text{y} \quad v' = e^x$$

Entonces

$$u' = -\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad v = e^x$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \tag{7.7}$$

Aplicaremos la regla de integración por partes una segunda vez. Esta vez, la elección sí es importante. Es necesario hacer

$$u = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad v' = e^x$$

Entonces

$$u' = \cos x \quad \text{y} \quad v = e^x$$

Por tanto,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx \tag{7.8}$$

Combinando (7.7) y (7.8) se obtiene

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx$$

Puede verse que la integral $\int e^x \cos x\, dx$ aparece en ambos miembros. Ordenando términos se obtiene

$$2 \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + C_1$$

o

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

con $C = C_1/2$ [nótese que se ha introducido la constante C_1 (y C) en la respuesta final].

Hemos comentado que la elección de u y de v' en la segunda aplicación de la integración por partes sí importa. Si se hubiera hecho $u = e^x$ y $v' = \operatorname{sen} x$, entonces $u' = e^x$ y $v = -\cos x$, con lo que se obtendría

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

y por tanto, combinando esto con (7.7),

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

que es una ecuación correcta pero sin ninguna utilidad. ◀

Concluimos esta sección con un pequeño aviso de tipo práctico: en integrales de la forma $\int P(x) \operatorname{sen}(ax)\, dx$, $\int P(x) \cos(ax)\, dx$ y $\int P(x) e^{ax}\, dx$, siendo $P(x)$ un polinomio y a una constante, el polinomio $P(x)$ debe considerarse como u y las expresiones $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$ y e^{ax} como v'. Si una integral contiene funciones $\ln x$, $\tan^{-1} x$ o $\operatorname{sen}^{-1} x$, entonces estas funciones se tratan generalmente como u. Tras practicar con los problemas, podrá comprobarse la utilidad de este aviso.

7.2.1. Problemas

En los Problemas 1-30, utilice integración por partes para calcular las integrales.

1. $\int x\cos x\,dx$
2. $\int 3x\cos x\,dx$
3. $\int 2x\cos(3x)\,dx$
4. $\int 3x\cos(1-x)\,dx$
5. $\int 2x\operatorname{sen} x\,dx$
6. $\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx$
7. $\int xe^{x}\,dx$
8. $\int 2xe^{-x}\,dx$
9. $\int x^{2}e^{x}\,dx$
10. $\int 2x^{2}e^{-x}\,dx$
11. $\int x\ln x\,dx$
12. $\int x^{2}\ln x\,dx$
13. $\int x\ln(3x)\,dx$
14. $\int x^{2}\ln x^{2}\,dx$
15. $\int x\sec^{2}x\,dx$
16. $\int x\csc^{2}x\,dx$
17. $\int_{0}^{\pi/3} x\operatorname{sen} x\,dx$
18. $\int_{0}^{\pi/4} x\cos x\,dx$
19. $\int_{1}^{2} \ln x\,dx$
20. $\int_{1}^{e} \ln x^{2}\,dx$
21. $\int_{1}^{4} \ln\sqrt{x}\,dx$
22. $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx$
23. $\int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx$
24. $\int_{0}^{3} x^{2}e^{-x}\,dx$
25. $\int_{0}^{\pi/3} e^{x}\operatorname{sen} x\,dx$
26. $\int_{0}^{\pi/6} e^{x}\cos x\,dx$
27. $\int e^{-3x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$
28. $\int e^{-2x}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$
29. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
30. $\int \cos(\ln x)\,dx$

31. El cálculo de la integral

$$\int \cos^{2}x\,dx$$

requiere dos pasos.

Primero, escriba

$$\cos^{2}x = (\cos x)(\cos x)$$

y aplique integración por partes para demostrar que

$$\int \cos^{2}x\,dx = \operatorname{sen} x\cos x + \int \operatorname{sen}^{2}x\,dx$$

Después utilice $\operatorname{sen}^{2}x + \cos^{2}x = 1$ para sustituir $\operatorname{sen}^{2}x$ en la integral del miembro derecho, y complete la integración de $\int \cos^{2}x\,dx$.

32. El cálculo de la integral

$$\int \operatorname{sen}^{2}x\,dx$$

requiere dos pasos.

Primero, escriba

$$\operatorname{sen}^{2}x = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)$$

y aplique integración por partes para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^{2}x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^{2}x\,dx$$

Después utilice $\operatorname{sen}^{2}x + \cos^{2}x = 1$ para sustituir $\cos^{2}x$ en la integral del miembro derecho, y complete la integración de $\int \operatorname{sen}^{2}x\,dx$.

33. El cálculo de la integral

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx$$

requiere dos pasos.

(a) Escriba

$$\operatorname{arcsen} x = 1\cdot\operatorname{arcsen} x$$

y aplique una vez integración por partes para demostrar que

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx$$

(b) Utilice el método del cambio de variable para calcular

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx \tag{7.9}$$

y combine el resultado de (a) con (7.9) para completar al cálculo de $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

34. El cálculo de la integral

$$\int \arccos x\,dx$$

requiere dos pasos.
(a) Escriba

$$\arccos x = 1 \cdot \arccos x$$

y aplique una vez integración por partes para demostrar que

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(b) Utilice el método del cambio de variable para calcular

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{7.10}$$

y combine el resultado de (a) con (7.10) para completar al cálculo de $\int \arccos x\,dx$.

35. (a) Utilice integración por partes para demostrar que para $x > 0$

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

(b) Utilice el resultado de (a) para obtener

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

36. (a) Utilice integración por partes para demostrar que

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

Estas fórmulas se denominan **fórmulas de reducción**, ya que reducen en 1 el exponente de x cada vez que se aplican.
(b) Aplique repetidamente la fórmula de reducción de (a) para calcular

$$\int x^3 e^x\,dx$$

37. (a) Utilice integración por partes para verificar la validez de la fórmula de reducción

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

siendo a una constante distinta de cero.

(b) Aplique la fórmula de reducción de (a) para calcular

$$\int x^2 e^{-3x}\,dx$$

38. (a) Utilice integración por partes para verificar la validez de la fórmula de reducción

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

(b) Aplique repetidamente la fórmula de reducción de (a) para calcular

$$\int (\ln x)^3\,dx$$

En los Problemas 39-48, realice primero el cambio de variable apropiado y después utilice integración por partes para calcular las integrales indefinidas.

39. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

40. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

41. $\int x^3 e^{-x^2/2}\,dx$

42. $\int x^5 e^{x^2}\,dx$

43. $\int \operatorname{sen} x\cos x e^{\operatorname{sen} x}\,dx$

44. $\int \operatorname{sen} x\cos^3 x e^{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

45. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

47. $\int \ln(\sqrt{x}+1)\,dx$

48. $\int x^3 \ln(x^2+1)\,dx$

7.3 PRÁCTICA DEL CAMBIO DE VARIABLE Y DE LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

En las dos secciones anteriores, hemos aprendido las dos técnicas de integración principales, el método del cambio de variable y la integración por partes. Una de las mayores dificultades en la integración es decidir qué regla hay que utilizar. Esto lleva mucha práctica. Esta sección está dedicada a practicar la integración. Además, aprenderemos a integrar algunas funciones racionales.

7.3.1 Práctica del cambio de variable

Ejemplo 1 Calcule

$$\int \tan x\sec^2 x e^{\tan x}\,dx$$

Solución

Como $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$, intentaremos el cambio $w = \tan x$. Entonces $dw = \sec^2 x\,dx$ y

$$\int \tan x \sec^2 x e^{\tan x}\,dx = \int we^w\,dw$$

Para continuar, es necesario utilizar integración por partes, con

$$u = w \quad \text{y} \quad v' = e^w$$

Entonces

$$u' = 1 \quad \text{y} \quad v = e^w$$

y

$$\int we^w\,dw = we^w - \int e^w\,dw = we^w - e^w + C$$

Haciendo $w = \tan x$ se obtiene

$$\int \tan x \sec^2 x e^{\tan x}\,dx = e^{\tan x}(\tan x - 1) + C$$ ◀

Frecuentemente, antes de integrar será necesario realizar cambios algebraicos en el integrando.

Ejemplo 2 Calcule

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{9 + x^2}\,dx$$

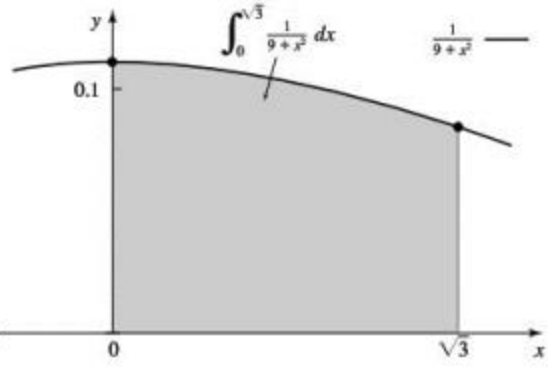
Solución

La Figura 7.8 muestra la región correspondiente a la integral definida. El integrando es continuo en $[0, \sqrt{3}]$. Además, el integrando se parece a la función $\frac{1}{1+u^2}$, cuya primitiva es $\tan^{-1} u$. Sin embargo, en el denominador tenemos un 9. Para conseguir un 1, se puede sacar factor común 9 en el denominador, con lo que resulta

$$\frac{1}{9 + x^2} = \frac{1}{9(1 + \frac{x^2}{9})} = \frac{1}{9(1 + (\frac{x}{3})^2)}$$

La última expresión sugiere ahora que se puede intentar el cambio

$$u = \frac{x}{3} \quad \text{con} \quad dx = 3\,du$$



▲ **Figura 7.8**
La región correspondiente a la integral definida del Ejemplo 2

Como se desea evaluar una integral definida, hay que cambiar también los límites de integración. Puede verse que $x = 0$ corresponde a $u = 0$ y que $x = \sqrt{3}$ corresponde a $u = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Entonces

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{3}\tan^{-1}u\Big]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) - \tan^{-1}0\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{18} \quad \blacktriangleleft$$

El siguiente ejemplo ilustra que la simplificación previa del integrando puede ser de gran ayuda.

Ejemplo 3 Calcule

$$\int x^{1/2}\ln(x^{1/2}e^x)\,dx$$

Solución

Antes de aplicar las técnicas, es conveniente simplificar el logaritmo. Se obtiene

$$\ln(x^{1/2}e^x) = \ln x^{1/2} + \ln e^x = \frac{1}{2}\ln x + x$$

La integral se transforma en

$$\int x^{1/2}\ln(x^{1/2}e^x)\,dx = \int x^{1/2}\left(\frac{1}{2}\ln x + x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x^{1/2}\ln x\,dx + \int x^{3/2}\,dx$$

La integral se puede calcular utilizando integración por partes, con

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad v' = x^{1/2}$$

Entonces

$$u' = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad v = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Se calcula la primera integral

$$\int x^{1/2}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

La otra integral es inmediata:

$$\int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

Combinando los resultados se obtiene

$$\int x^{1/2}\ln(x^{1/2}e^x)\,dx = \frac{1}{2}\int x^{1/2}\ln x\,dx + \int x^{3/2}dx$$
$$= \frac{1}{3}x^{3/2}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

Nótese que se ha utilizado el mismo símbolo C para denominar a las constantes de integración. Podríamos haberlas denominado C_1 y C_2 y después haberlas combinado como $C = C_1 + C_2$. Pero como simplemente indican constantes arbitrarias, no es necesario expresar cómo se relacionan y se pueden denominar simplemente con el mismo símbolo. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no son las mismas. ◀

7.3.2 Funciones racionales y descomposición en fracciones simples

Una función racional f es el cociente de 2 polinomios. Es decir,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{7.11}$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Para integrar funciones racionales, utilizaremos una técnica algebraica denominada método de **fracciones simples**, para escribir $f(x)$ como una suma de polinomios y funciones racionales más sencillas. Esta suma se denomina **descomposición en fracciones simples**. Las funciones racionales más sencillas de la descomposición, que se podrán integrar con los métodos que hemos aprendido, son de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{o} \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} \tag{7.12}$$

siendo A, B, C, a, b y c constantes, y n un entero positivo. En estas expresiones, el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ no se puede factorizar en un producto de 2 funciones lineales con coeficientes reales. Ese tipo de polinomios se denominan **irreducibles** (en otras palabras, $ax^2 + bx + c$ es irreducible si y sólo si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales).

Si el grado de $P(x)$ en (7.11) es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, el primer paso de la descomposición en fracciones simples será dividir los polinomios para escribir $f(x)$ como una suma de un polinomio y una función racional, siendo la función racional tal que el grado del polinomio de su numerador es menor que el grado del polinomio de su denominador (estas funciones racionales se denominan **propias**). Ilustraremos este paso en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 4 **División de polinomios antes de la integración** Calcule

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx$$

Solución

El grado de numerador es igual al grado del denominador. Utilizando división de polinomios o escribiendo el integrando en la forma

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$$

Resulta un polinomio de grado 0 y una función racional propia. El integrando se puede integrar en esta nueva forma:

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx = \int\left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx = x - 2\ln|x+2| + C$$ ◀

Ejemplo 5 **División de polinomios antes de la integración** Calcule

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 17x - 3}{x^2 - 2x + 5}\, dx$$

Solución

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se dividen los polinomios para simplificar el integrando.

$$\begin{array}{rrr|l} & & 3x & -1 \\ \hline x^2 & -2x & +5) & 3x^3 \quad -7x^2 \quad +17x \quad -3 \\ & & & \underline{3x^3 \quad -6x^2 \quad +15x} \\ & & & \quad -x^2 \quad +2x \quad -3 \\ & & & \quad \underline{-x^2 \quad +2x \quad -5} \\ & & & \qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

Es decir,

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 17x - 3}{x^2 - 2x + 5} = 3x - 1 + \frac{2}{x^2 - 2x + 5}$$

La ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$ no tiene soluciones en reales, como se puede ver utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado. Esto significa que es irreducible. Se puede, no obstante, completar el cuadrado. Es decir,

$$x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x - 1)^2 + 4$$

La integral a evaluar es por tanto

$$\int \left(3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2 + 4}\right) dx = \int (3x - 1)\, dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\, dx \qquad (7.13)$$

La primera integral es sencilla. Resulta

$$\int (3x - 1)\, dx = \frac{3}{2}x^2 - x + C$$

Para evaluar la segunda integral, se utiliza un truco similar al empleado en el Ejemplo 2 de esta sección. Concretamente, se extrae factor común 4 en el denominador.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (\frac{x-1}{2})^2}\, dx$$

Haciendo

$$u = \frac{x - 1}{2} \quad \text{con} \quad dx = 2\, du$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (\frac{x-1}{2})^2}\, dx &= \frac{1}{4} \int \frac{2\, du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Juntando todos los resultados [y recordando que había un factor de 2 en la segunda integral de (7.13)], el resultado es

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 17x - 3}{x^2 - 2x + 5}\, dx = \frac{3}{2}x^2 - x + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C \qquad \blacktriangleleft$$

Suponga ahora que la función racional es propia. A menos que el integrando sea de uno de los tipos de (7.12), es necesario descomponerlo. Existe un resultado de álgebra que dice que todo polinomio se puede expresar como un producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles. Esa es la clave para la descomposición en fracciones simples. Se factoriza el denominador en forma de producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles. Los factores lineales corresponden entonces a una suma de funciones racionales que se expresa como sigue:

Si el factor lineal $ax + b$ está contenido n veces en la factorización del denominador de una función racional propia, entonces la descomposición en fracciones simples contiene términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

siendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constantes.

Ejemplo 6 **Factores lineales diferentes** Calcule

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$

Solución

El integrando es una función racional cuyo denominador es un producto de 2 funciones lineales diferentes. Entonces, el integrando se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \tag{7.14}$$

siendo A y B constantes que hay que determinar. Para calcular A y B, se suman las fracciones del miembro derecho de (7.14). Es decir,

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}$$

Como eso debe ser igual a $\frac{1}{x(x-1)}$, se concluye que

$$(A+B)x - A = 1$$

Por tanto,

$$A + B = 0 \quad \text{y} \quad -A = 1$$

Resulta entonces $A = -1$ y $B = -A = 1$. Es decir,

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

El integrando se puede expresar ahora como una suma de dos funciones racionales, y cada una de ellas se puede integrar inmediatamente:

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right] dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C \qquad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 7 **Factores lineales repetidos** Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

Solución

El integrando es una función racional propia cuyo denominador es el producto de tres funciones lineales, concretamente, x, x (de nuevo) y $x+1$. Por tanto, el integrando se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \tag{7.15}$$

siendo A, B y C constantes. Como en el ejemplo anterior, A, B y C se obtienen sumando las relaciones del miembro derecho de (7.15). Se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} &= \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}\end{aligned}$$

Comparando la última expresión con el miembro izquierdo de (7.15), se concluye que

$$A + C = 0, \quad A + B = 0, \quad \text{y } B = 1$$

Esto implica que $A = -1$ y $C = 1$. Por tanto,

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

y

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

◀

Los factores cuadráticos irreducibles del denominador de las funciones racionales propias se consideran en la descomposición en fracciones simples como sigue.

Si el factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ está contenido n veces en la factorización del denominador de una función racional propia, entonces la descomposición en fracciones simples contiene términos de la forma

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Ejemplo 8 **Factores cuadráticos irreducibles diferentes** Calcule

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2+2)(x^2+1)}\,dx$$

Solución

La función racional del integrando es propia. El denominador está factorizado y cada factor es un polinomio cuadrático irreducible. Además, los dos factores son diferentes. Por tanto, el integrando se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{2x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+2C)x + B + 2D}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

Comparando la última expresión con el integrando, se obtiene

$$A + C = 2, \quad B + D = -1, \quad A + 2C = 2, \quad \text{y } B + 2D = -2$$

con lo que $C = 0$ (se escribe como $A + 2C = 2$ como $A + C + C = 2$ y se usa que $A + C = 2$) y $D = -1$ (se escribe $B + 2D = -2$ como $B + D + D = -2$ y se usa que $B + D = -1$). Entonces $A = 2$ y $B = 0$. Por tanto,

$$\frac{2x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+1}$$

y

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x^2+2)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u} - \tan^{-1}x + C = \ln|u| - \tan^{-1}x + C$$

$$= \ln|x^2+2| - \tan^{-1}x + C$$

donde se ha utilizado el cambio $u = x^2 + 2$. ◀

Ejemplo 9 **Factores cuadráticos irreducibles repetidos** Calcule

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Solución

La función racional $\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}$ es propia puesto que el numerador es un polinomio de grado 2 y el denominador es de grado 4 [ya que $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$]. El denominador contiene dos veces el factor cuadrático irreducible $x^2 + 1$. Por tanto, el integrando se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)}{(x^2+1)^2}$$

Comparando la última expresión con el integrando, se concluye que

$$A = 0, \quad B = 1, \quad A + C = 1, \quad \text{y } B + D = 1$$

lo que implica que $C = 1$ y $D = 0$. Por tanto,

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

y

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$$

La primera integral del miembro derecho es $\tan^{-1} x + C$. Para evaluar la segunda integral del miembro derecho, utilizaremos el cambio $u = x^2 + 1$ con $du/2 = x\, dx$. Resulta entonces

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$

Combinando los dos resultados, se obtiene

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \tan^{-1} x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \quad \blacktriangleleft$$

Concluiremos esta sección proporcionando un resumen de los dos casos más importantes, concretamente, cuando el integrando es una función racional en la que el denominador es un polinomio de grado 2 y, o bien es un producto de dos factores lineales no necesariamente diferentes, o es un polinomio cuadrático irreducible.

El primer paso es asegurarse de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Si no, hay que dividir los polinomios para simplificar el integrando.

Suponemos entonces que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador (es decir, el integrando es una función racional propia). La función racional $f(x)$ se escribe como

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

siendo $Q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, y $P(x) = rx + s$. O bien $Q(x)$ se puede factorizar en dos factores lineales, o es irreducible (es decir, no tiene raíces reales).

Caso 1a: $Q(x)$ es un producto de dos factores lineales distintos. En este caso, se escribe

$$Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siendo x_1 y x_2 las dos raíces distintas de $Q(x)$. Se utiliza entonces el método de descomposición en fracciones simples para simplificar la función racional:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{rx + s}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}\right]$$

Hay que determinar las constantes A y B, como en el Ejemplo 6.

Caso 1b: ***$Q(x)$ es un producto de dos factores lineales idénticos.*** En este caso, se escribe

$$Q(x) = a(x - x_1)^2$$

siendo x_1 la raíz de $Q(x)$. Se utiliza entonces el método de descomposición en fracciones simples para simplificar la función racional:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{rx + s}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}\right]$$

Hay que determinar las constantes A y B, como en el Ejemplo 7.

Caso 2: ***$Q(x)$ es un polinomio cuadrático irreducible.*** En este caso,

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } b^2 - 4ac < 0$$

y hay que completar el cuadrado, como en el Ejemplo 5. Esto conduce entonces a integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \text{o} \quad \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$$

La primera integral es de la forma $\tan^{-1} x + C$, y la segunda integral se puede evaluar mediante cambio de variable.

7.3.3. Problemas

(7.3.1)

En los Problemas 1-12, utilice cambio de variable o integración por partes para calcular las integrales.

1. $\int xe^{-2x}\, dx$
2. $\int xe^{-2x^2}\, dx$
3. $\int \frac{1}{\tan x}\, dx$
4. $\int \frac{1}{\csc x \sec x}\, dx$
5. $\int 2x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$
6. $\int 2x^2 \operatorname{sen} x\, dx$
7. $\int \frac{1}{16 + x^2}\, dx$
8. $\int \frac{1}{x^2 + 5}\, dx$
9. $\int \frac{x}{x + 3}\, dx$
10. $\int \frac{1}{x^2 + 3}\, dx$
11. $\int \frac{x}{x^2 + 3}\, dx$
12. $\int \frac{x + 2}{x^2 + 2}\, dx$
13. La integral

$$\int \ln x\, dx$$

se puede evaluar de dos formas:

(a) Escriba $\ln x = 1 \cdot \ln x$ y utilice integración por partes.

(b) Utilice el cambio $u = \ln x$ e integración por partes.

14. Utilice un cambio adecuado seguido de integración por partes para calcular

$$\int x^3 e^{-x^2/2}\, dx$$

15. Utilice un cambio apropiado para calcular

$$\int x(x - 2)^{1/4}\, dx$$

16. Utilice un cambio apropiado tras simplificar la integral para calcular

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}\, dx$$

En los Problemas 17-22, calcule las integrales definidas.

17. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$
18. $\int_1^2 \ln(x^2 e^x)\, dx$
19. $\int_{-1}^0 \frac{2}{1 + x^2}\, dx$
20. $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$
21. $\int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen} x\, dx$
22. $\int_0^{\pi/6} (1 + \tan^2 x)\, dx$

(7.3.2)

23. **(a)** Calcule A y B para que

$$\frac{1}{x(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2}$$

(b) Utilice la descomposición en fracciones simples de (a) para calcular

$$\int \frac{1}{x(x-2)}\,dx$$

24. (a) Calcule A y B para que

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

(b) Utilice la descomposición en fracciones simples de (a) para calcular

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

25. Complete el cuadrado del denominador para calcular

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx$$

26. Complete el cuadrado del denominador para calcular

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

En los Problemas 27-36, calcule las integrales.

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+4)(x+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+3}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2-4}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\,dx$

En los Problemas 37-44, calcule las integrales definidas.

37. $\displaystyle\int_3^5 \frac{x-1}{x}\,dx$

38. $\displaystyle\int_3^5 \frac{x}{x-1}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

40. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$

42. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1} x\,dx$

En los Problemas 45-52, calcule las integrales.

45. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2 x}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-1)^2}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{4}{(1-x)(1+x)^2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3(x-3)}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-9)^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x-2)^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

7.4 INTEGRALES IMPROPIAS

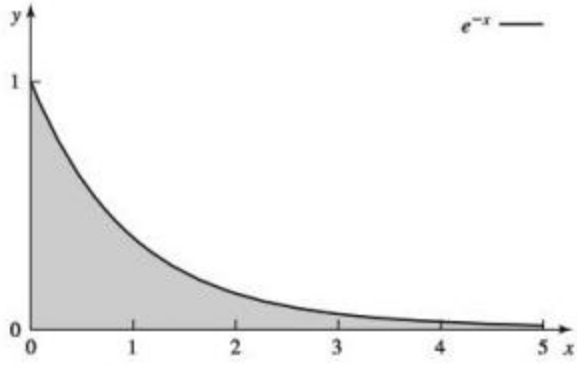
En esta sección se presentarán integrales definidas de dos tipos que se caracterizan por:

1. Uno de los límites de integración o ambos son infinitos. Es decir el intervalo de integración no está limitado.
2. El integrando se hace infinito en uno o más puntos del intervalo de integración.

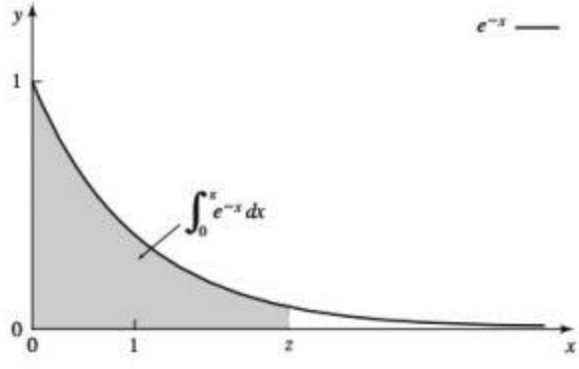
Estas integrales se denominan **impropias**.

7.4.1 Tipo 1: intervalos no limitados

Supongamos que se desea calcular el área de la región no limitada que está por debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ y por encima del eje x para $x \geqslant 0$ (*véase* la



▲ **Figura 7.9**
La región no limitada entre la gráfica de $y = e^{-x}$ y el eje x para $x \geqslant 0$



▲ **Figura 7.10**
Región entre 0 y z

Figura 7.9). ¿Cómo proceder? Sabemos cómo calcular el área de una región limitada por la gráfica de una función continua [en este caso: $f(x) = e^{-x}$] y el eje x entre 0 y z. Concretamente,

$$A(z) = \int_0^z e^{-x}\,dx = -e^{-x}]_0^z = 1 - e^{-z}$$

Esto corresponde al área sombreada en la Figura 7.10. Si ahora se hacer tender z a infinito, podemos pensar que el valor límite (si existe) es el área por debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ y por encima del eje x para $x \geqslant 0$ (*véase* la Figura 7.9):

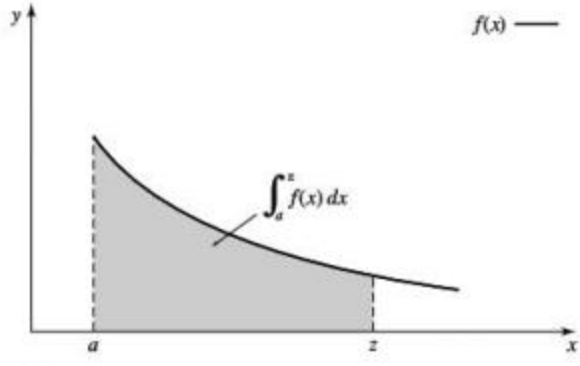
$$A = \lim_{z \to \infty} A(z) = \lim_{z \to \infty} (1 - e^{-z}) = 1$$

Entonces

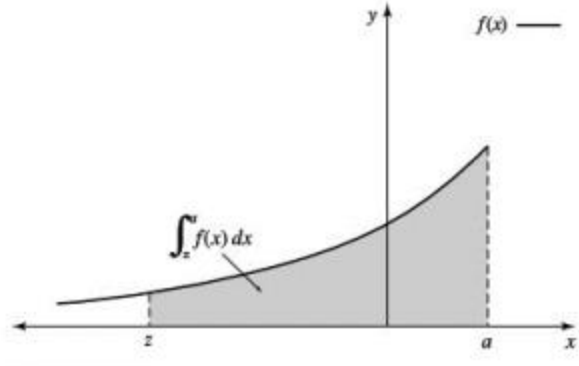
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

Por tanto, para funciones continuas en intervalos no limitados (*véanse* las Figuras 7.11 y 7.12) se define

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{z \to \infty} \int_a^z f(x)\,dx$$



▲ **Figura 7.11**
Definición de integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como límite de $\int_a^z f(x)\,dx$ cuando $z \to \infty$



▲ **Figura 7.12**
Definición de integral impropia $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ como límite de $\int_z^a f(x)\,dx$ cuando $z \to -\infty$

y

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_{z}^{a} f(x)\,dx$$

Puede resultar sorprendente que el área de una región no limitada sea finita. Este no es necesariamente el caso y sólo ocurre si la gráfica de $f(x)$ se aproxima al eje x suficientemente rápido. Ilustraremos esta idea en los dos ejemplos siguientes.

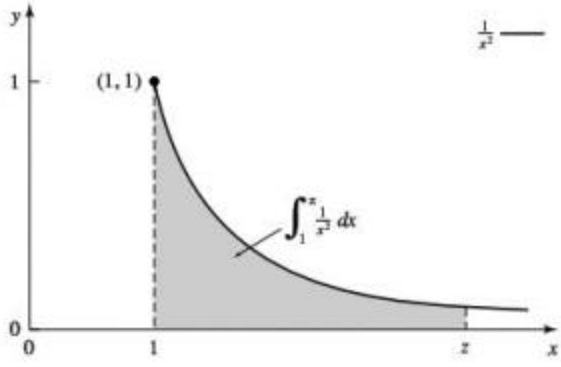
Ejemplo 1 **Área finita** Calcule

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Solución

La función $y = 1/x^2$ es continua en $[1, \infty)$. Primero se calcula

$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^z = 1 - \frac{1}{z}$$



◀ **Figura 7.13**
La región correspondiente a $A(z)$ en el Ejemplo 1

(*véase* la Figura 7.13) y después se hace $z \to \infty$. Se obtiene

$$\lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) = 1$$

Entonces,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$ ◀

Ejemplo 2 **Área infinita** Calcule

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución

La función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es continua en $[1, \infty)$. Primero se calcula

$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big]_1^z = 2(\sqrt{z} - 1)$$

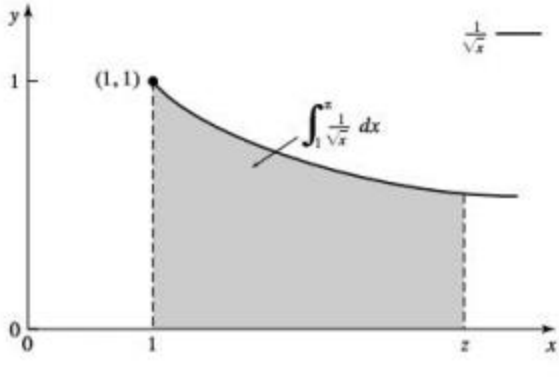
(*véase* la Figura 7.14) y después se hace $z \to \infty$. Se obtiene

$$\lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty} 2(\sqrt{z} - 1) = \infty$$

Entonces,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

no existe. ◀



◀ **Figura 7.14**
La región correspondiente a $A(z)$ en el Ejemplo 2

Volviendo a los Ejemplos 1 y 2, podemos ver que en ambos casos, los respectivos integrandos se acercan al eje x cuando $x \to \infty$. Es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Sin embargo, $\frac{1}{x^2}$ se acerca al eje x mucho más rápido que $\frac{1}{\sqrt{x}}$, como se puede ver en las gráficas de la Figura 7.15. El exponente de x en el denominador determina lo rápido que la función se aproxima al eje x. El área entre la gráfica y el eje x desde $x = 1$ hasta infinito sólo será finita si la gráfica se aproxima al eje x lo suficientemente rápido. De hecho, si se intenta calcular

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

para $0 < p < \infty$, se obtiene que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{para } p > 1 \\ \infty & \text{para } 0 < p \leqslant 1 \end{cases}$$

(Nótese que $y = 1/x^p$ es continua en $[1, \infty)$). Es decir, para $p > 1$, la función $\frac{1}{x^p}$ se acerca al eje x lo suficientemente rápido cuando $x \to \infty$ como para que el área bajo la gráfica sea finita (en el Problema 33 volveremos sobre este punto).

Utilizaremos la siguiente terminología para indicar si una integral impropia es finita o infinita.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, \infty)$. Si

$$\lim_{z\to\infty} \int_a^z f(x)\,dx$$

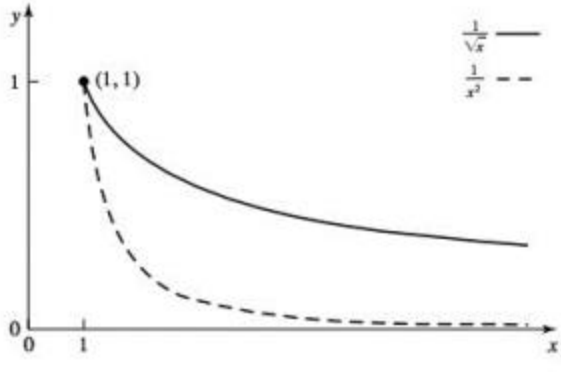
existe y tiene un valor finito, se dice que la integral impropia

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

converge, y se define

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{z\to\infty} \int_a^z f(x)\,dx$$

En caso contrario, se dice que la integral impropia **diverge**.



◀ **Figura 7.15**
La función $y = \frac{1}{x^2}$ se aproxima al eje x mucho más rápido que la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Las definiciones son análogas cuando el límite de integración inferior es infinito.

Ejemplo 3 **Límite inferior infinito** Demuestre que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

converge.

Solución

Nótese que $y = 1/(x-1)^2$ es continua en $(-\infty, 0]$. Para demostrar que la integral converge, obtendremos su valor. Es necesario calcular

$$A(z) = \int_{z}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \quad \text{para } z < 0$$

y entonces se hace $z \to -\infty$ (*véase* la Figura 7.16). Se obtiene

$$\int_{z}^{0} (x-1)^{-2}dx = -(x-1)^{-1}\Big]_{z}^{0}$$

$$= -\frac{1}{x-1}\Big]_{z}^{0} = -\frac{1}{-1} + \frac{1}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$$

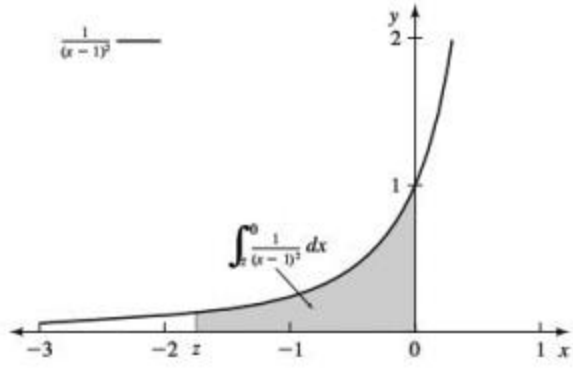
y

$$\lim_{z \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = 1$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = 1$$ ◀

Se presenta a continuación el caso en el que los dos límites de integración son infinitos.



▲ **Figura 7.16**
La región correspondiente a $A(z)$ en el Ejemplo 3

Sea una función $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \tag{7.16}$$

siendo a un número real. Si *ambas* integrales impropias del miembro derecho de la Ecuación (7.16) son convergentes, entonces el valor de la integral impropia del miembro izquierdo de la Ecuación (7.16) es la suma de los dos valores límite de las integrales del miembro derecho.

Suponga que se desea calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$$

Se escoge un valor $a \in (-\infty, \infty)$, por ejemplo, $a = 0$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{\infty} x^3\,dx$$

Observando la Figura 7.17, es razonable pensar que ambas integrales del miembro derecho son divergentes. Se comprueba que esto es así para la segunda:

$$\int_{0}^{\infty} x^3\,dx = \lim_{z\to\infty} \int_{0}^{z} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{z} = \frac{1}{4}\lim_{z\to\infty}(z^4 - 0)$$

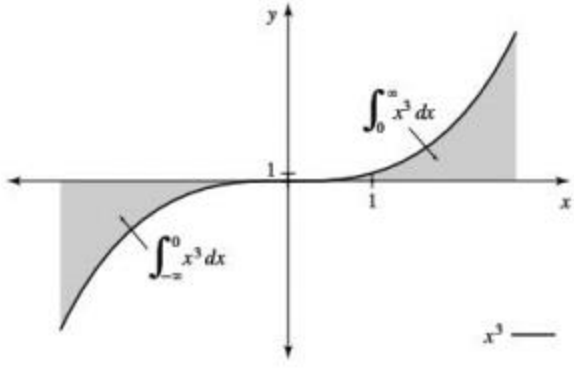
que no existe. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$$

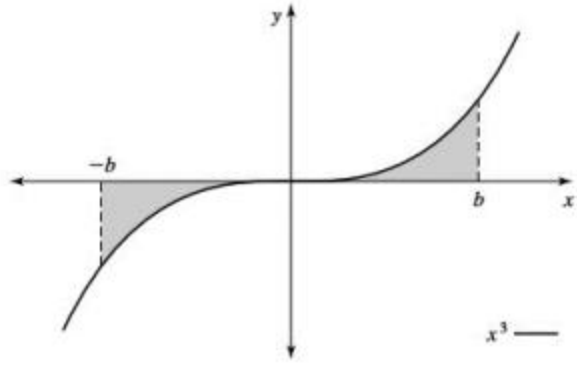
es divergente.

Es importante advertir que la definición de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es diferente de

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$$



▲ **Figura 7.17**
La integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$ es divergente



▲ **Figura 7.18**
Debido a la simetría, $\int_{-b}^{b} x^3\,dx = 0$

Ilustraremos esta idea utilizando de nuevo la función $f(x) = x^3$. Para cualquier $b > 0$ se cumple que

$$\int_{-b}^{b} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_{-b}^{b} = \frac{1}{4}(b^4 - (-b)^4) = 0$$

(*véase* la Figura 7.18). Por tanto,

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x^3\,dx = 0$$

Este límite no es lo mismo que $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$.

Observando la Figura 7.16, podemos ver que para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, es necesario dividir la integral en algún punto $a \in \mathbf{R}$. A menudo hay candidatos naturales para a. El siguiente ejemplo ilustrará esta idea.

Ejemplo 4 **Límites superior e inferior infinitos** Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Solución

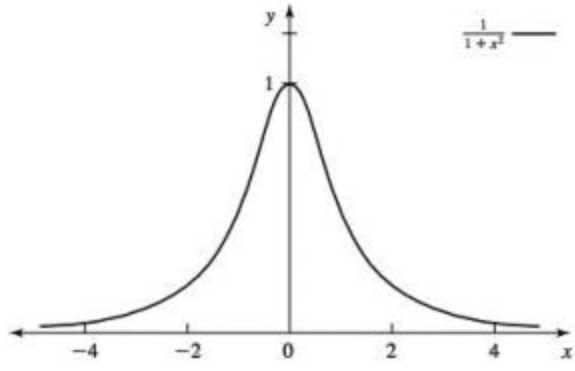
La Figura 7.19 muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Esta función es continua para todo $x \in \mathbf{R}$. Es simétrica respecto a $x = 0$. Una buena elección para dividir la integral es por tanto $a = 0$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora

$$\lim_{z\to\infty} \int_{0}^{z} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{z\to\infty} \left[\tan^{-1}x\right]_0^z$$

$$= \lim_{z\to\infty} (\tan^{-1}z - \tan^{-1}0) = \frac{\pi}{2}$$



▲ **Figura 7.19**
Gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el Ejemplo 4

y

$$\lim_{z\to-\infty}\int_z^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{z\to-\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_z^0$$

$$= \lim_{z\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}z) = \frac{\pi}{2}$$

El resultado $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ es lógico debido a la simetría. El área de la región a la izquierda del eje y es igual al área de la región a la derecha del eje y. Reuniendo los resultados, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$ ◀

Ejemplo 5 **Límites superior e inferior infinitos** Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Solución

La Figura 7.20 muestra la gráfica de $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Esta función es continua para todo $x \in \mathbf{R}$. Debido a la simetría respecto al origen, surge la tentación de decir que el área con signo a la izquierda de 0 es el negativo del área a la derecha de 0, y que, por tanto, el valor de la integral impropia debería ser cero. Esto es incorrecto. Si escogemos $a = 0$, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

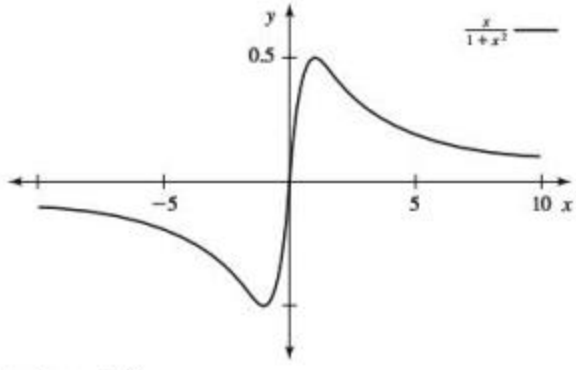
Empezamos por calcular

$$\int_0^z \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Utilizando el cambio $u = 1 + x^2$ y $du = 2x\,dx$, se obtiene

$$\int_0^z \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^{1+z^2} \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u|\Big]_1^{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1+z^2) - \ln 1] = \frac{1}{2}\ln(1+z^2)$$



▲ **Figura 7.20**
Gráfica de $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ en el Ejemplo 5

Tomando el límite cuando $z \to \infty$, se obtiene

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \infty$$

Como una de las integrales ya es divergente, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

es divergente, y por tanto no puede ser igual a cero. Este ejemplo contiene un importante mensaje: antes de utilizar la simetría para calcular una integral impropia, hay que asegurarse de que la integral existe. ◀

7.4.2 Tipo 2: integrando no acotado

Hasta ahora, al calcular una integral definida, nos hemos asegurado primero de que el integrando era continuo en el intervalo de integración. Ahora explicaremos qué hacer cuando el integrando se hace infinito en uno o más puntos del intervalo de integración. Supongamos que se desea integrar

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

La Figura 7.21 muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Se puede ver inmediatamente que $f(x)$ es continua en (0, 1], indefinida en $x = 0$, y que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

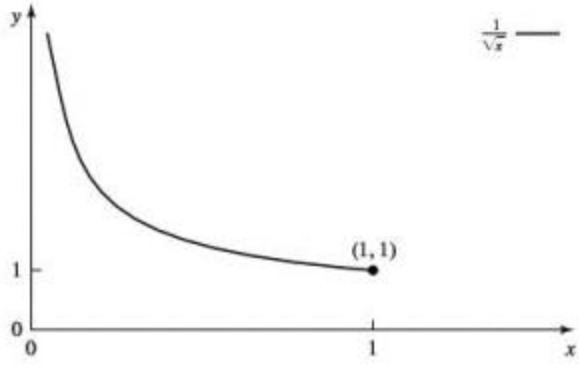
Escojamos un número $c \in (0, 1)$ y calculemos

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_c^1 = 2(1-\sqrt{c})$$

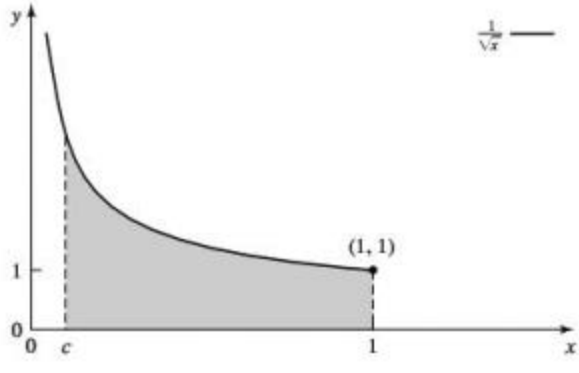
(*véase* la Figura 7.22). Si ahora hacemos $c \to 0^+$, el valor límite (si existe) será la integral definida $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Es decir,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} 2(1-\sqrt{c}) = 2$$

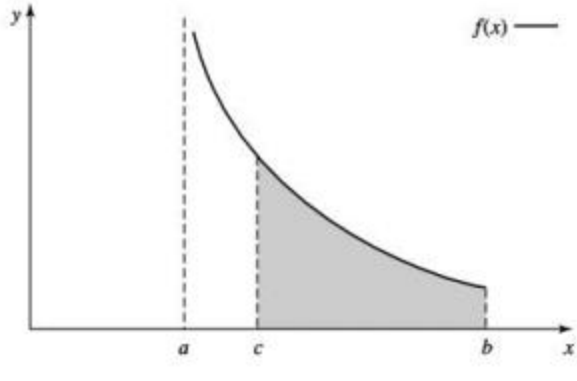
Si f es continua en $(a, b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (*véase* la Figura 7.23), se define



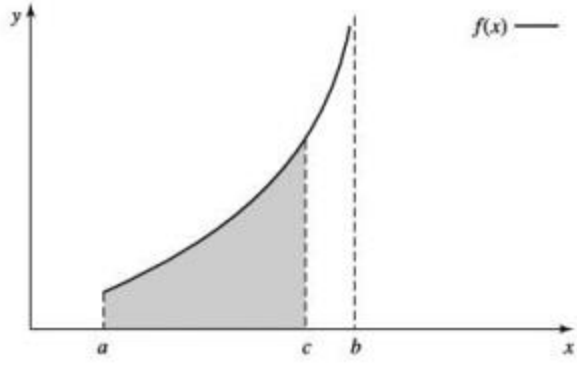
▲ **Figura 7.21**
Gráfica de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$



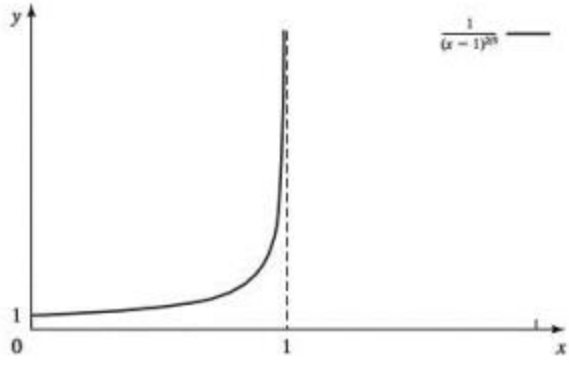
▲ **Figura 7.22**
El área de la región sombreada es $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2(1 - \sqrt{c})$



▲ **Figura 7.23**
La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define como el límite de $\int_c^b f(x)\,dx$ cuando $c \to a^+$



▲ **Figura 7.24**
La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define como el límite de $\int_a^c f(x)\,dx$ cuando $c \to b^-$



▲ **Figura 7.25**
Gráfica de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$, $0 \leqslant x < 1$, en el Ejemplo 6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Suponiendo que el límite existe, se dice que la integral impropia del miembro izquierdo de la ecuación **converge**. Si el límite no existe, se dice que la integral **diverge**.

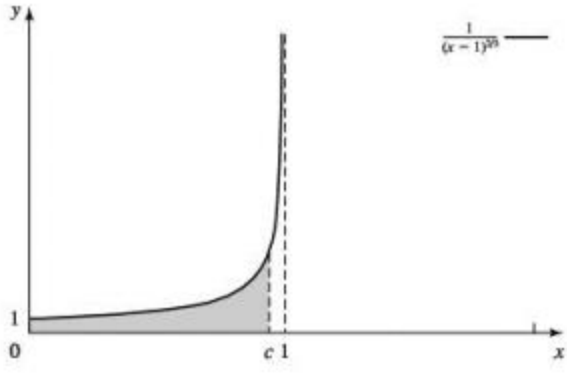
De forma similar, si f es continua en $[a, b)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ (*véase* la Figura 7.24), se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Suponiendo que el límite existe.

Ejemplo 6 **Integrando indefinido en el extremo derecho** Calcule

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



◀ **Figura 7.26**
El área de la región sombreada es $\int_0^c \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

Solución

La Figura 7.25 muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$. Se puede ver inmediatamente que $f(x)$ es continua en $[0, 1)$, indefinida en $x = 1$, y que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$

Para calcular la integral, se escoge un número $c \in (0, 1)$ y se calcula

$$\int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

(*véase* la Figura 7.26). Haciendo tender $c \to 1^-$ obtendremos la integral deseada. Es decir,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Primero se calcula la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3(x-1)^{1/3} + C$$

Si se hace $F(x) = 3(x-1)^{1/3}$, entonces

$$\lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \to 1^-} [F(c) - F(0)]$$

$$= \lim_{c \to 1^-} \left[3(c-1)^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\right] = 3 \qquad (7.17)$$

Por tanto, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3$$ ◀

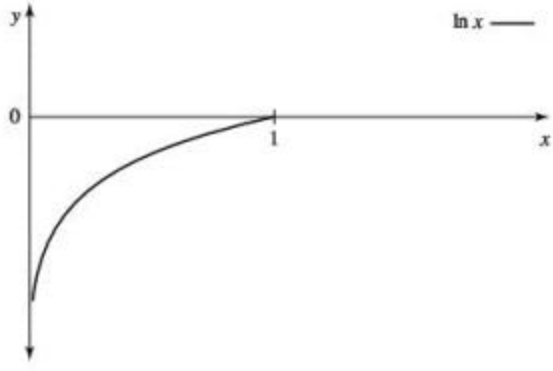
Ejemplo 7 **Integrando indefinido en el extremo izquierdo** Calcule

$$\int_0^1 \ln x\,dx$$

Solución

La Figura 7.27 muestra la gráfica de $f(x) = \ln x$, $0 < x \leqslant 1$. Se puede ver inmediatamente que $f(x)$ es continua en $(0, 1]$, no definida en $x = 0$, y que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$



▲ **Figura 7.27**
La gráfica de $f(x) = \ln x$, $0 < x \leq 1$, en el Ejemplo 7

Para determinar la integral definida, es necesario calcular

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \ln x \, dx$$

Como $F(x) = x \ln x - x$ es una primitiva de $f(x) = \ln x$, se obtiene

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \ln x \, dx = \lim_{c \to 0^+} [F(1) - F(c)]$$

$$= \lim_{c \to 0^+} [1 \ln 1 - 1 - c \ln c + c]$$

Es necesario calcular $\lim_{c \to 0^+} c \ln c$. Este límite es de la forma $0 \cdot \infty$. La regla de l'Hôpital produce

$$\lim_{c \to 0^+} c \ln c = \lim_{c \to 0^+} \frac{\ln c}{\frac{1}{c}} = \lim_{c \to 0^+} \frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}}$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{c^2}{1} \right) = -\lim_{c \to 0^+} c = 0$$

Junto con $\lim_{c \to 0^+} c = 0$, se obtiene por tanto

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \ln x \, dx = -1$$ ◀

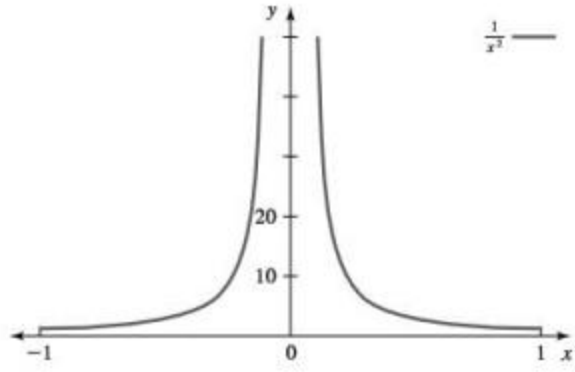
Ejemplo 8 **Integrando discontinuo en el intervalo** Calcule

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx$$

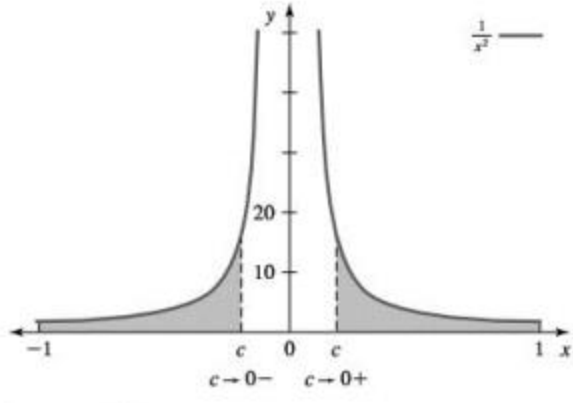
Solución

La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no está definida en $x = 0$. De hecho, tiene una asíntota horizontal en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$



▲ **Figura 7.28**
Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$



▲ **Figura 7.29**
La integral impropia $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

La Figura 7.28 muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Puede verse que dicha función es continua excepto en $x = 0$. Para tratar esta discontinuidad, se divide la integral en $x = 0$. Es decir,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

(*véase* la Figura 7.29). La función

$$F(x) = -\frac{1}{x}$$

es una primitiva de $\frac{1}{x^2}$. Por tanto,

$$\lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^-} [F(c) - F(-1)]$$

$$= \lim_{c\to 0^-} \left[-\frac{1}{c} - 1\right] = \infty$$

Ya hemos concluido que la integral es divergente. Pero para ver el valor del otro límite procederemos a calcularlo. Su valor es

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}[F(1)-F(c)]$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-1+\frac{1}{c}\right] = \infty$$

Por tanto,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx$$

es divergente. ◀

7.4.3 Un resultado de comparación de utilidad en integrales impropias

Hay muchos casos en los que es imposible evaluar exactamente una integral. Cuando se trabaja con integrales impropias, es muy frecuente el caso en el que todo lo que hay que saber es si la integral converge. En lugar de calcular exactamente el valor de la integral impropia, se puede recurrir a calcular integrales más simples que o bien dominan o son dominadas por la integral impropia de interés. Explicaremos este concepto gráficamente.

Sea $f(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$. Supongamos que se desea demostrar que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente. Es suficiente con encontrar una función $g(x)$ tal que $g(x) \geqslant f(x)$ para todo $x \geqslant a$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ sea convergente. Esto se ilustra en la Figura 7.30. Observando la gráfica, se puede ver claramente que

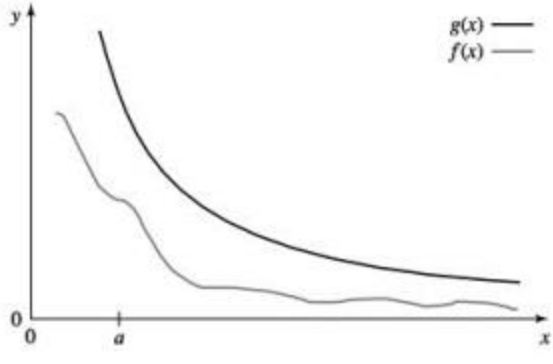
$$0 \leqslant \int_a^\infty f(x)\,dx \leqslant \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Si $\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$, se deduce que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente ya que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ está comprendida entre 0 y un número finito.

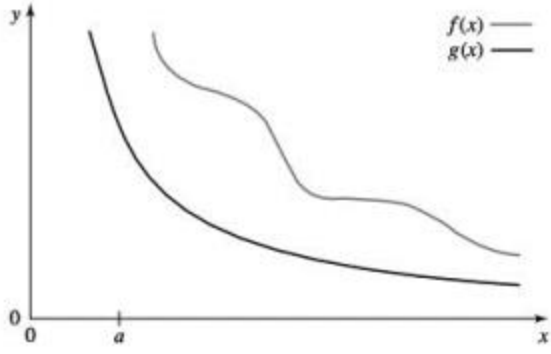
Supongamos de nuevo que $f(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$. Deseamos demostrar ahora que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente. Es suficiente con encontrar una función $g(x)$ tal que $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \geqslant a$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ sea divergente. Esto se ilustra en la Figura 7.31. Observando la gráfica, se puede ver claramente que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \geqslant \int_a^\infty g(x)\,dx \geqslant 0$$

Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, se deduce que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.



◀ **Figura 7.30**
La función $g(x)$ está por encima de la función $f(x)$



▲ **Figura 7.31**
La gráfica de $g(x)$ está por debajo de la gráfica de $f(x)$

Según el razonamiento anterior, podemos ver que en un caso se selecciona una función que domina a $f(x)$, mientras que en el otro caso se selecciona una función que es dominada por $f(x)$. Esto indica que es necesario tener en primer lugar una idea de si la integral puede converger, antes de buscar una función de comparación (con la práctica, seremos capaces de ver cada vez mejor si una integral puede converger o diverge). Dibujar las funciones puede servir de ayuda para convencernos de que estamos haciendo la comparación en la dirección correcta. Por supuesto, la función de comparación debe ser lo suficientemente simple como para que se pueda integrar sin ninguna clase de problemas. Presentaremos a continuación dos ejemplos que ilustran ambos casos.

Ejemplo 9 **Convergencia** Demuestre que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

es convergente.

Solución

La función $f(x) = e^{-x^2}$ es continua y positiva para $x \in [0, \infty)$. No se puede calcular la primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$ con ninguna de las técnicas que hemos aprendido en este texto. De hecho, no hay ninguna forma simple para expresar el valor de $\int_0^z e^{-x^2}\,dx$ para $z > 0$ (se puede expresar en forma de una suma de infinitos términos). Pero sí se puede determinar si la integral es convergente. Se escribe $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ como suma de dos integrales y se demuestra que cada una de ellas es finita:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Como $0 < e^{-x^2} \leqslant 1$, se deduce que

$$0 < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 dx = 1 < \infty$$

Para demostrar que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente, se utiliza que e^{-x} es una función decreciente y que si $x \geqslant 1$, entonces $x \leqslant x^2$. Tenemos entonces que

$$0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x} \quad \text{para } x \geqslant 1$$

Por tanto,

$$0 \leqslant \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} [-e^{-x}]_1^c = e^{-1} < \infty$$

Como ambas integrales son convergentes, entonces $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

Aunque para $0 < z < \infty$, $\int_0^z e^{-x^2}\,dx$ sólo se puede calcular de forma aproximada (por ejemplo, utilizando métodos numéricos como los que estudiaremos en la Sección 7.5), se puede demostrar utilizando herramientas muy diferentes (que no consideraremos en este texto) que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ejemplo 10 **Divergencia** Demuestre que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx$$

es divergente.

Solución

La función $f(x) = 1/\sqrt{x+\sqrt{x}}$ es continua en $[1, \infty)$. El integrando parece complicado. Pero como $x + \sqrt{x} \leqslant x + x$ para $x \geqslant 1$, se puede deducir que

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{para } x \geqslant 1$$

Entonces,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx \geqslant \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$$

como se muestra en el Ejemplo 2. Por tanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

es divergente.

7.4.4. Problemas

(7.4.1), (7.4.2)

Las integrales de los Problemas 1-16 son todas impropias y todas convergentes. Explique en cada caso por qué la integral es impropia, y calcule dicha integral.

1. $\int_0^{\infty} 3e^{-3x}\,dx$
2. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$
3. $\int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx$
4. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
5. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$
6. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$
7. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$
8. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx$
9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$
10. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4}\,dx$
11. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$
12. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
13. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$
14. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)^{1/3}}$
15. $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$
16. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

En los Problemas 17-20, determine si las integrales son convergentes. Si son convergentes, calcule su valor.

17. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$

1-8. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$

19. $\int_0^4 \frac{1}{x^4}\,dx$

20. $\int_0^4 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx$

21. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}}\,dx$

22. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^4}\,dx$

23. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

24. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

25. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

26. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

27. $\int_{-2}^2 \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^{1/3}}$

28. $\int_{-\infty}^1 \frac{3}{1+x^2}\,dx$

29. Determine si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

es convergente

Sugerencia: utilice la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

30. Aunque no se puede calcular la primitiva de $f(x) = e^{-x^2/2}$, se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

Utilice ese hecho para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

Sugerencia: escriba el integrando en la forma

$$x \cdot (xe^{-x^2/2})$$

y utilice integración por partes.

31. Determine el valor de la constante c para que

$$\int_0^{\infty} ce^{-3x}\,dx = 1$$

32. Determine el valor de la constante c para que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx = 1$$

33. En este problema, se estudia la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

para $0 < p < \infty$.

(a) Para $z > 1$, defina

$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{x^p}\,dx$$

y demuestre que

$$A(z) = \frac{1}{1-p}\,(z^{-p+1} - 1)$$

para $p \neq 1$ y

$$A(z) = \ln z$$

para $p = 1$.

(b) Utilice los resultados de (a) para demostrar que para $0 < p \leqslant 1$

$$\lim_{z \to \infty} A(z) = \infty$$

(c) Utilice los resultados de (a) para demostrar que para $p > 1$

$$\lim_{z \to \infty} A(z) = \frac{1}{p-1}$$

34. En este problema, se estudia la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

para $0 < p < \infty$.

(a) Calcule

$$\int \frac{1}{x^p}\,dx$$

para $0 < p < \infty$.

(*Sugerencia*: considere separadamente el caso de $p = 1$).

(b) Utilice el resultado de (a) para calcular

$$\int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

para $0 < c < 1$.

(c) Utilice el resultado de (b) para demostrar que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$$

para $0 < p < 1$.

(d) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

es divergente para $p \geqslant 1$.

(7.4.3)

35. (a) Demuestre que

$$0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$$

para $x \geqslant 1$.

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

es convergente.

36. (a) Demuestre que

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

para $x > 0$.

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

es convergente.

37. (a) Demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant \frac{1}{2x} > 0$$

para $x \geqslant 1$.

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

es divergente.

38. (a) Demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\ln x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0$$

para $x \geqslant 1$.

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\ln x}}\,dx$$

es divergente.

En los Problemas 39-42, obtenga una función de comparación para los integrandos y determine si la integral es convergente.

39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$

41. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

43. (a) Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que

$$2\ln x \leqslant \sqrt{x} \tag{7.18}$$

para x suficientemente grande. Utilice una calculadora gráfica para determinar cómo tiene que ser de grande x para que se cumpla (7.18).

(c) Utilice el resultado de (b) para demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx \tag{7.19}$$

converge. Utilice una calculadora gráfica para dibujar la función $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$, junto con su función o funciones de comparación, y utilice el gráfico para indicar cómo demostraría que la integral de (7.19) es convergente.

44. (a) Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que para cualquier $c > 0$,

$$cx \geqslant \ln x$$

para x suficientemente grande.

(c) Utilice el resultado de (b) para demostrar que para cualquier $p > 0$,

$$x^p e^{-x} \leqslant e^{-x/2}$$

suponiendo que x es suficientemente grande.

(d) Utilice el resultado de (c) para demostrar que para cualquier $p > 0$,

$$\int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx$$

es convergente.

7.5 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Existen integrales que son imposibles de calcular de forma exacta, como

$$\int_0^4 e^{-x^2}\,dx$$

En estas situaciones, son necesarias aproximaciones numéricas.

Una forma de aproximar numéricamente una integral surge de manera obvia de nuestra solución inicial al problema del área. Concretamente, la aproximación de áreas mediante rectángulos, es decir, la aproximación de la suma de Riemann. Recordemos que dada una función f continua,

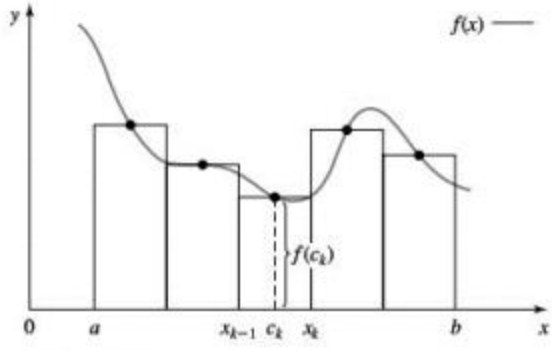
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

siendo $P = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, una secuencia de particiones de $[a, b]$ con $x_0 = a$, y $x_n = b$ y $\|P\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. El número c_k está en $[x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.

En lo que sigue, se asumirá que se realiza una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales. Es decir, la longitud de cada subintervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Se supone que la función f es continua en $[a, b]$. Se presentarán dos métodos, la regla del punto medio y la regla del trapecio.



▲ **Figura 7.32**
La regla del punto medio

7.5.1 Regla del punto medio

Se trata de la aproximación de la suma de Riemann, donde se escoge como c_k el punto medio de cada intervalo. El punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es

$$c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

La regla se define como sigue (*véase* la Figura 7.32).

REGLA DEL PUNTO MEDIO

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y sea $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. La integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se puede aproximar por

$$M_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

siendo $c_k = \frac{x_{k-1}+x_{-k}}{2}$ el punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

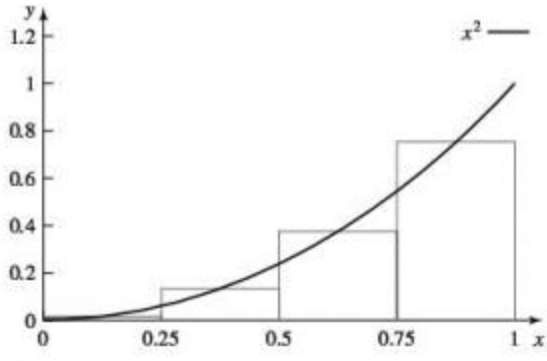
En el ejemplo que sigue, se ha escogido una integral que se puede calcular exactamente, de forma que se puede ver la exactitud de la aproximación.

Ejemplo 1 **Regla del punto medio** Utilice la regla del punto medio con $n = 4$ para aproximar

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Solución

La función $f(x) = x^2$ es continua en [0, 1]. Para $n = 4$, se obtiene $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$, y por tanto hay 4 subintervalos, cada uno con longitud $\frac{1}{4}$ (*véase* la Figura 7.33).



▲ **Figura 7.33**
La regla del punto medio para $\int_0^1 x^2\,dx$ con $n = 4$

Subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$	Punto medio c_k	$f(c_k)$	$f(c_k)\Delta x$
$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}\frac{1}{4}$
$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{64}\frac{1}{4}$
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\frac{5}{8}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{25}{64}\frac{1}{4}$
$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\frac{7}{8}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{49}{64}\frac{1}{4}$

Resulta la aproximación

$$M_4 = \frac{b-a}{4}\sum_{k=1}^{4} f(c_k) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{25}{64}+\frac{49}{64}\right) = \frac{1}{4}\frac{84}{64} = \frac{21}{64} \approx 0.3281$$

Sabemos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Por tanto, el error es

$$\left|\int_0^1 x^2\,dx - M_4\right| \approx 0.0052$$

Valores más grandes de n mejoran la aproximación. ◀

En vez de memorizar la fórmula de la regla del punto medio, es más sencillo formarse una imagen mental. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

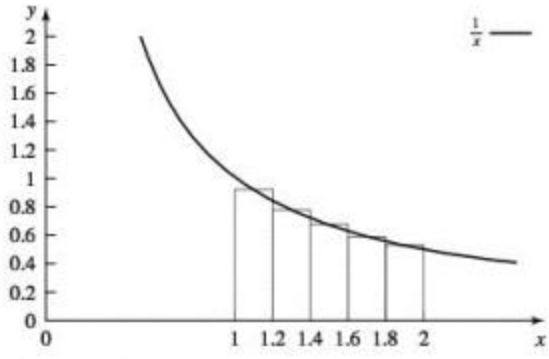
▶ **Ejemplo 2** **Regla del punto medio** Utilice la regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

Solución

La Figura 7.34 muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, junto con los rectángulos de aproximación. Podemos ver que la función es continua en [1, 2].

Con $n = 5$, la partición del intervalo [1, 2] es $P = [1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2]$, y los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. Como la anchura de cada intervalo



▲ **Figura 7.34**
La regla del punto medio en el Ejemplo 2

es 0.2, y $f(x) = \frac{1}{x}$, el área del primer rectángulo es $(0, 2)\frac{1}{1.1}$, el área del segundo rectángulo es $(0.2)\frac{1}{1.3}$, etc. Por tanto, tenemos

$$M_5 = (0.2)\left[\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right] = 0.6919$$

Obsérvese que se ha extraído factor común 0.2, la anchura del rectángulo, ya que es común a las áreas de los cinco rectángulos.

Sabemos que

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Por tanto, el error de la aproximación es

$$\left|\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - M_5\right| = |\ln 2 - 0.6919| = 0.0012 \quad \blacktriangleleft$$

Generalmente, las aproximaciones se utilizan cuando no se puede calcular exactamente la integral. Por tanto, no se puede utilizar el valor exacto para determinar la precisión de la aproximación. Afortunadamente, existen resultados que permiten obtener cotas superiores del error.

COTA DE ERROR PARA LA REGLA DEL PUNTO MEDIO

Suponga que $|f''(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, una cota superior del error en la regla del punto medio es

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \leq K\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

Comprobemos esta cota en los dos ejemplos anteriores. En el primer ejemplo, $f(x) = x^2$ y por tanto $f''(x) = 2$. Entonces, con $n = 4$, una cota superior del error es

$$2\frac{(1-0)^3}{24(4^2)} \approx 0.0052$$

que es de hecho el error obtenido.

En el segundo ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$. Como $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ y $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, se obtiene que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant 2 \quad \text{para } 1 \leqslant x \leqslant 2$$

Por tanto, con $n = 5$, una cota superior del error es

$$2\frac{(2-1)^3}{24(5^2)} = 0.0033$$

El error obtenido fue de hecho sólo 0.0012.

El error real puede ser sólo un poco menor que la cota de error teórica, que corresponde a un escenario en caso peor, pero nunca será mayor. La ventaja de disponer de una cota superior del error es que permite calcular el número de intervalos necesarios para obtener una precisión dada. Por ejemplo, se desea aproximar numéricamente $\int_0^1 x^2\,dx$ de forma que el error no supere 10^{-4}, hay que escoger n de forma que

$$K\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leqslant 10^{-4}$$

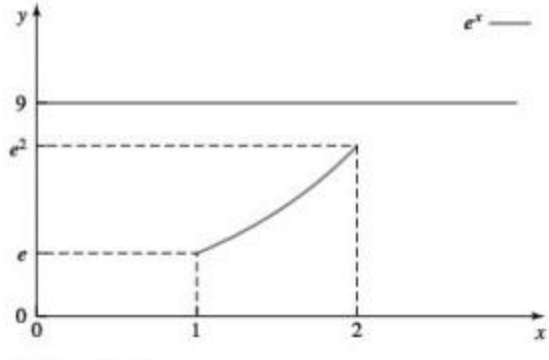
$$2\frac{1}{24n^2} \leqslant 10^{-4}$$

$$\frac{1}{12}10^4 \leqslant n^2$$

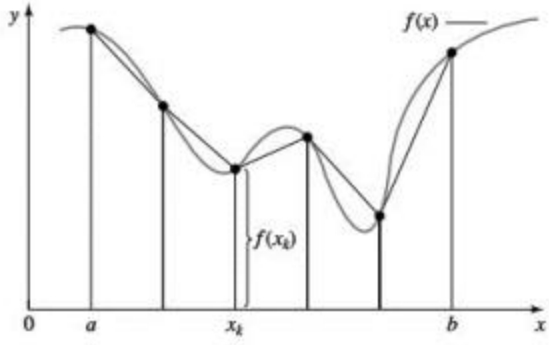
$$28.9 \leqslant n$$

Es decir, $n = 29$ será suficiente para producir un error que como máximo será 10^{-4}.

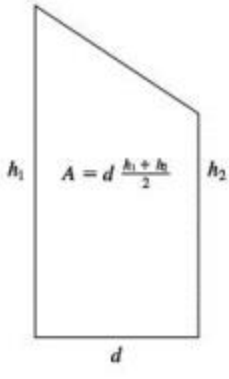
El cálculo del valor de K en la estimación de la cota superior del error no siempre es fácil. Una gráfica de $f''(x)$ en el intervalo de interés puede facilitar la obtención de una cota de la segunda derivada. No es necesario encontrar la mejor cota posible. Por ejemplo, si se deseara integrar $f(x) = e^x$ en el intervalo [1, 2] sería necesario obtener una cota de $f''(x) = e^x$ en dicho intervalo. Como $|e^x| \leqslant e^2$ en el intervalo [1, 2], se podría utilizar por ejemplo $K = 9$ (*véase* la Figura 7.35). Ese valor no es la mejor cota posible, pero su valor se puede obtener sin necesidad de utilizar una calculadora (la mejor cota posible sería $K = e^2$).



▲ **Figura 7.35**
Una cota superior de $|e^x|$ en el intervalo [1, 2] es 9



▲ **Figura 7.36**
La regla del trapecio



▲ **Figura 7.37**
Área del trapecio

7.5.2 Regla del trapecio

En este método, para aproximar las integrales en vez de rectángulos se utilizan trapecios, como se ilustra en la Figura 7.36. Supongamos de nuevo que f es una función continua en $[a, b]$, y dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales. Esta vez la función $f(x)$ se aproxima por un polígono $P(x)$. Para obtener dicho polígono, se unen los puntos $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ con líneas rectas, como se muestra en la Figura 7.36. La integral $\int_a^b P(x)\,dx$ es entonces la aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$.

En la Figura 7.36 podemos ver que esto implica la suma de áreas con signo de trapecios. Recordamos la fórmula de geometría del plano que dice que el área del trapecio que se muestra en la Figura 7.37 es

$$A = d\,\frac{h_1 + h_2}{2}$$

La anchura de los trapecios de la Figura 7.36 es $d = \frac{b-a}{n}$. Sumando las áreas de los trapecios que aparecen en dicha figura se obtiene

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\right. \\ &\qquad \left. + \cdots + \frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] \\ &= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right] \end{aligned}$$

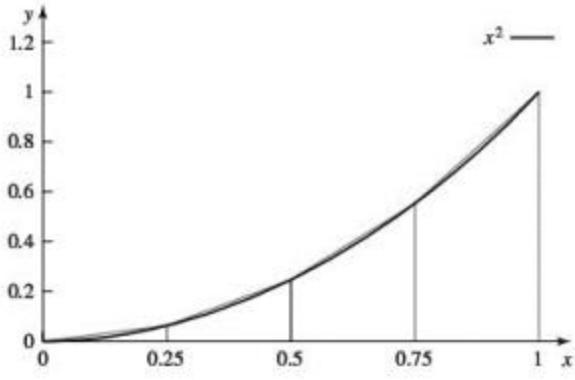
REGLA DEL TRAPECIO

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y sea $P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. La integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se puede aproximar por

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$



▲ **Figura 7.38**
Regla del trapecio para $\int_0^1 x^2\,dx$ con $n = 4$

Ejemplo 3 **Regla del trapecio** Utilice la regla del trapecio con $n = 4$ para aproximar

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$
4	1	1

Solución

La función $f(x) = x^2$ es continua en $[0, 1]$. Como en el Ejemplo 1, hay 4 subintervalos, todos ellos de longitud $\frac{1}{4}$ (*véase* la Figura 7.38). Se obtiene lo siguiente:

$$T_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{0}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right] = 0.34375$$

Como sabemos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, se puede calcular el error:

$$\left|\int_0^1 x^2\,dx - T_4\right| = 0.0104$$ ◀

Ejemplo 4 **Regla del trapecio** Utilice la regla del trapecio con $n = 5$ para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

Solución

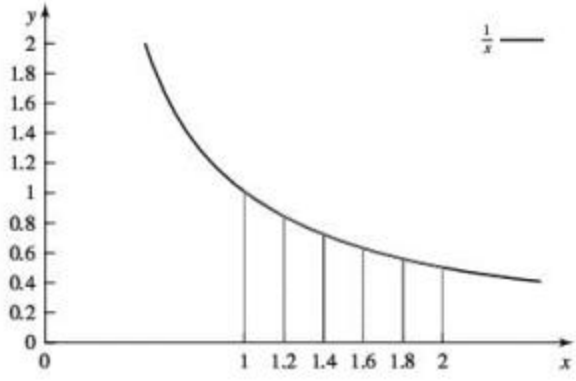
Esto se ilustra en la Figura 7.39. La función $1/x$ es continua en $[1, 2]$. Con $n = 5$, la partición del intervalo $[1, 2]$ es $P = [1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]$. La base de cada trapecio tiene una longitud de 0.2. Entonces

$$T_5 = (0.2)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.0} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.0}\right] = 0.69563$$

Como sabemos del Ejemplo 2 que $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$, se puede calcular el error:

$$\left|\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - T_5\right| = 0.00249$$ ◀

Existe también una cota de error teórica para la regla del trapecio.



▲ **Figura 7.39**
Regla del trapecio para $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ con $n = 5$

COTA DE ERROR PARA LA REGLA DEL TRAPECIO

Suponga que $|f''(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, una cota superior del error en la regla del trapecio es

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \leqslant K \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

En el Ejemplo 3, como $f(x) = x^2$, entonces $f''(x) = 2$ y por tanto $K = 2$. Una cota superior del error es

$$2\,\frac{1}{12(4^2)} = 0.0104$$

que coincide con el error real.

En el Ejemplo 4, $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $f''(x) = \frac{2}{x^3} \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$ (como en el Ejemplo 2). Por tanto, con $n = 5$, una cota superior del error es

$$2\,\frac{(2-1)^3}{12(5^2)} = 0.0067$$

El error obtenido fue de hecho menor, solo de 0.00249. Como en la regla del punto medio, la cota de error teórica puede ser bastante mayor que el error real.

7.5.3. Problemas

(7.5.1), (7.5.2)

En los Problemas 1-4, utilice la regla del punto medio con los valores especificados de n para aproximar las integrales.

1. $\int_1^2 x^2\,dx,\ n = 4$
2. $\int_{-1}^0 x^3\,dx,\ n = 5$
3. $\int_0^1 e^{-x}\,dx,\ n = 3$
4. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx,\ n = 4$

En los Problemas 5-8, utilice la regla del punto medio con los valores especificados de n para aproximar las integrales. Compare las aproximaciones con el valor exacto.

5. $\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx,\ n = 4$
6. $\int_{-1}^1 (e^x - 1)\,dx,\ n = 4$
7. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx,\ n = 4$
8. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,\ n = 5$

En los Problemas 9-12, utilice la regla del trapecio con los valores especificados de n para aproximar las integrales.

9. $\int_1^2 x^2\,dx,\ n = 4$

10. $\int_{-1}^0 x^3\,dx,\ n = 5$

11. $\int_0^1 e^{-x}\,dx,\ n = 3$

12. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx,\ n = 4$

En los Problemas 13-16, utilice la regla del trapecio con los valores especificados de n para aproximar las integrales. Compare las aproximaciones con el valor exacto.

13. $\int_1^3 x^3\,dx,\ n = 5$

14. $\int_{-1}^1 (1 - e^{-x})\,dx,\ n = 4$

15. $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx,\ n = 4$

16. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx,\ n = 5$

17. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación con la regla del punto medio de

$$\int_0^2 x^2\,dx$$

tenga un error máximo de 10^{-4}?

En los Problemas 18-24, utilice la cota teórica del error para determinar su valor máximo. [Sugerencia: en cada caso, calcule la segunda derivada del integrando, dibújela y utilice una calculadora gráfica para obtener una cota superior de $|f''(x)|$.]

18. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del punto medio de

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

tenga un error máximo de 10^{-3}?

19. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del punto medio de

$$\int_0^2 e^{-x^2/2}\,dx$$

tenga un error máximo de 10^{-4}?

20. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del punto medio de

$$\int_2^8 \frac{1}{\ln t}\,dt$$

tenga un error máximo de 10^{-3}?

21. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del trapecio de

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

tenga un error máximo de 10^{-5}?

22. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del trapecio de

$$\int_0^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

tenga un error máximo de 10^{-4}?

23. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del trapecio de

$$\int_1^2 \frac{e^t}{t}\,dt$$

tenga un error máximo de 10^{-4}?

24. ¿Cuánto debe valer n para que la aproximación por la regla del punto medio de

$$\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$$

tenga un error máximo de 10^{-3}?

25. (a) Demuestre gráficamente que para $n = 5$, la regla del trapecio sobreestima y la del punto medio subestima

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

En cada caso, calcule los valores aproximados de la integral y compárelos con el valor exacto.

(b) El resultado de (a) tiene que ver con el hecho de que $y = x^3$ es convexa en [0, 1]. Para generalizar esto, supongamos que la función $f(x)$ es continua, no negativa y convexa en el intervalo $[a, b]$. Denomine M_n a la aproximación por la regla del punto medio y T_n la aproximación por la regla del trapecio de $\int_a^b f(x)\,dx$. Explique con palabras por qué

$$M_n \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant T_n$$

(c) Si se supone que $f(x)$ es continua, no negativa y *cóncava* en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$M_n \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant T_n$$

Explique por qué esto es así. Utilice este resultado para calcular una cota superior e inferior de

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

utilizando en las aproximaciones $n = 4$.

7.6 TABLAS DE INTEGRALES

Las tablas de integrales indefinidas son una ayuda muy útil para calcular integrales. Frecuentemente, suele ser todavía necesario transformar el integrando de interés en una expresión que coincida con la de la tabla, y además hay muchas

integrales que simplemente no se pueden calcular de forma exacta y deben ser evaluadas numéricamente. Incluimos a continuación una tabla muy breve de integrales indefinidas y explicamos cómo utilizar dicha tabla.

I. Funciones básicas

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{con } a > 0,\ a \neq 1$
5. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

II. Funciones racionales

9. $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
10. $\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$
11. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln|ax+b| + C$
12. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$
13. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

III. Integrandos con funciones $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, o $\sqrt{x^2-a^2}$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2\pm a^2}| + D$
17. $\int \sqrt{a^2\pm x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2\pm x^2} + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}\,dx\right)$
18. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\right)$

IV. Integrandos con funciones trigonométricas

19. $\int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

20. $\int \operatorname{sen}^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen}(2ax) + C$

21. $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C$, para $a^2 \neq b^2$

22. $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) + C$

23. $\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\operatorname{sen}(2ax) + C$

24. $\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C$, para $a^2 \neq b^2$

25. $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sen}^2(ax) + C$

26. $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$, para $a^2 \neq b^2$

V. Integrandos con funciones exponenciales

27. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

28. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

29. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

30. $\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)) + C$

31. $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\operatorname{sen}(bx)) + C$

VI. Integrandos con funciones logarítmicas

32. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

33. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

34. $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] + C$, $m \neq -1$

35. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

36. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + C$

37. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

38. $\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$

Ilustraremos a continuación cómo utilizar la tabla anterior. Comenzaremos con ejemplos que coinciden exactamente con alguna de las integrales de la tabla.

Ejemplo 1 **Raíz cuadrada** Calcule

$$\int \sqrt{3 - x^2}\, dx$$

Solución

En el integrando aparece la función $\sqrt{a^2 - x^2}$, y es de la forma III.17 con $a^2 = 3$. Por tanto,

$$\int \sqrt{3 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3 - x^2} + 3\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}\, dx\right)$$

Para evaluar $\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}\, dx$, se utiliza III.15 con $a^2 = 3$ y se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Por tanto,

$$\int \sqrt{3 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3 - x^2} + 3\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$ ◀

Ejemplo 2 **Función trigonométrica** Calcule

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx$$

Solución

El integrando contiene funciones trigonométricas, y lo podemos encontrar en IV.26 con $a = 3$ y $b = 4$. Por tanto,

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx = -\frac{\cos(7x)}{14} - \frac{\cos(-x)}{(2)(-1)} + C$$

Como $\cos(-x) = \cos x$, podemos simplificar:

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx = -\frac{\cos(7x)}{14} + \frac{\cos x}{2} + C$$ ◀

Ejemplo 3 **Función exponencial** Calcule

$$\int x^2 e^{3x}\, dx$$

Solución

Este caso es de la forma V.29 con $n = 2$ y $a = 3$. Entonces,

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\, dx$$

Podemos utilizar ahora V.28 para seguir evaluando la integral, obteniéndose

$$\int xe^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{9}(3x - 1) + C$$

Por tanto,

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{e^{3x}}{9}(3x - 1)\right] + C$$ ◀

Hasta ahora, todos los ejemplos coincidían exactamente con una de las integrales de la tabla. Frecuentemente, éste no será caso y habrá que modificar el integrando hasta que se ajuste a una de las integrales de la tabla. Las modificaciones pueden ser expansiones, división de polinomios, ajuste de un cuadrado y cambios de variable. Presentaremos a continuación algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 4 **Función exponencial** Calcule

$$\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x - 1)\, dx$$

Solución

La integral se parece a V.30. Si se realiza el cambio

$$u = 3x - 1 \quad \text{con } dx = \frac{1}{3}\, du \quad \text{y } 2x = \frac{2}{3}(u + 1)$$

entonces se puede transformar la integral para que se ajuste exactamente con V.30:

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x - 1)\, dx &= \int e^{2(u+1)/3} (\operatorname{sen} u)\, \frac{1}{3}\, du \\
&= \frac{e^{2/3}}{3} \int e^{2u/3} \operatorname{sen} u\, du \\
&= \frac{3^{2/3}}{3} \frac{e^{2u/3}}{\frac{4}{9} + 1} \left[\frac{2}{3} \operatorname{sen} u - \cos u \right] + C \\
&= \frac{e^{2/3}}{3 \cdot \frac{13}{9}} e^{2(3x-1)/3} \left[\frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x - 1) - \cos(3x - 1) \right] + C \\
&= \frac{3}{13} e^{2x} \left[\frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x - 1) - \cos(3x - 1) \right] + C
\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 5 **Función racional** Calcule

$$\int \frac{x^2}{9 + x^2}\, dx$$

Solución

El integrando es una función racional. Se dividen los polinomios para simplificarla:

$$\frac{x^2}{9 + x^2} = 1 - \frac{9}{9 + x^2}$$

Ahora, utilizando II.13 con $a = 3$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{9 + x^2}\, dx &= \int dx - 9 \int \frac{1}{9 + x^2}\, dx \\
&= x - 9 \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} \right) + C \\
&= x - 3 \arctan \frac{x}{3} + C
\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 6 **Función racional** Calcule

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

Solución

El primer paso es completar el cuadrado del denominador:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x^2-2x+1)-1-3}$$
$$=\frac{1}{(x-1)^2-4}$$

Ahora, realizando el cambio $u=x-1$ con $du=dx$, se obtiene

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2-4}=\int\frac{du}{u^2-4}=-\int\frac{du}{4-u^2}$$

que es de la Forma II.14 con $a=2$. Por tanto,

$$\int\frac{1}{x^2-2x-3}\,dx=-\int\frac{du}{4-u^2}=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+2}{u-2}\right|+C$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|+C$$

◀

7.6.1. Problemas

En los Problemas 1-8, utilice la tabla para calcular las integrales.

1. $\displaystyle\int\frac{x}{2x-3}\,dx$
2. $\displaystyle\int\frac{dx}{16+x^2}$
3. $\displaystyle\int\sqrt{x^2-16}\,dx$
4. $\displaystyle\int\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}e^{-x}\cos(2x)\,dx$
7. $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$
8. $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$

En los Problemas 9-22, utilice la tabla para calcular las integrales, tras transformarlas previamente de manera adecuada.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$
10. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(2x-1)\,dx$
11. $\displaystyle\int(x^2-1)e^{-x/2}\,dx$
12. $\displaystyle\int(x+1)^2e^{-2x}\,dx$
13. $\displaystyle\int\cos^2(5x-3)\,dx$
14. $\displaystyle\int\frac{x^2}{4x^2+4x+1}\,dx$
15. $\displaystyle\int\sqrt{9+4x^2}\,dx$
16. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx$
17. $\displaystyle\int e^{2x+1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$
18. $\displaystyle\int(x-1)^2e^{2x}\,dx$
19. $\displaystyle\int_2^4\frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx$
20. $\displaystyle\int_1^e(x+2)^2\ln x\,dx$
21. $\displaystyle\int\cos(\ln(3x))\,dx$
22. $\displaystyle\int\frac{3}{x^2-4x+8}\,dx$

7.7 LA APROXIMACIÓN DE TAYLOR

Por muchas razones, los polinomios son las funciones con las que es más fácil trabajar. En esta sección aprenderemos cómo aproximar funciones mediante polinomios. Veremos que la aproximación mejora generalmente cuando se utilizan polinomios de mayor grado.

7.7.1 Polinomios de Taylor

En la Sección 4.8, vimos cómo linealizar una función alrededor de un punto dado. El resultado fue la aproximación lineal o aproximación por recta tangente. Dicha aproximación es la siguiente.

La aproximación lineal de $f(x)$ en $x = a$ es:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = e^x$$

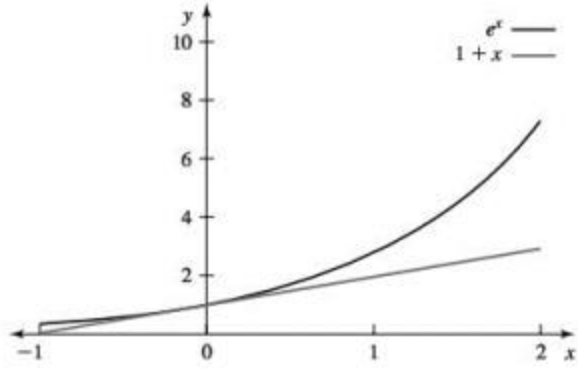
y aproximémosla mediante su linealización en $x = 0$. Se obtiene

$$L(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x \tag{7.20}$$

ya que $f'(x) = e^x$ y $f(0) = f'(0) = 1$. Para ver la exactitud de la aproximación, se pueden dibujar $f(x)$ y $L(x)$ en el mismo sistema de coordenadas (el resultado se muestra en la Figura 7.40). La aproximación es bastante buena mientras x esté cerca de 0. La Figura 7.40 sugiere que dicha aproximación va empeorando a medida que x se aleja de 0. En la aproximación, sólo se requiere que $f(x)$ y $L(x)$ tengan en común $f(0) = L(0)$ y $f'(0) = L'(0)$.

Para mejorar la aproximación, se puede pensar en utilizar una función cuyas derivadas de orden superior coincidan también con las de $f(x)$ en $x = 0$. La función $L(x)$ es un polinomio de grado 1. Para mejorar la aproximación, continuaremos trabajando con polinomios pero requeriremos que la función y sus primeras n derivadas en $x = 0$ coincidan con las del polinomio. Para ser capaces de igualar las primeras n derivadas, el polinomio debe ser de grado n (si el grado del polinomio fuera $k < n$, entonces todas las derivadas de grado $k + 1$ o superior serían iguales a 0). La expresión de un polinomio de grado n es

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{7.21}$$



▲ **Figura 7.40**
Gráfica de $y = e^x$ y su aproximación lineal en 0

Si se desea aproximar $f(x)$ en $x = 0$, se requiere que

$$\begin{aligned} f(0) &= P_n(0) \\ f'(0) &= P_n'(0) \\ f''(0) &= P_n''(0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= P_n^{(n)}(0) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Entonces,

$$P_n(0) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n|_{x=0} = a_0$$

$$P_n'(0) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}|_{x=0} = a_1$$

$$P_n''(0) = 2a_2 + (3)(2)a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}|_{x=0} = 2a_2$$

$$P_n'''(0) = (3)(2)a_3 + (4)(3)(2)a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}|_{x=0}$$

$$= (3)(2)a_3$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)a_n|_{x=0}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)a_n$$

Se introduce la notación

$$k! = k(k-1)(k-2)\cdots(3)(2)(1)$$

donde $k!$ se lee «k factorial». Resolviendo estas ecuaciones para obtener los valores de a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y utilizando $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, se obtiene

$$\begin{aligned} a_0 &= P_n(0) = f(0) \\ a_1 &= P_n'(0) = f'(0) \\ a_2 &= \frac{1}{2}P_n''(0) = \frac{1}{2!}f''(0) \\ a_3 &= \frac{1}{3\cdot 2}P_n'''(0) = \frac{1}{3!}f'''(0) \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{1}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}P_n^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \end{aligned} \tag{7.23}$$

El polinomio de grado n de la forma (7.21) cuyos coeficientes satisfacen (7.24) se denomina **polinomio de Taylor** de grado n. Resumimos la definición a continuación.

Definición El polinomio de Taylor de grado n en $x = 0$ para la función $f(x)$ se expresa como

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejemplo 1 Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$ para la función $f(x) = e^x$

Solución

Para calcular el polinomio de Taylor de grado 3 hay que calcular las tres primeras derivadas de $f(x)$ en $x = 0$. Se obtiene

$$f(x) = e^x \quad \text{por tanto} \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \quad \text{por tanto} \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \quad \text{por tanto} \quad f''(0) = 1$$
$$f'''(x) = e^x \quad \text{por tanto} \quad f'''(0) = 1$$

Por tanto,

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

ya que $2! = (2)(1) = 2$ y $3! = (3)(2)(1) = 6$.

La idea es que este polinomio debe proporcionar una mejor aproximación a e^x que la linealización $1 + x$. Esto se puede comprobar evaluando e^x, $L(x)$ y $P_3(x)$ en algunos valores. Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

x	e^x	$1 + x$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
−1	0.36788	0	0.3333
−0.1	0.90484	0.9	0.9048
0	1	1	1.0000
0.1	1.1052	1.1	1.1052
1	2.7183	2	2.6667

Observando la tabla, podemos ver que el polinomio de Taylor de tercer grado proporciona una mejor aproximación. De hecho, para x suficientemente cerca de 0, los valores de $f(x)$ y de $P_3(x)$ son muy cercanos. Por ejemplo,

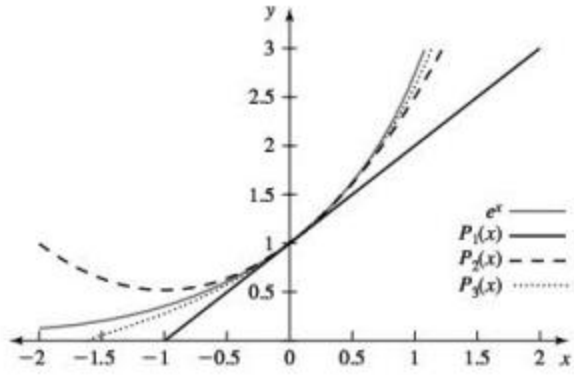
$$f(0.1) = 1.105170918 \quad \text{y} \quad P_3(0.1) = 1.105166667$$

Es decir, los cinco primeros dígitos son idénticos. El error de aproximación es

$$|f(0.1) - P_3(0.1)| = 4.25 \times 10^{-6}$$

que es muy pequeño.

En la Figura 7.41 se muestran las gráficas de $f(x)$ y de los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$. La figura muestra que la aproximación sólo es buena mientras x sea cercana a 0. Puede verse también que el grado del polinomio de Taylor mejora la aproximación. ◀



▲ **Figura 7.41**
Gráfica de $y = e^x$ y los tres primeros polinomios de Taylor

Observando el Ejemplo 1, vemos que los sucesivos polinomios de Taylor de $f(x) = e^x$ en $x = 0$ son

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Lo primero que se advierte es que $P_1(x)$ es la aproximación lineal $L(x)$, que obtuvimos en (7.20).

Lo siguiente que se puede ver es que existe un patrón, siguiendo el cual podríamos pensar en expresar la forma de $P_n(x)$ para un valor de n arbitrario. La expresión sería

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

que de hecho es correcta.

Podemos preguntarnos por qué buscar una aproximación de la función $f(x) = e^x$. Para calcular por ejemplo $f(1) = e$ parece mucho más sencillo utilizar una simple calculadora. Sin embargo, como $f(x) = e^x$ no es una función algebraica, sus valores no se pueden obtener de forma exacta utilizando operaciones algebraicas básicas. Los polinomios de Taylor son la única forma de evaluar estas funciones en un ordenador.

A continuación presentaremos otras funciones y calcularemos sus polinomios de Taylor de grado n.

Ejemplo 2 Calcule el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = 0$ para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solución

Empezaremos por calcular las sucesivas derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \quad \text{y} \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad \text{y} \quad f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad f^{(4)}(0) = 0$$

Como $f^{(4)}(x) = f(x)$, tenemos que $f^{(5)}(x) = f'(x)$, $f^{(6)}(x) = f''(x)$, y así sucesivamente. También se concluye que todas las derivadas pares valen 0 en $x = 0$, y que las derivadas impares se van alternando entre 1 y -1 en $x = 0$. Se obtiene entonces,

$$P_1(x) = P_2(x) = x$$
$$P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$
$$P_5(x) = P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$
$$P_7(x) = P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

y así sucesivamente. Para calcular el polinomio de Taylor de grado n, hay que saber cómo escribir el último término. Debe observarse que el signo de los términos sucesivos se van alternando entre más y menos. Para tener en cuenta este signo alterno, se introduce el factor

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

n	$(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
0	x
1	$-\dfrac{x^3}{3!}$
2	$\dfrac{x^5}{5!}$
3	$-\dfrac{x^7}{7!}$

Un número entero impar se puede escribir como $2n + 1$ para un entero n. Un término de la forma $\pm\frac{x^k}{k!}$ con k impar, se puede escribir

$$(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{7.24}$$

siendo n un entero. Insertando valores sucesivos de n en (7.24), se obtiene lo siguiente (*véase* la tabla).

Observando la tabla, puede verse que el término (7.24) produce los sucesivos términos del polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$. El polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ es

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ ◀

Ejemplo 3 Calcule el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = 0$ para la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$.

Solución

Empezaremos por calcular las sucesivas derivadas de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{de forma que } f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{de forma que } f'(0) = 1$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{de forma que } f''(0) = 2 = 2!$$
$$f'''(x) = \frac{(2)(3)}{(1-x)^4} \quad \text{de forma que } f'''(0) = (2)(3) = 3!$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{(2)(3)(4)}{(1-x)^5} \quad \text{de forma que } f^{(4)}(0) = (2)(3)(4) = 4!$$

y así sucesivamente. Continuando de esta forma, se obtiene

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2)(3)(4)\cdots(k)}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{de forma que } f^{(k)}(0) = k!$$

El polinomio de Taylor de grado n en 0 que se obtiene entonces

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{5!}{5!}x^5 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \quad \blacktriangleleft$$

Las aproximaciones de Taylor se utilizan ampliamente en biología. Presentamos seguidamente un ejemplo que nos resultará familiar.

Ejemplo 4 Denomine $N(t)$ al tamaño de una población en el instante t. Un modelo general que describe la dinámica de la población es

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \quad \text{con } f(0) = 0$$

Obtenga la aproximación lineal y cuadrática de $f(N)$ alrededor de $N = 0$.

Solución

La aproximación lineal y cuadrática de $f(N)$ alrededor de $N = 0$ es el polinomio de Taylor de grado 1:

$$P_1(N) = \underbrace{f(0)}_{=0} + f'(0)N$$

Si se hace $r = f'(0)$, la aproximación de primer orden de este modelo de crecimiento es

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

que es la ecuación que describe el crecimiento exponencial.

La aproximación cuadrática de $f(N)$ alrededor de $N = 0$ es el polinomio de Taylor de orden 2:

$$P_2(N) = \underbrace{f(0)}_{=0} + f'(0)N + \frac{f''(0)}{2}N^2$$

Sacando factor común $f'(0)N$ resulta

$$P_2(N) = f'(0)N\left[1 + \frac{f''(0)}{2f'(0)}N\right]$$

Haciendo $r = f'(0)$ y $K = -\frac{2f'(0)}{f''(0)}$, la aproximación de segundo orden del modelo de crecimiento es

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

que es la ecuación que describe el crecimiento logístico si K y r son positivos. En ambas aproximaciones, $r = f'(0)$ es la velocidad intrínseca de crecimiento. $\blacktriangleleft$

7.7.2 El polinomio de Taylor en $x = a$

Hasta ahora, sólo hemos considerado polinomios de Taylor en $x = 0$. Como los polinomios de Taylor sólo son generalmente buenas aproximaciones en las cercanías al punto de aproximación, resulta de utilidad disponer de aproximaciones en otros puntos distintos de $x = 0$. Ya hemos hecho esto en el caso de aproximaciones lineales. Por ejemplo, la aproximación por recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{7.25}$$

Nótese que $L(a) = f(a)$ y $L'(a) = f'(a)$. Es decir, la aproximación lineal y la función original, junto con sus primeras derivadas, coinciden en $x = a$. Si se desea aproximar $f(x)$ en $x = a$ mediante un polinomio de grado n, se requiere entonces que el polinomio y la función original, junto con sus n primeras derivadas, coincidan en $x = a$. Esto nos conduce a un polinomio de la forma

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n \tag{7.26}$$

Comparando (7.26) y (7.25), se concluye que $c_0 = f(a)$ y $c_1 = f'(a)$. Para calcular los restantes coeficientes, se procede como en el caso de $a = 0$. Es decir, se derivan $f(x)$ y $P_n(x)$ y se exige que las primeras n derivadas coincidan en $x = a$. Se llega así a la siguiente fórmula.

El polinomio de Taylor de grado n en $x = a$ para la función $f(x)$ es de la forma

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Ejemplo 5 Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 para

$$f(x) = \ln x$$

en $x = 1$.

Solución

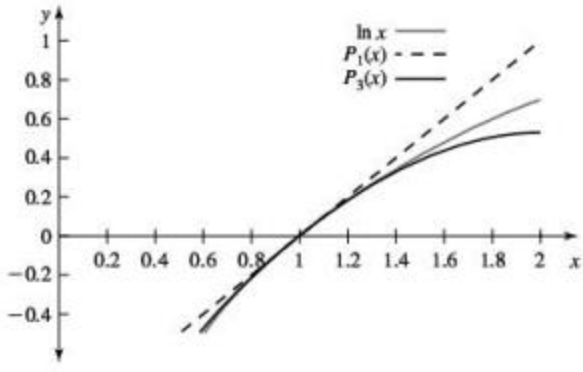
Es necesario evaluar $f(x)$ y sus tres primeras derivadas en $x = 1$. Se obtiene

$$f(x) = \ln x \qquad \text{de forma que } f(1) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{de forma que } f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{de forma que } f''(1) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad \text{de forma que } f'''(1) = 2$$

Utilizando la definición del polinomio de Taylor,

$$P_3(x) = 0 + (1)(x - 1) + \frac{(-1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{2}{3!}(x - 1)^3$$
$$= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

La Figura 7.42 muestra $f(x)$, la aproximación lineal $P_1(x) = x - 1$ y $P_3(x)$. Puede verse que la aproximación es buena cuando x es cercano a 1 y que la aproximación de $P_3(x)$ es mejor que la aproximación lineal. ◀



▲ **Figura 7.42**
Gráfica de $y = \ln x$, la aproximación lineal y el polinomio de Taylor de grado 3

7.7.3 ¿Cuál es la exactitud de la aproximación? (opcional)

En el Ejemplo 1 hemos visto que la aproximación mejora si el grado del polinomio crece. Investigaremos ahora la exactitud de la aproximación. Podemos calcular la exactitud de la aproximación directamente para la función del Ejemplo 3.

En el Ejemplo 3, demostramos que el polinomio de Taylor de grado n en $x = 0$ para $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq 1$, es

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n \tag{7.27}$$

Hay un truco elegante para calcular la expresión de la suma (7.27). Nótese que

$$xP_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} \tag{7.28}$$

Restando (7.28) de (7.27) se obtiene que

$$\begin{aligned} P_n(x) - xP_n(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - x - x^2 - \cdots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

es decir,

$$(1 - x)P_n(x) = 1 - x^{n+1}$$

o

$$P_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

suponiendo que $x \neq 1$. Por tanto, se concluye que

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right|$$

El término $x^{n+1}/(1 - x)$ se puede interpretar como el error de aproximación. Como

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = \begin{cases} \infty & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

se concluye que el error de aproximación sólo puede hacerse pequeño si $|x| < 1$. Para $|x| > 1$, el error de aproximación crece al aumentar n [cuando $x = 1$, la función $f(x)$ no está definida].

En general, no es sencillo obtener estimaciones del error. En su forma general, el error se expresa como una integral. Motivaremos este resultado observando los términos de error de $P_0(x)$ y $P_1(x)$.

Utilizando el TFC, Parte II, se obtiene

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

o

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Como $f(a) = P_0(x)$, $\int_a^x f'(t)\,dt$ se puede interpretar como el término de error en la aproximación de Taylor de $f(x)$ en $x = a$ cuando $n = 0$.

Para obtener la siguiente aproximación de orden superior se puede utilizar integración por partes:

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x 1 \cdot f'(t)\,dt$$

Se hace $u' = 1$ con $u = -(x - t)$, y $v = f'(t)$ con $v' = f''(t)$ [escribir $u = -(x - t)$ es una primitiva más conveniente de $u' = 1$ que $u = t$, como veremos en seguida]. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\,dt &= -(x - t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x - t)f''(t)\,dt \\ &= (x - a)f'(a) + \int_a^x (x - t)f''(t)\,dt\end{aligned}$$

Es decir,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t)f''(t)\,dt$$

La expresión $f(a) + f'(a)(x - a)$ es la aproximación lineal $P_1(x)$. La integral se puede considerar entonces como un término de error.

Continuando de esta forma, se obtiene la fórmula general.

FÓRMULA DE TAYLOR

Sea $f: I \to \mathbf{R}$, siendo I un intervalo, $a \in I$, y f y sus $n + 1$ derivadas continuas en $a \in I$. Entonces, para x, $a \in I$,

$$\begin{aligned}f(x) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}(x)\end{aligned}$$

siendo

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Examinaremos ahora con más detalle el término de error de la fórmula de Taylor. Dicho término se expresa en forma integral y frecuentemente es difícil (o imposible) calcular dicha integral. Veamos primero el caso $n = 0$, es decir, se aproxima por una función constante $f(a)$. El término de error cuando $n = 0$ es entonces $R_{n+1}(x)$. Es decir,

$$R_1(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

Utilizando el teorema del valor medio para integrales, se puede obtener un valor c en el intervalo entre a y x tal que

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f'(c)(x-a)$$

Es decir, tenemos que

$$R_1(x) = f'(c)(x-a)$$

para algún número c entre a y b. Aunque no conocemos el valor de c, esta forma es muy útil. Concretamente, si hacemos

$$K = \begin{bmatrix} \text{máximo valor de } |f'(t)| \\ \text{para } t \text{ entre } a \text{ y } x \end{bmatrix}$$

entonces

$$|R_1(x)| \leqslant K|x-a|$$

Antes de dar los correspondientes resultados de $R_{n+1}(x)$, veamos un ejemplo que ilustra cómo obtener K.

Ejemplo 6 Estime el error de la aproximación de $f(x) = e^x$ por $P_0(x)$ alrededor de $x = 0$ en el intervalo [0, 1]

Solución

Como $f(0) = 1$, tenemos que

$$P_0(x) = 1$$

y

$$f(x) = 1 + R_1(x)$$

con

$$R_1(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = xf'(c)$$

para algún valor c entre 0 y x. Como $f'(t) = e^t$, el máximo valor de $|f'(t)|$ en el intervalo [0, 1] se produce cuando $t = 1$, concretamente, $|f'(1)| = e$. Como deseamos obtener una aproximación a $f(x) = e^x$ para $x \in [0, 1]$, no debemos utilizar e en la estimación del error, ya que e es uno de los valores que se desea estimar. Utilizaremos entonces $|f'(t)| \leqslant 3$ para $t \in [0, 1]$. Entonces,

$$|R_1(x)| \leqslant 3x \quad \text{para } x \in [0, 1]$$ ◀

El término de error para un valor general de n se puede tratar de forma similar, con lo que obtenemos lo siguiente.

Existe un valor c entre a y x tal que el término de error en la fórmula de Taylor es de la forma

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta fórmula de error es muy útil, como en el caso de $n = 0$. Aunque no se conoce el valor de c, se puede tratar de estimar $f^{(n+1)}(c)$ entre a y x como antes con $n = 0$. Sea

$$K = \begin{bmatrix} \text{máximo valor de } |f^{(n+1)}(t)| \\ \text{para } t \text{ entre } a \text{ y } x \end{bmatrix}$$

Entonces

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{K|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En el ejemplo siguiente utilizaremos esta expresión para determinar a priori qué grado del polinomio de Taylor permite obtener una precisión dada.

Ejemplo 7 Sea $f(x) = e^x$. ¿Qué grado del polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ permite estimar $f(1)$ con error menor que 10^{-5}?

Solución

En el Ejemplo 1 se obtuvo que para cualquier $n \geqslant 1$,

$$f^{(n+1)}(t) = e^t$$

Ahora hay que calcular qué valor puede alcanzar $f^{(n+1)}(t)$ para $t \in [0, 1]$. Se obtiene

$$|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leqslant e \quad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Como en el Ejemplo 6, en vez de utilizar e como límite, utilizaremos un valor ligeramente superior, como 3. Por tanto,

$$|R_{n+1}(1)| \leqslant \frac{3|1|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+1)!} \tag{7.29}$$

Deseamos que el error sea menor que 10^{-5}. Es decir,

$$|R_{n+1}(1)| < 10^{-5}$$

Utilizando diferentes valores de n,

$$\frac{3}{8!} = 7.44 \times 10^{-5} \quad \text{y} \quad \frac{3}{9!} = 8.27 \times 10^{-6}$$

Es decir, cuando $n = 8$,

$$|R_{n+1}(1)| = |R_9(1)| \leqslant 8.27 \times 10^{-6} < 10^{-5}$$

Como la estimación del error es mayor que 10^{-5} cuando $n = 7$, concluimos que un polinomio de grado 8 será suficiente para obtener la precisión deseada, mientras que un polinomio de grado 7 no. Podemos comprobarlo fácilmente

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2.71825396825$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2.71827876984$$

Comparando con $e = 2.71828182846...$, podemos ver que el error es igual a 2.79×10^{-5} con $n = 7$ y a 3.06×10^{-6} cuando $n = 8$. El error calculado utilizando (7.29) es un escenario de caso peor. Es decir, el verdadero error puede ser (y generalmente es) menor que la cota de error obtenida. ◀

Ya hemos visto un ejemplo en el que un polinomio de Taylor sólo era de utilidad para valores cercanos al punto donde se aproximaba la función, independientemente de n, el grado del polinomio. Hay situaciones en las que el error de aproximación no puede reducirse para *ningún* valor cercano al punto de la aproximación,

independientemente de n, el grado del polinomio. Un ejemplo de este caso es la función continua

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leqslant 0 \end{cases}$$

que se utiliza, por ejemplo, para modelar la altura que alcanza un árbol en función de su edad. Se puede demostrar que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geqslant 1$, lo que implica que el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = 0$ es

$$P_n(x) = 0$$

para todo n. Esto demuestra claramente que no sirve de nada aumentar n, ya que la aproximación no mejora.

Cuando se utilizan los polinomios de Taylor para aproximar funciones, es importante conocer para qué valores de x la aproximación se puede mejorar arbitrariamente escogiendo valores de n suficientemente grandes.

Seguidamente se incluye una lista con las funciones más importantes y sus polinomios de Taylor en $x = 0$, así como el intervalo de valores donde la aproximación se puede mejorar arbitrariamente escogiendo valores de n suficientemente grandes.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x), \quad -1 < x \leqslant 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + R_{n+1}(x), \quad -1 < x < 1$$

7.7.4. Problemas

(7.7.1)

En los Problemas 1-5, calcule la aproximación lineal de $f(x)$ en $x = 0$.

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = \ln(2 + x^2)$

En los Problemas 6-10, calcule el polinomio de Taylor de grado n en $a = 0$ para las funciones indicadas.

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \; n = 4$
7. $f(x) = \cos x, \; n = 5$
8. $f(x) = e^{3x}, \; n = 3$
9. $f(x) = x^5, \; n = 6$
10. $f(x) = \sqrt{1+x}, \; n = 3$

En los Problemas 11-16, calcule el polinomio de Taylor de grado n en $a = 0$ para las funciones indicadas, y compare el valor de dichas funciones en el punto indicado con el valor del correspondiente polinomio de Taylor.

11. $f(x) = \sqrt{2+x}, \; n = 3, \; x = 0.1$
12. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \; n = 3, \; x = 0.1$
13. $f(x) = \operatorname{sen} x, \; n = 5, \; x = 1$
14. $f(x) = e^{-x}, \; n = 5, \; x = 0.3$

15. $f(x) = \tan x$, $n = 2$, $x = 0.1$

16. $f(x) = \ln(1 + x)$, $n = 4$, $x = 0.2$

17. **(a)** Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(b) Utilice el resultado de (a) para dar una explicación intuitiva de por qué

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

18. **(a)** Calcule el polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 0$ de $f(x) = \cos x$.

(b) Utilice el resultado de (a) para dar una explicación intuitiva de por qué

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

(7.7.2)

En los Problemas 19-23, calcule el polinomio de Taylor de grado n en a, y compare el valor de la aproximación con el valor de la función en el punto dado x.

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 3$; $x = 2$

20. $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $n = 3$; $x = 2$

21. $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{6}$, $n = 3$; $x = \frac{\pi}{7}$

22. $f(x) = x^{1/3}$, $a = -1$, $n = 3$; $x = -0.9$

23. $f(x) = e^x$, $a = 2$, $n = 3$; $x = 2.1$

24. Demuestre que

$$T^4 \approx T_a^4 + 4T_a^3(T - T_a)$$

para T cercano a T_a.

25. Demuestre que

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \approx rN$$

para R cercano a 0 (siendo r y K constantes positivas).

26. **(a)** Demuestre que

$$f(R) = \frac{aR}{k + R} \approx \frac{a}{k} R$$

para R cercano a 0 (siendo r y K constantes positivas).

(b) Demuestre que

$$f(R) = \frac{aR}{k + R} \approx \frac{a}{2} + \frac{a}{4k}(R - k)$$

para R cercano a k (siendo a y K constantes positivas).

(7.7.3)

En los Problemas 27-30, utilice la siguiente expresión del término de error

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

donde c está entre 0 y x, para determinar a priori el grado del polinomio de Taylor en a = 0 que alcanza la precisión deseada en el intervalo [0, x] (no calcule el polinomio de Taylor).

27. $f(x) = e^x$, $x = 2$, error $< 10^{-3}$

28. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x = 1$, error $< 10^{-2}$

29. $f(x) = 1/(1 + x)$, $x = 0.2$, error $< 10^{-2}$

30. $f(x) = \ln(1 + x)$, $x = 0.1$, error $< 10^{-3}$

31. Sea $f(x) = e^{-1/x}$ para $x > 0$ y para $x = 0$. Calcule un polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$, y determine la magnitud del error.

32. Se puede demostrar que el polinomio de Taylor para $f(x) = (1 + x)^\alpha$ en $x = 0$, siendo α una constante positiva, converge para $x \in (-1, 1)$. Demuestre que

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \cdots + R_{n+1}(x)$$

33. Se puede demostrar que el polinomio de Taylor para $f(x) = \tan^{-1} x$ en $x = 0$ converge para $|x| \leqslant 1$.

(a) Demuestre que lo siguiente es cierto:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + R_{n+1}(x)$$

(b) Explique por qué se cumple lo siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(Esta serie converge muy lentamente, como se puede comprobar si se utiliza para aproximar el número π.)

7.8. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 7: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos:*

1. Método del cambio de variable para integrales indefinidas
2. Método del cambio de variable para integrales definidas
3. Integración por partes
4. El truco de «multiplicar por 1»
5. Descomposición en fracciones simples
6. Método de fracciones simples
7. Función racional propia
8. Factor cuadrático irreducible
9. Integral impropia
10. Integración cuando el intervalo no está limitado
11. Integración cuando el integrando es discontinuo
12. Convergencia y divergencia en integrales impropias
13. Resultados de comparación para integrales impropias
14. Integración numérica: reglas del punto medio y del trapecio
15. Cotas de error para las reglas del punto medio y del trapecio
16. Uso de tablas de integrales en integración
17. Aproximación lineal
18. Polinomio de Taylor de grado n
19. Fórmula de Taylor

7.9. PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas 1-30, calcule las integrales indefinidas dadas.

1. $\int x^2(1-x^3)^2\,dx$
2. $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
3. $\int 4xe^{-x^2}\,dx$
4. $\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$
5. $\int (1+\sqrt{x})^{1/3}\,dx$
6. $\int x\sqrt{3x+1}\,dx$
7. $\int x\sec^2(3x^2)\,dx$
8. $\int \tan x\sec^2 x\,dx$
9. $\int x\ln x\,dx$
10. $\int x^3\ln x^2\,dx$
11. $\int \sec^2 x\ln(\tan x)\,dx$
12. $\int \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx$
13. $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$
14. $\int \frac{1}{4-x^2}\,dx$
15. $\int \tan x\,dx$
16. $\int \tan^{-1} x\,dx$
17. $\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$
18. $\int x\operatorname{sen} x\,dx$
19. $\int \sqrt{e^x}\,dx$
20. $\int \ln\sqrt{x}\,dx$
21. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$
22. $\int \operatorname{sen} x\cos x e^{\operatorname{sen} x}\,dx$
23. $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$
24. $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx$
25. $\int \frac{x}{x+5}\,dx$
26. $\int \frac{x}{x^2+5}\,dx$
27. $\int \frac{1}{x+5}\,dx$
28. $\int \frac{1}{x^2+5}\,dx$
29. $\int \frac{(x+1)^2}{x-1}\,dx$
30. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

En los Problemas 31-50, calcule las integrales definidas dadas.

31. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{x}\,dx$
32. $\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} x\,dx$
33. $\int_0^1 xe^{-x^2/2}\,dx$
34. $\int_1^2 \ln x\,dx$
35. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$
36. $\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
37. $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$
38. $\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$
39. $\int_0^\infty \frac{1}{9+x^2}\,dx$
40. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3}\,dx$
41. $\int_0^\infty \frac{1}{x+3}\,dx$
42. $\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$
43. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$
44. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$
45. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
46. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

47. $\int_0^1 x \ln x \, dx$

48. $\int_0^1 x 2^x \, dx$

49. $\int_0^{\pi/4} e^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$

50. $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen}(2x) \, dx$

En los Problemas 51-54, utilice (a) la regla del punto medio y (b) la regla del trapecio para aproximar las integrales con el valor especificado de n.

51. $\int_0^2 (x^2 - 1) \, dx, \; n = 4$

52. $\int_{-1}^1 (x^3 - 1) \, dx, \; n = 4$

53. $\int_0^1 e^{-x} \, dx, \; n = 5$

54. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(4x) \, dx, \; n = 4$

En los Problemas 55-58, obtenga el polinomio de Taylor de grado n en x = a para cada función.

55. $f(x) = \operatorname{sen}(2x), \; a = 0, \; n = 3$

56. $f(x) = e^{-x^2/2}, \; a = 0, \; n = 3$

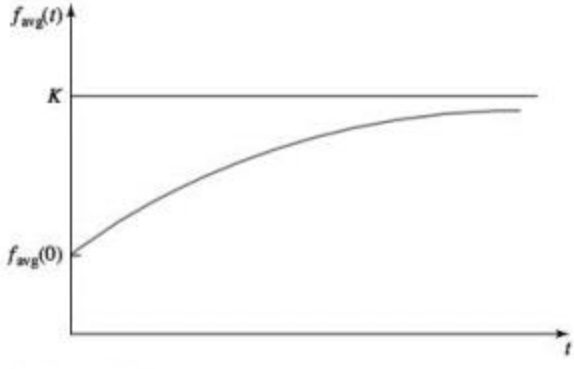
57. $f(x) = \ln x, \; a = 1, \; n = 3$

58. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}, \; a = 4, \; n = 4$

59. (*Coste de sustitución de genes*)
(*Adaptado de Roughgarden, 1996*) Suponga que en una determinada población surge una mutación ventajosa. Inicialmente, el gen que transporta esta mutación tiene una frecuencia baja. A medida que dicho gen se extiende por la población, la aptitud media de la población aumenta. Se denomina $f_{avg}(t)$ a la aptitud media de la población en el instante t, $f_{avg}(0)$ a la aptitud media de la población en el instante 0 (cuando surge la mutación) y K al valor final de la aptitud media una vez la mutación se ha extendido por la población. Haldane (1957) propuso medir el *coste de la evolución* (conocido ahora por el *coste de la sustitución de genes*) mediante la diferencia acumulativa entre la actitud actual y la final. Es decir,

$$\int_0^{\infty} (K - f_{avg}(t)) \, dt$$

En la Figura 7.43, sombree la región cuya área es igual al coste de la sustitución de genes.



▲ **Figura 7.43**
Coste de sustitución de genes. *Véase* el Problema 59

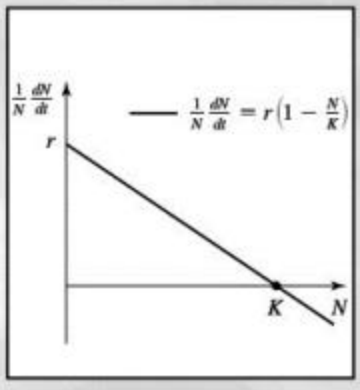
CAPÍTULO 8

ECUACIONES DIFERENCIALES

En el modelo más simple de crecimiento de poblaciones, la velocidad de crecimiento en cualquier instante es proporcional al tamaño de la población en dicho instante. ¿Cómo se podría expresar esa situación matemáticamente? Sea $N(t)$ el tamaño de la población en el instante t, $t \geqslant 0$. Entonces

$$\frac{dN}{dt} = rN(t), \quad t \geqslant 0 \tag{8.1}$$

(presentamos esta ecuación en la Sección 4.6). La Ecuación (8.1) la derivada de una función y por tanto, esas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales**. El modelado de situaciones biológicas conduce frecuentemente a ecuaciones diferenciales.



Las ecuaciones diferenciales pueden contener derivadas de cualquier orden. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = xy$$

es una ecuación diferencial que contiene las derivadas primera y segunda de la función $y = y(x)$. Si una ecuación diferencial, como la (8.1) contiene sólo la primera derivada se denomina ecuación diferencial de **primer orden**.

En este capítulo, consideraremos sólo ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{8.2}$$

El miembro derecho de (8.2) es el producto de dos funciones. Una de ellas depende sólo de x, y la otra sólo de y. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales separables** (la razón de este nombre se comprenderá pronto). Este tipo de ecuaciones diferenciales incluyen dos casos especiales. Concretamente,

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{8.3}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \tag{8.4}$$

En la Sección 5.8 se estudiaron las ecuaciones diferenciales de la forma (8.3). Las ecuaciones diferenciales de la forma (8.4) incluyen a (8.1) y se utilizan frecuentemente en modelos biológicos.

8.1 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Volvamos al modelo de crecimiento de (8.1) y, para ser concretos, escojamos $r = 2$. La ecuación resultante es

$$\frac{dN}{dt} = 2N(t), \quad t \geqslant 0 \tag{8.5}$$

Nuestro interés es encontrar una función $N(t)$ que cumpla la Ecuación (8.5). Esa función se denomina **solución** de la ecuación diferencial. Se plantea que con $N_0 = N(0)$,

$$N(t) = N_0 e^{2t}, \quad t \geqslant 0$$

es una solución de (8.5). Para comprobarlo, derivamos $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = 2\underbrace{N_0 e^{2t}}_{N(t)} = 2N(t)$$

En cualquier punto $(t, N(t))$ de la gráfica de $N(t)$, la pendiente es igual a $2N(t)$ (*véase* la Figura 8.1).

Una ecuación diferencial de primer orden indica el comportamiento de la derivada de una función. Para obtener una solución, por tanto, hay que integrar (como no siempre es posible integrar una función, no siempre es posible obtener analíticamente en forma explícita la solución de una ecuación diferencial).

Comenzaremos con un método general para resolver ecuaciones diferenciales de la forma (8.2)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{8.6}$$

Se dividen los dos miembros de (8.6) por $g(y)$ [suponiendo que $g(y) \neq 0$]:

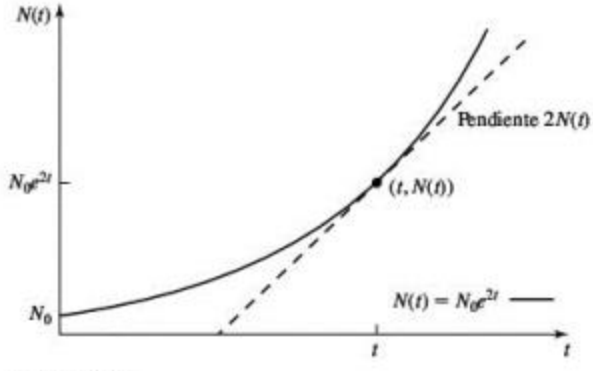
$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{8.7}$$

Ahora, si $y = u(x)$ es una solución de (8.7), entonces $u(x)$ debe cumplir

$$\frac{1}{g[u(x)]}u'(x) = f(x)$$

y por tanto,

$$\int \frac{1}{g[u(x)]}u'(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$



▲ **Figura 8.1**
La solución $N(t) = N_0e^{2t}$: la pendiente en $(t, N(t))$ es $2N(t)$

Pero, como $g[u(x)] = g(y)$ y $u'(x)\,dx = dy$, esto es lo mismo que

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \tag{8.8}$$

Esto sugiere el siguiente procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales separables. Concretamente, se separan las variables x e y de forma que un miembro de la ecuación dependa solamente de y, y el otro miembro solamente de x. Para hacer esto, dy y dx se tratan como si fueran variables normales. Escribiendo formalmente (8.6) como

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

y después integrando los dos miembros

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

se llega a la Ecuación (8.8). El método de separar las variables x e y funciona porque el miembro derecho de (8.6) es de la forma especial $f(x)g(y)$, lo que da su nombre a este tipo de ecuación diferencial. Una advertencia: simplemente se ha dividido (8.6) por $g(y)$. Hay que tener cuidado, ya que $g(y)$ puede valer 0 para algunos valores de y, en cuyo caso no se puede dividir. En la Subsección 8.1.2 consideraremos este problema. En las dos subsecciones siguientes, se estudia cómo resolver ecuaciones diferenciales de la forma (8.3) y (8.4). En la Subsección 8.1.3 se dará un ejemplo del tipo general (8.2).

8.1.1 Ecuaciones diferenciales puramente temporales

En muchas aplicaciones, la variable independiente representa tiempo. Si la velocidad de variación de una función depende sólo del tiempo, la ecuación diferencial resultante se denomina **ecuación diferencial puramente temporal**. Dicha ecuación diferencial es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x),\ x \in I \tag{8.9}$$

siendo I un intervalo y x el tiempo. Estas ecuaciones se estudiaron en la Sección 5.8, donde se encontró que la solución es de la forma

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + C \tag{8.10}$$

La constante C surge al plantear la primitiva general de $f(x)$. El número x_0 está en el intervalo I. Para determinar C, hay que plantear el problema como un problema de valor inicial (*véase* la Sección 5.8). Si se asume que $y(x_0) = y_0$, entonces sustituyendo x_0 en (8.10) se obtiene $y(x_0) = C$ y por tanto $C = y_0$. La solución se puede escribir de la siguiente forma

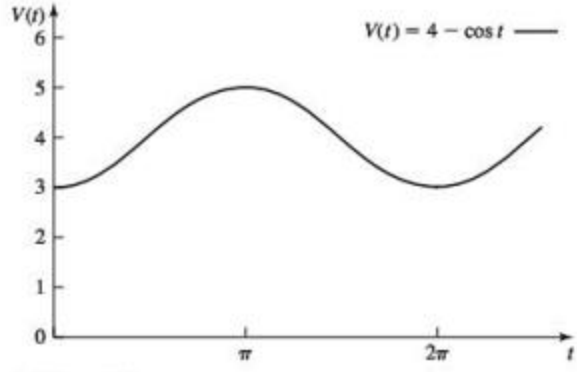
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)\,du$$

Para resolver (8.9) formalmente, se separan las variables. La ecuación diferencial (8.9) se escribe así:

$$dy = f(x)\,dx$$

y después se integran ambos miembros

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$



▲ **Figura 8.2**
La solución $V(t) = 4 - \cos t$ del Ejemplo 1

o

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

que es lo mismo que (8.10).

Ejemplo 1 Suponga que el volumen $V(t)$ de una célula en el instante t varía de acuerdo con

$$\frac{dV}{dt} = \operatorname{sen} t \quad \text{con } V(0) = 3$$

Calcule $V(t)$.

Solución

Como

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \operatorname{sen} u\,du$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} V(t) &= 3 + [-\cos u]_0^t \\ &= 3 + (-\cos t + \cos 0) \\ &= 4 - \cos t \end{aligned}$$

ya que $\cos 0 = 1$ (*véase* la Figura 8.2). ◀

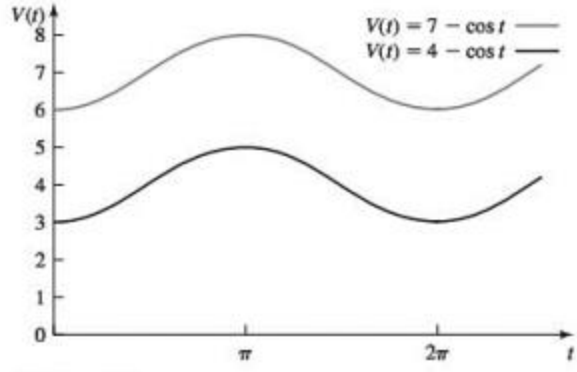
Si se cambiara la condición inicial del Ejemplo 1 a algún otro valor, la gráfica de la nueva solución se podría obtener a partir de la solución anterior desplazándola verticalmente de forma que cumpliera la nueva condición inicial (*véase* la Figura 8.3). Esto se comentó en la Sección 5.8.

8.1.2 Ecuaciones diferenciales autónomas

Muchas de las ecuaciones diferenciales que modelan situaciones biológicas, como por ejemplo (8.1), son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \tag{8.11}$$

donde el miembro izquierdo de (8.11) no depende explícitamente de x. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales autónomas**.



▲ **Figura 8.3**
La curva $V(t) = 7 - \cos t$ se obtiene a partir de la curva $V(t) = 4 - \cos t$ mediante un desplazamiento vertical. La función $V(t) = 7 - \cos t$ es la solución de la ecuación diferencial del Ejemplo 1 con $V(0) = 6$

Para interpretar el significado biológico de la autonomía, volvamos al modelo de crecimiento

$$\frac{dN}{dt} = 2N(t) \tag{8.12}$$

Posteriormente veremos que la solución general de (8.12) es

$$N(t) = Ce^{2t} \tag{8.13}$$

siendo C una constante que se puede determinar si se conoce el tamaño de la población en algún instante. Supongamos que se realiza un experimento en el que se sigue una población en el tiempo, que satisface la Ecuación (8.12) con $N(0) = 20$. Utilizando (8.13), se obtiene que $N(0) = C = 20$. Entonces el tamaño de la población en el instante t se expresa mediante la ecuación

$$N(t) = 20e^{2t}$$

Si se repite el experimento, por ejemplo en el instante $t = 10$ con el mismo tamaño inicial de la población, y todo lo demás igual, la población evoluciona exactamente de la misma forma que comenzando en $t = 0$. Utilizando (8.3) ahora con $N(10) = 20$, se obtiene $N(10) = Ce^{20} = 20$, o $C = 20e^{-20}$. Ahora el tamaño de la población se expresa como

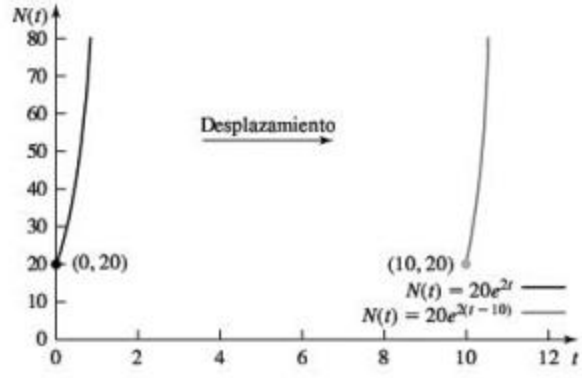
$$N(t) = 20e^{-20}e^{2t} = 20e^{2(t-10)}$$

La gráfica de esta solución se puede obtener a partir de la gráfica anterior, cuando $N(0) = 20$, simplemente desplazando la primera gráfica 10 unidades a la derecha hasta el nuevo punto inicial (10, 20) (*véase* la Figura 8.4).

Esto significa que una población que empieza con $N = 20$ sigue la misma historia, independientemente de cuando se inicia el experimento. Esto tiene sentido biológico: si las condiciones de crecimiento no dependen explícitamente del tiempo, el experimento debería producir el mismo resultado independientemente del momento en el que se realiza. Si las condiciones de crecimiento de la población cambian con el tiempo, entonces no se puede utilizar una ecuación diferencial autónoma para modelar el crecimiento de la población. Es necesario incluir explícitamente dicha dependencia temporal en la dinámica.

Formalmente, se puede resolver (8.11) por separación de variables. Concretamente, dividiendo los dos miembros de (8.11) por $g(y)$ y multiplicando los dos miembros por dx se obtiene

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$



▲ **Figura 8.4**
La gráfica de la solución $N(t) = 20e^{2t}$ se desplaza al nuevo punto inicial (10, 20)

Integrando ambos miembros se obtiene

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx$$

Estudiaremos dos casos: $g(y) = k(y - a)$ y $g(y) = k(y - a)(y - b)$. El modelo de crecimiento (8.1) es un ejemplo del primer caso. La ecuación logística, que apareció por primera vez en la Sección 3.3, es un ejemplo del segundo caso.

Caso 1: $g(y) = k(y - a)$ Se desea resolver

$$\frac{dy}{dx} = k(y - a) \tag{8.14}$$

siendo k y a constantes. Se supone que $k \neq 0$. Separando las variables se obtiene

$$\frac{dy}{y - a} = k\,dx \tag{8.15}$$

donde es necesario suponer que $y \neq a$ para poder dividir por $y - a$. Es algo arbitrario dejar k en el miembro izquierdo o en el miembro derecho de la ecuación. Es más conveniente dejarla en el miembro derecho. Integrando los dos miembros de (8.15) se obtiene

$$\int \frac{dy}{y - a} = \int k\,dx$$

o

$$\ln|y - a| = kx + C_1$$

Aplicando la función exponencial a los dos miembros

$$|y - a| = e^{kx + C_1}$$

o

$$|y - a| = e^{C_1}e^{kx}$$

Eliminando el valor absoluto, resulta

$$y - a = \pm e^{C_1}e^{kx}$$

Cambiando en nombre de la constante $C = \pm e^{C_1}$, se puede expresar la solución de la siguiente forma

$$y = Ce^{kx} + a \tag{8.16}$$

(El cambio de nombre de la constante sólo sirve para dejar la ecuación de una forma más legible.) Como en el caso de las ecuaciones diferenciales puramente temporales, la integración introduce una constante. Si se conoce un punto (x_0, y_0) de la solución, entonces se puede determinar el valor de C. Denominaremos a ese punto **condición inicial.**

Para obtener (8.15), se ha dividido por $y - a$. Esto sólo se puede hacer si $y \neq a$. Si $y = a$, entonces $dy/dx = 0$ y la función constante $y = a$ es la solución de (8.14). Esta solución *se pierde* cuando se divide (8.14) por $y - a$. Nótese que la constante C en (8.16) es distinta de 0 ya que $C = \pm e^{C_1}$ y $e^{C_1} \neq 0$ para cualquier número real C_1. Pero se puede combinar la solución constante $y = a$ y la solución de (8.16) permitiendo que en (8.16), C pueda ser igual a 0.

Antes de considerar las aplicaciones biológicas, daremos un ejemplo donde se puede ver cómo se resuelve una ecuación diferencial y cómo se determina el valor de C.

Ejemplo 2 Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 3y \quad \text{siendo } y_0 = 1 \quad \text{cuando } x_0 = 1$$

Solución

En vez de intentar identificar las constantes C, k y a Ecuación (8.16), es más sencillo resolver la ecuación directamente. Se separan las variables y después se integra, resultando

$$\int \frac{dy}{2 - 3y} = \int dx$$

Como $-\frac{1}{3}\ln|2 - 3y|$ es una primitiva de $\frac{1}{2-3y}$, se obtiene

$$-\frac{1}{3}\ln|2 - 3y| = x + C_1$$

Despejando y

$$\ln|2 - 3y| = -3x - 3C_1$$
$$|2 - 3y| = e^{-3x-3C_1}$$
$$2 - 3y = \pm e^{-3C_1}e^{-3x}$$

Haciendo $C = \pm e^{-3C_1}$, se obtiene

$$2 - 3y = Ce^{-3x}$$

Para determinar C, se utiliza la condición inicial $y_0 = 1$ cuando $x_0 = 1$. Es decir,

$$2 - 3 = Ce^{-3} \quad \text{o} \quad C = -e^3$$

Entonces,

$$2 - 3y = -e^3e^{-3x}$$

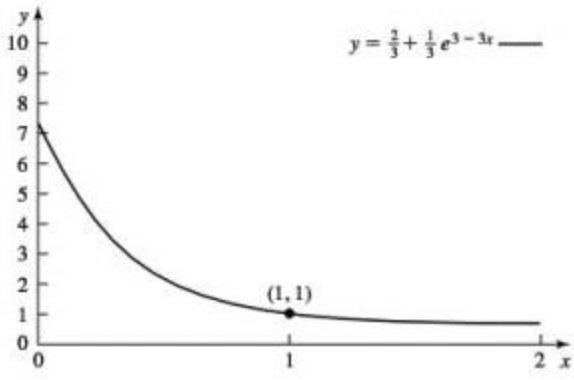
o

$$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3-3x}$$

(*véase* la Figura 8.5). ◀

Presentaremos ahora dos aplicaciones biológicas que están dentro del caso 1.

Ejemplo 3 **(Crecimiento exponencial de una población)** Este modelo está dado por (8.1) y se presentó en la Sección 4.6. Se denomina $N(t)$ al tamaño de la población en el



▲ **Figura 8.5**
La solución del Ejemplo 2

instante $t \geqslant 0$ y se supone que $N(0) = N_0 > 0$. La variación del tamaño de la población se modela mediante el problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad \text{siendo } N(0) = N_0 \tag{8.17}$$

El parámetro r se denomina velocidad de crecimiento intrínseca y es la velocidad de crecimiento per cápita ya que

$$r = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$$

Cuando $r > 0$, se trata de una población en crecimiento. Cuando $r < 0$, el tamaño de la población disminuye (nótese que la velocidad de crecimiento per cápita r es independiente del tamaño de la población).

La Ecuación (8.17) se puede resolver directamente como en el Ejemplo 2, o utilizar (8.14). Utilizaremos (8.14). Si se compara (8.17) con (8.14), se obtiene $k = r$ y $a = 0$. Por tanto, utilizando (8.16), se obtiene la solución

$$N(t) = Ce^{rt}$$

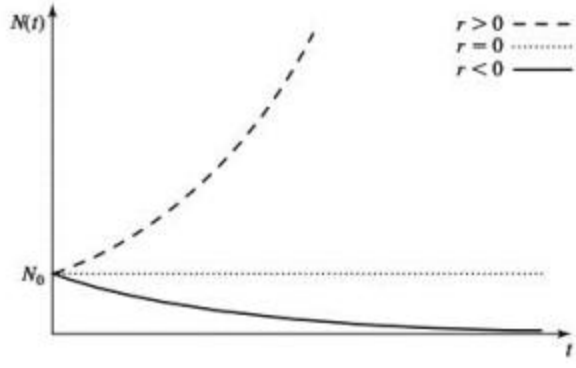
Como $N(0) = N_0 = C$, la solución se puede escribir de la siguiente forma

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{8.18}$$

La Ecuación (8.18) muestra que la población crece exponencialmente cuando $r > 0$. Cuando $r < 0$, el tamaño de la población disminuye con rapidez exponencial. Cuando $r = 0$, el tamaño de la población permanece constante.

En la Figura 8.6 se muestran las curvas de la solución $N(t) = N_0 e^{rt}$ para $r > 0$, $r = 0$ y $r < 0$. El crecimiento (o decrecimiento) exponencial es una de las ecuaciones de crecimiento más importantes en biología. Por tanto, es conveniente memorizar tanto la ecuación diferencial (8.17) como su solución (8.18), junto con las gráficas de la Figura 8.6 y conocer que (8.17) modela una situación donde la velocidad de crecimiento per cápita (o velocidad de crecimiento intrínseca) es constante.

Cuando $r > 0$, el tamaño de la población crece sin límite ($\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$). Esta situación se puede producir cuando los individuos no están limitados por el alimento ni por la competencia. Si se inicia el cultivo de una colonia bacteriana sobre un sustrato rico en nutrientes inoculando en el sustrato unas pocas bacterias, entonces las bacterias, inicialmente, pueden crecer y dividirse sin restricción. Posteriormente, cuando el sustrato se encuentre más poblado y la fuente de alimento se reduzca, el crecimiento se restringirá, y se requerirá una ecuación diferencial diferente



▲ **Figura 8.6**
Curvas de soluciones de $dN/dt = rN$

para describir esta situación (que estudiaremos en el caso 2). El decrecimiento exponencial de una población se produce cuando la velocidad de las muertes supera a la velocidad de los nacimientos (por ejemplo en casos de hambruna). ◀

El tipo de crecimiento del Ejemplo 3 se denomina crecimiento Maltusiano, y debe su nombre a Thomas Malthus (1766-1834), un clérigo y economista británico. Malthus escribió sobre las consecuencias del crecimiento sin restricciones de la sociedad humana. Observó que el crecimiento exponencial de la población humana conduciría al hambre, porque el suministro de alimentos permanecería constante.

Recordemos de la Sección 4.6 que cuando $r < 0$, (8.17) tiene la misma forma que la ecuación diferencial que describe la desintegración radioactiva. $N(t)$ indicaría entonces la cantidad de material radioactivo que queda en el instante t. En el Problema 20 consideraremos esta aplicación.

Ejemplo 4 **(Crecimiento restringido: ecuación de von Bertalanffy)** Este ejemplo describe la forma más simple de crecimiento restringido, y se puede utilizar para modelar el crecimiento de los peces. Se denomina $L(t)$ a la longitud de un pez a la edad t y se supone que $L(0) = L_0$. Entonces

$$\frac{dL}{dt} = k(A - L) \tag{8.19}$$

siendo A una constante positiva que interpretaremos a continuación. Supondremos que $L_0 < A$ e interpretaremos esta restricción posteriormente. La constante k es también positiva. La ecuación dice que la velocidad de crecimiento dL/dt es proporcional a $A - L$, por lo que k debería interpretarse como una constante de proporcionalidad. Vemos que la velocidad de crecimiento dL/dt es positiva y decrece linealmente con la longitud mientras $L < A$, y crecimiento se detiene (es decir, $dL/dt = 0$) cuando $L = A$. Para resolver la Ecuación (8.19), se separan las variables y se integra. Resulta entonces

$$\int \frac{dL}{A - L} = \int k\,dt$$

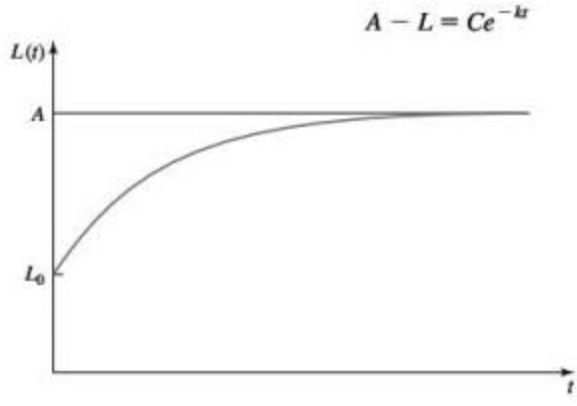
Así,

$$-\ln|A - L| = kt + C_1$$

Tras multiplicar esta ecuación por -1 y aplicar la función exponencial,

$$|A - L| = e^{-C_1}e^{-kt}$$

o



▲ **Figura 8.7**
Gráfica de la ecuación de von Bertalanffy

con $C = \pm e^{-C_1}$. Como $L(0) = L_0$, se obtiene

$$A - L_0 = C$$

La solución se expresa entonces de la siguiente forma

$$A - L(t) = (A - L_0)e^{-kt}$$

o

$$L(t) = A\left[1 - \left(1 - \frac{L_0}{A}\right)e^{-kt}\right] \tag{8.20}$$

(*véase* la Figura 8.7).

Esta es la ecuación de von Bertalanffy que vimos anteriormente. Como

$$\lim_{t \to \infty} L(t) = A$$

vemos que el parámetro A indica la **longitud asintótica** del pez. Matemáticamente, no hay restricciones para L_0. Biológicamente, sin embargo, se requiere que $0 < L_0 < A$. De otro modo la velocidad de crecimiento sería negativa, indicando que el pez reduce su tamaño. Nótese que A es una longitud asintótica que nunca se alcanza, ya que no existe ninguna edad finita T tal que $L(T) = A$ si $L(0) < A$.

Volviendo a (8.19), podemos interpretar ahora esta ecuación diferencial: la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud asintótica, siendo k la constante de proporcionalidad. Como la diferencia entre la actitud actual y la longitud asintótica disminuye con el tiempo, la velocidad de crecimiento disminuye también con el tiempo, lo que implica que los ejemplares jóvenes crecen a velocidad mayor que los adultos. Además, la velocidad de crecimiento es siempre positiva. Esto significa que los peces crecen durante toda su vida, que es lo que ocurre en la realidad. ◀

Caso 2: $g(y) = k(y - a)(y - b)$ Tenemos ahora ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = k(y - a)(y - b) \tag{8.21}$$

siendo k, a y b constantes. Se supone $k \neq 0$. Separando las variables e integrando ambos miembros tenemos

$$\int \frac{dy}{(y - a)(y - b)} = \int k\,dx \tag{8.22}$$

suponiendo que $y \neq a$ e $y \neq b$. Cuando $a = b$, hay que calcular la primitiva de $\frac{1}{(y-a)^2}$, que es $-\frac{1}{y-a}$. En este caso, tenemos que

$$-\frac{1}{y-a} = kx + C$$

o

$$y = a - \frac{1}{kx + C}$$

La constante C se puede determinar a partir de la condición inicial. Cuando $y = a$, entonces $dy/dx = 0$ y por tanto $y =$ constante (concretamente, $y = a$).

Para obtener la solución cuando $a \neq b$, hay que utilizar el método de descomposición en fracciones simples que estudiamos en la Sección 7.3. Presentaremos primero un ejemplo.

Ejemplo 5 Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-1)(y+2) \quad \text{siendo } y_0 = 2 \quad \text{cuando } x_0 = 0$$

Solución

Separando variables,

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y+2)} = \int 2\,dx$$

Para integrar el miembro izquierdo se utiliza descomposición en fracciones simples,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(y-1)(y+2)} &= \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+2} \\ &= \frac{A(y+2) + B(y-1)}{(y-1)(y+2)} \\ &= \frac{(A+B)y + 2A - B}{(y-1)(y+2)}\end{aligned}$$

Comparando el último término con el integrando, se obtiene

$$A + B = 0 \quad \text{y} \quad 2A - B = 1$$

con lo que resulta

$$A = -B \quad \text{y} \quad 2A - B = 3A = 1$$

y entonces

$$A = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{3}$$

Utilizando descomposición en fracciones simples, debemos integrar

$$\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \int 2\,dx$$

cuyo resultado es

$$\frac{1}{3}\left[\ln|y-1| - \ln|y+2|\right] = 2x + C_1$$

Simplificando este resultado,

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right| = 6x + 3C_1$$

$$\left|\frac{y-1}{y+2}\right| = e^{3C_1}e^{6x}$$

$$\frac{y-1}{y+2} = \pm e^{3C_1}e^{6x}$$

$$\frac{y-1}{y+2} = Ce^{6x}$$

Utilizando la condición inicial $y_0 = 2$ cuando $x_0 = 0$, se obtiene

$$\frac{1}{4} = C$$

La solución es por tanto,

$$\frac{y-1}{y+2} = \frac{1}{4}e^{6x}$$

Si se desea que la solución esté en la forma $y = f(x)$, hay que despejar y. Se obtiene

$$y - 1 = (y+2)\frac{1}{4}e^{6x}$$

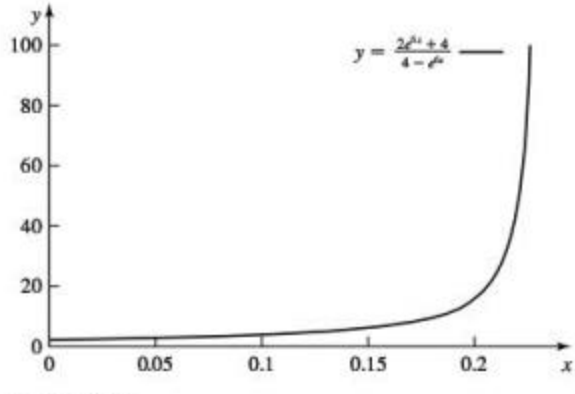
$$y\left(1 - \frac{1}{4}e^{6x}\right) = \frac{1}{2}e^{6x} + 1$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}e^{6x} + 1}{1 - \frac{1}{4}e^{6x}}$$

$$y = \frac{2e^{6x} + 4}{4 - e^{6x}}$$

(*véase* la Figura 8.8). ◀

Volvemos ahora a (8.22) cuando $a \neq b$ e $y \neq a$ o $y \neq b$. Utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples para simplificar la integral del miembro izquierdo de la Ecuación (8.22). Descomponemos dicha integral en una suma



▲ **Figura 8.8**
Solución del Ejemplo 5

de funciones racionales más simples que sabemos integrar. Concretamente, escribimos el integrando de la siguiente forma

$$\frac{1}{(y-a)(y-b)} = \frac{A}{y-a} + \frac{B}{y-b} \tag{8.23}$$

siendo A y B constantes que hay que calcular. Se realizan las siguientes operaciones en el miembro derecho de la Ecuación (8.23):

$$\begin{aligned}\frac{A}{y-a} + \frac{B}{y-b} &= \frac{A(y-b) + B(y-a)}{(y-a)(y-b)} \\ &= \frac{y(A+B) - (Ab + Ba)}{(y-a)(y-b)}\end{aligned} \tag{8.24}$$

Comparando la última expresión de (8.24) con el miembro izquierdo de (8.23), se concluye que las constantes A y B deben cumplir

$$A + B = 0 \quad \text{y} \quad Ab + Ba = -1$$

Sustituyendo $B = -A$ de la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$Ab - Aa = -1 \quad \text{o} \quad A(b-a) = -1 \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{a-b}$$

y, por tanto,

$$B = -\frac{1}{a-b}$$

Es decir,

$$\frac{1}{(y-a)(y-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y-b}\right] \tag{8.25}$$

La Ecuación (8.25) permite calcular

$$\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)}$$

que es el miembro izquierdo de la Ecuación (8.22). Concretamente,

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)} &= \frac{1}{a-b}\int \left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y-b}\right) dy \\ &= \frac{1}{a-b}\left[\ln|y-a| - \ln|y-b|\right] + C_1\end{aligned}$$

Integrando el miembro derecho de (8.22), y combinando las constantes de integración en una nueva constante C_2, resulta

$$\frac{1}{a-b}\left[\ln|y-a| - \ln|y-b|\right] = kx + C_2$$

o

$$\ln\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = k(a-b)x + C_2(a-b)$$

Aplicando la función exponencial, se obtiene

$$\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = e^{C_2(a-b)}e^{k(a-b)x}$$

o

$$\frac{y-a}{y-b} = \pm e^{C_2(a-b)}e^{k(a-b)x}$$

Definiendo $C = \pm e^{C_2(a-b)}$, se obtiene la solución de (8.21)

$$\frac{y-a}{y-b} = Ce^{k(a-b)x}$$

Se puede despejar y,

$$y = a + (y-b)Ce^{k(a-b)x}$$

$$y(1 - Ce^{k(a-b)x}) = a - bCe^{k(a-b)x}$$

o

$$y = \frac{a - bCe^{k(a-b)x}}{1 - Ce^{k(a-b)x}} \tag{8.26}$$

La constante C se puede determinar con la condición inicial. Cuando $y = a$ o b, entonces $dy/dx = 0$ y, en consecuencia, y = constante (concretamente, $y = a$ o b).

El siguiente ejemplo de crecimiento dependiente de la densidad es una de las aplicaciones más importantes de este caso. En el Ejemplo 3, consideramos el crecimiento sin restricciones (o *in*dependiente de la densidad). Este tipo de crecimiento tiene una característica no realista en el sentido de que si la velocidad de crecimiento es positiva, el tamaño de la población crece sin límite. Es frecuente que la velocidad de crecimiento per cápita disminuya cuando el tamaño de la población aumenta. La velocidad de crecimiento depende por tanto de la densidad de población. El modelo más simple en el que la velocidad de crecimiento es dependiente de la densidad es la ecuación logística. En la ecuación logística, el tamaño de la población no puede crecer sin límite.

La ecuación logística fue desarrollada originalmente sobre el año 1835 por Pierre-François Verhulst, que fue el que utilizó el término *logística* para denominar a esta ecuación. Su trabajo fue completamente olvidado hasta 1920, cuando Raymond Pearl y Lowell J. Reed publicaron una serie de artículos sobre crecimiento de poblaciones, en los que utilizaban la misma ecuación que Verhulst. Tras descubrir el trabajo de Verhulst, Pearl y Reed adoptaron también el nombre de ecuación logística. Pearl y Reed (1920) utilizaron la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de la población de los Estados Unidos basándose en los datos censales desde 1790 hasta 1920. Su ecuación habría predicho unos 185 millones de personas en los Estados Unidos en el año 2000, que es una subestimación del tamaño real de la población (unos 260 millones de personas). Aunque la ecuación parece no ajustarse muy bien a las poblaciones reales, es un modelo útil para analizar el crecimiento bajo recursos limitados.

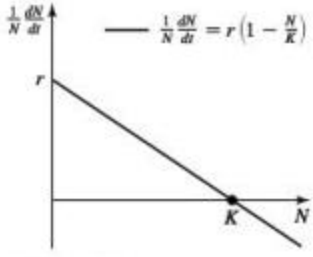
Ejemplo 6 **(Ecuación logística)** La ecuación logística describe la variación del tamaño de una población en la que el crecimiento per cápita es dependiente de la densidad. Si se denomina $N(t)$ al tamaño de la población en instante t, entonces la variación del crecimiento está dada por el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \text{con } N(0) = N_0 \tag{8.27}$$

siendo r y K constantes positivas. Esta es la forma más simple de incorporar la dependencia con la densidad en la velocidad de crecimiento per cápita. Concretamente, decrece linealmente con el tamaño de la población (*véase* la Figura 8.9):

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

El parámetro r se puede interpretar de la siguiente forma: la velocidad de crecimiento per cápita es igual a r cuando $N = 0$. Por tanto, una forma de medir r es hacer crecer al organismo con una densidad muy baja, es decir, cuando N es



▲ **Figura 8.9**
La velocidad de crecimiento per cápita en la ecuación logística es una función linealmente decreciente con el tamaño de la población

mucho menor que K, de forma que la velocidad de crecimiento per cápita tenga un valor cercano a r (el Problema 42 considera una forma diferente de calcular r).

La cantidad K se denomina **capacidad de alojamiento**. Conservando la Figura 8.9, puede verse que la velocidad de crecimiento per cápita es 0 cuando el tamaño de la población coincide con la capacidad de alojamiento. Como la velocidad de crecimiento per cápita es positiva por debajo de K y negativa por encima de K, el tamaño de la población crecerá por debajo de K y decrecerá por encima de K. Por tanto, el número K determina el tamaño de población que puede ser admitido por el entorno. Para demostrar esto matemáticamente, se necesita resolver la Ecuación (8.27). La solución de dicha ecuación nos permitirá ver que empezando desde cualquier tamaño inicial positivo de la población, el tamaño de dicha población alcanzará el valor de K [es decir, $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$ si $N(0) > 0$].

Resolvamos ahora la Ecuación (8.27). El miembro izquierdo de dicha ecuación se puede escribir de la siguiente forma

$$g(N) = -\frac{r}{K}(N - 0)(N - K) \tag{8.28}$$

Comparando (8.28) con el miembro derecho de (8.21), se obtiene

$$k = -\frac{r}{K} \quad a = 0 \quad b = K \tag{8.29}$$

La solución de (8.27) está dada en (8.26). Utilizando (8.29), la solución de (8.27) es por tanto

$$N(t) = \frac{0 - KCe^{-(r/K)(0-K)t}}{1 - Ce^{-(r/K)(0-K)t}}$$

o

$$N(t) = \frac{-CKe^{rt}}{1 - Ce^{rt}} = \frac{CK}{C - e^{-rt}}$$

$$= \frac{K}{1 - e^{-rt}/C} \tag{8.30}$$

Como $N(0) = N_0$, tenemos que

$$N_0 = \frac{CK}{C - 1}$$

Despejando C,

$$N_0(C - 1) = CK \quad \text{o} \quad C(N_0 - K) = N_0$$

entonces,

$$C = \frac{N_0}{N_0 - K} \tag{8.31}$$

Sustituyendo (8.31) en (8.30), se obtiene

$$N(t) = \frac{K}{1 - \frac{N_0 - K}{N_0} e^{-rt}}$$

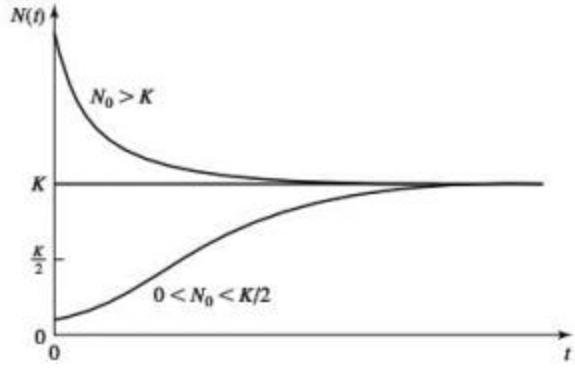
o

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}} \tag{8.32}$$

De la Ecuación (8.32) se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K$$

Observando la Figura 8.10, donde se dibuja la Ecuación (8.32) para $N_0 > K$ y $N_0 < K$, se puede ver que la solución $N(t)$ se acerca a K, la capacidad de alojamiento, cuando $t \to \infty$. Cuando $N_0 > K$, entonces $N(t)$ se acerca a K por encima.



▲ **Figura 8.10**
Curvas de solución para diferentes valores de N_0

Cuando $0 < N_0 < K$, entonces $N(t)$ se acerca a K por debajo. Así pues, para utilizar separación de variables en la resolución de la Ecuación (8.27), es necesario excluir $N = 0$ y $N = K$. Cuando $N(0) = 0$, entonces $dN/dt = 0$ y, en consecuencia, $N(t) =$ constante $= N(0) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Cuando $N(0) = K$, entonces $dN/dt = 0$ y, en consecuencia, $N(t) =$ constante $= K$ para todo $t \geqslant 0$ [la solución constante $N(t) = K$ está incluida en (8.32) si se escoge $N_0 = K$].

Las soluciones constantes K y 0 se denominan equilibrios. La solución constante $N(t) = 0$ no es muy interesante. Se denomina equilibrio trivial. Si $N(0) = 0$, entonces no sucede nada, es decir, $N(t)$ permanece igual a 0 en todos los instantes posteriores. Esto tiene sentido; si no hay individuos para empezar, tampoco los habrá después.

Se puede demostrar que si $0 < N_0 < \frac{K}{2}$, entonces la curva de solución tiene forma de S, como se muestra en la Figura 8.10. Esto es característico de las poblaciones que muestran este tipo de crecimiento dependiente de la densidad. A densidades bajas, el crecimiento se comporta casi como si fuera crecimiento sin restricciones. A densidades más altas, el crecimiento se restringe y la gráfica se curva va acercándose a la capacidad de alojamiento. Si el tamaño inicial de la población es mayor que la capacidad de alojamiento, el tamaño de la población decrece y asintóticamente (es decir, cuando $t \to \infty$) se hace igual a la capacidad de alojamiento K. ◀

8.1.3 Crecimiento alométrico

La resolución de ecuaciones diferenciales de la forma (8.2) se complica muy rápidamente. Antes de mostrar el papel de estas ecuaciones en biología, daremos un ejemplo en el que se resuelve una ecuación diferencial de este tipo.

Ejemplo 7 Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} \quad \text{siendo} \quad y_0 = 0 \quad \text{cuando } x_0 = 1$$

Solución

Para resolver esta ecuación diferencial, primero se separan las variables y después se integra. Tenemos entonces que

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Realizando la integración en los dos miembros, se obtiene

$$\ln|y+1| = \ln|x| + C_1 \tag{8.33}$$

Despejando y,

$$|y + 1| = e^{C_1}|x|$$
$$y + 1 = \pm e^{C_1}x$$

Haciendo $C = \pm e^{C_1}$, se obtiene

$$y = Cx - 1$$

Utilizando la condición inicial $y_0 = 0$ cuando $x_0 = 1$ se puede determinar C:

$$0 = C - 1 \quad \text{o} \quad C = 1$$

La solución es por tanto,

$$y = x - 1$$ ◀

Consideraremos ahora una aplicación biológica, concretamente el crecimiento alométrico. En los capítulos anteriores de este libro ya han aparecido una serie de relaciones alométricas, Típicamente, se trata de relaciones entre los tamaños de las partes de un organismo (por ejemplo, longitud del cráneo y longitud del cuerpo, o área de la hoja y diámetro del tallo). Sean $L_1(t)$ y $L_2(t)$ los tamaños de los dos órganos de un individuo de edad t. Se dice que L_1 y L_2 se relacionan mediante una ley alométrica si sus velocidades de crecimiento específico son proporcionales, es decir, si

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt} \tag{8.34}$$

Si la constante k en (8.34) es igual a 1, el crecimiento se denomina isométrico; en caso contrario, se denomina alométrico. Cancelando dt en los dos miembros de (8.34) e integrando, se obtiene

$$\int \frac{dL_1}{L_1} = k\int \frac{dL_2}{L_2}$$

o

$$\ln|L_1| = k\ln|L_2| + C_1 \tag{8.35}$$

Despejando L_1,

$$L_1 = CL_2^k \tag{8.36}$$

siendo $C = \pm e^{C_1}$ (como L_1 y L_2 son generalmente positivos, la constante C será en general positiva).

Ejemplo 8 En un estudio de 45 especies de algas unicelulares, se encontró que la relación entre el volumen de la célula (V) y la biomasa de la célula (B) es

$$B \propto V^{0.794}$$

Obtenga una ecuación diferencial que relacione las velocidades relativas de crecimiento de la biomasa y del volumen.

Solución

La relación entre la biomasa de la célula y su volumen se puede expresar de la siguiente forma

$$B(V) = CV^{0.794} \tag{8.37}$$

siendo C la constante de proporcionalidad. Comparando (8.37) con (8.36), se puede ver que $k = 0.794$. Por tanto, de (8.34), se deduce que

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = (0.794)\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \tag{8.38}$$

La Ecuación (8.38) se puede obtener también derivando (8.37) con respecto a V, es decir,

$$\frac{dB}{dV} = C(0.794)V^{0.794-1}$$

La Ecuación (8.37) permite eliminar C. Despejando C en (8.37), se obtiene $C = BV^{-0.794}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dV} &= BV^{-0.794}(0.794)V^{0.794-1} \\ &= (0.794)BV^{-1}\end{aligned}$$

Reordenando términos,

$$\frac{dB}{B} = (0.794)\frac{dV}{V}$$

Dividiendo ambos miembros por dt, se obtiene

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = (0.794)\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

que coincide con (8.38). ◀

Ejemplo 9 **(Homeostasis)** El contenido de un nutriente en un consumidor (por ejemplo, el porcentaje de nitrógeno en la biomasa de un consumidor) puede variar desde reflejar el contenido de nutriente de su alimento hasta permanecer constante. El primer caso se denomine *ausencia de homeostasis*, y el segundo *homeostasis estricta*. En Sterner y Elser (2002) se proporciona un modelo de la regulación de la homeostasis. El modelo relaciona el contenido de nutriente del consumidor (denominado y) con el contenido de nutriente del alimento (denominado x), de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x} \tag{8.39}$$

siendo $\theta \geqslant 1$ una constante. Resuelva la ecuación diferencial y relacione θ con la ausencia de homeostasis y con la homeostasis estricta.

Solución

La Ecuación (8.39) se puede resolver utilizando separación de variables

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{\theta}\int \frac{dx}{x}$$

Integrando y simplificando resulta

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \frac{1}{\theta}\ln|x| + C_1 \\ |y| &= e^{(1/\theta)\ln|x|+C_1} \\ |y| &= |x|^{1/\theta}e^{C_1} \\ y &= \pm e^{C_1}x^{1/\theta}\end{aligned}$$

Como x e y son positivas (indican contenido de nutrientes), se obtiene

$$y = Cx^{1/\theta}$$

siendo C una constante positiva.

Ausencia de homeostasis es el caso en el que el consumidor refleja el contenido de nutriente del alimento. Esto sucede cuando $y = Cx$ y por tanto cuando $\theta = 1$. *Homeostasis estricta* es el caso en el que el contenido de nutriente del consumidor es independiente del contenido del nutriente del alimento, es decir, $y = C$. Esto sucede cuando en el límite $\theta \to \infty$. ◀

8.1.4. Problemas

(8.1.1)

En los Problemas 1-8, resuelva las ecuaciones diferenciales puramente temporales.

1. $\frac{dy}{dx} = x + \operatorname{sen} x$, siendo $y_0 = 0$ para $x_0 = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$, siendo $y_0 = 10$ para $x_0 = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, siendo $y_0 = 0$ cuando $x_0 = 1$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, siendo $y_0 = 1$ cuando $x_0 = 0$

5. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1-t}$, siendo $x(0) = 2$

6. $\frac{dx}{dt} = \cos(t-3)$, siendo $x(3) = 1$

7. $\frac{ds}{dt} = \sqrt{3t+1}$, siendo $s(0) = 1$

8. $\frac{dh}{dt} = 5 - 16t^2$, siendo $h(3) = -11$

9. Suponga que el volumen $V(t)$ de una célula en el instante t varía de acuerdo con

$$\frac{dV}{dt} = \cos t \quad \text{con } V(0) = 5$$

Calcule $V(t)$.

10. Suponga que la cantidad de fósforo en un lago en el instante t, denominada $P(t)$, obedece a la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = 3t + 1 \quad \text{con } P(0) = 0$$

Calcule la cantidad de fósforo en el instante $t = 10$.

(8.1.2)

En los Problemas 11-16, resuelva las ecuaciones diferenciales autónomas dadas.

11. $\frac{dy}{dx} = 3y$, siendo $y_0 = 2$ para $x_0 = 0$

12. $\frac{dy}{dx} = 2(1-y)$, siendo $y_0 = 2$ para $x_0 = 0$

13. $\frac{dx}{dt} = -2x$, siendo $x(1) = 5$

14. $\frac{dx}{dt} = 1 - 3x$, siendo $x(-1) = -2$

15. $\frac{dh}{ds} = 2h + 1$, siendo $h(0) = 4$

16. $\frac{dN}{dt} = 5 - \frac{1}{2}N$, siendo $N(2) = 3$

17. Suponga que una población, cuyo tamaño en el instante t se denomina $N(t)$, crece de acuerdo con

$$\frac{dN}{dt} = 0.3N(t) \quad \text{con } N(0) = 20$$

Resuelva esta ecuación diferencial, y calcule el tamaño de la población en el instante $t = 5$.

18. Suponga que se sigue la evolución del tamaño de una población a lo largo del tiempo. Si se dibuja el tamaño de la población en función del tiempo en una gráfica semilogarítmica (es decir, el eje horizontal representa el tiempo en escala lineal, y el eje vertical representa el tamaño de la población en escala logarítmica), se obtiene que los datos se ajustan a una línea recta que corta al eje vertical en 1 (escala logarítmica), y cuya pendiente es -0.43. Obtenga una ecuación diferencial que relacione la velocidad de crecimiento de la población en el instante t con el tamaño de la población en el mismo instante.

19. Suponga que una población, cuyo tamaño en el instante t se denomina $N(t)$, crece de acuerdo con

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \tag{8.40}$$

siendo r una constante.

(a) Resuelva (8.40).

(b) Transforme apropiadamente la solución de (a) de forma que la gráfica resultante sea una línea recta ¿Cómo se puede determinar la constante r a partir de la gráfica?

(c) Suponga que se realiza un seguimiento temporal de una población que evoluciona de acuerdo con (8.40). Describa cómo se determinaría r a partir de los datos.

20. Suponga que $W(t)$ indica la cantidad de material radioactivo en el instante t. La desintegración radioactiva se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W(t) \quad \text{con } W(0) = W_0 \tag{8.41}$$

siendo λ una constante positiva, denominada constante de desintegración.

(a) Resuelva (8.41).

(b) Suponga que $W(0) = 123$ gr y que $W(5) = 20$, y que el tiempo se mide en minutos. Calcule la constante de desintegración y determine la vida media de la sustancia radioactiva.

21. Suponga que una población, cuyo tamaño en el instante t se denomina $N(t)$, crece de acuerdo con

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N^2 \quad \text{con } N(0) = 10 \tag{8.42}$$

(a) Resuelva (8.42).

(b) Dibuje $N(t)$ en función de t para $0 \leqslant t < 10$. ¿Qué sucede cuando $t \to 10$? Explique con palabras lo que esto significa.

22. Denomine $L(t)$ la longitud de un pez en el instante t y suponga que el pez crece de acuerdo con la ecuación de von Bertalanffy

$$\frac{dL}{dt} = k(34 - L(t)) \quad \text{con } L(0) = 2 \tag{8.43}$$

(a) Resuelva (8.43).

(b) Utilice la solución de (a) para determinar k bajo el supuesto de que $L(4) = 10$. Dibuje la gráfica de $L(t)$ para este valor de k.

(c) Calcule la longitud del pez cuando $t = 10$.

(d) Calcule la longitud asintótica del pez, es decir, calcule $\lim_{t\to\infty} L(t)$.

23. Denomine $L(t)$ la longitud de un pez en el instante t y suponga que el pez crece de acuerdo con la ecuación de von Bertalanffy

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L(t)) \quad \text{con } L(0) = 1 \tag{8.44}$$

siendo k y L_∞ constantes positivas. Un estudio ha mostrado que la longitud asintótica es igual a 123 in, y que el pez emplea 27 meses en alcanzar la longitud asintótica.
(a) Utilice esta información para determinar las constantes k y L_∞ en (8.44).
[*Sugerencia*: resuelva (8.44)].
(b) Determine la longitud del pez al cabo de 10 meses.
(c) ¿Cuánto tiempo emplea el pez en alcanzar el 90% de su longitud asintótica?

24. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Suponga que la población exhibe un crecimiento exponencial.
(a) Si se dibuja $N(t)$ en función de t, ¿qué se obtiene?
(b) Obtenga una ecuación diferencial que describa el crecimiento de la población y dibuje posibles curvas de solución.

25. Utilice el método de descomposición en fracciones simples para resolver

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + y)$$

siendo $y_0 = 2$ para $x_0 = 0$.

26. Utilice el método de descomposición en fracciones simples para resolver

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

siendo $y_0 = 2$ para $x_0 = 0$.

27. Utilice el método de descomposición en fracciones simples para resolver

$$\frac{dy}{dx} = y(y - 5)$$

siendo $y_0 = 1$ para $x_0 = 0$.

28. Utilice el método de descomposición en fracciones simples para resolver

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)(y - 2)$$

siendo $y_0 = 0$ para $x_0 = 0$.

29. Utilice el método de descomposición en fracciones simples para resolver

$$\frac{dy}{dx} = 2y(3 - y)$$

siendo $y_0 = 5$ para $x_0 = 1$.

30. Utilice el método de descomposición en fracciones simples para resolver

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^2 - 2y$$

siendo $y_0 = -3$ para $t_0 = 0$.

En los Problemas 31-34, resuelva las ecuaciones diferenciales dadas.

31. $\dfrac{dy}{dx} = y(1 + y)$

32. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + y)^2$

33. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + y)^3$

34. $\dfrac{dy}{dx} = (3 - y)(2 + y)$

35. **(a)** Utilice descomposición en fracciones simples para demostrar que

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

(b) Utilice el resultado de (a) para calcular una solución de

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$

que pase por (i) (0, 0), (ii) (0, 2) y (iii) (0, 4).

36. Calcule una solución de

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4$$

que pase por (0, 2).

37. Suponga que el tamaño de una población en el instante t se denomina $N(t)$, y que $N(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = 0.34N\left(1 - \frac{N}{200}\right) \quad \text{con } N(0) = 50$$

Resuelva esta ecuación diferencial, y determine el tamaño de la población a largo plazo, es decir, calcule $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

38. Suponga que el tamaño de una población, denominado $N(t)$, evoluciona de acuerdo con la ecuación logística. Calcule la velocidad de crecimiento intrínseca si la capacidad de alojamiento es 100, $N(0) = 10$ y $N(1) = 20$.

39. Suponga que se denomina $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t, y que

$$\frac{dN}{dt} = 1.5N\left(1 - \frac{N}{50}\right)$$

(a) Resuelva la ecuación diferencial cuando $N(0) = 10$.
(b) Resuelva la ecuación diferencial cuando $N(0) = 90$.
(c) Dibuje las soluciones de (a) y (b) en el mismo sistema de coordenadas.
(d) Calcule $\lim_{t\to\infty} N(t)$ para las soluciones de (a) y (b).

40. Suponga que el tamaño de una población, denominado $N(t)$, cumple la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = 0.7N\left(1 - \frac{N}{35}\right) \tag{8.45}$$

(a) Determine todos los equilibrios resolviendo $dN/dt = 0$.
(b) Resuelva (8.45) para (i) $N(0) = 10$, (ii) $N(0) = 35$, (iii) $N(0) = 50$ y (iv) $N(0) = 0$. Calcule el $\lim_{t\to\infty} N(t)$ para cada una de las cuatro condiciones iniciales.
(c) Compare la respuesta de (a) con los valores límite obtenidos en (b).

41. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Asuma que la población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística. Asuma además que la velocidad de crecimiento intrínseca es de 5 y que la capacidad de alojamiento es de 30.
(a) Obtenga una ecuación diferencial que describa el crecimiento de esta población.
(b) Sin resolver la ecuación diferencial obtenida en (a), dibuje las curvas de la solución para $N(t)$ en función de t cuando (i) $N(0) = 10$, (ii) $N(0) = 20$ y (iii) $N(0) = 40$.

42. El crecimiento logístico se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

La solución de esta ecuación diferencial con la condición inicial $N(0) = N_0$ es

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}} \tag{8.46}$$

(a) Demuestre que

$$r = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) + \frac{1}{t}\ln\left(\frac{N(t)}{K - N(t)}\right) \tag{8.47}$$

despejando r en (8.46).

(b) La expresión de r en (8.47) se puede usar para estimar r. Suponga que se realiza un seguimiento de la evolución de una población que crece de acuerdo con la ecuación logística, y se obtiene que $N(0) = 10$, $N(5) = 22$, $N(100) = 30$ y $N(200) = 30$. Estime r.

43. (*Selección de un solo locus*) Considere un locus con dos alelos, A_1 y A_2, en una población diploide con apareamiento aleatorio. Es decir, cada individuo de la población puede ser de los tipos A_1A_1, A_1A_2 o A_2A_2. Sea $p(t)$ la frecuencia del alelo A_1 y $q(t)$ la frecuencia del alelo A_2 en la población en el instante t. Nótese que $p(t) + q(t) = 1$. Sea w_{ij} la aptitud del alelo A_iA_j y suponga que $w_{11} = 1$, $w_{12} = 1 - s/2$ y $w_{22} = 1 - s$, siendo s una constante no negativa menor o igual que 1. Es decir. La aptitud del heterocigoto A_1A_2 está a medio camino entre las aptitudes de los dos homocigotos, y el tipo A_1A_1 es el más apto. Si s es pequeño, se puede demostrar que aproximadamente

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}sp(1-p) \quad \text{con } p(0) = p_0 \tag{8.48}$$

(a) Utilice separación de variables y el método de descomposición en fracciones simples para calcular la solución de (8.48).
(b) Suponga que $p_0 = 0.1$ y $s = 0.01$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que $p(t) = 0.5$?
(c) Calcule el $\lim_{t\to\infty} p(t)$. Explique con palabras lo que significa este límite.

(8.1.3)

En los Problemas 44-52, resuelva las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

44. $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$ con $y_0 = 1$ si $x_0 = 1$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y}$ con $y_0 = 2$ si $x_0 = 0$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+1}$ con $y_0 = 2$ si $x_0 = 0$

47. $\dfrac{dy}{dx} = (y+1)e^{-x}$ con $y_0 = 2$ si $x_0 = 0$

48. $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$ con $y_0 = 1$ si $x_0 = 1$

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x-1}$ con $y_0 = 5$ si $x_0 = 2$

50. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{u^2+1}$ con $u_0 = 3$ si $t_0 = 0$

51. $\dfrac{dr}{dt} = re^{-t}$ con $r_0 = 1$ si $t_0 = 0$

52. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{y}$ con $x_0 = 2$ si $y_0 = 3$

53. (*Adaptado de Reiss, 1989*) En un caso de estudio de Taylor *et al.* (1980), se dibujó en una gráfica logarítmica la velocidad máxima de consumo de oxígeno (en ml s^{-1}) en función de la masa corporal (en kg) para nueve especies de mamíferos africanos salvajes. Se encontró que los puntos de datos se ajustaban a una línea recta de pendiente aproximadamente igual a 0.8. Calcule una ecuación diferencial que relacione el consumo máximo de oxigeno con la masa corporal.

54. Considere la siguiente ecuación diferencial, de importancia en genética de poblaciones:

$$a(x)g(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[b(x)g(x)] = 0$$

siendo $b(x) > 0$.
(a) Defina $y = b(x)g(x)$ y demuestre que y satisface

$$\frac{a(x)}{b(x)}y - \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{8.49}$$

(b) Separe variables en (8.49), y demuestre que si $y > 0$, entonces

$$y = C\exp\left[2\int\frac{a(x)}{b(x)}\,dx\right]$$

55. Cuando se dibujó en una escala logarítmica el contenido en fósforo de *Daphnia* en función del contenido en fósforo de las algas que le sirven de alimento, se obtuvo una línea recta de pendiente 1/7.7 (*véase* Sterner y Elser, 2002; datos de DeMott *et al.*, 1998). Obtenga una ecuación diferencial que relacione el contenido en fósforo de *Daphnia* con el contenido en fósforo de sus algas de alimento.

8.2 EQUILIBRIOS Y ESTABILIDAD

En la Subsección 8.1.2 aprendimos a resolver ecuaciones diferenciales autónomas y a dibujar sus soluciones en función de la variable independiente para unas condiciones iniciales dadas. Por ejemplo, el crecimiento logístico

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{8.50}$$

con condición inicial $N(0) = N_0$ tiene la solución dada en (8.32) que se ha dibujado la Figura 8.10 para diferentes valores iniciales.

La solución de una ecuación diferencial nos puede informar sobre el comportamiento a largo plazo, como vimos en el caso del crecimiento logístico. Concretamente, si $N_0 > 0$, entonces $N(t) \to K$, la capacidad de alojamiento, cuando $t \to \infty$, y si $N_0 = 0$, entonces $N(t) = 0$ para todo $t > 0$. Además, si $N_0 = K$, entonces $N(t) = K$ para todo $t > 0$. ¿Por qué son tan especiales los casos de $N_0 = K$ o de $N_0 = 0$? La Ecuación (8.50) indica que si $N = K$ o $N = 0$, entonces $dN/dt = 0$, lo que implica que $N(t)$ es constante.

Las soluciones constantes forman una clase muy especial de soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas. Se denominan **puntos de equilibrio** o sim-

plemente equilibrios. Las soluciones constantes $N = K$ y $N = 0$ son puntos de equilibrio de la ecuación logística.

En esta sección, consideraremos ecuaciones diferenciales autónomas de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \tag{8.51}$$

donde x representará generalmente el tiempo. Aprenderemos cómo calcular los puntos de equilibrio, y comentaremos qué información nos pueden dar sobre el comportamiento a largo plazo de la solución $y = y(x)$, es decir, del comportamiento de $y(x)$ cuando $x \to \infty$. Si se puede resolver (8.51), se puede estudiar directamente la solución para obtener información sobre el comportamiento a largo plazo. Pero, ¿qué deberíamos hacer si no se puede resolver (8.51)?

Los candidatos para describir el comportamiento a largo plazo son las soluciones constantes o equilibrios $y = \hat{y}$ (léase «y gorro») que satisfacen $g(\hat{y}) = 0$ (por supuesto, esas soluciones pueden no existir).

Si $\hat{y}$ satisface la ecuación

$$g(\hat{y}) = 0$$

entonces $\hat{y}$ es un equilibrio de

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

▲ **Figura 8.11**
Ilustración de la estabilidad con una bola en una colina y en un valle.

Antes de presentar ejemplos específicos, consideraremos los equilibrios con más detalle. La propiedad básica de los equilibrios es que si, inicialmente (por ejemplo, en $x = 0$), $y(0) = \hat{y}$, e $\hat{y}$ es un equilibrio, entonces $y(x) = \hat{y}$ para todo $x > 0$.

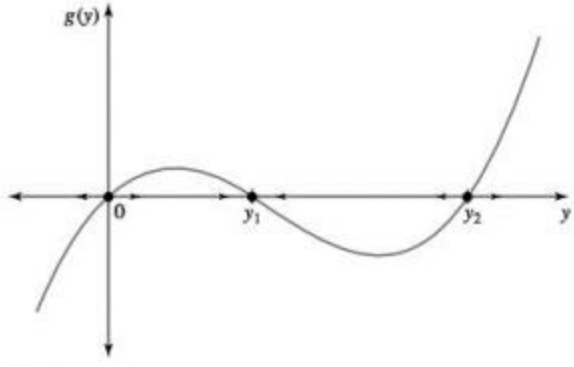
La Figura 8.11 muestra un ejemplo físico análogo a los equilibrios. En la parte izquierda, una bola está en reposo en la cima de una colina. En la parte derecha, la bola está en reposo en el fondo de un valle. En los dos casos, la bola está en equilibrio ya que no se mueve.

Es de gran interés la **estabilidad** de los equilibrios. Lo que esto quiere decir se explica mejor utilizando nuestro ejemplo de la bola en la colina frente a la bola en el valle. Si se perturba un poco a la bola, es decir, se desplaza ligeramente de su posición equilibrio, la bola de la parte izquierda bajara por la colina y no volverá la cima, mientras que la bola de la parte derecha volverá al fondo del valle. La situación de la izquierda se denomina inestable y la situación de la derecha estable.

La analogía de la estabilidad de los equilibrios en ecuaciones diferenciales es como sigue. Supongamos que $\hat{y}$ es un equilibrio de $\frac{dy}{dx} = g(y)$, es decir, $g(\hat{y}) = 0$. Se dice que $\hat{y}$ es **localmente estable** si la solución vuelve al valor $\hat{y}$ después de una pequeña perturbación. Esto significa que observamos lo que sucede a la solución cuando se empieza cerca del equilibrio como si se hubiera movido la solución del equilibrio una pequeña cantidad (una pequeña perturbación). Si la solución no vuelve al valor después de una pequeña perturbación, se dice que es **inestable**. Estos conceptos se estudiarán en la subsección siguiente, donde presentaremos un método gráfico y un método analítico para analizar la estabilidad de los equilibrios. Después se presentarán varias aplicaciones.

8.2.1 Un primer vistazo a la estabilidad

Método gráfico Supongamos que $g(y)$ es de la forma que se muestra en la Figura 8.12. Para obtener los equilibrios de (8.51), se hace $g(y) = 0$. Gráficamente, esto significa que si se dibuja $g(y)$ (es decir, la *derivada* de y con respecto a x) en función de y, los equilibrios son los puntos de intersección de $g(y)$ con el eje



▲ **Figura 8.12**
La función $g(y)$. Las flechas dibujadas cerca de los equilibrios indican el tipo de estabilidad

horizontal, que en este caso es el eje y ya que y es la variable independiente (obsérvense las etiquetas de los ejes de la Figura 8.12, para ver lo que está dibujado). Podemos ver en la Figura 8.12 que para la función $g(y)$ escogida, los equilibrios están en $y = 0$, y_1 e y_2.

¿Por qué funciona este método? Hay que tener en cuenta que estamos tratando ecuaciones diferenciales autónomas. Esto significa que la derivada de y (dy/dx) es una función de y, es decir, *no* depende explícitamente de x. Esto permite dibujar la gráfica de la derivada de y en función sólo de y. Como $dy/dx = g(y)$, esto significa dibujar $g(y)$ en función de y. Podemos utilizar entonces la gráfica de $g(y)$ para decir algo sobre el destino de la solución basándonos en su valor actual. Concretamente, si el valor actual y es tal que $g(y) > 0$ (es decir, $dy/dx > 0$), entonces y crecerá en función de x. Si el valor y es tal que $g(y) < 0$ (es decir, $dy/dx < 0$), entonces y decrecerá en función de x. Los puntos y en los que $g(y) = 0$ son los puntos en los que y no cambia en función de x [ya que $g(y) = dy/dx = 0$], y son los puntos de equilibrio.

Los equilibrios se caracterizan por la propiedad de que el sistema en estado de equilibrio permanece en dicho estado en todos los instantes posteriores (a menos que alguna fuerza externa perturbe el sistema). Esto no implica que el sistema alcance necesariamente un equilibrio particular cuando arranca desde un valor inicial que es diferente de dicho equilibrio, ni implica tampoco que volverá al equilibrio tras una pequeña perturbación.

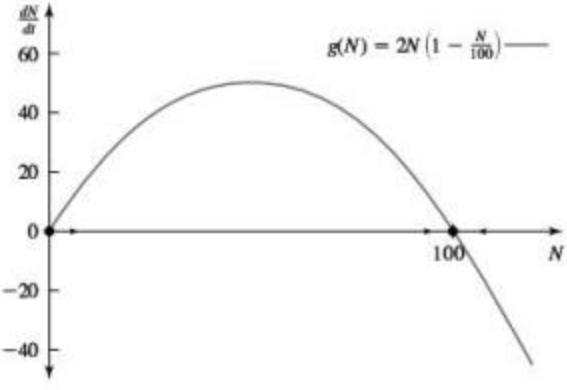
El que el sistema vuelva o no a un equilibrio tras una pequeña perturbación depende de la estabilidad local del equilibrio. Por estabilidad local entendemos lo siguiente. Supongamos que el sistema está en equilibrio, que denominaremos $\hat{y}$. Se aplica una pequeña perturbación al sistema, de forma que tras dicha perturbación el nuevo estado del sistema es

$$y = \hat{y} + z \tag{8.52}$$

siendo z un valor pequeño que puede ser positivo o negativo. Explicaremos lo que sucede utilizando la función $g(y)$ de la Figura 8.12.

Supongamos que $\hat{y} = 0$ y que sometemos este equilibrio a una pequeña perturbación. Si el nuevo valor cumple $y = \hat{y} + z = z > 0$ para z pequeño, entonces $dy/dx > 0$, es decir, y crecerá (*véase* la flecha). Si el nuevo valor cumple $y = \hat{y} + z = z < 0$ para z pequeño, entonces $dy/dx < 0$, es decir, y decrecerá (*véase* la flecha). En cualquier caso, el sistema no volverá a 0. Se dice que $\hat{y} = 0$ es inestable. Dibujar flechas en el eje horizontal ayuda a determinar la estabilidad.

Vayamos ahora al equilibrio $\hat{y} = y_1$. Perturbamos este equilibrio al valor $y = y_1 + z$ con z pequeño. Observando la Figura 8.12, si $z > 0$, entonces $dy/dx < 0$



▲ **Figura 8.13**
Gráfica de dN/dt en función de N en el Ejemplo 1

y por tanto y decrece. Si $z < 0$, entonces $dy/dx > 0$ e y crece. El sistema volverá entonces al equilibrio y_1 tras una pequeña perturbación. Se dice por tanto que y_1 es localmente estable. El atributo *localmente* se refiere al hecho de que el sistema volverá a y_1 si la perturbación es suficientemente pequeña. No se dice nada sobre lo que ocurre cuando la perturbación es grande. Por ejemplo, si la perturbación z es grande y el nuevo valor es menor que 0, entonces $dy/dx < 0$ y el sistema no volverá a y_1.

Analizando el equilibrio $\hat{y} = y_1$ de la misma forma se concluye que es un equilibrio inestable, como el equilibrio $\hat{y} = 0$.

La exposición anterior ilustra que no siempre el sistema alcanzará un valor de equilibrio. El único equilibrio que se puede alcanzar en la Figura 8.12 es y_1. Si inicialmente $y(0) \in (0, y_2)$, entonces $y(x)$ se aproximará a y_1. Si $y(0) < 0$, $y(x) \to -\infty$, y si $y > y_2$, entonces $y(x) \to \infty$.

La anterior exposición ilustra también que sólo se puede someter al equilibrio a pequeñas perturbaciones si se desea aprender algo sobre su estabilidad. Si y_1 se perturba demasiado de forma que el valor tras la perturbación sea menor que 0 o mayor que y_2, la solución no volverá al valor de equilibrio y_1.

Ejemplo 1 Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Dicha población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = 2N\left(1 - \frac{N}{100}\right) \quad \text{para } N \geqslant 0$$

Calcule los equilibrios y analice su estabilidad.

Solución

Para calcular los equilibrios, se hace $\frac{dN}{dt} = 0$. Es decir,

$$2N\left(1 - \frac{N}{100}\right) = 0$$

Vemos entonces que

$$N_1 = 0 \quad \text{o} \quad N_2 = 100$$

Para analizar la estabilidad, se dibuja en la Figura 8.13 la gráfica de dN/dt en función de N. Nótese que $N \geqslant 0$, ya que N representa el tamaño de una población. Para perturbar el equilibrio trivial $N_1 = 0$, sólo se escogerán valores que sean ligeramente mayores que 0. Observando la gráfica podemos ver que esas pequeñas

perturbaciones producen que $dN/dt > 0$ y por tanto N crece (*véase* la flecha). Esto implica que $N_1 = 0$ es un equilibrio inestable.

Para perturbar el equilibrio no trivial $N_2 = 100$, se puede aumentar o reducir un poco el tamaño de la población. Si se reduce, entonces $dN/dt > 0$ y el tamaño de la población aumentará. Si se incrementa, entonces $dN/dt < 0$ y el tamaño de la población se reducirá. Es decir, si el sistema se somete a una pequeña perturbación alrededor del equilibrio no trivial $N_2 = 100$, el tamaño de la población volverá al valor de equilibrio de $N_2 = 100$, como indican las flechas. Esto implica que $N_2 = 100$ es un equilibrio localmente estable. ◀

Método analítico Supongamos que $\hat{y}$ es un equilibrio de

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

[por tanto $\hat{y}$ cumple que $g(\hat{y}) = 0$]. Consideremos una pequeña perturbación alrededor del equilibrio $\hat{y}$ que se expresa como

$$y = \hat{y} + z$$

siendo z un valor pequeño que puede ser positivo o negativo. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\hat{y} + z) = \frac{dz}{dx}$$

ya que $d\hat{y}/dx = 0$ ($\hat{y}$ es una constante). Se obtiene

$$\frac{dz}{dx} = g(\hat{y} + z)$$

Si z es suficientemente pequeño, se puede aproximar $g(\hat{y} + z)$ mediante su aproximación lineal. La aproximación lineal de $g(y)$ alrededor de $\hat{y}$ es

$$L(y) = g(\hat{y}) + (y - \hat{y})g'(\hat{y})$$

Como $g(\hat{y}) = 0$,

$$L(y) = (y - \hat{y})g'(\hat{y})$$

Por tanto, la aproximación lineal de $g(\hat{y} + z)$ se puede expresar como

$$L(\hat{y} + z) = (\hat{y} + z - \hat{y})g'(\hat{y}) = zg'(\hat{y})$$

Si se hace

$$\lambda = g'(\hat{y})$$

entonces

$$\frac{dz}{dx} = \lambda z$$

es la aproximación de primer orden de la perturbación. Su solución es

$$z(x) = z(0)e^{\lambda x} \tag{8.53}$$

que tiene la propiedad

$$\lim_{x \to \infty} z(x) = 0 \quad \text{si } \lambda < 0$$

Como $y(x) = \hat{y} + z(x)$, se deduce que si $\lambda < 0$, el sistema volverá a su equilibrio $\hat{y}$ tras una pequeña perturbación $z(0)$. Esto significa que $\hat{y}$ es localmente estable si $\lambda < 0$. Por otra parte, si $\lambda > 0$, entonces $z(x)$ no tiende a 0 cuando $x \to \infty$, lo que implica que el sistema no volverá al equilibrio $\hat{y}$ tras una pequeña perturbación, e $\hat{y}$ es inestable. El valor $\lambda = g'(\hat{y})$ se denomina **autovalor**, y es la pendiente de la recta tangente a $g(y)$ en $\hat{y}$.

CRITERIO DE ESTABILIDAD

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

siendo $g(y)$ una función derivable. Suponga que $\hat{y}$ es un equilibrio, es decir, $g(\hat{y}) = 0$. Entonces

$\hat{y}$ es localmente estable si $g'(\hat{y}) < 0$

$\hat{y}$ es localmente inestable si $g'(\hat{y}) > 0$

Cuando el autovalor λ es igual a 0, la aproximación de primer orden $\frac{dz}{dx} = \lambda z$ no nos permite obtener conclusiones sobre el comportamiento de $z(x)$ ya que los términos de orden superior son entonces importantes.

Es conveniente relacionar el método analítico con el análisis gráfico más informal que realizamos al comienzo de esta sección. Observando la Figura 8.12, puede verse que la pendiente de la recta tangente en $y = 0$ es positiva, es decir, $g'(0) > 0$. Análogamente, se obtiene que $g'(y_1) < 0$ y $g'(y_2) > 0$. Por tanto, los equilibrios 0 e y_2 son inestables y el equilibrio y_1 es localmente estable, como se obtuvo en el análisis gráfico.

Utilicemos ahora el método analítico para resolver el Ejemplo 1. En dicho ejemplo

$$g(N) = 2N\left(1 - \frac{N}{100}\right)$$

Para derivar $g(N)$, se realiza la multiplicación

$$g(N) = 2N - \frac{N^2}{50}$$

Derivando $g(N)$ se obtiene

$$g'(N) = 2 - \frac{2N}{50}$$

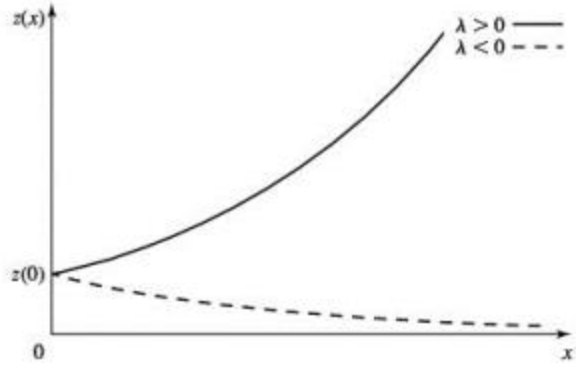
Si $N = 0$, entonces $g'(0) = 2 > 0$. Por tanto, $N = 0$ es un equilibrio inestable. Si $N = 100$, entonces $g'(100) = 2 - 200/50 = -2 < 0$. Por tanto, $N = 100$ es un equilibrio localmente estable.

El método analítico es más potente que el método gráfico. Además de determinar si el equilibrio es localmente estable o inestable, permite decir algo acerca de la rapidez con que la solución vuelve al equilibrio tras una pequeña perturbación. Esto se deduce de (8.53), donde se obtuvo que la perturbación tenía la solución aproximada

$$z(x) = z(0)e^{\lambda x}$$

Si $\lambda > 0$, entonces cuanto mayor es λ, más rápido se aleja la solución del equilibrio. Si $\lambda < 0$, cuanto más negativo sea λ, más rápido vuelve la solución al equilibrio tras una pequeña perturbación (*véase* la Figura 8.14).

La exposición anterior sobre el criterio analítico de estabilidad se ha basado en linealizar $g(y)$ alrededor del equilibrio $\hat{y}$. Como la linealización sólo es precisa para valores cercanos a $\hat{y}$ [salvo que $g(y)$ sea lineal], las perturbaciones alrededor del equilibrio deben ser pequeñas, y por tanto el análisis de estabilidad es siempre local, es decir, en una vecindad cercana al equilibrio. Cuando $g(y)$ es lineal, el análisis es exacto. En particular, se puede calcular exactamente la rapidez con la que la solución vuelve a un equilibrio localmente estable (o se aleja de un equilibrio inestable) tras una perturbación.



▲ **Figura 8.14**
Gráficas de $z(x) = z(0)e^{\lambda x}$ para $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$

Ejemplo 2 **g(y) es lineal** Demuestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y \tag{8.54}$$

tiene un equilibrio localmente estable en $\hat{y} = 1$, y determine con qué rapidez una solución que empiece en $y(0) = y_0 \neq 1$ alcanzará $\hat{y} = 1$.

Solución

Como $g(y) = 0$ para $y = 1$, $\hat{y} = 1$ es un equilibrio. Derivando $g(y) = 1 - y$ se obtiene $g'(y) = -1$, que es negativo independientemente de y. Por tanto, $\hat{y} = 1$ es un equilibrio localmente estable.

Se puede resolver (8.54) de forma exacta utilizando separación de variables

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1-y} &= \int dx \\ -\ln|1-y| &= x + C_1 \\ 1 - y &= \pm e^{-C_1} e^{-x} \\ 1 - y &= Ce^{-x} \end{aligned}$$

donde se ha hecho $\pm e^{C_1} = C$. Despejando y se obtiene

$$y(x) = 1 - Ce^{-x}$$

Si se hace $y(0) = y_0$, entonces $y_0 = 1 - C$, y la solución es

$$y(x) = 1 - (1 - y_0)e^{-x}$$

Se puede ver que para cualquier valor inicial y_0,

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 1$$

y por tanto si $y_0 \neq 1$ requiere una cantidad de tiempo infinita alcanzar el equilibrio $\hat{y} = 1$.

En vez de preguntarnos cuánto tiempo transcurre hasta que se alcanza el equilibrio (lo que nos llevó a una respuesta carente de información: una cantidad infinita de tiempo), se puede calcular el tiempo que se tarda en reducir la desviación inicial del equilibrio, $y_0 - 1$, a una fracción e^{-1}. Es decir, se desea determinar el número x_R tal que

$$\underbrace{y(x_R) - 1}_{\text{desviación de } x = x_R} = \underbrace{e^{-1}(y_0 - 1)}_{\text{desviación inicial}}$$

Como $y(x_R) - 1 = -(1 - y_0)e^{-x_R}$, tenemos que

$$-(1 - y_0)e^{-x_R} = e^{-1}(y_0 - 1)$$

$$e^{-x_R} = e^{-1}$$

$$x_R = 1$$

(*véase* la Figura 8.15). Se requiere por tanto una unidad de tiempo para reducir la desviación inicial a una fracción e^{-1}. Esto no depende de la magnitud inicial de la desviación. ◀

Ejemplo 3 **Uso de ambos métodos** Suponga que

$$\frac{dy}{dx} = y(4 - y)$$

Calcule los equilibrios de esta ecuación diferencial y comente su estabilidad, utilizando el método gráfico y el método analítico.

Solución

Para calcular los equilibrios, se hace $dy/dx = 0$. Es decir,

$$y(4 - y) = 0$$

con lo que se obtiene

$$y_1 = 0 \quad \text{y} \quad y_2 = 4$$

Si se hace $g(y) = y(4 - y)$ y se dibuja $g(y)$ (*véase* la Figura 8.16), se puede ver que $y_1 = 0$ es inestable, ya que si se perturba $y_1 = 0$ a $y = z > 0$, siendo z pequeño, entonces $g(y) = dy/dx > 0$, y si se perturba $y_1 = 0$ a $y = z < 0$, siendo z pequeño, entonces $g(y) = dy/dx < 0$. Es decir, en cualquier caso, y no volverá a 0. Por otra parte, y_2 es un equilibrio localmente estable. Una pequeña perturbación a la derecha de $y = y_2$ produce $dy/dx < 0$, mientras que una pequeña perturbación a la izquierda produce $dy/dx > 0$. En cualquier caso, la solución y volverá a $y_2 = 4$.

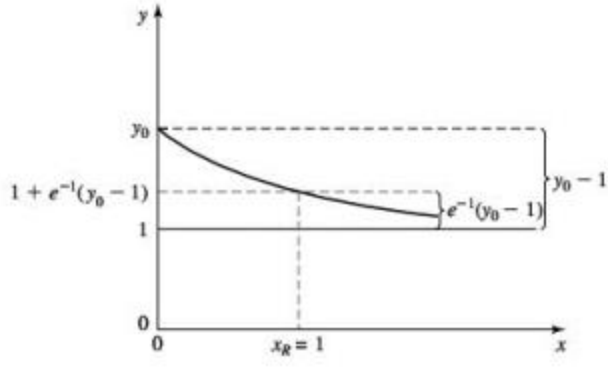
Si se utiliza el método analítico, es necesario calcular los autovalores. El autovalor asociado a $y_1 = 0$ es

$$\lambda_1 = g'(0) = 4 - 2y|_{y=0} = 4 > 0$$

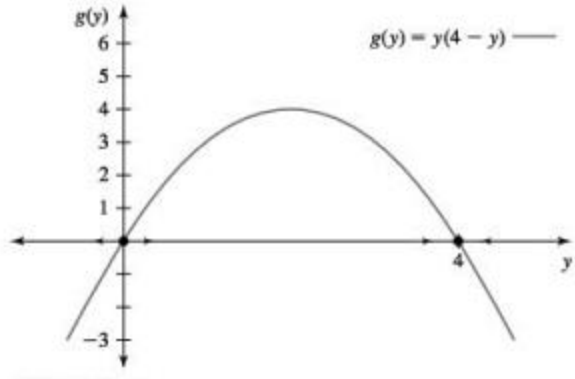
lo que implica que y_1 es inestable. El autovalor asociado a $y_2 = 4$ es

$$\lambda_2 = g'(4) = 4 - 2y|_{y=4} = -4 < 0$$

lo que implica que $y_2 = 4$ es localmente estable. ◀

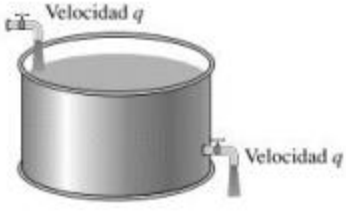


▲ **Figura 8.15**
Ilustración del tiempo x_R en el Ejemplo 2



▲ **Figura 8.16**
Gráfica de $g(y)$ en el Ejemplo 3

8.2.2 Modelo de un solo compartimiento o depósito



▲ **Figura 8.17**
Las velocidades de entrada y de salida son iguales. El agua del tanque permanece al mismo nivel

Este ejemplo se ha adaptado de DeAngelis (1992). Los modelos de compartimientos se utilizan frecuentemente para modelar el flujo de materia (nutrientes, energía, etc.). El modelo más simple consiste en un compartimiento, por ejemplo, un volumen fijo V de agua (como un tanque o un lago) que contiene un soluto (por ejemplo fósforo). Supongamos que el agua entra al compartimiento con una velocidad constante q y deja el compartimiento a la misma velocidad (*véase* la Figura 8.17). Como las velocidades de entrada y de salida coinciden, el volumen del depósito permanece constante. Investigaremos los efectos de diferentes concentraciones en la solución de entrada sobre la concentración de la solución que está en el depósito.

Denominaremos $C(t)$ a la concentración de la solución del compartimiento en el instante t. Entonces la masa total de soluto es $C(t)V$, siendo V el volumen del compartimiento. Por ejemplo, si la concentración de la solución es de 2 gramos por litro y el volumen del compartimiento es de 10 litros, entonces la masa total de soluto es de 2 g litro^{-1} multiplicado por 10 litros, es igual a 20 g.

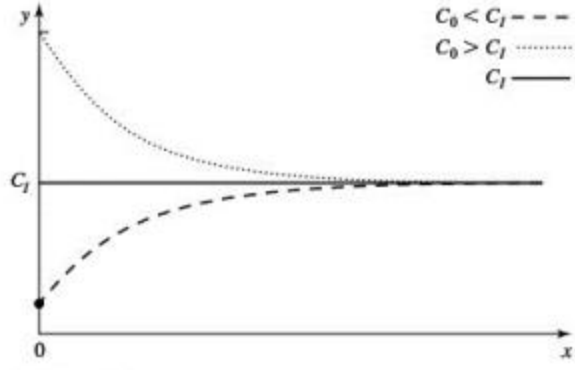
Si C_I es la concentración de la solución entrante y q es la velocidad a la que entra el agua, entonces qC_I, la **carga de entrada**, es la velocidad con la que entra masa. Por ejemplo, si la concentración de la solución entrante es de 5 g litro^{-1} y la velocidad con la que entra la solución es 0.1 litros s^{-1}, entonces la carga de entrada (es decir la velocidad a la que entra masa) es 5 g litro^{-1} multiplicado por 0.1 litros s^{-1}, que es igual a 0.5 g s^{-1}.

Si se supone que la solución del compartimiento está bien mezclada, de forma que la solución que sale tiene la misma concentración que la solución que hay en el compartimiento (concretamente $C(t)$ en el instante t), entonces $qC(t)$ es la velocidad a la que sale masa del compartimiento en el instante t.

Estos diferentes procesos se pueden ilustrar esquemáticamente en un diagrama de flujo, como se muestra en la Figura 8.18. Como la masa se conserva en el sistema, se puede utilizar la **ley de conservación de masa** para obtener una ecuación que describa el flujo de materia en este sistema:

▲ **Figura 8.18**
Diagrama de flujo del modelo de un solo compartimiento

$$\begin{bmatrix}\text{velocidad de cambio}\\ \text{de masa de soluto}\\ \text{en el depósito}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{velocidad}\\ \text{de entrada}\\ \text{de masa}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{velocidad}\\ \text{de salida}\\ \text{de masa}\end{bmatrix}$$



▲ **Figura 8.19**
Curvas de solución del modelo de un solo compartimiento para diversos valores de C_0

o, escribiendo C en vez de $C(t)$ (y teniendo cuidado de no confundirlo con una constante),

$$\frac{d}{dt}(CV) = qC_I - qC \tag{8.55}$$

Como V es constante, (8.55) se puede escribir como

$$\frac{dC}{dt} = \frac{q}{V}(C_I - C) \tag{8.56}$$

que es una ecuación diferencial lineal del tipo presentado en la Sección 8.1.2, caso 1. Se puede resolver utilizando separación de variables. Omitiremos los pasos para concentrarnos en la presentación del sistema. Si $C(0) = C_0$, la solución de la ecuación diferencial es

$$C(t) = C_I\left[1 - \left(1 - \frac{C_0}{C_I}\right)e^{-(q/V)t}\right] \tag{8.57}$$

La Figura 8.19 muestra curvas de solución para diferentes valores de C_0. La Ecuación (8.56) permite concluir que C_I es el único equilibrio. Observando la solución $C(t)$ en (8.57) puede verse que

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = C_I$$

independientemente de la concentración inicial C_0 en el compartimiento. Esto demuestra que C_I es **globalmente estable**. La estabilidad global implica que, independientemente de lo que se perturbe el sistema de su estado de equilibrio, el sistema siempre volverá a dicho estado.

Este resultado se puede obtener también utilizando el método de los autovalores. Se escribe

$$C(t) = C_I + z(t)$$

Entonces,

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[C_I + z(t)] = \frac{dz(t)}{dt}$$

es decir,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{q}{V}z(t) \tag{8.58}$$

ya que $C_I - C(t) = -z(t)$. Nótese que (8.58) es exacta, es decir, no es necesario utilizar la aproximación lineal para el miembro derecho de la Ecuación (8.56), porque ya es lineal. Podemos ver en (8.58) que $-q/V$ es el autovalor asociado al equilibrio C_I. Como q y V son positivos, el autovalor es negativo y por tanto se

deduce que es localmente estable. En este caso se puede obtener más información, ya que (8.58) es exacta con solución

$$z(t) = z(0)e^{-(q/V)t} \tag{8.59}$$

lo que demuestra que para *cualquier* perturbación $z(0)$, $z(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Es decir, el sistema vuelve al equilibrio C_I [es decir, $C(t) \to C_I$ cuando $t \to \infty$] independientemente de lo que se perturbe al sistema. La razón de que el método de los autovalores nos permita demostrar la estabilidad global reside en el hecho de que la ecuación diferencial (8.55) es *lineal*. En otros casos, el método de los autovalores sólo permite obtener estabilidad local, ya que primero hay que linealizar y entonces, la ecuación diferencial linealizada es sólo una aproximación.

La Ecuación (8.59) muestra que el sistema vuelve al equilibrio C_I con rapidez exponencial y que el autovalor $-q/V$ determina la escala temporal, es decir, la rapidez con la que el sistema alcanza el equilibrio. Cuanto mayor sea q/V, más rápido se recupera el sistema de una perturbación. En este contexto, se puede definir un tiempo de retorno al equilibrio (como en el Ejemplo 2), denominado T_R. Por convenio, el tiempo de retorno al equilibrio, T_R, se define como la cantidad de tiempo necesaria para reducir la diferencia inicial $C_0 - C_I$ a una fracción e^{-1}, es decir,

$$C(T_R) - C_I = e^{-1}(C_0 - C_I) \tag{8.60}$$

Utilizando (8.57), se puede ver que

$$C(T_R) = C_I\left[1 - \left(1 - \frac{C_0}{C_I}\right)e^{-(q/V)T_R}\right]$$

que se puede expresar como

$$C(T_R) - C_I = (C_0 - C_I)e^{-(q/V)T_R} \tag{8.61}$$

Igualando (8.60) y (8.61) se obtiene

$$e^{-1}(C_0 - C_I) = (C_0 - C_I)e^{-(q/V)T_R}$$

con lo que resulta

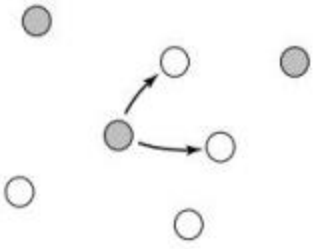
$$1 = \frac{q}{V}T_R \quad \text{o} \quad T_R = \frac{V}{q}$$

Es decir, el tiempo de retorno aumenta con el volumen V y disminuye con la velocidad de flujo q. Esto resulta intuitivamente claro: cuanto mayor sea el volumen y menor la velocidad de entrada, más tiempo requerirá llegar al equilibrio. Se puede demostrar que T_R se puede interpretar como el tiempo medio de estancia de una molécula de soluto. Es decir, T_R es el tiempo medio que una molécula de soluto pasa en el compartimiento antes de salir, cuando el sistema está en equilibrio.

8.2.3 El modelo de Levins

La importancia ecológica de la estructura espacial en el mantenimiento de poblaciones fue señalada por Andrewartha y Birch (1957) basándose en estudios de poblaciones de insectos. Observaron que aunque las poblaciones locales se extinguían frecuentemente, sus áreas eran posteriormente recolonizadas por inmigrantes procedentes de otras áreas de la misma población, permitiendo así a la población perdurar globalmente. Quince años más tarde, en 1969, Richard Levins propuso el concepto de metapoblaciones (Levins, 1969), que supuso un avance teórico importante, y proporcionó el marco teórico para el estudio de poblaciones estructuradas espacialmente.

Una metapoblación es un conjunto de subpoblaciones. Cada subpoblación ocupa un área, y las diversas áreas se relacionan mediante la migración de individuos



▲ **Figura 8.20**
Descripción esquemática del modelo de metapoblación. Las áreas sombreadas están ocupadas y las flechas indican eventos de migración

de un área a otra (*véase* la Figura 8.20). En este caso, sólo se lleva cuenta de la proporción de áreas ocupadas por subpoblaciones. Las subpoblaciones se extinguen con velocidad constante, denominada m (índice de mortalidad). Las áreas vacantes se colonizan con una velocidad que es proporcional a la fracción de áreas colonizadas. La constante de proporcionalidad se denomina c (por hacer referencia a la colonización). Si se denomina $p(t)$ la fracción de áreas que están ocupadas en el instante t, escribiendo $p = p(t)$,

$$\frac{dp}{dt} = cp(1 - p) - mp \tag{8.62}$$

El primer término del miembro derecho describe el proceso de colonización. Nótese que la fracción de áreas ocupadas se incrementa sólo cuando se ocupa un área vacante; de ahí el producto $p(1 - p)$ en el primer término del miembro derecho. El signo menos delante de m indica que un evento de extinción disminuye el número de áreas ocupadas.

No resolveremos la Ecuación (8.62), sino que nos centraremos en sus equilibrios. Se hace

$$cp(1 - p) - mp = 0$$

Tras sacar factor común cp se obtiene

$$cp\left(1 - \frac{m}{c} - p\right) = 0$$

que tiene dos soluciones:

$$p_1 = 0 \quad \text{y} \quad p_2 = 1 - \frac{m}{c}$$

La solución $p_1 = 0$ se denomina solución trivial, porque corresponde a la situación en la que todas las áreas están vacías. Como los individuos no se crean espontáneamente, sólo se puede recolonizar un área vacante mediante migración desde otras áreas ocupadas. Por tanto, una vez se extingue una metapoblación, permanece extinta. El otro equilibrio $p_2 = 1 - m/c$ sólo es relevante cuando $p_2 \in (0, 1]$, ya que p representa una fracción y por tanto, es un número entre 0 y 1. Como m y c son ambos positivos, se deduce inmediatamente que $p_2 < 1$ para todos los valores de m y c. Para ver cuándo es $p_2 > 0$ se hace

$$1 - \frac{m}{c} > 0$$

que se cumple cuando

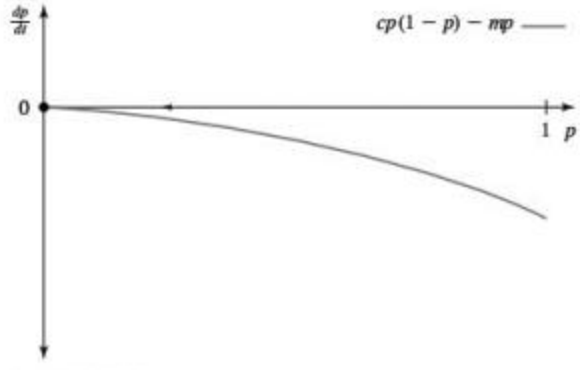
$$m < c$$

Es decir, el equilibrio no trivial $p_2 = 1 - m/c$ está en $(0, 1]$ si la velocidad de extinción m es menor que la velocidad de colonización c. Si $m \geqslant c$ entonces sólo hay un equilibrio en $[0, 1]$, concretamente $p_1 = 0$. Esto se ilustra en las Figuras 8.21 y 8.22. Observando dichas gráficas, se puede analizar la estabilidad de los equilibrios.

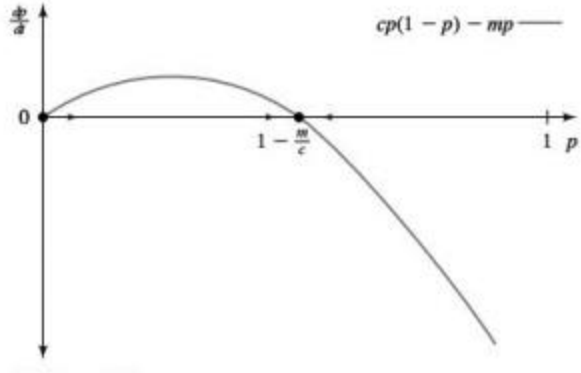
Caso 1: $\boldsymbol{m \geqslant c}$. Sólo existe el equilibrio trivial $p_1 = 0$. Para cualquier valor de $p \in (0, 1]$ puede verse que $dp/dt < 0$. Por tanto, la fracción de áreas ocupadas disminuye. El equilibrio es local y globalmente estable.

Caso 2: $\boldsymbol{m < c}$. Existen dos equilibrios, concretamente 0 y $1 - m/c$. El equilibrio trivial $p_1 = 0$ es ahora inestable, ya que si se perturba $p_1 = 0$ hacia algún valor en el intervalo $(0, 1 - m/c)$, entonces $dp/dt > 0$, lo que implica que $p(t)$ crece. El sistema por tanto no vuelve a 0.

El otro equilibrio, $p_2 = 1 - m/c$, es localmente estable. Tras una pequeña perturbación de este equilibrio, a la derecha de p_2, $dp/dt < 0$ y a la izquierda de p_2, $dp/dt > 0$. Por tanto, el sistema vuelve a p_2.



▲ **Figura 8.21**
El caso de $m \geqslant c$



▲ **Figura 8.22**
El caso de $m < c$

Se puede utilizar también el método de los autovalores para analizar la estabilidad de los equilibrios. Además, esto permitirá obtener información sobre la rapidez con la que el sistema vuelve al estado de equilibrio estable. Sea

$$g(p) = cp(1 - p) - mp$$

Para linealizar esta función alrededor de los valores del equilibrio, hay que calcular

$$g'(p) = c - 2cp - m$$

Ahora, si $p_1 = 0$, entonces

$$g'(0) = c - m$$

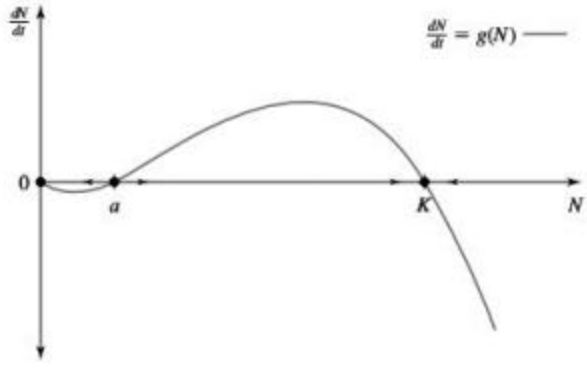
mientras que si $p_2 = 1 - m/c$, entonces,

$$g'\left(1 - \frac{m}{c}\right) = c - 2c\left(1 - \frac{m}{c}\right) - m = c - 2c + 2m - m = m - c$$

A partir de lo anterior, se puede ver que $c - m$ es el autovalor correspondiente a $p_1 = 0$ y $m - c$ es el autovalor correspondiente a $p_2 = 1 - m/c$. Se obtiene que

Si $c - m < 0$, entonces $p_1 = 0$ es localmente estable
Si $m - c < 0$, entonces $p_1 = 0$ es inestable y $p_2 = 1 - m/c$ es localmente estable

Para resumir los resultados obtenidos, si $m > c$, entonces $p_1 = 0$ es el único equilibrio en [0, 1] y es localmente estable (de hecho, el análisis gráfico demostró que es globalmente estable). Si $m < c$, entonces hay dos equilibrios en [0, 1]. El equilibrio $p_1 = 0$ es ahora inestable y el equilibrio $p_2 = 1 - m/c$ es localmente estable.



▲ **Figura 8.23**
Gráfica de $g(N)$ que ilustra el efecto Allee

8.2.4 El efecto Allee

En especies que se reproducen sexualmente, los individuos pueden experimentar una velocidad de reclutamiento desproporcionadamente baja cuando la densidad de la población cae por debajo de un cierto nivel, debido a la falta de apareamientos. Esto se conoce como efecto Allee (Allee, 1931). Una simple extensión de la ecuación logística incorpora este efecto. Se denomina $N(t)$ al tamaño de la población en el instante t. Haciendo $N = N(t)$,

$$\frac{dN}{dt} = rN(N-a)\left(1-\frac{N}{K}\right) \tag{8.63}$$

siendo r, a y K constantes positivas. Se supone que $0 < a < K$. Veremos que, como en la ecuación logística, K indica la capacidad de alojamiento. La constante a es un umbral sobre el tamaño de la población, por debajo del cual la velocidad de reclutamiento es negativa, lo que indica que la población disminuirá y finalmente se extinguirá.

Los equilibrios de (8.63) son $\hat{N} = 0$, a y k. Entonces

$$g(N) = rN(N-a)\left(1-\frac{N}{K}\right) = r\left(N^2 + \frac{a}{K}N^2 - \frac{N^3}{K} - aN\right)$$

La Figura 8.23 muestra una posible gráfica de $g(N)$. Derivando $g(N)$ se obtiene

$$g'(N) = r\left(2N + \frac{2a}{K}N - \frac{3N^2}{K} - a\right) = \frac{r}{K}(2NK + 2aN - 3N^2 - aK)$$

Se puede calcular el autovalor $g'(\hat{N})$ asociado al equilibrio $\hat{N}$.

Si $\hat{N} = 0$ *entonces* $g'(0) = \frac{r}{K}(-aK) < 0$
Si $\hat{N} = a$ *entonces* $g'(a) = \frac{r}{K}a(K-a) > 0$
Si $\hat{N} = K$ *entonces* $g'(K) = \frac{r}{K}K(a-K) < 0$

En lo que sigue, es conveniente comparar los resultados del método de los autovalores con la gráfica de $g(N)$.

Como $g'(0) < 0$, se deduce que $\hat{N} = 0$ es localmente estable. Asimismo, como $g'(K) < 0$, entonces $\hat{N} = K$ también es localmente estable. El equilibrio $\hat{N} = a$ es inestable ya que $g'(a) > 0$. Esto resulta evidente también observando la Figura 8.23. Este es también un ejemplo en el que ambos equilibrios estables lo son localmente y globalmente.

La Figura 8.23 indica que si $0 \leqslant N(0) < a$, entonces $N(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Si $a < N(0) \leqslant K$ o $N(0) \geqslant K$, entonces $N(t) \to K$ cuando $t \to \infty$. Para interpretar estos resultados, se puede ver que si la población inicial $N(0)$ es demasiado pequeña [es decir, $N(0) < a$], entonces la población se extinguirá. Si la población inicial es suficientemente grande [es decir, $N(0) > a$], la población perdurará. Es decir, el parámetro a corresponde a nivel umbral. La velocidad de reclutamiento sólo es lo suficientemente grande cuando el tamaño de la población supera a este nivel.

8.2.5. Problemas

(8.2.1)

1. Suponga que

$$\frac{dy}{dx} = y(2 - y)$$

(a) Calcule los equilibrios de esta ecuación diferencial.

(b) Dibuje dy/dx en función de y, y utilice la gráfica para estudiar la estabilidad de los equilibrios.

(c) Calcule los autovalores asociados con cada equilibrio y estudie la estabilidad de los equilibrios.

2. Suponga que

$$\frac{dy}{dx} = (2 - y)(3 - y)$$

(a) Calcule los equilibrios de esta ecuación diferencial.

(b) Dibuje en función de y, y utilice la gráfica para estudiar la estabilidad de los equilibrios.

(c) Calcule los autovalores asociados con cada equilibrio y estudie la estabilidad de los equilibrios.

3. Suponga que

$$\frac{dy}{dx} = y(y - 1)(y - 2)$$

(a) Calcule los equilibrios de esta ecuación diferencial.

(b) Dibuje dy/dx en función de y, y utilice la gráfica para estudiar la estabilidad de los equilibrios.

(c) Calcule los autovalores asociados con cada equilibrio y estudie la estabilidad de los equilibrios.

4. Suponga que

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)(y - 2)$$

(a) Calcule los equilibrios de esta ecuación diferencial.

(b) Dibuje dy/dx en función de y, y utilice la gráfica para estudiar la estabilidad de los equilibrios.

(c) Calcule los autovalores asociados con cada equilibrio y estudie la estabilidad de los equilibrios.

5. (*Ecuación logística*) Suponga que el tamaño de la población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística con velocidad de crecimiento intrínseca $r = 1.5$. Suponga que la capacidad de alojamiento es $K = 100$.

(a) Obtenga la ecuación diferencial que modela la velocidad de crecimiento de esta población.

(b) Calcule todos los equilibrios, y estudie la estabilidad de los equilibrios utilizando el método gráfico.

(c) Calcule los autovalores asociados con los equilibrios, y utilice dichos autovalores para determinar su estabilidad. Compare sus respuestas con los resultados de (b).

6. (*Un modelo simple de depredación*) Suponga que $N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t. La población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística pero, además, la depredación reduce el tamaño de la población de forma que la velocidad de cambio se expresa de la siguiente forma

$$\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5 + N} \tag{8.64}$$

El primer término del miembro derecho modela el crecimiento logístico. El segundo término modela el efecto de la depredación.

(a) Sea

$$g(N) = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5 + N}$$

Dibuje $g(N)$.

(b) Calcule todos los equilibrios de (8.64).

(c) Utilice la gráfica de (a) para determinar la estabilidad de los equilibrios obtenidos en (b).

(d) Utilice el método de los autovalores para determinar la estabilidad de los equilibrios obtenidos en (b).

7. (*Ecuación logística*) Suponga que el tamaño de la población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística con velocidad de crecimiento intrínseca $r = 2$. Suponga que $N(0) = 10$.

(a) Determine la capacidad de alojamiento K si la máxima rapidez de crecimiento de la población se produce cuando su tamaño es 1000. (*Sugerencia*: demuestre que la gráfica de dN/dt en función de N tiene un máximo en $K/2$).

(b) Si $N(0) = 10$, ¿cuánto tiempo tardará el tamaño de la población en alcanzar el valor de 1000?

(c) Calcule $\lim_{t \to \infty} N(t)$.

8. (*Ecuación logística*) La curva logística $N(t)$ es una curva en forma de S que satisface la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \text{con } N(0) = N_0 \tag{8.65}$$

cuando $N_0 < K$.

(a) Utilice la Ecuación diferencial (8.65) para demostrar que el punto de inflexión de la curva logística está exactamente en la mitad del valor de saturación de dicha curva. (*Sugerencia*: no resuelva (8.65), sino que derive el miembro derecho de (8.65) con respecto a r.)

(b) La solución $N(t)$ de (8.65) se puede definir para todo t real. Demuestre que $N(t)$ es simétrica respecto del punto de inflexión y que $N(0) = N_0$. Es decir, utilice primero la solución de (8.65) que se da en (8.32), y calcule el tiempo t_0 para que $N(t_0) = K/2$,

es decir, el punto de inflexión está en $t = t_0$. Calcule $N(t_0 + h)$ y $N(t_0 - h)$ para $h > 0$, y demuestre que

$$N(t_0 + h) - \frac{K}{2} = \frac{K}{2} - N(t_0 - h)$$

Utilice la gráfica de $N(t)$ para explicar por qué esto demuestra que $N(t)$ es simétrica alrededor del punto de inflexión $(t_0, N(t_0))$.

9. Suponga que la población de peces evoluciona de acuerdo con la ecuación logística, y que se recogen un número fijo de peces por unidad tiempo. Es decir,

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H$$

En lo que sigue, suponga que $r = 2$ y $N = 1000$.
(a) Calcule los posibles equilibrios, y analice su estabilidad cuando $H = 100$.
(b) ¿Cuál es la máxima velocidad de recogida que mantiene un tamaño de la población positivo?

10. Suponga que la población de peces evoluciona de acuerdo a la ecuación logística y que los peces se recogen a una velocidad proporcional al tamaño de la población. Si $N(t)$ indica el tamaño de la población en el instante t, entonces

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN$$

Suponga que $r = 2$ y $K = 1000$.
(a) Calcule los posibles equilibrios y analice su estabilidad cuando $h = 0.1$, utilizando el método gráfico, y calcule la máxima velocidad de recogida que mantiene un tamaño de la población positivo.
(b) Demuestre que si $h < r = 2$, entonces existe un equilibrio no trivial. Calcule dicho equilibrio.
(c) Analice la estabilidad del equilibrio obtenido en (b) utilizando (i) el método de los autovectores y (ii) el método gráfico.

(8.2.2)

11. Suponga el modelo de un solo compartimiento definido en la subsección 8.2.2: si $C(t)$ es la concentración de soluto en el instante t, entonces dC/dt está dado por (8.56), es decir,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{q}{V}(C_I - C)$$

siendo q, V y C_I los definidos en la Subsección 8.2.2. Utilice el método gráfico para estudiar la estabilidad del equilibrio $C = C_I$.

12. Suponga el modelo de un solo compartimiento definido en la Subsección 8.2.2. Es decir, denomine $C(t)$ a la concentración de soluto en el instante t y suponga que

$$\frac{dC}{dt} = 3(20 - C(t)) \quad \text{para } t \geqslant 0 \qquad (8.66)$$

(a) Resuelva (8.66) cuando $C(0) = 5$.
(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} C(t)$.
(c) Utilice la respuesta de (a) para determinar t de forma que $C(t) = 10$.

13. Suponga el modelo de un solo compartimiento definido en la Subsección 8.2.2. Es decir, denomine $C(t)$ a la concentración de soluto en el instante t y suponga que la concentración de la solución entrante es de 3 g litro^{-1} y que la velocidad de entrada de masa es de 0.2 litros s^{-1}. Suponga además que el volumen del compartimiento es $V = 400$ litros.

(a) Obtenga la ecuación diferencial de la velocidad de cambio en la concentración en el instante t.

(b) Resuelva la ecuación diferencial de (a) cuando $C(0) = 0$ y calcule $\lim_{t\to\infty} C(t)$.

(c) Calcule todos los equilibrios de la ecuación diferencial estudie su estabilidad.

14. Suponga que un tanque contiene 1000 litros de agua, y que se disuelven 2 kg de sal.

(a) Calcule la concentración de sal en g litro^{-1}.

(b) Suponga que se desea reducir la concentración de sal. Un método sería quitar una cierta cantidad de agua salada del tanque y después sustituirla por agua pura ¿Cuánta agua salada habría que reemplazar por agua pura para obtener una concentración de sal de 1 g litro^{-1}?

(c) Otro método para reducir la concentración de sal sería aplicar una tubería de desbordamiento y bombear agua pura en el tanque. De esta forma la concentración de sal se reduciría gradualmente. Suponga que tiene dos bombas, una que bombea agua a una velocidad de 1 litro s^{-1} y otra que bombea a una velocidad de 2 litros s^{-1}. Para cada bomba, calcule cuánto tiempo se tardaría en reducir la concentración de sal desde la concentración inicial hasta 1 g litro^{-1}, y cuánta agua pura se necesita en cada caso (nótese que la velocidad a la que el agua entra en el tanque es igual a la velocidad a la que el agua sale del tanque). Compare la cantidad de agua necesaria utilizando las bombas con la cantidad de agua necesaria en el apartado (b).

15. Suponga el modelo de un solo compartimiento definido en la Subsección 8.2.2. Denomine $C(t)$ a la concentración de soluto en el instante t y suponga:

$$\frac{dC}{dt} = 0.37(254 - C(t)) \quad \text{para } t \geqslant 0$$

(a) Calcule la concentración de equilibrio.

(b) Suponga que la concentración se incrementa bruscamente desde la concentración de equilibrio a 400. Calcule el tiempo de retorno al equilibrio, denominado T_R, que es la cantidad de tiempo necesaria para que la diferencia inicial se reduzca a una fracción e^{-1}.

(c) Repita el apartado (b) para el caso en que la concentración se incremente bruscamente desde la concentración de equilibrio hasta 800.

(d) ¿Son diferentes los valores de T_R calculados en (a) y en (b)?

16. Suponga el modelo del compartimiento de la Subsección 8.2.2. Asuma que la concentración de equilibrio es C_I y que la concentración inicial es C_0. Exprese en términos de T_R el tiempo necesario para que la desviación inicial $C_0 - C_I$ se reduzca a una fracción p.

17. Suponga el modelo del compartimiento de la Subsección 8.2.2. Asuma que la concentración de equilibrio es C_I. El tiempo T_R admite una representación integral que se puede generalizar a sistemas con más de un compartimiento. Demuestre que

$$T_R = \int_0^\infty \frac{C(t) - C_I}{C(0) - C_I}\, dt$$

[*Sugerencia*: utilice (8.57) para demostrar que

$$\frac{C(t) - C_I}{C(0) - C_I} = e^{-(q/V)t}$$

e integre los dos miembros con respecto a t desde 0 a ∞.]

18. Utilice el modelo del compartimiento definido en la Subsección 8.2.2 para investigar cómo influye el tamaño de un lago en la dinámica de los nutrientes tras una perturbación. El Lago Mary y el Lago Elizabeth son dos lagos ficticios en North Woods que se utilizaron como lagos experimentales para estudiar la dinámica de los nutrientes. El Lago Mary tiene un volumen de 6.8×10^3 m^3, y el Lago Elizabeth tiene el doble de volumen, concretamente 13.6×10^3 m^3. Ambos lagos tienen la misma velocidad de entrada/salida de $q = 170$ litros s^{-1}. Como los dos lagos comparten el mismo área de drenaje, la concentración C_I de soluto entrante es la misma para los dos, concretamente, $C_I = 0.7$ mg litro^{-1}. El experimento consiste en incrementar la concentración de la solución en cada lago en el 10% en el instante cero y después observar cómo varía la concentración de la solución en cada lago con el tiempo. Utilice el modelo de un solo compartimiento para realizar predicciones sobre la evolución de la concentración de la solución (note que 1 m^3 de agua equivale a 1000 litros).

(a) Calcule la concentración inicial C_0 de la solución en cada lago en el instante cero (es decir, inmediatamente después del incremento del 10% en la concentración de la solución).

(b) Utilice la Ecuación (8.57) para determinar cómo varía la concentración de la solución con el tiempo en cada lago. Dibuje su resultado.

(c) ¿Qué lago vuelve al equilibrio más rápido? Calcule el tiempo de retorno al equilibrio, T_R, para cada lago y explique cómo se relaciona con los autovalores correspondientes a la concentración de equilibrio C_I en cada lago.

19. Utilice el modelo del compartimiento definido en la Subsección 8.2.2 para investigar el efecto del incremento en la concentración de entrada C_I de la concentración de nutrientes de un lago. Suponga un lago en un entorno impoluto con una concentración de fósforo en equilibrio de 0.3 mg litro^{-1}. El volumen V del lago es 12.3×10^6 m^3 y la velocidad de flujo de entrada y salida es igual a 220 litros s^{-1}. La transformación de tierras para uso agrícola en el área de drenaje del lago ha incrementado la concentración de entrada de 0.3 mg litro^{-1} a 1.1 mg litro^{-1}. Suponga que este incremento se produce instantáneamente. Calcule el tiempo de retorno al nuevo equilibrio, denominado T_R, en días, y calcule la concentración de nutrientes en el lago T_R unidades de tiempo después del cambio en la concentración de entrada (note que 1 m^3 de agua equivale a 1000 litros).

(8.2.3)

20. (*Modelo de Levins*) Denomine $p = p(t)$ a la fracción de áreas ocupadas en un modelo de metapoblación, y suponga que

$$\frac{dp}{dt} = 2p(1 - p) - p \quad \text{para } t \geq 0 \tag{8.67}$$

(a) Haga $g(p) = 2p(1 - p) - p$. Dibuje $g(p)$ para $p \in [0, 1]$.

(b) Calcule todos los equilibrios de (8.67) que están en [0, 1], y determine su estabilidad utilizando la gráfica de (a).

(c) Utilice el método de los autovalores para analizar la estabilidad de los equilibrios obtenidos en (b).

21. (*Modelo de Levins*) Denomine $p = p(t)$ a la fracción de áreas ocupadas en un modelo de metapoblación, y suponga que

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p(1 - p) - 1.5p \quad \text{para } t \geq 0 \tag{8.68}$$

(a) Haga $g(p) = 0.5p(1-p) - 0.5p$. Dibuje $g(p)$ para $p \in [0, 1]$.

(b) Calcule todos los equilibrios de (8.68) que están en [0, 1], y determine su estabilidad utilizando la gráfica de (a).

(c) Utilice el método de los autovalores para analizar la estabilidad de los equilibrios obtenidos en (b).

22. (*Un modelo de metapoblación con extinción dependiente de la densidad*) Denomine $p = p(t)$ a la fracción de áreas ocupadas en un modelo de metapoblación, y suponga que

$$\frac{dp}{dt} = cp(1 - p) - p^2 \quad \text{para } t \geq 0 \tag{8.69}$$

siendo $c > 0$. El término p^2 modela la extinción en áreas dependiente de la densidad. Concretamente, la velocidad de extinción por área es p y una fracción p de las áreas están ocupadas, con lo que resulta una velocidad de extinción de p^2. La colonización de áreas vacantes es la misma que en modelo de Levins.

(a) Haga $g(p) = cp(1 - p) - p^2$ y dibuje la gráfica de $g(p)$.

(b) Calcule todos los equilibrios de (8.69) en [0, 1] y determine su estabilidad.

(c) ¿Hay algún equilibrio no trivial cuando $c > 0$? Compare los resultados con los resultados correspondientes del modelo de Levins.

23. (*Destrucción del hábitat*) En la Subsección 8.2.3, se presentó el modelo de Levins. Para estudiar los efectos de la destrucción del hábitat en una sola especie, se modifica la Ecuación (8.62) de la siguiente forma. Se supone que una fracción D de áreas está permanentemente destruida. En consecuencia, sólo las áreas que están vacantes y no destruidas se pueden colonizar con éxito. Estas áreas tienen una frecuencia de $1 - p(t) - D$ si $p(t)$ indica la fracción de áreas ocupadas en el instante t. Entonces

$$\frac{dp}{dt} = cp(1 - p - D) - mp \tag{8.70}$$

(a) Explique con palabras el significado de los diferentes términos de la Ecuación (8.70).

(b) Demuestre que hay dos posibles equilibrios, el equilibrio trivial $p_1 = 0$ y el equilibrio no trivial $p_2 = 1 - D - \frac{m}{c}$. Dibuje la gráfica de p_2 en función de D.

(c) Suponga que $m < c$, de forma que el equilibrio no trivial es estable cuando $D = 0$. Calcule una condición para D tal que el equilibrio no trivial esté entre 0 y 1, y estudie la estabilidad del equilibrio no trivial y del equilibrio trivial bajo esta condición.

(d) Suponga la condición obtenida en (c), es decir el equilibrio no trivial, está entre 0 y 1. Demuestre que cuando el sistema está en equilibrio, la fracción de áreas que están vacantes y sin destruir, es decir, los sitios que hay *disponibles* para colonización, es independiente de D. Demuestre que la **velocidad de colonización efectiva** en equilibrio, es decir, c veces la fracción de áreas disponibles, es igual a la velocidad de extinción. Esto demuestra que la velocidad efectiva de nacimientos de nuevas colonias compensa a la velocidad de extinción en estado de equilibrio.

(8.2.4)

24. (*Efecto Allee*) Denomine $N(t)$ al tamaño de una población en el instante t, y suponga que

$$\frac{dN}{dt} = 2N(N-10)\left(1-\frac{N}{100}\right) \quad \text{para } t \geqslant 0 \qquad (8.71)$$

(a) Calcule los equilibrios de (8.71).

(b) Utilice el método de los autovalores para determinar la estabilidad de los equilibrios obtenidos en (a).

(c) Sea

$$g(N) = 2N(N-10)\left(1-\frac{N}{100}\right)$$

para $N \geqslant 0$. Dibuje $g(N)$. Identifique en la gráfica los equilibrios de (8.71), y utilice dicha gráfica para estudiar su estabilidad. Compare los resultados con los obtenidos en (b). Utilice la gráfica para dar una interpretación de los autovalores asociados con el equilibrio.

25. (*Efecto Allee*) Denomine $N(t)$ al tamaño de una población en el instante t, y suponga que

$$\frac{dN}{dt} = 0.3N(N-17)\left(1-\frac{N}{200}\right) \quad \text{para } t \geqslant 0 \qquad (8.72)$$

(a) Calcule los equilibrios de (8.72).

(b) Utilice el método de los autovalores para determinar la estabilidad de los equilibrios obtenidos en (a).

(c) Sea

$$g(N) = 0.3N(N-17)\left(1-\frac{N}{200}\right)$$

para $N \geqslant 0$. Dibuje $g(N)$. Identifique en la gráfica los equilibrios de (8.72), y utilice dicha gráfica para estudiar su estabilidad. Compare los resultados con los obtenidos en (b). Utilice la gráfica para dar una interpretación de los autovalores asociados con el equilibrio.

8.3 SISTEMAS DE ECUACIONES AUTÓNOMAS (OPCIONAL)

En las dos secciones anteriores, se han presentado modelos que se pueden describir utilizando una única ecuación diferencial. Si se desea describir modelos en los que interactúan varias cantidades, como un modelo de competición en el que se relacionan varias especies, se necesita más de una ecuación diferencial. Se requiere lo que se denomina un sistema de ecuaciones diferenciales. Limitaremos nuestra exposición de nuevo a los sistemas autónomos, es decir, sistemas cuya dinámica no depende explícitamente de la variable independiente (que es generalmente el tiempo).

Esta sección puede verse como una presentación previa del Capítulo 11, donde se considerarán con detalle los sistemas de ecuaciones diferenciales. Un análisis riguroso de los sistemas de ecuaciones diferenciales requiere una gran cantidad de teoría previa, que desarrollaremos en los Capítulos 9 y 10. Como todavía no disponemos de las herramientas adecuadas para analizar los sistemas de ecuaciones diferenciales, esta sección tendrá un carácter más bien informal. Como el caso de los tráileres de películas, tras finalizar estas secciones no conoceremos la historia completa, pero el leerlas (esperamos) servirá para convencernos de que los sistemas de ecuaciones diferenciales proporcionan una herramienta muy rica para modelar sistemas biológicos.

8.3.1 Un modelo epidémico simple

Comenzaremos nuestra presentación de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas con un modelo clásico de enfermedad infecciosa, el modelo de Kermack- McKendrick (1927; 1932; 1933). Consideremos una población de tamaño fijo N que en un instante t se puede considerar dividida en tres clases: los susceptibles, $S(t)$, que se pueden infectar; los infecciosos, $I(t)$, que están infectados y pueden trasmitir la enfermedad, y los recuperados, $R(t)$, con individuos inmunes a la enfermedad. El flujo entre estas tres clases se puede describir así

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R$$

Se supone que la infección se extiende de acuerdo con la ley de acción de masas que apareció al hablar de las reacciones químicas. Los individuos susceptibles se infectan con una velocidad que es proporcional al número de infecciosos I. Los individuos infectados se recuperan con velocidad constante. Una ganancia en la clase de los infecciosos es una pérdida simultánea en la clase de los susceptibles. Asimismo, una ganancia en la clase de los individuos recuperados es una pérdida

en la clase de los infecciosos. La dinámica se puede describir por tanto de la siguiente forma

$$\frac{dS}{dt} = -bSI \tag{8.73}$$

$$\frac{dI}{dt} = bSI - aI \tag{8.74}$$

$$\frac{dR}{dt} = aI \tag{8.75}$$

Nótese que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = -bSI + bSI - aI + aI = 0$$

Como

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(S + I + R)$$

se deduce que $S(t) + I(t) + R(t)$ es una constante que se puede identificar como el tamaño de la población N. Para analizar el sistema, se supone que en el instante cero

$$S(0) > 0 \quad I(0) > 0 \quad R(0) = 0$$

Una cuestión de interés es si la infección se va extender. Se dice que la infección se extiende si

$$I(t) > I(0) \quad \text{para algún } t > 0$$

La Ecuación (8.74) permite dar respuesta a esta cuestión. Si

$$\frac{dI}{dt} = I(bS - a) > 0 \quad \text{en } t = 0$$

entonces $I(t)$ crece al principio y por tanto la infección se puede extender. Esta condición se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{bS(0)}{a} > 1$$

El valor $bS(0)/a$ se denomina **velocidad reproductiva básica** de la infección y se denomina generalmente R_0 [que no se debe confundir con el número de individuos recuperados en el instante 0, $R(0)$]. La cantidad R_0 es de gran importancia en epidemiología, ya que indica si la infección se puede extender. Es la clave para comprender por qué los programas de vacunación funcionan. Explica por qué no es necesario vacunar a todos contra la enfermedad infecciosa. Mientras el número de individuos susceptibles se reduzca por debajo de un cierto umbral, la infección no se extenderá. El umbral teórico, basado en el modelo de Kermack-McKendrick, es a/b. En la práctica, hay factores adicionales que influyen en la posible extensión de una infección (como la proximidad espacial de los individuos infectados). Pero la conclusión básica es la misma: mientras el número de individuos susceptibles esté por debajo de un cierto umbral, la infección no se extenderá.

Para estudiar cómo progresa la infección con el tiempo, se divide (8.73) por (8.75). Para $I > 0$, se obtiene

$$\frac{dS/dt}{dR/dt} = \frac{dS}{dR} = -\frac{bSI}{aI} = -\frac{b}{a}S$$

que si

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{b}{a}S$$

Separando variables e integrando se obtiene

$$\int \frac{dS}{S} = -\frac{b}{a}\int dR$$

Como $S(t) > 0$, resulta

$$\ln S(t) = -\frac{b}{a}R(t) + C$$

Con $R(0) = 0$, se obtiene

$$\ln S(0) = C$$

Entonces,

$$S(t) = S(0)e^{-(b/a)R(t)} \tag{8.76}$$

Como $R(t)$ es una función no decreciente (nadie puede abandonar la clase de los recuperados), de la Ecuación (8.76) se deduce que $S(t)$ es una función no creciente (*véase* la Figura 8.24).

Haciendo $t \to \infty$, se obtiene

$$S(\infty) = \lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty} S(0)e^{-(b/a)R(t)}$$

$$= S(0)e^{-(b/a)R(\infty)}$$

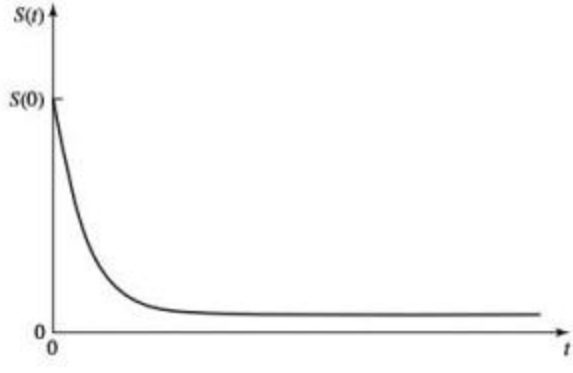
Como $R(\infty) \leqslant N$, se deduce que

$$S(\infty) \geqslant S(0)e^{-(b/a)N} > 0$$

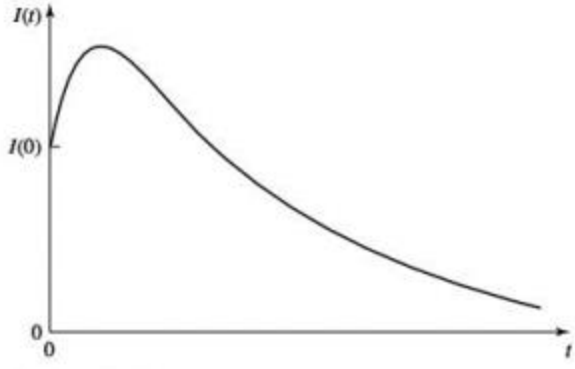
Es decir, no todos los individuos se infectan. Mientras el número de individuos susceptibles sea mayor que a/b, $dI/dt > 0$, el número de individuos infectados crece. Como el tamaño de la población es constante, la infección va a «utilizar» individuos susceptibles, hasta el instante en el que el número de susceptibles caiga por debajo del umbral a/b (*véase* la Figura 8.25). A partir de entonces, dI/dt es negativa, y el número de individuos infectados empieza a decrecer. La infección terminará por cesar, es decir

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$$

Como no todos los individuos se infectan ($S(\infty) > 0$), cuando la infección llega finalmente a su fin es por la inexistencia de individuos infecciosos, no por la falta de individuos susceptibles.

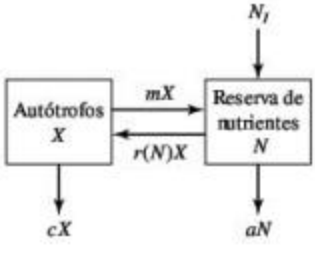


▲ **Figura 8.24**
La solución $S(t)$ del modelo de Kermack-McKendrick



▲ **Figura 8.25**
La solución $I(t)$ del modelo de Kermack-McKendrick

8.3.2 Un modelo de compartimientos



▲ **Figura 8.26**
Representación esquemática de la interacción entre organismos autótrofos y la reserva de nutrientes

En la Subsección 8.2.2, se presentó el modelo de un único compartimiento que condujo a una ecuación diferencial autónoma con una variable dependiente. En esta subsección, se presenta el modelo con dos compartimientos que describe la interacción de un organismo autótrofo[1] con su reserva de nutrientes (la exposición que sigue está adaptada parcialmente de DeAngelis, 1992). La Figura 8.26 muestra una descripción esquemática de las interacciones

Se supone que la reserva de nutrientes tiene una fuente externa y se denomina N_I a la velocidad de entrada de nutrientes. Es decir, N_I indica la masa total que fluye al sistema por unidad de tiempo. Los nutrientes pueden ser procesados, y suponemos que la velocidad de salida es proporcional a la masa total de nutrientes en el compartimiento, N, con constante de proporcionalidad a.

Los organismos autótrofos se alimentan de los nutrientes de la reserva y su velocidad de crecimiento es proporcional a la cantidad de biomasa de autótrofos, X. La velocidad de crecimiento específica, $r(N)$, depende de la cantidad de nutrientes disponibles.

Los organismos autótrofos pueden dejar el compartimiento autótrofo de dos maneras. A velocidad c se pierden completamente (por ejemplo, por recogida o por abandono de su hábitat). A velocidad m, la biomasa de los organismos autótrofos se recicla en la reserva de nutrientes (por ejemplo, tras la muerte de un organismo).

Este sistema se puede modelar entonces mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dN}{dt} = N_I - aN - r(N)X + mX \tag{8.77}$$

$$\frac{dX}{dt} = r(N)X - (m + c)X \tag{8.78}$$

Es interesante comparar el conjunto de ecuaciones diferenciales con la representación esquemática del modelo de la Figura 8.26. En particular, hay que poner atención a la dirección de las flechas. Por ejemplo, el término $r(N)X$ aparece en ambas ecuaciones: como este término corresponde a la toma de nutrientes por los autótrofos, aparece como una pérdida en la reserva de nutrientes, indicada por un

[1] Un organismo autótrofo es aquel que puede fabricar componentes orgánicos a partir de componentes completamente inorgánicos. Algunos ejemplos pueden ser la mayor parte de las plantas con clorofila y las algas verdeazuladas.

signo menos delante del término en la Ecuación (8.77). El mismo término aparece con signo más en la Ecuación (8.78), debido a que la toma de nutrientes por parte de los autótrofos produce un incremento de la biomasa de autótrofos. Nótese que la flecha etiquetada con $r(N)X$ va desde la reserva de nutrientes a la reserva de autótrofos. Por tanto representa una pérdida en la reserva de nutrientes [un signo menos en (8.77) delante de $r(N)X$] y una ganancia en la reserva de autótrofos [un signo más en (8.78) delante de $r(N)X$].

Es importante entender cómo se va desde la representación esquemática al conjunto de ecuaciones diferenciales, y a la inversa. Una representación esquemática resume rápidamente el flujo de materia (como nutrientes), mientras que el conjunto de ecuaciones diferenciales es indispensable si se desea analizar el sistema.

Para concretar la presentación, suponemos que la función $r(N)$ es lineal,

$$r(N) = bN$$

para alguna constante $b > 0$.

Como en la Sección 8.2, se puede introducir el concepto de equilibrios. Un equilibrio del sistema modelado por (8.77) y (8.78) se caracteriza por requerir simultáneamente que

$$\frac{dN}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dX}{dt} = 0 \tag{8.79}$$

ya que cuando las velocidades de cambio de las dos cantidades sean iguales a cero, los valores de N y X no cambiarán más.

Existe un método gráfico para obtener los equilibrios, dibujando las **isoclinas cero**. Estas curvas se obtienen haciendo $dN/dt = 0$ y $dX/dt = 0$. Las curvas para las que $dX/dt = 0$ se obtienen haciendo el miembro derecho de la Ecuación (8.78) igual a 0, es decir, $X(bN - (m + c)) = 0$, con lo que resulta

$$N = \frac{m + c}{b} \quad \text{o} \quad X = 0$$

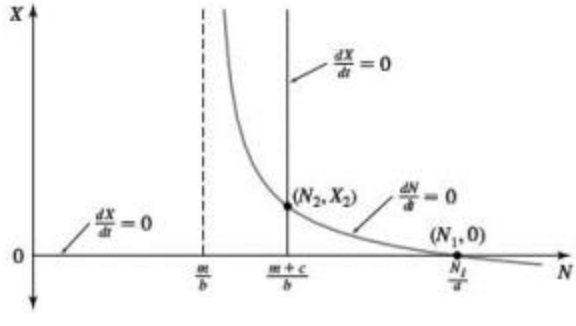
La curva para la que $dN/dt = 0$ se obtiene igualando a cero el miembro derecho de la Ecuación (8.77), con lo que resulta

$$X = \frac{N_I - aN}{bN - m}$$

Se dibujan las curvas en el plano N-X, como muestra la Figura 8.27.

La isoclina cero de N corta a la recta horizontal $X = 0$ en $(N_1, 0)$, donde N_1 satisface la ecuación

$$0 = \frac{N_I - aN_1}{bN_1 - m}$$



▲ **Figura 8.27**
Las isoclinas cero en el plano N-X

y por tanto $N_1 = N_I/a$. Se trata de un equilibrio trivial ya que corresponde al caso en el que no hay organismos autótrofos en el sistema (el sistema se reduce entonces al modelo de un solo compartimiento presentado en la Sección 8.2).

Dependiendo de dónde se localice la isoclina cero vertical de X, puede haber otro equilibrio (N_1X_2) para el que N_2 y X_2 sean positivos. Concretamente, observando la Figura 8.27, cuando

$$\frac{m}{b} < \frac{m+c}{b} < \frac{N_I}{a} \tag{8.80}$$

las dos isoclinas cero $N = (m + c)/b$ y $X = (N_I - aN)/(bN - m)$ se cortan en el primer cuadrante. Este equilibrio es un equilibrio no trivial.

Como $(m + c)/b > m/b$ cuando $c > 0$, la isoclina cero vertical $dX/dt = 0$ está siempre a la derecha de la asíntota vertical $N = m/b$. Por tanto, la primera inecuación de (8.80) se cumple siempre. Resolviendo la segunda inecuación

$$\frac{m+c}{b} < \frac{N_I}{a}$$

Despejando b se obtiene

$$b > \frac{a}{N_I}(m + c)$$

Es decir, el parámetro de crecimiento b debe superar un cierto umbral para que el organismo autótrofo sobreviva. Esto resulta intuitivamente claro, ya que m y c son las velocidades a las que se vacía la reserva de autótrofos. La desaparición de autótrofos debe ser compensada para que se produzca un aumento en su biomasa.

Supongamos que la relación m/b es fija. Entonces, cuanto menor sea c (la velocidad de pérdida de autótrofos), más a la izquierda estará la isoclina cero vertical $dX/dt = 0$ y por tanto, mayor será el valor de equilibrio X_2. Esto también resulta intuitivo, ya que la pérdida de menos autótrofos debe producir un valor de equilibrio mayor.

Para calcular el equilibrio no trivial (N_2X_2), hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = N_I - aN_2 - bN_2X_2 + mX_2 \tag{8.81}$$

$$0 = bN_2X_2 - (m + c)X_2 \tag{8.82}$$

donde se supone ahora que $X_2 \neq 0$. De la Ecuación (8.82) se obtiene

$$N_2 = \frac{m+c}{b}$$

Utilizando esto en (8.81), resulta

$$0 = N_I - a\frac{m+c}{b} - (m + c)X_2 + mX_2$$

o

$$X_2 = \frac{1}{c}\left(N_I - a\frac{m+c}{b}\right)$$

Se puede demostrar que si existe el equilibrio no trivial, entonces es localmente estable, es decir, el sistema volverá a este equilibrio después de una pequeña perturbación. En el Capítulo 11 estudiaremos dos métodos para analizar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales, uno gráfico y otro analítico, que son extensiones de los métodos desarrollados en la Sección 8.1.

8.3.3 Un modelo jerárquico de competición

Ampliaremos a continuación el modelo de metapoblación (modelo de Levins), presentado la Subsección 8.2.3. Concretamente, consideraremos múltiples especies. Recordamos el modelo de Levins, pero utilizando una interpretación algo diferente. En el modelo de Levins, se describió la dinámica de las subpoblaciones. Ahora lo veremos como un modelo de ocupación de emplazamientos por individuos. Es decir, el hábitat se considera dividido en zonas lo suficientemente pequeñas como para ser ocupadas como mucho por un solo individuo. Utilizando esta interpretación, se denomina p a la fracción de zonas ocupadas por un solo individuo en el instante t. Entonces

$$\frac{dp}{dt} = cp(1-p) - mp$$

siendo m la velocidad de extinción (la velocidad de muerte de los individuos) y c la velocidad de colonización (la velocidad a la que los individuos envían elementos de propagación). Tilman (1994) extendió este modelo considerando un sistema en el que las especies estaban ordenadas de acuerdo con su competitividad. La fracción de zonas ocupadas por la especie i en el instante t se denomina $p_i(t)$. Se supone que la especie 1 es el mejor competidor, la especie 2 el siguiente mejor y así sucesivamente. En competidor superior puede invadir una zona ocupada por un competidor inferior. El competidor inferior resulta desplazado tras la invasión por el competidor superior. Las dinámicas se expresan entonces mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= c_1p_1(1-p_1) - m_1p_1 \\
\frac{dp_2}{dt} &= c_2p_2(1-p_1-p_2) - m_2p_2 - c_1p_1p_2 \\
\frac{dp_3}{dt} &= c_3p_3(1-p_1-p_2-p_3) - m_3p_3 - c_1p_1p_3 - c_2p_2p_3 \\
&\vdots \\
\frac{dp_i}{dt} &= c_i\left(1 - \sum_{j=1}^{i} p_j\right) - m_ip_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_jp_jp_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

El primer término modela la colonización por la especie i de zonas que o bien están ocupadas por un competidor inferior o están vacantes. El segundo término modela la extinción de zonas ocupadas por la especie i. El resto de los términos modelan el desplazamiento competitivo por competidores superiores.

Para simplificar la presentación, supondremos que hay sólo dos especies y que $m_1 = m_2 = 1$. Las ecuaciones son entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= c_1p_1(1-p_1) - p_1 \\
\frac{dp_2}{dt} &= c_2p_2(1-p_1-p_2) - p_2 - c_1p_1p_2
\end{aligned}$$

La estructura jerárquica del modelo facilita la obtención de posibles equilibrios. Haciendo $dp_1/dt = 0$ se obtiene

$$0 = \hat{p}_1[c_1(1-\hat{p}_1) - 1]$$

que, además del equilibrio trivial 0, permite obtener

$$\hat{p}_1 = 1 - \frac{1}{c_1}$$

La ecuación para la especie 1 es idéntica al modelo de Levins en la Subsección 8.2.3, y se podrán utilizar por tanto los resultados de esa subsección. Si $c_1 > 1$, $\hat{p}_1 \in (0, 1)$, y el equilibrio no trivial es localmente estable. Como estamos interesados en la coexistencia de las especies, en lo que sigue supondremos que $c_1 > 1$, de forma que la especie 1 pueda sobrevivir.

Haciendo $dp_2/dt = 0$ con $\hat{p}_1 = 1 - 1/c_1$, se puede calcular $\hat{p}_2$:

$$0 = \hat{p}_2[c_2(1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 1 - c_1\hat{p}_1]$$

que, además del equilibrio trivial 0, permite obtener

$$\begin{aligned}\hat{p}_2 &= (1 - \hat{p}_1) - \frac{1}{c_2} - \frac{c_1}{c_2}\hat{p}_1 \\ &= \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{c_2} \\ &= \frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{c_2}\end{aligned}$$

La coexistencia de las dos especies significa que tanto $\hat{p}_1$ como $\hat{p}_2$ son positivos y que su suma, $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$, que indica la fracción total de áreas ocupadas, es menor que uno. Es decir, la suma de los dos equilibrios no triviales $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1 - c_1/c_2$ es automáticamente menor que 1. Además, como hemos supuesto que $c_1 > 1$, tenemos que $\hat{p}_1 > 0$. Por tanto, sólo es necesario obtener cuándo se cumple que $\hat{p}_2 > 0$, es decir,

$$\frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} > 0$$

Para cumplir esta inecuación, es necesario que

$$c_2 > c_1^2$$

Hasta ahora, sólo sabemos que existe un equilibrio no trivial si $c_1 > 1$ y $c_2 > c_1^2$, pero esto no nos dice nada sobre la estabilidad. Aunque todavía no podemos analizar directamente la estabilidad, se puede utilizar un método muy común en la literatura ecológica. Se determina si la especie 2 puede invadir el *equilibrio monocultural* de la especie 1, es decir, el equilibrio positivo de la especie 1 en ausencia de la especie 2. ¿Por qué esto es útil? En primer lugar, hay que tener en cuenta que la especie 1 no resulta afectada por la presencia de la especie 2. Si la especie 1 puede sobrevivir en ausencia de la especie 2, también puede sobrevivir en su presencia. Por tanto, sólo es necesario preocuparse por la especie 2. Si la especie 2 puede invadir el equilibrio monocultural de la especie 1, esto implica que cuando la densidad de la especie 2 sea baja, será capaz de aumentar su densidad, y por tanto podrá coexistir con la especie 1. El criterio de invasión es entonces

$$\left.\frac{dp_2}{dt}\right|_{p_1=\hat{p}_1} > 0 \quad \text{cuando } p_2 \text{ es pequeña}$$

Esto funciona de la siguiente forma:

$$\frac{dp_2}{dt} = p_2[c_2(1 - p_1 - p_2) - 1 - c_1p_1]$$

Se supone que $p_1 = \hat{p}_1 = 1 - 1/c_1$ y que p_2 es muy pequeño. Si p_2 es pequeño, entonces $1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx 1 - \hat{p}_1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{dp_2}{dt} &\approx p_2\left[c_2\frac{1}{c_1} - 1 - c_1 + 1\right] \\ &= p_2\left[\frac{c_2}{c_1} - c_1\right] > 0\end{aligned}$$

si

$$\frac{c_2}{c_1} - c_1 > 0 \quad \text{o} \quad c_2 > c_1^2$$

Como $dp_2/dt > 0$ cuando la especie 1 está en equilibrio y la abundancia de la especie 2 es baja, eso significa que la especie 2 puede invadir. Por tanto, la conclusión es que la especie 1 y la especie 2 pueden coexistir cuando $c_2 > c_1^2$.

Este mecanismo de coexistencia se denomina **compromiso competición-colonización**. Es decir, el competidor más débil (la especie 2) puede superar su inferior competitividad siendo un colonizador superior ($c_2 > c_1^2$).

8.3.4. Problemas

(8.3.1)

En los Problemas 1-4, se estudia el modelo clásico de Kermak-McKendrick de extensión de enfermedades infecciosas en una población de tamaño fijo N (este modelo se presentó en la Subsección 8.3.1, y es conveniente consultar esa subsección al realizar los problemas). Si S(t) indica el número de individuos susceptibles en el instante t, I(t) el número de individuos infecciosos en el instante t y R(t) el número de individuos inmunes en el instante t, entonces

$$\frac{dS}{dt} = -bSI$$

$$\frac{dI}{dt} = bSI - aI$$

y $R(t) = N - S(t) - I(t)$.

1. Determine si la enfermedad se extenderá o no en cada uno de los siguientes casos. (*Sugerencia*: calcule R_0.)

(a) $S(0) = 1000$, $a = 200$, $b = 0.3$

(b) $S(0) = 1000$, $a = 200$, $b = 0.1$

2. Suponga que $a = 100$ y $b = 0.2$. El **número crítico** ($S_c(0)$ de individuos susceptibles en el instante 0 para la extensión de una enfermedad introducida en la población en dicho instante 0, se define como el mínimo número de individuos susceptibles para que la enfermedad se pueda extender. Calcule $S_c(0)$.

3. Suponga que $a = 100$, $b = 0.01$ y $N = 10\,000$. ¿Se puede extender la enfermedad si en el instante 0 hay un individuo infectado?

4. (a) Demuestre que cuando $I > 0$,

$$\frac{dI}{dS} = \frac{a}{b}\frac{1}{S} - 1 \tag{8.83}$$

y resolver (8.83) cuando $R(0) = 0$, $I(0) = I_0$, y $S(0) = S_0$.

(b) Como $I(t)$ es el número de individuos infecciosos en el instante t y $dI/dt = bSI - aI$, si $S(0) > a/b$ entonces $dI/dt > 0$ en el instante $t = 0$. Como $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, existe un instante $t > 0$ en el que $I(t)$ es máximo. Demuestre que el número de susceptibles cuando $I(t)$ es máximo es $S = a/b$.

(c) En el apartado (a) se expresó $I(t)$ en función de $S(t)$. Utilice el resultado de (b) para demostrar que el número máximo de individuos infecciosos, $I_{\max}$, se expresa como

$$I_{\max} = N - \frac{a}{b} + \frac{a}{b}\ln\left(\frac{a/b}{S_0}\right)$$

(d) Utilice el resultado de (c) para demostrar que $I_{\max}$ es una función decreciente del parámetro a/b cuando $a/b < S_0$ (es decir, en el caso en el que la infección se puede extender). Utilice esto para explicar cómo determinan a y b la severidad (medida por $I_{\max}$) de la infección. ¿Tiene esto sentido?

(8.3.2)

5. Suponga el modelo de compartimientos de la Subsección 8.3.2, con $a = 5$, $b = 0.02$, $m = 1$, y $c = 1$.

(a) Obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a estos valores.

(b) Determine qué valores de N_I producen un equilibrio no trivial y calcule los valores del equilibrio para la reserva de autótrofos y de nutrientes.

6. Suponga el modelo de compartimientos de la Subsección 8.3.2, con $a = 1$, $b = 0.01$, $m = 2$, $c = 1$, y $N_I = 500$.

(a) Obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a estos valores.

(b) Dibuje las isoclinas cero correspondientes a este sistema.

(c) Utilice la gráfica de (b) para determinar si este sistema tiene un equilibrio no trivial.

7. Suponga el modelo de compartimientos de la Subsección 8.3.2, con $a = 1$, $b = 0.01$, $m = 2$, $c = 1$ y $N_I = 200$.

(a) Obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a estos valores.

(b) Dibuje las isoclinas cero correspondientes a este sistema.

(c) Utilice la gráfica de (b) para determinar si este sistema tiene un equilibrio no trivial.

(8.3.3)

8. Asuma el modelo de competición jerárquica con dos especies, presentado en la Sección 8.3.3. Concretamente, asuma que

$$\frac{dp_1}{dt} = 2p_1(1 - p_1) - p_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = 5p_2(1 - p_1 - p_2) - p_2 - 2p_1p_2$$

(a) Calcule todos los equilibrios.

(b) Determine si la especie 2 puede invadir una monocultura de la especie 1 (suponga que la especie 1 está en equilibrio).

9. Asuma el modelo de competición jerárquica con dos especies, presentado en la Sección 8.3.3. Concretamente, asuma que

$$\frac{dp_1}{dt} = 2p_1(1 - p_1) - p_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = 3p_2(1 - p_1 - p_2) - p_2 - 2p_1p_2$$

(a) Calcule todos los equilibrios.
(b) Determine si la especie 2 puede invadir una monocultura de la especie 1 (suponga que le especie 1 está en equilibrio).

10. Asuma el modelo de competición jerárquica con dos especies, presentado en la Sección 8.3.3. Concretamente, asuma que

$$\frac{dp_1}{dt} = 2p_1(1 - p_1) - p_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = 6p_2(1 - p_1 - p_2) - p_2 - 2p_1p_2$$

(a) Utilice el método de isoclinas cero para calcular gráficamente todos los equilibrios.
(b) Determine los valores numéricos de todos los equilibrios.

11. Asuma el modelo de competición jerárquica con dos especies, presentado en la Sección 8.3.3. Concretamente, asuma que

$$\frac{dp_1}{dt} = 3p_1(1 - p_1) - p_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = 5p_2(1 - p_1 - p_2) - p_2 - 3p_1p_2$$

(a) Utilice el método de isoclinas cero para calcular gráficamente todos los equilibrios.
(b) Determine los valores numéricos de todos los equilibrios.

12. (*Adaptado de Crawley, 1997*) Sean V la biomasa de plantas y N el número de herbívoros. La interacción planta-herbívoro se modela de la siguiente forma

$$\frac{dV}{dt} = aV\left(1 - \frac{V}{K}\right) - bVN$$

$$\frac{dN}{dt} = cVN - dN$$

(a) Suponga que el número de herbívoros es igual a 0. ¿Qué ecuación diferencial modela la dinámica de la biomasa de plantas? ¿Puede explicar la ecuación resultante? Determine el equilibrio de la biomasa de plantas en ausencia de herbívoros.

(b) Suponga ahora que hay herbívoros presentes. Describa el efecto de los herbívoros en la biomasa de plantas, es decir, explique el término $-bVN$ de la primera ecuación. Describa la dinámica de los herbívoros, es decir, cómo se incrementa el tamaño de la población y qué contribuye a disminuir el tamaño de la población.

(c) Determine los equilibrios resolviendo

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dN}{dt} = 0$$

Determine también los equilibrios gráficamente. Explique por qué este modelo implica que «la abundancia de plantas sólo está determinada por los atributos de los herbívoros», como se cita en Crawley (1977).

8.4. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 8: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Ecuación diferencial
2. Ecuación diferencial separable
3. Solución de una ecuación diferencial
4. Ecuación diferencial puramente temporal
5. Ecuación diferencial autónoma
6. Crecimiento exponencial
7. Ecuación de Von Bertalanffy
8. Ecuación logística
9. Crecimiento alométrico
10. Equilibrio
11. Estabilidad
12. Autovalor
13. Modelo de un solo compartimiento
14. Modelo de Levins
15. Efecto Allee
16. Modelo de Kermack-McKendrick
17. Isoclinas cero
18. Modelo jerárquico de competición

8.5. PROBLEMAS DE REPASO

1. (*Ley de enfriamiento de Newton*) Suponga que la temperatura de un objeto es T y que se lleva a una habitación que se mantiene a temperatura constante T_a. La ley de enfriamiento de Newton postula que la velocidad de cambio de temperatura del objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura de dicho objeto y la del medio que le rodea.

(a) Denomine $T(t)$ a la temperatura en el instante t, explique por qué

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

es la ecuación diferencial que expresa la ley de enfriamiento de Newton.

(b) Suponga que se necesitan 20 min para que el objeto se enfríe desde 30 °C hasta 28 °C en una habitación cuya temperatura es de 21 °C. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que el objeto se enfríe hasta 25 °C, si dicho objeto se llevó a la habitación cuando estaba a 30 °C? [*Sugerencia*: resuelva la ecuación diferencial de (a) con la condición inicial $T(0) = 30$ °C y con $T_a = 21$ °C. Utilice $T(20) = 28$ °C para determinar la constante k.]

2. (*Adaptado de Cain et al. 1995*) En este problema se presenta un modelo de crecimiento clónico del trébol blanco *Trifoliun repens*. *T. repens* es una especie de planta clónica perenne de amplia difusión. Se extiende mediante crecimiento de estolones (un estolón es un tallo horizontal). Observando la evolución de la forma de un clónico con el tiempo, Cain *et al.* estimaron el alargamiento del estolón y las velocidades de muerte como se indica continuación. Se denomina $S(t)$ a la longitud del estolón del clónico en el instante t. Cain *et al.* observaron que la variación de la longitud del estolón era proporcional a dicha longitud, es decir,

$$\frac{dS}{dt} \propto S$$

Introduciendo la constante de proporcionalidad r, denominada velocidad de crecimiento neto, se puede escribir

$$\frac{dS}{dt} = rS \tag{8.84}$$

(a) Suponga que S_f y S_0 son las longitudes inicial y final del estolón, respectivamente, y T indica el periodo de tiempo de observación. Utilice (8.84) para demostrar que r, la velocidad de crecimiento neto, se puede estimar de

$$r = \frac{1}{T} \ln \frac{S_f}{S_0}$$

[*Sugerencia*: resuelva la Ecuación diferencial (8.84) con la condición inicial $S(0) = S_0$, y utilice el hecho de que $S(T) = S_f$].

(b) La velocidad de crecimiento neto r es la diferencia entre la velocidad de alargamiento del estolón b y la velocidad de muerte del estolón m, es decir,

$$r = b - m$$

Sea B la cantidad total de alargamiento del estolón y D la cantidad total de estolón muerto durante el periodo de observación de longitud T. Demuestre que

$$B = \int_0^T bS(t)\,dt = \frac{bS_0}{r}(e^{rT} - 1)$$

$$D = \int_0^T mS(t)\,dt = \frac{mS_0}{r}(e^{rT} - 1)$$

(c) Demuestre que $B - D = S_f - S_0$, y reordene en B y D las ecuaciones de (b) de forma que se puedan estimar b y m a partir de r, B y D, es decir, demuestre que

$$b = \frac{rB}{S_f - S_0} = \frac{rB}{B - D}$$

$$m = \frac{rD}{S_f - S_0} = \frac{rD}{B - D}$$

(d) Explique cómo se pueden estimar B y r si se conocen S_f, S_0 y D a partir de medidas de campo. Utilice el resultado de (c) para explicar cómo se podrían obtener entonces estimadores de b y m.

3. (Diversificación de la vida) (*Adaptado de Benton, 1997 y Walker, 1985*) Se han propuesto varios modelos para explicar la diversificación de la vida durante los periodos geológicos. De acuerdo con Benton (1997),

> La diversificación de las familias marinas en los pasados 600 millones de años parece haber seguido dos o tres curvas logísticas, con niveles de equilibrio que duraron hasta 200 millones de años. Por el contrario, los organismos continentales muestran claramente un modelo de diversificación exponencial, y aunque no está claro si los modelos empíricos de diversificación son reales o son artefactos debidos a un registro fósil pobre, esta última explicación parece poco verosímil.

En lo que sigue, investigaremos tres modelos de diversificación. Son análogos a los modelos de crecimiento de poblaciones. Sin embargo, las cantidades involucradas tienen una interpretación diferente. Denominaremos $N(t)$ a la función de diversificación, que da cuenta del número de especies en función del tiempo, y r a la velocidad intrínseca de diversificación.

(a) (*Modelo exponencial*) La ecuación de este modelo es

$$\frac{dN}{dt} = r_e N \tag{8.85}$$

Resuelva (8.85) con la condición inicial $N(0)$ en el instante 0, y demuestre que r_e se puede estimar a partir de

$$r_e = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right] \tag{8.86}$$

[*Sugerencia*: para resolver (8.86), despeje r en la solución de (8.85).]

(b) (*Crecimiento logístico*) La ecuación que describe este modelo es

$$\frac{dN}{dt} = r_l N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \tag{8.87}$$

siendo K el valor de equilibrio. Resuelva (8.87) con la condición inicial $N(0)$ en el instante 0, y demuestre que r_l se puede estimar a partir de

$$r_l = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{K - N(0)}{N(0)} \right] + \frac{1}{t} \ln \left[\frac{N(t)}{K - N(t)} \right] \tag{8.88}$$

para $N(t) < K$.

(c) Suponga que $N(0) = 1$ y que $N(10) = 1000$. Estime r_e y r_l para $K = 1001$ y $K = 10000$.

(d) Utilice la respuesta de (c) para explicar la siguiente cita de Stanley (1979):

> Hay una tendencia general en los valores calculados de [r] a subestimar las velocidades exponenciales, porque alguna radiación habrá seguido vías sigmoides diferentes durante el intervalo evaluado.

(e) Explique por qué el modelo exponencial es una buena aproximación del modelo logístico cuando N/K es pequeño comparado con 1.

4. (Un modelo simple de la fotosíntesis de hojas individuales) (*Adaptado de Horn, 1971*) La fotosíntesis es un mecanismo complejo. El modelo siguiente es una caricatura muy simplificada. Suponga que una hoja contiene un número de trampas que pueden capturar luz. Si una trampa captura luz, pasa a un estado con energía. La energía almacenada se puede utilizar para pro-

ducir azúcar, y en el proceso la trampa con energía se queda sin energía. El número de trampas que pueden pasar a un estado con energía es proporcional al número de trampas sin energía y a la intensidad de la luz. Denomine T al número total de trampas (con energía y sin energía) de una hoja, I a la intensidad de la luz y x al número de trampas con energía. Entonces, la ecuación diferencial que modela el cambio en el número de trampas con energía a lo largo del tiempo es:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(T - x)I - k_2 x$$

siendo k_1 y k_2 constantes positivas. Calcule todos los equilibrios y estudie su estabilidad utilizando el método de los autovalores.

5. (*Modelo de crecimiento de Gompertz*) Este modelo se utiliza a veces para estudiar el crecimiento de una población en la que la velocidad de crecimiento per cápita es dependiente de la densidad. Denomine $N(t)$ al tamaño de una población en el instante t. Entonces, para $N \geq 0$,

$$\frac{dN}{dt} = kN(\ln K - \ln N) \quad \text{con } N(0) = N_0 \tag{8.89}$$

(a) Demuestre que

$$N(t) = K\exp\left[-\left(\ln\frac{K}{N_0}\right)e^{-kt}\right]$$

es una solución de (8.89). Para ello, derive $N(t)$ con respecto a t y demuestre que se puede escribir en la forma de (8.89). No olvide demostrar que $N(0) = N_0$. Utilice una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de $N(t)$ para $N_0 = 100$, $k = 2$, y $K = 1000$. La función $N(t)$ se denomina curva de crecimiento de Gompertz.

(b) Utilice la regla de l'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{N\to 0} N\ln N = 0$$

y utilice esto para demostrar que $\lim_{N\to 0} dN/dt = 0$. ¿Hay otros valores de N para los que $dN/dt = 0$?

(c) Dibuje la gráfica de dN/dt en función de N para $k = 2$ y $K = 1000$. Calcule los equilibrios y estudie su estabilidad utilizando la gráfica. Explique el significado de K.

6. (*Biogeografía de una isla*) Preston (1962) y MacArthur y Wilson (1963) investigaron el efecto del área en la diversidad de especies de islas oceánicas. Se supone que las especies pueden inmigrar a una isla desde una reserva de especies de tamaño P, y que las especies de la isla se pueden extinguir. Se denomina $I(S)$ a la velocidad de inmigración y $E(S)$ a la velocidad de extinción, siendo S el número de especies en la isla. Entonces el cambio en la diversidad de especies a lo largo del tiempo es

$$\frac{dS}{dt} = I(S) - E(S) \tag{8.90}$$

Las formas funcionales más simples de $I(S)$ y $E(S)$ para una isla dada son

$$I(S) = c\left(1 - \frac{S}{P}\right) \tag{8.91}$$

$$E(S) = m\frac{S}{P} \tag{8.92}$$

siendo c, m y P constantes positivas.

(a) Calcule la diversidad de especies de equilibrio $\hat{S}$ en la Ecuación (8.90) siendo $I(S)$ y $E(S)$ las de las Ecuaciones (8.91) y (8.92).

(b) Es razonable suponer que la velocidad de extinción es una función decreciente del tamaño de la isla. Es decir, si A indica el área de la isla, se supone que m es una función del área de la isla A con $dm/dA < 0$. Además, se supone que la velocidad de inmigración I no depende del tamaño de la isla. Utilice estas consideraciones para investigar cómo cambia el equilibrio de la diversidad de especies con el tamaño de la isla.

(c) Suponga que $S(0) = S_0$. Resuelva la Ecuación (8.90) siendo $I(S)$ y $E(S)$ las de las Ecuaciones (8.91) y (8.92).

(d) Suponga que $S_0 = 0$. Es decir, la isla está inicialmente sin especies. La constante de tiempo T del sistema se define como

$$S(T) = (1 - e^{-1})\hat{S}$$

Demuestre que bajo el supuesto de que $S_0 = 0$,

$$T = \frac{P}{c + m}$$

(e) Utilice las consideraciones de (b) y el resultado de (d) para estudiar el efecto del tamaño de la isla en la constante T. Es decir, determine $T(A)$ si es una función creciente o decreciente de A.

7. (*Quimiostato*) Un quimiostato es un aparato para realizar crecimiento de bacterias en un medio en el que todos los nutrientes excepto uno están presentes en exceso. Un nutriente, cuya concentración se puede controlar, se mantiene en un nivel de concentración que limita el crecimiento de las bacterias. La cámara de crecimiento del quimiostato se purga constantemente añadiendo nutrientes disueltos en líquido a velocidad constante y permitiendo que el líquido de la cámara de crecimiento, que contiene las bacterias, salga de la cámara de crecimiento a la misma velocidad. Si se denomina X al número de bacterias en la cámara de crecimiento, la dinámica del crecimiento de las bacterias se puede expresar de la siguiente forma,

$$\frac{dX}{dt} = r(N)X - qX \tag{8.93}$$

siendo $r(N)$ la velocidad de crecimiento en función de la concentración de nutrientes N y q la velocidad del flujo de entrada y de salida. La ecuación del flujo de nutrientes es

$$\frac{dN}{dt} = qN_0 - qN - r(N)X \tag{8.94}$$

Nótese que la Ecuación (8.93) es la (8.78) con $m = 0$, $N_I = qN_0$, y $a = e = q$, y (8.94) es (8.77) con $m = 0$.

(a) Explique con palabras el significado de los términos de las Ecuaciones (8.93) y (8.94).

(b) Suponga que $r(N)$ se expresa mediante la función de crecimiento de Monod

$$r(N) = b\frac{N}{k + N}$$

siendo k y b constantes positivas. Dibuje las isoclinas cero en el plano N-X y explique cómo calcular gráficamente los equilibrios $(\hat{N}, \hat{X})$.

(c) Demuestre que un equilibrio no trivial (un equilibrio en el que $\hat{N}$ y $\hat{X}$ son ambos positivos, cumple

$$r(\hat{N} - q = 0 \tag{8.95}$$

$$qN_0 - q\hat{N} - r(\hat{N})\hat{X} = 0 \tag{8.96}$$

Demuestre que (8.95) tiene una solución positiva $\hat{N}$ si $q < b$, y calcule la expresión de $\hat{N}$. Utilice esto y (8.96) para calcular $\hat{X}$.

(d) Suponga que $q < b$. Utilice los resultados de (c) para demostrar que $\hat{X} > 0$ si $\hat{N} < N_0$ y $\hat{N} < N_0$ si $q < bN_0/(k + N_0)$. Demuestre además que $\hat{N}$ es una función creciente con q para $q < b$.

(e) Utilice los resultados de (d) para explicar por qué es cierto lo siguiente. Al aumentar la velocidad de flujo q desde 0 hasta $bN_0/(k + N_0)$, se incrementa la concentración de nutrientes $\hat{N}$ hasta que alcanza el valor N_0 y el número de bacterias desciende hasta 0.

8. (*Adaptado de Nee y May, 1992, y Tilman, 1994*) En la Subsección 8.3.3 se presentó un modelo jerárquico de competición. Utilizaremos este modelo para estudiar los efectos de la destrucción del hábitat en coexistencia. Se supone que una fracción D de las áreas está permanentemente destruida. Además, limitaremos nuestro estudio a dos especies y supondremos que la especie 1 es el competidor superior y la 2 el inferior. En el caso de que ambas especies tengan la misma mortalidad ($m_1 = m_2$), igual a 1, la dinámica se describe mediante las siguientes ecuaciones

$$\frac{dp_1}{dt} = c_1p_1(1 - p_1 - D) - p_1 \tag{8.97}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = c_2p_2(1 - p_1 - p_2 - D) - p_2 - c_1p_1p_2 \tag{8.98}$$

siendo p_i, $i = 1, 2$ la fracción de áreas ocupadas por la especie i.

(a) Explique con palabras el significado de los diferentes términos de (8.97) y (8.98)

(b) Demuestre que

$$\hat{p}_1 = 1 - \frac{1}{c_1} - D$$

es un equilibrio de la especie 1 que está en (0, 1), y que es estable si $D < 1 - 1/c_1$ y $c_1 > 1$.

(c) Suponga que $c_1 > 1$ y que $D < 1 - 1/c_1$. Demuestre que la especie 2 puede invadir el equilibrio no trivial de la especie 1 [calculado en (b)] si

$$c_2 > c_1^2(1 - D)$$

(d) Suponga que $c_1 = 2$ y $c_2 = 5$. Entonces la especie 1 puede sobrevivir mientras $D < 1/2$. Demuestre que la fracción de áreas ocupadas por la especie 1 es entonces

$$\hat{p}_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} - D & \text{para } 0 \leqslant D \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} \leqslant D \leqslant 1 \end{cases}$$

Demuestre que

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}D \quad \text{para } 0 \leqslant D \leqslant \frac{1}{2}$$

Para $D > 1/2$, la especie 1 no puede perdurar. Explique por qué la dinámica de la especie 2 se reduce en este caso a

$$\frac{dp_2}{dt} = 5p_2(1 - p_2 - D) - p_2$$

Demuestre que el equilibrio no trivial es de la forma

$$\hat{p}_2 = 1 - \frac{1}{5} - D \quad \text{por } \frac{1}{2} \leqslant D \leqslant 1 - \frac{1}{5}$$

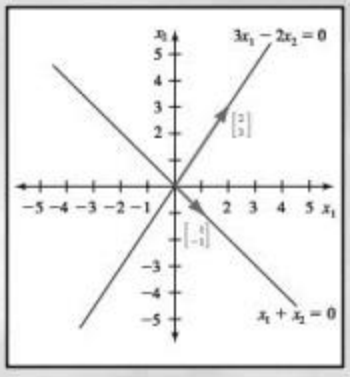
Dibuje $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ en función de D en el mismo sistema de coordenadas. ¿Qué sucede si $D > 1 - 1/5$? Utilice la gráfica para explicar con palabras cómo resulta afectada cada especie por la destrucción del hábitat.

(e) Repita (d) para $c_1 = 2$ y $c_2 = 3$.

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO 9

9.1 SISTEMAS LINEALES



Dos especies de insectos se crían juntas en un recipiente de laboratorio. Todos los días se les proporcionan dos tipos diferentes de alimento. Cada individuo de la especie 1 consume 5 unidades del alimento A y 3 unidades del alimento B y cada individuo de la especie 2 consume 2 unidades del alimento A y 4 unidades del alimento B. Todos los días, los técnicos del laboratorio suministran a los insectos 900 unidades del alimento A y 960 unidades del alimento B. ¿Cuántos insectos hay de cada especie?

Para resolver este problema, se plantea un sistema de ecuaciones. Si

x = número de individuos de la especie 1

y = número de individuos de la especie 2

entonces se deben cumplir estas dos ecuaciones:

$$\text{alimento A:} \quad 5x + 2y = 900$$

$$\text{alimento B:} \quad 3x + 4y = 960$$

Esto se denomina sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Esta sección se dedica al cálculo de soluciones de estos sistemas.

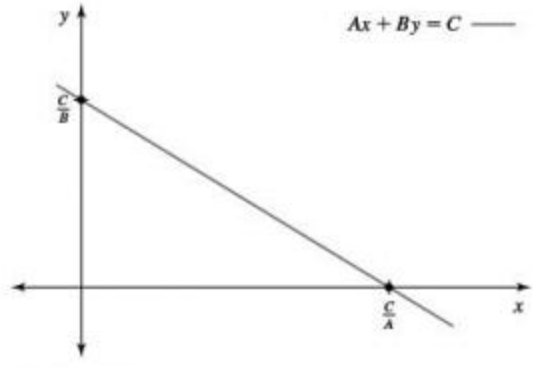
9.1.1 Solución gráfica

En esta subsección consideraremos únicamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Recordamos la forma estándar de una ecuación lineal con dos variables:

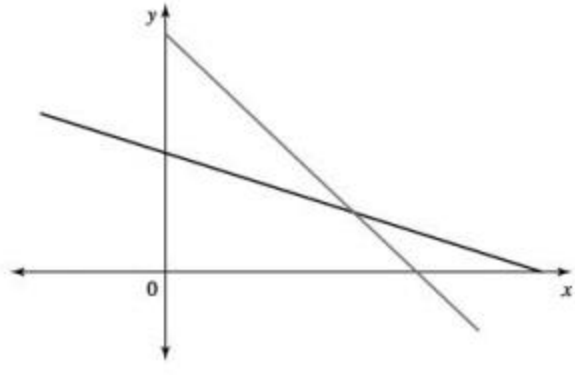
$$Ax + By = C$$

siendo A, B y C constantes, A y B distintas de cero. x e y son las dos variables. La gráfica de esta ecuación es una línea recta (*véase* la Figura 9.1). Cualquier punto (x, y) de la recta satisface (o resuelve) la ecuación $Ax + By = C$. Puede haber más de una ecuación, en cuyo caso se habla de un **sistema** de ecuaciones lineales. En el caso de tener dos ecuaciones lineales y dos variables, el sistema es de la forma

$$\begin{aligned} Ax + By &= C \\ Dx + Ey &= F \end{aligned} \qquad (9.1)$$



▲ **Figura 9.1**
Gráfica de una ecuación lineal en forma estándar



▲ **Figura 9.2**
Las dos rectas se cortan en un único punto

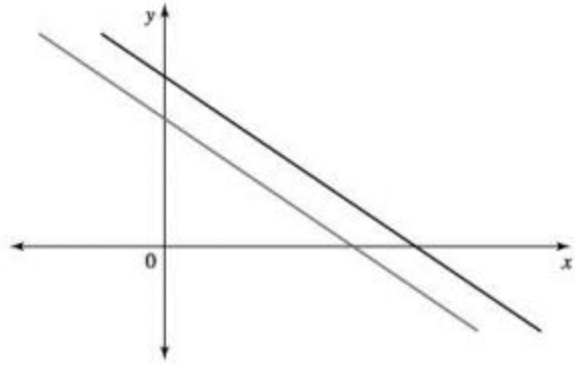
siendo A, B, C, D, E y F constantes, y x e y las dos variables [se requiere que A y B (D y E respectivamente) no sean simultáneamente iguales a 0]. Al decir que se *resuelve* (9.1) en x e y, significa que se calcula un par ordenado (x, y) que cumple *las dos* ecuaciones del sistema (9.1). Como cada Ecuación de (9.1) representa una línea recta, en realidad estamos buscando el punto de intersección de dichas rectas. Se pueden producir tres casos:

1. Las dos rectas se cortan exactamente en un punto. En este caso, el sistema (9.1) tiene una única solución, como muestra la Figura 9.2.
2. Las dos rectas son paralelas y no se cortan. En este caso, el sistema (9.1) no tiene solución, como se muestra en la Figura 9.3.
3. Las dos rectas son paralelas y se cortan (es decir, son la misma recta). En este caso, el sistema (9.1) tiene infinitas soluciones, concretamente todos los puntos de la recta, como se ilustra en la Figura 9.4.

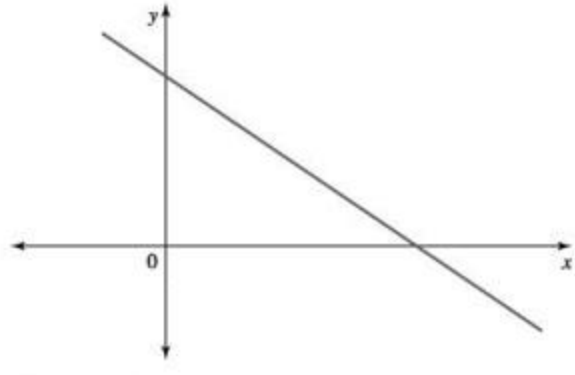
Solución única

Ejemplo 1 Calcule la solución de

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 2x + \ \ y &= 4 \end{aligned} \tag{9.2}$$



▲ **Figura 9.3**
Las dos rectas son paralelas y no se cortan



▲ **Figura 9.4**
Las dos rectas son idénticas

Solución

La recta correspondiente a $2x + 3y = 6$ tiene como ordenada en el origen $(0, 2)$ y corta al eje x en el punto $(3, 0)$. La recta correspondiente a $2x + y = 4$ tiene como ordenada en el origen $(0, 4)$ y corta al eje x en el punto $(2, 0)$ (*véase* la Figura 9.5). Para calcular la solución del sistema lineal (9.2), hay que obtener el punto de intersección de las dos rectas. Despejando y de las dos ecuaciones se llega al nuevo sistema

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

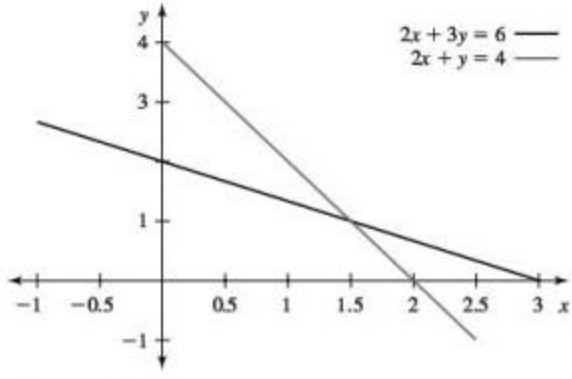
$$y = 4 - 2x$$

Igualando los miembros derechos de las dos ecuaciones, se obtiene

$$2 - \frac{2}{3}x = 4 - 2x$$

$$\frac{4}{3}x = 2$$

$$x = \frac{3}{2}$$



▲ **Figura 9.5**
Las dos rectas se cortan en un único punto

Para calcular y, se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo en $2x + y = 4$ (no importa cuál se elija). Entonces

$$y = 4 - 2x = 4 - (2)\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

La solución es por tanto el punto (3/2, 1).

Observando la Figura 9.5, vemos que las dos rectas se cortan en un solo punto. Esto es lo que sucede cuando las dos rectas tienen pendientes diferentes, concretamente $-2/3$ y -2, respectivamente. El punto de intersección es (3/2, 1) y corresponde a la solución de (9.2). Por tanto, el sistema (9.2) tiene una única solución, que es (3/2, 1). ◀

Sin solución

Ejemplo 2 Resuelva

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y &= 4 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Solución

La recta correspondiente a $2x + y = 4$ tiene como ordenada en el origen (0, 4) y corta al eje x en el punto (2, 0). La recta correspondiente a $4x - 2y = 6$ tiene como ordenada en el origen (0, 3) y corta al eje x en el punto (3/2, 0) (*véase* la Figura 9.6). Como

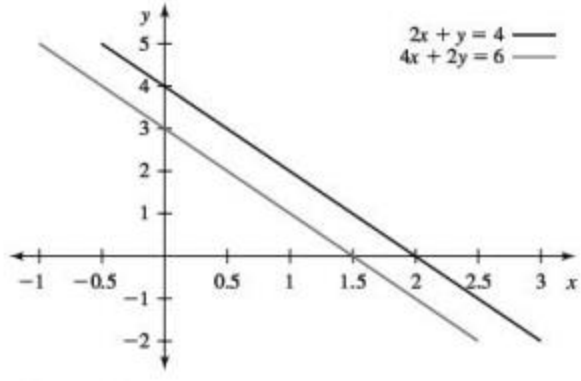
$$\begin{aligned} 2x + \ \ y = 4 &\iff y = 4 - 2x \\ 4x + 2y = 6 &\iff y = 3 - 2x \end{aligned}$$

se ve inmediatamente que las dos rectas tienen la misma pendiente, concretamente -2, pero diferentes ordenadas en el origen, 4 y 3 respectivamente. Esto implica que las dos rectas son paralelas y no se cortan.

Veamos lo que sucede al resolver el sistema (9.3). Al igualar las dos ecuaciones $y = 4 - 2x$ e $y = 3 - 2x$:

$$\begin{aligned} 4 - 2x &= 3 - 2x \\ 4 &= 3 \end{aligned}$$

lo que obviamente no es correcto. Es decir, no existe ningún punto (x, y) que cumpla las dos ecuaciones simultáneamente.



▲ **Figura 9.6**
Las dos rectas son paralelas y no se cortan

Observando la Figura 9.6 se ve que las dos rectas son paralelas. Como dichas rectas no se cortan, la gráfica permite concluir que (9.3) no tiene solución. En este caso, la solución se escribe como $\varnothing$, el símbolo del conjunto vacío. ◀

Infinitas soluciones

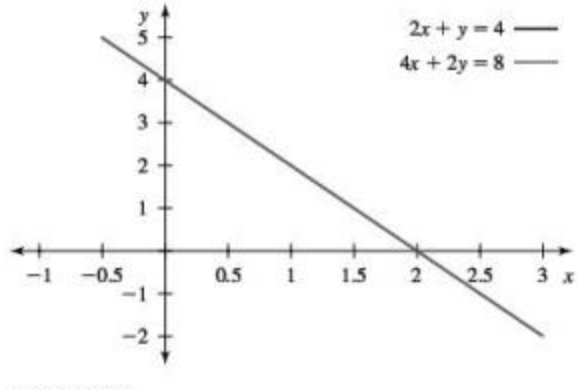
Ejemplo 3 Resuelva

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y &= 4 \\ 4x + 2y &= 8 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Solución

Dividiendo la segunda ecuación por dos, resulta que las dos ecuaciones son idénticas, concretamente $2x + y = 4$. Es decir, ambas ecuaciones representan la misma recta de ordenada en el origen (0, 4) y que corta al eje x en (2, 0), como se muestra en la Figura 9.7. Cualquier punto (x, y) de esta recta es por tanto una solución de (9.4). Para calcular algebraicamente la solución se utiliza el mismo procedimiento que en los Ejemplos 1 y 2. Primero se despeja y en las dos ecuaciones y resulta

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y = 4 &\iff y = 4 - 2x \\ 4x + 2y = 8 &\iff y = 4 - 2x \end{aligned}$$



▲ **Figura 9.7**
Las dos rectas son idénticas

Igualando las dos ecuaciones $y = 4 - 2x$ e $y = 4 - 2x$ se obtiene

$$4 - 2x = 4 - 2x$$
$$0 = 0$$

que es una afirmación verdadera para cualquier valor de x, lo que implica que cualquier valor de x es una solución. Una forma conveniente de escribir la solución es introducir una nueva variable, denominada t, para indicar la coordenada x. Es decir, $x = t$ para $t \in \mathbf{R}$ es la coordenada x de la solución. Para calcular la coordenada y correspondiente,

$$y = 4 - 2x = 4 - 2t$$

La solución es por tanto el conjunto de puntos

$$\{(t, 4 - 2t) : t \in \mathbf{R}\}$$

Esto demuestra que el sistema (9.4) tiene infinitas soluciones, como se podía esperar del análisis gráfico [la Figura 9.7 muestra que las dos rectas de (9.4) son la misma, y por tanto, sólo se representa una]. ◀

En el Ejemplo 3 se ha introducido una nueva variable, concretamente t, para representar el conjunto de soluciones. Esta variable t se denomina **variable de sustitución** y representa *cualquier* número real. La introducción de esta variable es una forma conveniente de representar el conjunto de soluciones cuando hay infinitas.

Un método de solución Los métodos algebraico y gráfico que hemos empleado hasta ahora para resolver sistemas de ecuaciones lineales sólo son aplicables a sistemas de dos variables. Para resolver sistemas de m ecuaciones lineales con n variables es necesario desarrollar un método aplicable a sistemas de cualquier tamaño. La estrategia básica será transformar el sistema de ecuaciones lineales en un nuevo sistema que tenga las mismas soluciones que el original. El nuevo sistema se denomina **sistema equivalente**, y será un sistema de forma más simple, en el que podremos obtener las variables desconocidas una por una y llegar por tanto a la solución. Esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo. Etiquetaremos todas las ecuaciones con etiquetas de la forma (R_i). R_i significa «fila i-ésima». De esta forma podremos seguir la pista de los cálculos.

Ejemplo 4 Resuelva

$$3x + 2y = 8 \quad (R_1)$$
$$2x + 4y = 5 \quad (R_2)$$

Solución

Hay dos operaciones básicas que transforman un sistema de ecuaciones en otro equivalente: (1) una ecuación se puede multiplicar por un número distinto de cero y (2) se puede sumar una ecuación con otra.

Nuestro objetivo es eliminar x de la segunda ecuación. Si se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda por -3 se obtiene

$$\begin{aligned} 2(R_1) \quad & 6x + 4y = 16 \\ -3(R_2) \quad & -6x - 12y = -15 \end{aligned}$$

Si se suman las dos ecuaciones, resulta

$$-8y = 1$$

Hemos eliminado por tanto la variable x. Se puede sustituir el sistema de ecuaciones inicial por un nuevo sistema (equivalente) dejando la primera ecuación origi-

nal y sustituyendo la segunda ecuación por $-8y = 1$. Se obtiene así el sistema de ecuaciones equivalente [etiquetado con (R_3) y (R_4)]:

$$\begin{aligned} (R_1)\quad & 3x + 2y = 8 \quad (R_3) \\ 2(R_1) - 3(R_2)\quad & -8y = 1 \quad (R_4) \end{aligned}$$

Ahora podemos resolver el sistema sucesivamente. De la ecuación (R_4) se puede obtener

$$y = -\frac{1}{8}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (R_3) y despejando x se obtiene

$$\begin{aligned} 3x + (2)\left(-\frac{1}{8}\right) &= 8 \\ 3x &= 8 + \frac{1}{4} \\ x &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

La solución es por tanto $(11/4), -1/8)$. ◀

Observando las ecuaciones (R_3) y (R_4) se puede ver que los miembros izquierdos tienen forma de triángulo

$$\begin{aligned} *x + *y &= * \\ *y &= * \end{aligned}$$

Un sistema escrito de esta forma se denomina **triangular superior**. En el ejemplo anterior, se ha reducido el sistema de ecuaciones a una forma triangular superior, y se ha empleado después sustitución hacia atrás para resolverlo. Como veremos en la subsección siguiente, este método se puede generalizar para sistemas de ecuaciones mayores.

9.1.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

En esta subsección ampliaremos el método de solución del Ejemplo 4 a sistemas de m ecuaciones en n variables, que escribiremos de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{9.5}$$

Las variables son ahora $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Los coeficientes a_{ij} de la izquierda tienen dos subíndices. El primer subíndice indica la ecuación y el segundo a qué variable x_j pertenece. Por ejemplo, a_{21} se encuentra en la segunda ecuación como coeficiente de x_1, o a_{43} se encuentra en la cuarta ecuación como coeficiente de x_3. El uso de dobles subíndices es una forma apropiada de etiquetar los coeficientes. Los subíndices de los números b_i en la derecha de las Ecuaciones (9.5) indican la ecuación.

Vamos a transformar este sistema en otro equivalente con forma triangular superior (recuérdese que *equivalente* significa que el nuevo sistema tiene las mismas soluciones que el sistema original). Para ello utilizaremos las tres operaciones básicas siguientes:

1. Multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero.
2. Suma de una ecuación con otra.
3. Reordenación de las ecuaciones.

Este método se denomina **eliminación gaussiana**.

Como en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas, en general, estos sistemas pueden tener

1. Una solución única.
2. Ninguna solución.
3. Infinitas soluciones.

Cuando un sistema no tiene soluciones, se dice que dicho sistema es **inconsistente**.

Una solución única

Ejemplo 5 Resuelva

$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 10 \quad (R_1) \\ 2x - y + 3z &= 9 \quad (R_2) \\ 4x + 2y - 3z &= -1 \quad (R_3) \end{aligned}$$

Solución

El objetivo es reducir el sistema a una forma triangular superior. El primer paso es eliminar los elementos por debajo de $3x$ en la primera columna, es decir, eliminar $2x$ de la segunda ecuación y $4x$ de la tercera. La primera ecuación no se cambia. Multiplicando la primera ecuación por 2 y la tercera por -3 y sumando después ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación que sustituirá a la segunda. En la nueva ecuación el término en x ha sido eliminado. Es decir, se suman

$$\begin{aligned} 2(R_1) \quad & 6x + 10y - 2z = 20 \\ -3(R_2) \quad & -6x + 3y - 9z = -27 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$13y - 11z = -7$$

Se transforma la tercera ecuación multiplicando la segunda por 2 y la tercera por -1, y se suman las dos ecuaciones. En la ecuación resultante, se ha eliminado la variable x. es decir, se suman

$$\begin{aligned} 2(R_2) \quad & 4x - 2y + 6z = 18 \\ -(R_3) \quad & -4x - 2y + 3z = 1 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$-4y + 9z = 19$$

Estos dos pasos transforman el sistema de ecuaciones original en el siguiente sistema de ecuaciones, etiquetado $(R_4) - (R_6)$.

$$\begin{aligned} (R_1) \quad & 3x + 5y - z = 10 \quad (R_4) \\ 2(R_1) - 3(R_2) \quad & 13y - 11z = -7 \quad (R_5) \\ 2(R_2) - (R_3) \quad & -4y + 9z = 19 \quad (R_6) \end{aligned}$$

El siguiente paso es eliminar y de (R_6). Para ello, se multiplica (R_5) por 4 y (R_6) por 13, y se suman las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4(R_5) \quad & 52y - 44z = -28 \\ 13(R_6) \quad & -52y + 117z = 247 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$73z = 219$$

Las dos primeras ecuaciones no cambian. El nuevo sistema de ecuaciones (equivalente) es por tanto

$$\begin{array}{rrrrrr} (R_4) & 3x + & 5y - & z = & 10 & (R_7) \\ (R_5) & & 3y - 11z = & & -7 & (R_8) \\ 4(R_5) + 13(R_6) & & & 73z = & 219 & (R_9) \end{array} \tag{9.6}$$

El sistema de ecuaciones está ahora en forma triangular superior, como puede verse en (9.6). Para obtener la solución, sustituiremos hacia atrás. Despejando z en la ecuación (R_9) se obtiene

$$z = \frac{219}{73} = 3$$

Despejando y en (R_8) y sustituyendo el valor de z,

$$y = \frac{1}{13}(-7 + 11z) = \frac{1}{13}(-7 + (11)(3)) = \frac{26}{13} = 2$$

Despejando x en (R_7) y sustituyendo los valores de y y z resulta

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(10 - 5y + z) \\ &= \frac{1}{3}(10 - (5)(2) + 3) = 1 \end{aligned}$$

Por tanto la solución es $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$. ◀

Algún comentario sobre los pasos realizados en el Ejemplo 5: se han eliminado los términos en x en (R_2) y (R_3). En general, hay varias formas de hacer esto. Hemos utilizado las ecuaciones (R_1) y (R_2) para sustituir la ecuación (R_2), y después hemos utilizado las ecuaciones (R_2) y (R_3) para sustituir la ecuación (R_3). Podríamos haber utilizado (R_2) y (R_3) para sustituir la ecuación (R_2). En este caso, (R_2) habría sido sustituida por $(R_3) - 2(R_2)$, resultando la ecuación $4y - 9z = -19$. En ese caso no se podrían haber utilizado de nuevo (R_2) y (R_3) para sustituir la ecuación (R_3). Si se hiciera eso, se sustituiría (R_3) por $(R_3) - 2(R_2)$ que es $4y - 9z = -19$, y habríamos sustituido (R_2) y (R_3) por la misma ecuación, perdiendo así una ecuación del sistema. Para sustituir (R_3) habría que emplear entonces (R_1) y (R_3). Concretamente, (R_3) habría sido sustituido por $4(R_1) - 3(R_3)$, resultando la ecuación $14y + 5z = 43$.

Es conveniente hacer un comentario más sobre la eliminación de y en (R_5) y (R_6). Cuando sustituimos (R_6), hubo que utilizar (R_5) y (R_6). Si hubiéramos utilizado, por ejemplo, (R_6) y (R_4) para eliminar y hubiéramos introducido la variable x en la ecuación resultante y el sistema no se habría reducido a una forma triangular. Concretamente, para eliminar y utilizando (R_6) y (R_4) habríamos tenido que calcular $(R_6) + 2(R_4)$, lo que produciría la ecuación $4x + z = 8$.

Sin solución

Ejemplo 6 Resuelva

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \quad (R_1) \\ 4x - 4y + 3z &= 2 \quad (R_2) \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \quad (R_3) \end{aligned}$$

Solución

Como en el Ejemplo 5, intentaremos reducir el sistema a la forma triangular. Comenzaremos por eliminar los términos en la variable x de la segunda y tercera ecuación, dejando la primera ecuación sin modificar. Sustituiremos la segunda ecuación por el resultado de restar la segunda ecuación de la primera, tras multi-

plicar la primera por 2. Después, sustituiremos la tercera ecuación por el resultado de restar la tercera ecuación de la primera. Se obtiene

$$\begin{aligned} (R_1) \quad & 2x - y + z = 3 \quad (R_4) \\ 2(R_1) - (R_2) \quad & 2y - z = 4 \quad (R_5) \\ (R_1) - (R_3) \quad & 2y - z = 2 \quad (R_6) \end{aligned}$$

Para obtener (R_5) también se podría haber calculado $(R_2) - 2(R_1)$, con lo que habría resultado la ecuación $-2y + z = -4$. Análogamente, para (R_6) se podría haber calculado $(R_3) - (R_1)$. Mientras no se use dos veces la misma pareja de ecuaciones, tenemos libertad en el camino a escoger para reducir un sistema a la forma triangular.

Continuaremos ahora con nuestros cálculos. Para eliminar los términos en y de la ecuación (R_6), se sustituye (R_6) por la diferencia entre (R_5) y (R_6). Las dos primeras ecuaciones se dejan como están. Entonces

$$\begin{aligned} (R_4) \quad & 2x - y + z = 3 \\ (R_5) \quad & 2y - z = 4 \\ (R_5) - (R_6) \quad & 0 = 2 \end{aligned}$$

La última ecuación, $0 = 2$, es una afirmación falsa, lo que significa que este sistema no tiene solución. Escribiremos que la solución es $\varnothing$, símbolo que indica el conjunto vacío. ◀

Infinitas soluciones

Ejemplo 7 Resuelva

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \quad (R_1) \\ x - 2y + 3z &= 6 \quad (R_2) \\ 2x - 6y + 2z &= 8 \quad (R_3) \end{aligned}$$

Solución

Procederemos como en los ejemplos anteriores. El primer paso es eliminar términos en x de la segunda y tercera ecuación. La primera ecuación no se cambia. Sustituiremos la segunda ecuación por la diferencia entre la primera ecuación y la segunda. Sustituiremos después la tercera ecuación por la diferencia entre la primera ecuación y la tercera dividida por dos. Tras esas operaciones se obtiene

$$\begin{aligned} (R_1) \quad & x - 3y + z = 4 \quad (R_4) \\ (R_2) - (R_1) \quad & y + 2z = 2 \quad (R_5) \\ (R_1) - \frac{1}{2}(R_3) \quad & 0z = 0 \quad (R_6) \end{aligned}$$

La tercera ecuación $0z = 0$, es una afirmación correcta. Quiere decir que z puede tomar cualquier valor y se sigue obteniendo un resultado correcto. Introducimos la variable de sustitución t, y hacemos

$$z = t \quad \text{para } t \in \mathbf{R}$$

Si se despeja y de (R_5) y se sustituye $z = t$ en la ecuación resultante, se obtiene

$$y = 2 - 2z = 2 - 2t$$

Despejando x en (R_4) y sustituyendo $y = 2 - 2t$ y $z = t$ en la ecuación resultante, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= 4 + 3y - z = 4 + 3(2 - 2t) - t \\ &= 4 + 6 - 6t - t = 10 - 7t \end{aligned}$$

La solución es por tanto el conjunto

$$\{(x, y, z) : x = 10 - 7t,\ y = 2 - 2t,\ z = t, \quad \text{para } t \in \mathbf{R}\}$$ ◀

Notación abreviada Cuando se transforma un sistema de ecuaciones lineales, sólo se cambian los coeficientes de las variables. Por tanto, resulta conveniente utilizar una notación que represente las transformaciones de dichos coeficientes. Esto motiva la siguiente definición.

Definición Una **matriz** es una estructura rectangular de números

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los valores a_{ij} se denominan **elementos**. Si la matriz tiene m filas y n columnas, se dice que es una matriz $m \times n$.

Una matriz A como la de la definición puede ser la **matriz de coeficientes** del sistema lineal presentado en (9.5).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{9.7}$$

Los elementos a_{ij} de la matriz tienen dos subíndices, que indican que están situados en la fila i y columna j. Podemos imaginar este sistema de numeración como un sistema de direcciones de una ciudad, utilizando calles y avenidas. Supongamos que las avenidas van de norte a sur y las calles de oeste a este. La esquina de la Calle 2 con Avenida 3, sería el elemento de A que está en la segunda fila y la tercera columna, es decir, el elemento a_{23}.

Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, se denomina **matriz cuadrada**. Una matriz $m \times 1$ se denomina **matriz columna** y una matriz $1 \times n$ se denomina **vector fila**. Los ejemplos que siguen son una matriz 3×3 cuadrada, un vector columna 3×1 y un vector fila 1×4. Observando la forma de las matrices se entiende claramente la nomenclatura.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Si A es una matriz cuadrada, entonces la **diagonal** de A está formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. En la matriz 3×3 del ejemplo anterior, la diagonal está formada por los elementos 1, 1 y 3.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices, se define primero la **matriz ampliada**. Esta matriz es la matriz de coeficientes del sistema lineal (9.7) ampliada con una columna adicional que representa el miembro derecho de (9.7). La matriz ampliada que representa al sistema lineal (9.7) es por tanto

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

¿Cómo se puede utilizar la matriz ampliada para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

Ejemplo 8 Calcule la matriz ampliada del sistema del Ejemplo 5, y resuelva el sistema utilizando dicha matriz.

Solución

La matriz ampliada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \\ (R_3) \end{array}$$

El objetivo es transformar la matriz ampliada en una forma más simple, que se denomina también triangular superior, en la que todos los elementos por debajo de la diagonal valen cero. Para ello se utilizan las mismas transformaciones básicas que antes, por lo que es útil comparar los pasos con los que se realizaron en el Ejemplo 5. En el miembro izquierdo de la matriz se indica la transformación utilizada, y en el lado derecho de la matriz se asignan las nuevas etiquetas.

$$\begin{array}{r} (R_1) \\ 2(R_1) - 3(R_2) \\ 2(R_2) - (R_3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 13 & -11 & -7 \\ 0 & -4 & 9 & 19 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_4) \\ (R_5) \\ (R_6) \end{array}$$

Es decir, la fila 1 se renombra como la fila 4. Para obtener la segunda fila, se multiplica la primera por 2 y la segunda por 3 y se calcula la diferencia $(2(R_1) - 3(R_2))$ y el resultado se denomina (R_5), y así sucesivamente.

El siguiente paso es eliminar el -4 de (R_6). Se obtiene

$$\begin{array}{r} (R_4) \\ (R_5) \\ 4(R_5) + 13(R_6) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 13 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 73 & 219 \end{array}\right]$$

que es ahora la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales de (9.6), y se puede proceder ahora para resolver el sistema como en el Ejemplo 5, por sustitución hacia atrás. ◀

Hasta ahora, todos los sistemas que hemos considerado tienen el mismo número de ecuaciones que de variables. Esto no es necesariamente siempre así. Cuando un sistema tiene menos ecuaciones que variables se denomina **subdeterminado**. Aunque los sistemas subdeterminados puede ser inconsistentes (no tener solución), es frecuente que tengan infinitas soluciones. Cuando un sistema tiene más ecuaciones que variables, se denomina sobredeterminado. Los sistemas sobredeterminados suelen ser inconsistentes.

En el Ejemplo 9 estudiaremos un sistema subdeterminado y en el Ejemplo 10, uno sobredeterminado.

Ejemplo 9 Resuelva el siguiente sistema subdeterminado.

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 1 \quad (R_1) \\ 2x - y + z &= 2 \quad (R_2) \end{aligned}$$

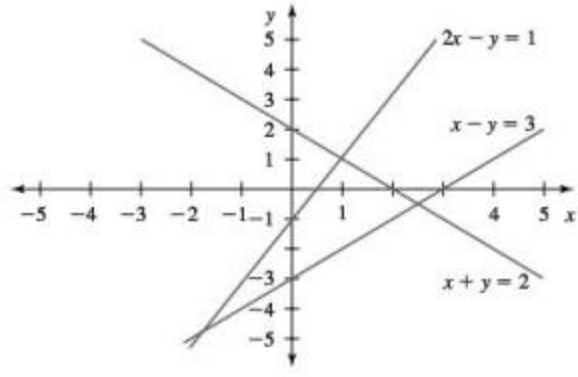
Solución

El sistema tiene menos ecuaciones que variables y por tanto es subdeterminado. Se utiliza la matriz ampliada para resolver el sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \end{array}$$

Transformando la matriz ampliada en una forma triangular superior, se obtiene

$$\begin{array}{r} (R_1) \\ (R_1) - (R_2) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$



▲ **Figura 9.8**
Las tres rectas del Ejemplo 10 no se cortan en un punto

Expresando esto como un sistema de ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 1 \\ 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Puede verse que

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z$$

y

$$2x = 1 - 2y + z = 1 - 2\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z\right) + z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}z$$

o

$$x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}z$$

Se utiliza de nuevo una variable de sustitución, y se hace $z = t$, $t \in \mathbf{R}$. Entonces $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}t$ e $y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t$. La solución se puede escribir entonces como

$$\left\{(x, y, z): x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}t, y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, z = t, t \in \mathbf{R}\right\}$$ ◀

Ejemplo 10 Resuelva el siguiente sistema sobredeterminado.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \quad (R_1) \\ x + y &= 2 \quad (R_2) \\ x - y &= 3 \quad (R_3) \end{aligned}$$

Solución

El sistema tiene más ecuaciones que variables y por tanto es sobredeterminado. Para resolverlo, se escribe

$$\begin{aligned} (R_1) \quad & 2x - y = 1 \quad (R_4) \\ 2(R_2) - (R_1) \quad & 3y = 3 \quad (R_5) \\ (R_2) - (R_3) \quad & 2y = -1 \quad (R_6) \end{aligned}$$

(R_6) permite concluir que $y = -\frac{1}{2}$, y de (R_5) se obtiene que $y = 1$. Como $1 \neq -\frac{1}{2}$, no puede existir solución. El sistema es inconsistente, y el conjunto de soluciones es el conjunto vacío. En este ejemplo se puede ilustrar que el sistema es inconsistente dibujando las tres rectas correspondientes a las ecuaciones (R_1), (R_2) y (R_3), como en la Figura 9.8.

Para que el sistema tenga soluciones, las tres rectas tendrían que cortarse en un solo punto (o bien ser idénticas). Como no ocurre así, no existe solución. ◀

9.1.3. Problemas

(9.1.1)

En los Problemas 1-4, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales. Además, en cada sistema, dibuje las dos rectas correspondientes a las dos ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas, y explique la solución utilizando la gráfica.

1.
$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x + 3y &= 6 \\ x - 4y &= -4 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x - 3y &= 6 \\ y &= 3 + \tfrac{1}{3}x \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x + y &= \tfrac{1}{3} \\ 6x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

5. Determine c de forma que

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x - 6y &= c \end{aligned}$$

tenga (a) infinitas soluciones y (b) no tenga solución. (c) ¿Es posible escoger un número c de forma que el sistema tenga una sola solución? Explique su respuesta.

6. Demuestre que la solución de

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

se expresa como

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

y

$$x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

7. Zach desea comprar peces y plantas para su acuario. Cada pez cuesta 2.30 dólares y cada planta cuesta 1.70 dólares. Compra un total de 11 productos que le cuestan un total de 21.70 dólares. Plantee un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular cuántos peces y plantas ha comprado Zach, y resuelva dicho sistema.

8. Los ratones de un laboratorio se nutren con una mezcla de dos alimentos que contienen dos nutrientes esenciales. El alimento 1 contiene 3 unidades del nutriente A y dos unidades del nutriente B por onza. El alimento 2 contiene 4 unidades del nutriente A y 5 unidades del nutriente B por onza.

(a) ¿En qué proporción hay que mezclar la comida de los ratones, si re requiere la misma cantidad de ambos nutrientes?

(b) Suponga ahora que los ratones necesitan los nutrientes A y B en proporción 1 : 2 ¿Es posible satisfacer sus necesidades dietéticas con los dos alimentos disponibles?

9. Demuestre que si

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

entonces el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene una única solución, concretamente $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

(9.1.2)

En los Problemas 10-14, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales.

10.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y - 2z &= -3 \\ 3x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 6 \\ x + 2y - z &= -1 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x + 4y - 3z &= -13 \\ 2x - 3y + 5z &= 18 \\ 3x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} -2x + 4y - z &= -1 \\ x + 7y + 2z &= -4 \\ 3x - 2y + 3z &= -3 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 4 \\ 2x - 3y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

En los Problemas 15-18, calcule la matriz ampliada y utilícela para resolver el sistema de ecuaciones.

15.
$$\begin{aligned} -x - 2y + 3z &= -9 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 4x - 3y + 5z &= -9 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ 4x + y - 2z &= -12 \\ 2x - 3y + z &= 7 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} y + x &= 3 \\ z - y &= -1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 2x - z &= 1 \\ y + 3z &= x - 1 \\ x + z &= y - 3 \end{aligned}$$

En los Problemas 19-22, determine si los sistemas son sobredeterminados o subdeterminados. Después resuélvalos.

19.
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - 3y + z &= 8 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x - y &= 4 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} 4y - 3z &= 6 \\ 2y + z &= 1 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

23. SplendidLawn vende tres tipos de fertilizante para césped, SL 24- 4-8, SL 21-7-12 y SL 17-0-0. Las tres cifras indican los porcentajes de nitrógeno, fosfato y potasio del contenido, en ese orden (por ejemplo, 100 g de SL 24-4-8 contienen 24 g de nitrógeno). Suponga que su césped requiere al año 500 g de nitrógeno, 100 g de fosfato y 180 g de potasio cada 1000 pies cuadrados. ¿Qué cantidad de los tres tipos de fertilizante habría que aplicar al año cada 1000 pies cuadrados?

24. Tres tipos diferentes de insectos se crían juntos en un recipiente de laboratorio. Todos los días se les suministran dos tipos diferentes de alimentos. Cada individuo de la especie 1 consume 3 unidades del alimento A y 5 unidades del alimento B. Cada individuo de la especie 2 consume 2 unidades del alimento A y 3 unidades del alimento B. Por último, Cada individuo de la especie 3 consume 1 unidad del alimento A y 2 unidades del alimento B. Cada día se suministran 500 unidades del alimento A y 900 unidades del alimento B. ¿Cuántos individuos de cada especie se crían juntos? ¿Existe más de una solución? ¿Qué sucede si se añade un tercer tipo de alimento, denominado C, y cada individuo de la especie 1 consume 2 unidades de C, cada individuo de la especie 2 consume 4 unidades de C y cada individuo de la especie 3 consume 1 unidad de C, y se suministran al día 550 unidades de alimento C?

9.2 MATRICES

En la sección anterior aparecieron las matrices. En esta sección aprenderemos a realizar varias operaciones con matrices.

9.2.1 Operaciones básicas con matrices

Recordaremos la definición de matriz. Una matriz $m \times n$ es una estructura rectangular de números con m filas y n columnas. Se escribe de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Si el tamaño de la matriz es claro, se utiliza también la notación abreviada $A = [a_{ij}]$. Presentaremos seguidamente una serie de definiciones simples que no necesitan mucha explicación.

Definición Suponga que $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son dos matrices $m \times n$. Entonces

$$A = B$$

si y sólo si para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Esta definición indica que sólo se pueden comparar matrices del mismo tamaño, y serán iguales si todos sus elementos correspondientes son iguales. La siguiente definición muestra cómo se suman matrices.

Definición Suponga que $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son dos matrices $m \times n$. Entonces

$$C = A + B$$

es una matriz $m \times n$ cuyos elementos son

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

Note que la suma sólo está definida para matrices del mismo tamaño. La suma de matrices satisface las dos propiedades siguientes:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

La matriz cuyos elementos son todos iguales a cero se denomina **matriz cero** y se escribe **0**. Se cumple lo siguiente:

$$A + \mathbf{0} = A$$

Se pueden multiplicar matrices por números. Estos números se denominan **escalares**.

Definición Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times n$ y c un escalar. Entonces cA es una matriz $m \times n$ cuyos elementos son ca_{ij} para $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejemplo 1 Calcule $A + 2B - 3C$, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} A + 2B - 3C &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0-3 & 3+2+0 \\ 1-2+0 & 0-6-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◀

Ejemplo 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $A + B = B - C$.

Solución

Una forma de resolverlo consiste simplemente en calcular $A + B$ y $B - C$, y comparar los resultados. Se obtiene

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$B - C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Comparando $A + B$ con $B - C$ puede verse que son iguales, ya que sus elementos coinciden.

Otra forma de llegar a esta conclusión es restar B en los dos miembros de la igualdad $A + B = B - C$, con lo que resulta $A = -C$. Sumando C en ambos miembros se obtiene $A + C = \mathbf{0}$. Es decir, demostrar la igualdad $A + B = B - C$ es equivalente a demostrar la igualdad $A + C = \mathbf{0}$. Calculando $A + C$ se obtiene

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

lo que demuestra que $A + C = \mathbf{0}$ e implica por tanto que la igualdad es cierta. ◀

La operación que intercambia filas y columnas se denomina **trasposición**.

Definición Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times n$. La **traspuesta** de A, que se escribe A', es una matriz $n \times m$ cuyos elementos son

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

Para entender cómo es esta operación, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Trasponga las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 4]$$

Solución

Para calcular la traspuesta es necesario intercambiar filas por columnas. Como A es una matriz 2×3, su traspuesta A' será una matriz 3×2, concretamente,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Para comparar el resultado con nuestra definición, nótese que

$$a'_{11} = a_{11} = 1, \quad a'_{12} = a_{21} = 4, \quad a'_{21} = a_{12} = 2, \ldots$$

La matriz B es una matriz 2×1, que es un vector columna. Su traspuesta es una matriz 1×2, que es un vector fila. Entonces

$$B' = [1 \quad 2]$$

Análogamente, la matriz C es un vector fila 1×2, por lo que su traspuesta será un vector columna 2×1. Se obtiene

$$C' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ◀

En el ejemplo anterior, hemos visto que el traspuesto de un vector fila es un vector columna, y viceversa. Cuando sea necesario en el texto escribir un vector columna como $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, se puede escribir $X = [1 \quad 2 \quad 3]'$, ya que, al escribirlo como el traspuesto de un vector fila, es realmente un vector columna. Un vector columna grande escrito en forma de un vector fila traspuesto hace el texto más legible.

9.2.2 Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices es más complicada. Empezaremos con la definición.

Definición Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times l$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz $l \times n$. Entonces

$$C = AB$$

es una matriz $m \times n$ con

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

para $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$.

Para explicar esta definición con palabras, nótese que c_{ij} es el elemento de C situado en la fila i y en la columna j. Para obtenerlo, se multiplican los elementos de la fila i de la matriz A por los elementos de la columna j de B, como se indica en la definición. Para que se pueda definir el producto AB, el número de columnas de A debe ser igual que el número de filas de B. Esta definición es realmente formidable. Veamos como se aplica realmente.

Ejemplo 4 **(Multiplicación de matrices)** Calcule AB para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Observe primero que A es una matriz 2×3 y B una matriz 3×4. Es decir, A tiene tres columnas y B tres filas. Por tanto, el producto AB está definido y es una matriz 2×4. El producto se escribe de la siguiente forma

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, para calcular c_{11} se multiplica la primera fila de A por la primera columna de B:

$$c_{11} = [1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (1)(1) + (2)(0) + (3)(-1) = -2$$

El cálculo anterior permite ver que el número de columnas de A debe ser igual que el número de filas de B. Si no fuera así, no se podrían multiplicar adecuadamente los elementos.

Para calcular c_{23} se multiplica la segunda fila de A por la tercera de B:

$$c_{23} = [-1 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)(3) + (0)(4) + (4)(-2) = -11$$

Los otros elementos se obtienen de forma similar, con lo que resulta

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & -2 & -11 & 7 \end{bmatrix}$$ ◀

Cuando se multiplican matrices el orden es importante. Por ejemplo BA no está definido para las matrices del Ejemplo 4. Teniendo esto en cuenta, debe resultar claro que en general $AB \neq BA$. Incluso aunque AB y BA existan, en general no son iguales. Pueden diferir en el número de filas, el número de columnas y los elementos. Los dos ejemplos siguientes ilustran este importante punto.

Ejemplo 5 **(El orden es importante)** Suponga que

$$A = [2 \quad 1 \quad -1] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demuestre que AB y BA están definidas pero $AB \neq BA$.

Solución

Obsérvese que A es una matriz 1×3 y B es una matriz 3×1. El producto AB está definido ya que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B (concretamente 3). El producto AB es una matriz 1×1. Al realizar la multiplicación de matrices, se obtiene

$$AB = [2 \quad 1 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2 - 1 + 0] = [1] = 1$$

Obsérvese que una matriz 1×1 es un simple número.

El producto BA está también definido, ya que el número de columnas de B es igual al número de filas de A (concretamente 1). El producto BA es una matriz 3×3. Al realizar la multiplicación de matrices, se obtiene

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}[2 \quad 1 \quad -1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al comparar AB con BA, se ve inmediatamente que $AB \neq BA$, ya que las dos matrices no son del mismo tamaño. ◀

Ejemplo 6 **(El orden es importante)** Suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Demuestre que AB y BA están definidas pero $AB \neq BA$.

Solución

A y B son matrices 2×2, por lo que tanto AB como BA serán también matrices 2×2. Se obtiene

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Como los elementos de AB no coinciden con los de BA, se concluye que $AB \neq BA$. ◀

El producto AB del Ejemplo 6 dio como resultado una matriz con todos sus elementos a 0. Anteriormente denominamos esta matriz como matriz cero, escribiéndola como $\mathbf{0}$. Este ejemplo demuestra que un producto de matrices puede valer cero sin que ninguna de las matrices que se multiplican valga cero. Este hecho es importante y representa una diferencia con la multiplicación de números reales. Al multiplicar dos números reales, se sabe que si el producto es igual a 0, al menos uno de los dos factores debe ser igual a 0. Esto no se cumple en la multiplicación de matrices. Si A y B son dos matrices cuyo producto está definido, su producto AB puede ser igual a la matriz cero sin que A ni B sean iguales a la matriz cero.

Enumeramos a continuación algunas propiedades del producto de matrices. Se supone que todas las matrices son de los tamaños apropiados para que se puedan definir los productos.

1. $(A + B)C = AC + BC$
2. $A(B + C) = AB + AC$

3. $(AB)C = A(BC)$

4. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$

En la sección de problemas se practicará con estas propiedades.

Si A es una matriz cuadrada (es decir, si tiene el mismo número de filas que de columnas) se pueden definir sus potencias. Concretamente si k es un entero positivo, entonces

$$A^k = A^{k-1}A = AA^{k-1} = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ factores}}$$

Por ejemplo, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, etc.

Ejemplo 7 **(Potencias de matrices)** Calcule A^3 si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Para calcular A^3 es necesario obtener A^2. Se obtiene

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

Ahora, para calcular A^3 se puede calcular A^2A o AA^2. En ambos casos se obtiene A^3. En este caso el orden de multiplicación no importa, ya que $A^3 = (AA)A = A(AA) = AAA$. Lo hacemos de las dos maneras.

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$$

y

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$$

Una matriz importante es la **matriz identidad**, que se denomina I_n. La matriz identidad es una matriz $n \times n$ con unos en su diagonal y ceros en el resto, es decir,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo,

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es frecuente escribir I en vez de I_n si el tamaño es claro a partir del contexto. La matriz identidad hace el mismo papel del 1 en la multiplicación de números reales. Si A es una matriz $m \times n$, entonces

$$AI_n = I_mA = A$$

Por tanto, se deduce que $I^k = I$ para cualquier entero positivo k.

Si a y x son números reales, la ecuación $ax = x$ se puede escribir en la forma $ax - x = 0$. Para sacar factor común en el miembro izquierdo, se puede transformar éste de la siguiente forma: $ax - 1x = (a - 1)x$. Para sacar factor común x hay que introducir un 1 delante de x. Existe un procedimiento similar para matrices, pero hay que tener cuidado, ya que en la multiplicación de matrices, el orden es importante.

Ejemplo 8 **(Ecuación con matrices)** Sea A una matriz 2×2 y X una matriz 2×1. Demuestre que $AX = X$ se puede poner como $(A - I_2)X = \mathbf{0}$.

Solución

Se obtiene que

$$AX = X \quad \text{es equivalente a} \quad AX - X = \mathbf{0}$$

Para sacar factor común X, se multiplica X por la izquierda por I_2. La matriz I_2 nos permite entonces sacar factor común X igual que en caso de números reales cuando se necesitaba introducir el factor 1 para sacar factor común x en la expresión $ax - x = 0$. Tenemos entonces

$$AX - I_2X = \mathbf{0}$$

Ahora se puede sacar factor común X, con lo que se obtiene

$$(A - I_2)X = \mathbf{0}$$

Una observación importante: X se multiplica por la izquierda por $A - I_2$. No se puede invertir el orden [de hecho, el producto $X(A - I_2)$ ni siquiera está definido]. ◀

Existe una estrecha relación entre los sistemas de ecuaciones lineales y las matrices. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

se puede escribir en forma matricial de la siguiente forma

$$AX = B$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9 **(Representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales)** Escriba

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 7 \end{aligned}$$

en forma matricial.

Solución

Al escribir el sistema en forma matricial resulta

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que A es una matriz 2×3 y X es una matriz 3×1. Por tanto, la matriz B (basándose en las reglas de la multiplicación de matrices) tiene que ser una matriz 2×1, tal como se obtiene. ◀

La representación matricial se utilizará en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la subsección siguiente.

9.2.3 Matrices inversas

En esta subsección aprenderemos a resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas escritos en forma matricial,

$$AX = B \tag{9.8}$$

siendo A una matriz cuadrada $n \times n$, y X y B vectores columna $n \times 1$. Comenzaremos con un ejemplo simple con $n = 1$. Cuando se resuelve

$$5x = 10$$

despejando x, simplemente se dividen los dos miembros por 5, o bien se multiplican ambos miembros por $\frac{1}{5} = 5^{-1}$, y se obtiene

$$5^{-1} \cdot 5x = 5^{-1} \cdot 10$$

Como $5^{-1} \cdot 5 = 1$ y $5^{-1} \cdot 10 = 2$, se obtiene que $x = 2$. Para resolver (9.8), es necesaria una operación que sea análoga a la división, o multiplicación por el inverso de A. Definiremos la matriz A^{-1}, que realizará esta función. Se denomina **matriz inversa** de A. Esta matriz permite escribir la solución de (9.8) de la siguiente forma

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Como en el caso de los inversos de números, no siempre es posible calcular la matriz inversa. Para que la matriz inversa produzca el mismo efecto que multiplicar un número por su inverso, debe tener la propiedad $A^{-1}A = I$, siendo I la matriz identidad. La solución entonces será de la forma

$$X = A^{-1}B$$

Definición Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada $n \times n$. Si existe una matriz B cuadrada $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

entonces B se denomina matriz inversa de A, y se escribe A^{-1}.

Si una matriz A tiene inversa, se denomina **invertible** o **no singular**. Si A no tiene inversa, se denomina **singular**. Si A es invertible, su matriz inversa es única, Es decir, si B y C son matrices inversas de A, entonces $B = C$ (en otras palabras, si usted y un amigo suyo calculan la inversa de A, los dos obtendrán la misma respuesta). Para ver por qué, supongamos que B y C son matrices inversas de A. Utilizando $BA = I_n$ y $AC = I_n$ se obtiene que

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Las matrices inversas cumplen las siguientes propiedades

1. Si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2. Si A y B son matrices invertibles $n \times n$, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

La primera propiedad dice que si se aplica la operación de inversión dos veces, se obtiene la matriz original. Esto resulta familiar de nuestro conocimiento de los números reales. Tomemos el número 2. Su inverso es $2^{-1} = 1/2$. Si se toma el inverso de 1/2, se obtiene de nuevo 2. Para ver por qué esto se cumple en el caso de matrices, supongamos que A es una matriz $n \times n$ cuya matriz inversa es A^{-1}. Entonces, por definición,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Pero esta ecuación también dice que A es la matriz inversa de A^{-1}. Es decir, $A = (A^{-1})^{-1}$.

Para ver que la segunda propiedad es cierta, debemos comprobar que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

Se calcula

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

y

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

En el siguiente ejemplo, veremos cómo se puede comprobar que una matriz es inversa de otra. Las matrices serán de tamaño 3×3. Es engorroso obtener la inversa de una matriz 3×3 o mayor (a menos que se utilice una calculadora o un programa de ordenador). En este ejemplo se partirá de las dos matrices y simplemente se comprobará que una es la inversa de la otra.

Ejemplo 10 **(Comprobación de que una matriz es inversa de otra)** Demuestre que la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{73} & \frac{13}{73} & \frac{14}{73} \\ \frac{18}{73} & -\frac{5}{73} & -\frac{11}{73} \\ \frac{8}{73} & \frac{14}{73} & -\frac{13}{73} \end{bmatrix}$$

Solución

Realizando las multiplicaciones de matrices AB y BA se puede ver que

$$AB = I_3 \quad \text{y} \quad BA = I_3$$

Por tanto, $B = A^{-1}$. ◀

En este libro sólo será necesario invertir matrices 2×2. En el siguiente ejemplo se muestra cómo se hace.

Ejemplo 11 **(Cálculo de la inversa)** Calcule la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Hay que calcular una matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

tal que $AB = I_2$. Comprobaremos después que $BA = I_2$, y por tanto, B será la inversa de A. Hay que resolver

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{array}{rcl} 2b_{11} + 5b_{21} = 1 \\ b_{11} + 3b_{21} = 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} 2b_{12} + 5b_{22} = 0 \\ b_{12} + 3b_{22} = 1 \end{array} \tag{9.9}$$

Resolveremos ambas ecuaciones reduciéndolas a la forma triangular superior. Las primeras ecuaciones no se modifican. Se elimina b_{11} del primer conjunto de ecuaciones y b_{12} del segundo sistema multiplicando las segundas ecuaciones por (-2) y sumándoselas a la primera. Se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 2b_{11} + 5b_{21} = 1 \\ -b_{21} = 1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} 2b_{12} + 5b_{22} = 0 \\ -b_{22} = -2 \end{array} \tag{9.10}$$

Las ecuaciones de la izquierda tienen como solución

$$b_{21} = -1 \quad \text{y} \quad b_{11} = \frac{1}{2}(1 - 5b_{21}) = \frac{1}{2}(1 + 5) = 3$$

Las ecuaciones de la derecha tienen como solución

$$b_{22} = 2 \quad \text{y} \quad b_{12} = \frac{1}{2}(-5b_{22}) = -5$$

Por tanto

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que $AB = I_2$ y que $BA = I_2$, por que $B = A^{-1}$. ◀

En la Subsección opcional 9.2.4 se presentará un método que se puede utilizar con matrices más grandes. Es esencialmente el mismo método que el del Ejemplo 11 pero utiliza matrices ampliadas y requiere mayor esfuerzo computacional. Para invertir matrices de mayor tamaño se pueden utilizar calculadoras gráficas o programas de ordenador.

Al final de la Subsección 9.2.2 mencionamos la relación entre los sistemas de ecuaciones lineales y la multiplicación de matrices. Un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir de la siguiente forma

$$AX = B \tag{9.11}$$

Si se considera un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, entonces A es una matriz $n \times n$. Si A es invertible, multiplicando (9.11) por la izquierda por A^{-1} se obtiene

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Como $A^{-1}A = I_n$ y $I_nX = X$, se deduce que

$$X = A^{-1}B$$

Utilizaremos este razonamiento para repetir el Ejemplo 5 de la Sección 9.1.

Ejemplo 12 **(Uso de la matriz inversa para resolver sistemas lineales)** Resuelva

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5y - z = 10 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \end{array}$$

Solución

La matriz de coeficientes A es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

que encontramos en el Ejemplo 10, donde vimos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{73} & \frac{13}{73} & \frac{14}{73} \\ \frac{18}{73} & -\frac{5}{73} & -\frac{11}{73} \\ \frac{8}{73} & \frac{14}{73} & -\frac{13}{73} \end{bmatrix}$$

Sea

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se calcula $A^{-1}B$, y se obtiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

es decir, $x=1$, $y=2$ y $z=3$, como vimos en el Ejemplo 5 de la Sección 9.1. ◀

Tenemos ahora dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables. Se puede reducir el sistema a la forma triangular superior y utilizar sustitución hacia atrás, o bien se puede escribir el sistema en forma matricial $AX = B$, calcular A^{-1}, y realizar la operación $X = A^{-1}B$. Por supuesto, el segundo método sólo se puede aplicar cuando existe A^{-1}. Si A^{-1} no existe, o bien el sistema no tiene solución, o tiene infinitas soluciones.

Hay un criterio sencillo y muy útil para comprobar si una matriz 2×2 es invertible. Al obtener este criterio se obtiene también una fórmula para la inversa de una matriz 2×2 invertible. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Se desea escribir los elementos de B en función de los elementos de A, de forma que $AB = BA = I$ o $B = A^{-1}$. De

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\begin{aligned} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned} \tag{9.13}$$

Resolvemos el sistema de Ecuaciones (9.12) despejando b_{11} y b_{21}:

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \quad (R_1) \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \quad (R_2) \end{aligned}$$

Si calculamos $a_{11}(R_2) - a_{21}(R_1)$, se obtiene

$$a_{11}a_{22}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{21} = -a_{21}$$

Para despejar b_{21}, primero se saca factor común del miembro izquierdo de la ecuación, con lo que resulta

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_{21} = -a_{21}$$

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, se puede despejar b_{21}. Se obtiene

$$b_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Sustituyendo b_{21} en (R_1) y despejando b_{11} se obtiene, para $a_{11} \neq 0$,

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{a_{11}}[1 - a_{12}b_{21}] \\ &= \frac{1}{a_{11}}\left[1 - \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right] \\ &= \frac{1}{a_{11}}\frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}$$

(Cuando $a_{11} = 0$, vale el mismo resultado final.) Como solución de (9.13) se obtiene

$$b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Estos cálculos permiten llegar a dos importantes conclusiones.

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces A es invertible, y

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

La expresión $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se denomina **determinante** de A, y se indica como $\det A$.

Definición Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

entonces el determinante de A se define de la siguiente forma

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Observando de nuevo la fórmula de A^{-1}, siendo A una matriz 2×2 cuyo determinante es distinto de cero, para calcular la inversa de A, se divide A por su determinante, se cambian los elementos de la diagonal y se cambia el signo de los elementos que no están en la diagonal. Si el determinante es igual a 0, la inversa de A no existe.

El determinante se puede definir para cualquier matriz $n \times n$. No daremos una fórmula general, que es computacionalmente complicada para $n \geq 3$. Las calculadoras gráficas o determinados programas de ordenador pueden calcular determinantes. No obstante, mencionaremos el siguiente resultado, que permite determinar si una matriz $n \times n$ admite o no inversa.

Teorema Sea A una matriz $n \times n$. A es no singular si y sólo si $\det A \neq 0$.

Ejemplo 13 **(Uso del determinante para calcular matrices inversas)** Determine cuál de las siguientes matrices es invertible. En cada caso, calcule la inversa si existe.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Solución

(a) Para comprobar si A es invertible, se calcula su determinante

$$\det A = (3)(4) - (2)(5) = 2 \neq 0$$

Por tanto, A es invertible y se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Como

$$\det B = (2)(3) - (1)(6) = 0$$

B no es invertible. ◀

Hemos mencionado que si A es invertible, entonces

$$AX = B$$

tiene una única solución, concretamente $X = A^{-1}B$. Es de particular importancia el caso de $B = \mathbf{0}$. Es decir, supongamos que A es una matriz 2×2 y que $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es una solución de

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se denomina solución **trivial**, y es la única solución de $AX = \mathbf{0}$ cuando A es invertible. Si $AX = \mathbf{0}$ tiene una solución $X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se denomina solución **no trivial**. Para que el sistema

$$AX = \mathbf{0}$$

tenga una solución no trivial, A debe ser singular. Formularemos este resultado en forma de teorema para el caso más general de A una matriz $n \times n$, ya que es un resultado que utilizaremos repetidas veces.

Teorema Sea A una matriz $n \times n$, y X y $\mathbf{0}$ matrices $n \times 1$. La ecuación

$$AX = \mathbf{0}$$

tiene una solución distinta de cero si y sólo si A es singular.

Ejemplo 14 **(Soluciones no triviales)** Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a para que $AX = \mathbf{0}$ tenga una solución no trivial, y calcule dicha solución.

Solución

Para determinar cuándo tiene $AX = \mathbf{0}$ una solución no trivial, hay que obtener las condiciones bajo las que A es singular, o lo que es lo mismo, bajo las que $A = 0$.

Como $\det A = 2a - 18$, se deduce que A es singular si $2a - 18 = 0$ o $a = 9$. Por tanto, si $a = 9$, la ecuación $AX = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. Para calcular dicha solución hay que resolver

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que se puede expresar como un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos ver que la primera ecuación es tres veces la segunda. Por tanto, se puede simplificar simplemente el sistema, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Esto demuestra que el sistema tiene infinitas soluciones, concretamente

$$\left\{(x_1, x_2) : x_2 = t \quad \text{y} \quad x_1 = -\frac{2}{3}t, \quad \text{para } t \in \mathbf{R}\right\}$$

En particular, este sistema tiene soluciones no triviales. Por ejemplo, si se escoge $t = 3$, se obtiene $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$, o si se escoge $t = -1$, se obtiene $x_1 = 2/3$ y $x_2 = -1$. Cualquier valor de t distinto de 0 producirá una solución no trivial.

Si se dibujaran las dos rectas correspondientes a las dos ecuaciones cuando $a = 9$, las dos rectas serían iguales. Para todos los demás valores de a, las dos rectas sólo se cortan en el punto (0, 0), que corresponde a la solución trivial (inténtelo). ◀

9.2.4 Cálculo de matrices inversas (opcional)

En la subsección anterior hemos visto cómo se invierten matrices 2×2 resolviendo dos sistemas de ecuaciones lineales. Este método requiere un coste computacional muy elevado cuando hay que invertir matrices mayores. La inversión de una matriz $n \times n$ requiere la resolución de n sistemas de ecuaciones, cada uno de ellos con n ecuaciones y n incógnitas. Resolviendo simultáneamente los n sistemas, el proceso se puede acelerar un poco.

Volvamos a la Ecuación (9.9) del Ejemplo 11 de la Subsección 9.2.3,

$$\begin{array}{rcr} 2b_{11} + 5b_{21} = 1 & & 2b_{12} + 5b_{22} = 0 \\ b_{11} + 3b_{21} = 0 & \text{y} & b_{12} + 3b_{22} = 1 \end{array}$$

y volvamos a escribir ambos sistemas utilizando matrices ampliadas, concretamente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Puede verse que cada una de las matrices ampliadas tiene la misma matriz A en su parte izquierda. Para resolver cada sistema hay que realizar operaciones sobre las filas hasta que se puedan leer las soluciones. La lectura de las soluciones es particularmente sencilla cuando la matriz del lado izquierdo se transforma en la matriz identidad. Vamos a hacer esto con la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \end{array}$$

Se divide la primera fila por 2 para obtener un 1 en la primera posición. En la segunda fila se desea tener un 0 en la primera posición. Para obtenerlo se resta $2(R_2)$ de (R_1). Es decir,

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,(R_1) \\ (R_1) - 2(R_2) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_3) \\ (R_4) \end{array}$$

Sumando $\frac{5}{2}\,(R_4)$ a (R_3), se obtiene un cero en la segunda posición de la primera fila. Multiplicando (R_4) por -1, se obtiene un 1 en la segunda posición de la segunda fila. Es decir, se obtiene la matriz identidad en el lado izquierdo.

$$\begin{array}{r} (R_3) + \frac{5}{2}\,(R_4) \\ (-1)(R_4) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Escribiendo este resultado en forma de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\begin{aligned} b_{11} &= 3 \\ b_{21} &= -1 \end{aligned}$$

Para calcular b_{12} y b_{22} hay que transformar la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

de forma que la matriz de la izquierda se transforme en la matriz identidad. Pero esto implica realizar exactamente las mismas transformaciones, ya que la matriz de coeficientes es la misma para ambos sistemas de ecuaciones lineales. Podemos presentar ahora el truco que acelerará las operaciones. En vez de operar cada matriz ampliada separadamente, se operan simultáneamente. Concretamente, se escribe

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y se realizan transformaciones sobre las filas hasta que quede de la forma

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22} \end{array}\right]$$

Entonces, se obtiene que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Realicemos los cálculos:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}(R_1) \\ (R_1) - 2(R_2) \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_3) \\ (R_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (R_3) + \frac{5}{2}(R_4) \\ (-1)(R_4) \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Reconocemos la columna

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

que da el resultado

$$b_{11} = 3 \quad \text{y} \quad b_{21} = -1$$

La columna de la derecha

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a la solución

$$b_{12} = -5 \quad \text{y} \quad b_{22} = 2$$

Se concluye entonces que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

como vimos en el Ejemplo 11.

Este método funciona también con matrices mayores. Es bastante eficiente, considerando que hay que resolver un gran número de ecuaciones lineales. Ilustraremos esta técnica con una matriz 3×3.

Ejemplo 15 Calcule la inversa (si existe) de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

Se escribe

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \\ (R_3) \end{array}$$

y se realizan las operaciones apropiadas sobre las filas para obtener la matriz identidad en el lado izquierdo. En ese momento, la matriz del lado derecho será la matriz inversa. El primer paso es obtener ceros por debajo del 1 en la primera columna.

$$\begin{array}{r} (R_1) \\ 2(R_1) - (R_2) \\ (R_1) + (R_3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_4) \\ (R_5) \\ (R_6) \end{array}$$

Ahora operaremos en la segunda columna. Deseamos un 1 en el medio y ceros por encima y por debajo.

$$\begin{array}{r} (R_4)-(R_5) \\ (-1)(R_5) \\ (R_6) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_7) \\ (R_8) \\ (R_9) \end{array}$$

Transformaremos ahora la tercera columna. Necesitamos ceros en las dos primeras filas y un 1 en la tercera fila. Hay que tener en cuenta que sólo se puede utilizar (R_9) para realizar las transformaciones.

$$\begin{array}{r} (R_7)+(R_9) \\ 2(R_8)+3(R_9) \\ -\frac{1}{2}\,(R_9) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_{10}) \\ (R_{11}) \\ (R_{12}) \end{array}$$

Finalmente, hay que obtener un 1 en la segunda fila y la segunda columna.

$$\begin{array}{r} (R_{10}) \\ \frac{1}{2}\,(R_{11}) \\ (R_{12}) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Hemos tenido éxito al conseguir la matriz identidad en el lado izquierdo. Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Este método es razonablemente rápido mientras las matrices no sean demasiado grandes. Si no se puede obtener la matriz identidad en el lado izquierdo, entonces la matriz de partida no tiene inversa, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16 Calcule la inversa (si existe) de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Como $\det A = (2)(3) - (1)(6) = 0$, ya sabemos que A es singular y por tanto que no tiene inversa. Pero veamos lo que sucede si se intenta calcular dicha inversa.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \end{array}$$

Como antes, intentaremos obtener un 1 en la primera fila y la primera columna y un 0 en la segunda fila y primera columna. Se obtiene

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,(R_1) \\ (R_1)-2(R_2) \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Como la última fila de la parte izquierda está formada sólo por ceros, nunca podremos obtener la matriz identidad en el lado izquierdo. Es decir, nuestro método falla al encontrar la matriz inversa, y se concluye por tanto que A no es invertible. ◀

9.2.5 Una aplicación: la matriz de Leslie

En esta subsección estudiaremos poblaciones estructuradas por edades con estaciones de reproducción definidas, como las plantas perennes de la zona templada, en las que la época de reproducción se limita a una estación particular del año. Estas poblaciones se describen con modelos en tiempo discreto.

Comenzaremos con el caso más simple. El tiempo se mide en unidades de generación y se denomina $N(t)$ al tamaño de la población en la generación t, con $t = 0, 1, 2, \ldots$ La analogía en tiempo discreto del crecimiento sin restricciones se estudió en el Capítulo 2, y su ecuación es

$$N(t+1) = RN(t) \quad \text{para } t = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.14}$$

con $N(0) = N_0$. La constante R se puede interpretar como el número de individuos en la generación siguiente por individuo de la generación actual. Se supone que $R \geqslant 0$. La solución de (9.14) se puede obtener calculando primero $N(t)$ para $t = 1$, 2 y 3:

$$N(1) = RN(0)$$
$$N(2) = RN(1) = R[RN(0)] = R^2N(0)$$
$$N(3) = RN(2) = R[R^2N(0)] = R^3N(0)$$

y reconociendo el patrón de comportamiento. Se concluye (como en el Capítulo 2) que

$$N(t) = R^tN(0)$$

El crecimiento no restringido produce un crecimiento exponencial de la población. Dependiendo del valor de R, se obtiene el siguiente comportamiento a largo plazo:

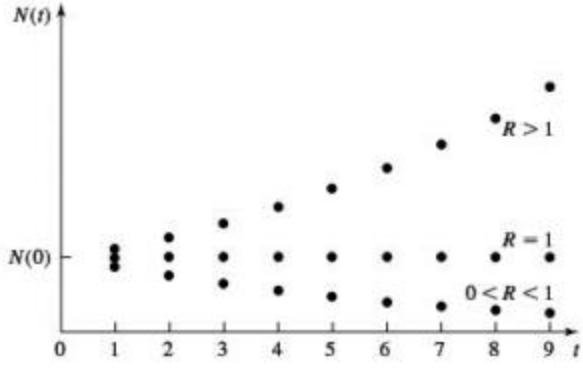
$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } R > 1 \\ N(0) & \text{si } R = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant R < 1 \end{cases}$$

(*véase* la Figura 9.9).

El modelo de población de (9.14) es el modelo más simple de crecimiento de poblaciones en tiempo discreto. El valor R describe el cambio relativo en el tamaño de la población de una generación a la siguiente.

En muchas especies, la reproducción es altamente dependiente de la edad. Por ejemplo, las cigarras periódicas pasan entre 13 y 17 años en estado de ninfa, y sólo se reproducen una vez en su vida. La campanilla púrpura, una flor de las praderas, no se reproduce hasta que tiene tres años de edad, pero continúa produciendo semillas durante toda su vida. Para tener en cuenta la historia de vida de los individuos, estudiaremos modelos en tiempo discreto estructurados por edades. Estos modelos fueron presentados por primera vez por Patrick Leslie (1945). Se formulan como modelos matriciales y se basan en datos demográficos. Se utilizan para calcular importantes valores demográficos, como el tamaño de la población dentro de cada clase de edad y la velocidad de crecimiento de la población. El método de Leslie es ampliamente utilizado no sólo en biología de poblaciones, sino también en la industria de los seguros de vida.

Para ilustrar el método, comenzaremos con un ejemplo numérico. Como sólo las hembras producen crías, sólo realizaremos un seguimiento de las hembras de la población. Se supone que la reproducción ocurre una vez al año y que se toma un censo de la población al final de la estación reproductiva. Los individuos nacidos durante una estación de apareamiento particular tienen edad 0 al final de dicha estación reproductiva. Si un individuo de edad 0 sobrevive hasta el final de la siguiente estación reproductiva, tendrá una edad de 1 cuando se tome el censo en ese momento. Si un individuo de 1 año de edad sobrevive hasta el final de la siguiente estación reproductiva tendrá una edad de 2 años al tomar el censo en ese



▲ **Figura 9.9**
Los tamaños de población $N(t) = R^t N(0)$ para valores sucesivos de t cuando $R > 1$, $R = 1$ y $0 < R < 1$

momento, y así sucesivamente. En nuestro ejemplo, se supone que los individuos no sobreviven más allá de la edad 3, es decir, no hay en la población individuos de edad 4 o mayores. Denominaremos

$$N_x(t) = \text{número de hembras de edad } x \text{ en el instante } t$$

con $t = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}$$

es el vector que describe el número de hembras en cada clase de edad en el instante t.

Se supone que el 40% de las hembras de edad 0, el 30% de las hembras de edad 1 y el 10% de las hembras de edad 2 del instante t están vivas cuando se toma el censo en el instante $t + 1$. Es decir,

$$N_1(t + 1) = (0.4)(N_0(t)$$
$$N_2(t + 1) = (0.3)N_1(t)$$
$$N_3(t + 1) = (0.1)N_2(t)$$

El número de hembras de edad 0 en el instante $t + 1$ es igual al número de crías de hembras durante la estación reproductiva que sobreviven hasta el final de dicha estación reproductiva, cuando se toma el censo. Se supone que

$$N_0(t + 1) = 2N_1(t) + 1.5N_2(t)$$

lo que significa que las hembras alcanzan la madurez sexual a la edad de 1. El factor 2 delante de $N_1(t)$ debe interpretarse como el número medio de crías supervivientes de hembras de un año de edad [entonces, el factor 1.5 delante de $N_2(t)$ debe interpretarse como el número medio de crías supervivientes de hembras de dos años de edad]. Los individuos de tres años de edad no contribuyen a la clase de los recién nacidos.

Resumiremos la dinámica de la población en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

La matriz 4×4 de esta ecuación se denomina **matriz de Leslie**. Denominaremos a esta matriz L. Con esta matriz, la Ecuación (9.15) se puede escribir en forma abreviada,

$$N(t+1) = LN(t) \tag{9.16}$$

Para ver cómo se aplica, supongamos que la población en el instante t tiene la siguiente distribución por edades

$$N_0(t) = 1000, \quad N_1(t) = 200, \quad N_2(t) = 100 \quad \text{y} \quad N_3(t) = 10$$

Al tomar el censo tras la siguiente estación reproductiva, se obtiene que el 40% de las hembras de edad 0 en el instante t están vivas en el instante $t+1$, es decir, $N_1(t+1) = (0.4)(1000) = 400$; el 30% de las hembras de edad 1 en el instante t están vivas en el instante $t+1$, es decir, $N_2(t+1) = (0.3)(200) = 60$ y el 10% de las hembras de edad 2 en el instante t están vivas en el instante $t+1$, es decir, $N_3(t+1) = (0.1)(100) = 10$. El número de crías de hembras supervivientes en el instante $t+1$ es

$$N_0(t+1) = 2N_1(t) + 1.5N_2(t) = (2)(200) + (1.5)(100) = 550$$

Se obtiene el mismo resultado si se utiliza la matriz de Leslie y la Ecuación (9.15):

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 200 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

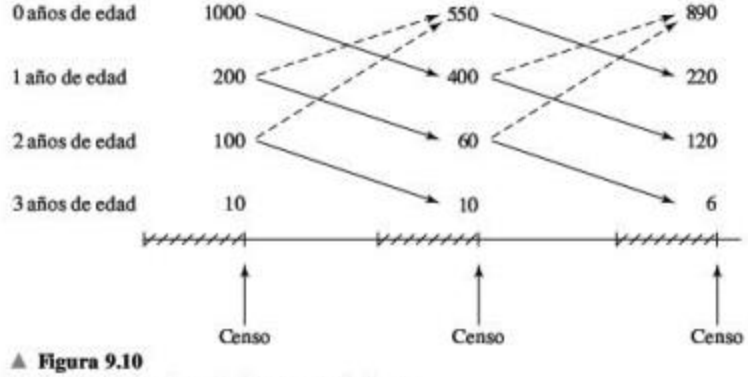
$$= \begin{bmatrix} (2)(200) + (1.5)(100) \\ (0.4)(1000) \\ (0.3)(200) \\ (0.1)(100) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 550 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Para obtener la distribución por edades en el instante $t+2$, se aplica la matriz de Leslie al vector de población en el instante $t+1$, es decir,

$$\begin{bmatrix} N_0(t+2) \\ N_1(t+2) \\ N_2(t+2) \\ N_3(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 550 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 890 \\ 220 \\ 120 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La Figura 9.10 ilustra estas tres estaciones reproductivas.

A partir de la precedente discusión, se puede obtener la forma general de la matriz de Leslie. Supondremos que la población está dividida en $m+1$ clases de



▲ **Figura 9.10**
Ilustración de las tres estaciones reproductivas

edad. El censo se toma de nuevo al final de cada estación reproductiva. Entonces, para la supervivencia de las clases de edad, tenemos,

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= P_0 N_0(t) \\ N_2(t+1) &= P_1 N_1(t) \\ &\vdots \\ N_m(1+1) &= P_{m-1} N_{m-1}(t) \end{aligned}$$

siendo P_i la fracción de hembras de edad i en el instante t que sobreviven hasta el instante $t+1$. Como P_i es una fracción, entonces $0 \leqslant P_i \leqslant 1$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. La ecuación de las hembras de cero años de edad es

$$N_0(t+1) = F_0 N_0(t) + F_1 N_1(t) + \cdots + F_m N_m(t)$$

siendo F_i el número medio de crías hembra que sobreviven por cada hembra de edad i. Escribiendo esto en forma matricial, se obtiene que la estructura de la matriz de Leslie es

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{m-1} & F_m \\ P_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Es una matriz en la que todos sus elementos son cero excepto posiblemente los de la primera fila y los de la subdiagonal que está por debajo de la diagonal.

Ejemplo 17 Suponga que la matriz de Leslie de una población es de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

Interprete esta matriz, y determine lo que sucede si se realiza un seguimiento de una población durante dos estaciones reproductivas, comenzando con 1000 hembras de edad 0.

Solución

La población se divide en tres clases de edad: cero años de edad, un año de edad y dos años de edad. Los elementos de la subdiagonal representan las probabilidades de supervivencia: el 20% de las hembras de edad 0 sobrevive hasta el censo siguiente y el 40% de las hembras de un año sobreviven hasta el censo siguiente. La edad máxima es de 2 años. Las hembras de 0 años de edad producen un promedio de 5 hembras supervivientes por hembra, las de un año de edad producen un promedio de 7 hembras supervivientes por hembra y las de 2 años de edad, un promedio de 1.5 hembras supervivientes por hembra.

El vector de población de una población que comienza con 1000 hembras de edad cero en el instante cero es

$$N(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando que $N(t+1) = LN(t)$ se obtiene

$$N(1) = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$N(2) = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24\,400 \\ 1000 \\ 80 \end{bmatrix}$$ ◀

Distribución de edades estable Estudiaremos ahora lo que sucede cuando se ejecuta el modelo durante mucho tiempo. Supongamos que la matriz de Leslie es

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pueden calcular vectores de población sucesivos mediante la ecuación

$$N(t+1) = LN(t)$$

Es decir,

$$N_0(t+1) = 1.5N_0(t) + 2N_1(t)$$
$$N_1(t+1) = 0.08N_0(t)$$

Supongamos que se empieza con $N_0(0) = 100$ y $N_1(0) = 100$. Entonces

$$\begin{bmatrix} N_0(1) \\ N_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Continuando de esta forma, se van obteniendo los vectores de población en instantes sucesivos, empezando en el instante 0,

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 350 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 541 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 868 \\ 43 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1388 \\ 69 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2221 \\ 111 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3553 \\ 178 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5685 \\ 284 \end{bmatrix}, \cdots$$

(En estos cálculos se ha redondeado al entero más cercano.) Lo primero que se advierte es que la población total está creciendo [el tamaño de la población en el instante t es $N_0(t) + N_1(t)$]. Pero se puede decir mucho más. Si se calculan los sucesivos cocientes

$$q_0(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(t-1)}$$

se obtiene lo siguiente:

t	1	2	3	4	5	6	7
$q_0(t)$	3.5	1.55	1.60	1.5991	1.6001	1.5997	1.6001

Es decir, $q_0(t)$ parece aproximarse a un valor límite, concretamente 1.6. Lo mismo sucede si se calcula el cociente

$$q_1(t) = \frac{N_1(t)}{N_1(t-1)}$$

Se obtiene

t	1	2	3	4	5	6	7
$q_1(t)$	0.08	3.5	1.536	1.605	1.609	1.604	1.596

Ambos cocientes parecen aproximarse al mismo valor, concretamente, 1.6. De hecho, se puede demostrar que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_0(t)}{N_0(t-1)}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_1(t)}{N_1(t-1)}=1.6$$

En la próxima sección veremos cómo se puede obtener analíticamente este resultado partiendo de la matriz de Leslie. Si se observa la fracción de hembras de la clase de edad 0, es decir,

$$p(t)=\frac{N_0(t)}{N_0(t)+N_1(t)}$$

se obtiene

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0.5	0.9777	0.9508	0.9528	0.9526	0.9524	0.9523	0.9524

Es decir, la fracción también parece converger. Parece que aproximadamente el 95.2% de la población de hembras será de edad 0 cuando t sea suficientemente grande.

Aunque la población aumenta su tamaño, la fracción de hembras en edad 0 (y por tanto, también en edad 1), parece converger. Esta fracción constante se denomina **distribución de edades estable**.

Este método de obtención de la distribución de edades estable no siempre funciona, y en el Problema 68 veremos un ejemplo en el que la población no alcanza una distribución de edades estable.

Si la población comienza con la distribución de edades estable, la fracción de hembras de edad 0 permanecerá constante, concretamente alrededor del 95.2%, y a población se incrementará un factor constante en cada generación, concretamente 1.6. Presentamos ahora una ilustración numérica de estas dos importantes propiedades. Una distribución de edades estable para esta población es

$$N(0)=\begin{bmatrix}2000\\100\end{bmatrix}$$

(En la sección siguiente aprenderemos a calcular esos valores.) Comenzando con esta distribución de edades estable,

$$N(1)=LN(0)=\begin{bmatrix}1.5 & 2\\0.08 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2000\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3200\\160\end{bmatrix}$$

La fracción de hembras de la clase de edad 0 no cambia, es decir, 3200/3360 = 2000/2100. Se puede comparar con

$$(1.6)\begin{bmatrix}2000\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3200\\160\end{bmatrix}$$

que produce el mismo resultado. Es decir, si N es una distribución de edades estable, entonces

$$LN=\lambda N \tag{9.17}$$

siendo $\lambda=1.6$ y $N=[N_0 \quad N_1]^t$, con $N_0/(N_0+N_1)\approx 95.2\%$ [en la sección siguiente veremos cómo se calculan λ y el cociente $N_0/(N_0+N_1)$]. La Ecuación (9.17) se utiliza para determinar la distribución de edades estable. El vector N se denomina **autovector**, y el valor λ es el correspondiente **autovalor**. Una matriz 2×2 tiene dos autovalores (que pueden ser iguales). En el caso de la matriz de Leslie, el autovalor mayor se interpreta como el parámetro de crecimiento, es

decir, determina cómo crece la población. Su autovector asociado es la distribución de edades estable.

En la sección siguiente aprenderemos a calcular autovectores y autovalores. Como serán necesarios también en otros contextos, la teoría se desarrollará de forma general. Al final de la sección siguiente volveremos a las matrices de Leslie y veremos cómo calcular la distribución de edades estable y el parámetro de crecimiento de la población.

9.2.6. Problemas

(9.2.1), (9.2.2)

En los Problemas 1-6, sean

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

1. Calcule $A-B+2C$.

2. Calcule $-2A+3B$.

3. Determine D para que $A+B=2A-B+D$.

4. Demuestre que $A+B=B+A$.

5. Demuestre que $(A+B)+C=A+(B+C)$.

6. Demuestre que $2(A+B)=2A+2B$.

En los Problemas 7-12, sean

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & -3\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

7. Calcule $2A+3B-C$.

8. Calcule $3C-B+\frac{1}{2}A$.

9. Determine D para que $A+B+C+D=\mathbf{0}$.

10. Determine D para que $A+4B=2(A+B)+D$.

11. Demuestre que $A+B=B+A$.

12. Demuestre que $(A+B)+C=A+(B+C)$.

13. Calcule la traspuesta de

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

14. Calcule la traspuesta de

$$A=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$$

En los Problemas 15-20, sean

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

15. Calcule lo siguiente

(a) AB

(b) BA

16. Calcule ABC.

17. Demuestre que $AC\neq CA$.

18. Demuestre que $(AB)C=A(BC)$.

19. Demuestre que $(A+B)C=AC+BC$.

20. Demuestre que $A(B+C)=AB+AC$.

21. Suponga que A es una matriz 3×4 y B es una matriz 4×2. ¿Qué tamaño tiene el producto AB?

22. Suponga que A es una matriz 2×5, B es una matriz 1×3, C es una matriz 5×1 y D una matriz 2×3. ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones de matrices está definida? En las que estén definidas, indique el tamaño de la matriz resultante.

(a) AB

(b) AC

(c) BD

23. Suponga que A es una matriz 4×3, B es una matriz 1×3, C es una matriz 3×1 y D una matriz 4×3. ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones de matrices está definida? En las que estén definidas, indique el tamaño de la matriz resultante.

(a) BD'

(b) $D'A$

(c) ACB

24. Sea

$$A=[1\quad 4\quad -2]$$

y

$$B=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

(a) Calcule AB.

(b) Calcule BA.

25. Sea

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

y

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

(a) Calcule AB.

(b) Calcule $B'A$.

26. Suponga que

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

y

$$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Demuestre que $(AB)'=B'A'$.

27. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^2, A^3 y A^4.

28. Sea

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $I_3 = I_3^2 = I_3^3$.

29. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $AI_2 = I_2A = A$.

30. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $AI_3 = I_3A = A$.

31. Escriba el siguiente sistema en forma matricial.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

32. Escriba el siguiente sistema en forma matricial.

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_1 &= x_3 \\ 4x_1 + x_3 &= 7x_2 \\ x_2 - x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

33. Escriba el siguiente sistema en forma matricial.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 4 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 &= 4 \end{aligned}$$

34. Escriba el siguiente sistema en forma matricial.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(9.2.3)

35. Demuestre que la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

36. Demuestre que la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

En los Problemas 37-40, sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

37. Calcule la inversa de A (si existe).

38. Calcule la inversa de B (si existe).

39. Demuestre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

40. Demuestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

41. Calcule la inversa (si existe) de

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

42. Calcule la inversa (si existe) de

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

43. Suponga que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

y

$$D = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Calcule X de forma que $AX = D$,
(a) Resolviendo el sistema de ecuaciones asociado, y
(b) Utilizando la inversa de A.

44. **(a)** Demuestre que si $X = AX + D$, entonces

$$X = (I - A)^{-1}D$$

suponiendo que $I - A$ sea invertible.
(b) Suponga ahora que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$D = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calcule $(I - A)^{-1}$, y utilice el resultado de (a) para calcular X.

45. Utilice el determinante para averiguar si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

es invertible.

46. Utilice el determinante para averiguar si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

es invertible.

47. Utilice el determinante para averiguar si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

es invertible.

48. Utilice el determinante para averiguar si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible.

49. Suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\det A$. ¿Es A invertible?
(b) Suponga que

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Escriba $AX = B$ como un sistema de ecuaciones lineales.
(c) Demuestre que si

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

entonces

$$AX = B$$

tiene infinitas soluciones. Dibuje las dos rectas asociadas con el correspondiente sistema de ecuaciones lineales, y explique por qué tiene infinitas soluciones.
(d) Calcule un vector columna

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

tal que

$$AX = B$$

no tenga solución.

50. Suponga que

$$A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que cuando $a \neq 4$, entonces $AX = B$ tiene solución única.
(b) Suponga que $a = 4$. Obtenga condiciones para b_1 y b_2 de forma que $AX = B$ tenga (i) infinitas soluciones y (ii) no tenga solución.
(c) Explique gráficamente los resultados de (a) y (b).

51. Utilice el determinante para averiguar si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es invertible. Si es invertible, calcule su inversa. En cualquier caso, resuelva $AX = \mathbf{0}$.

52. Utilice el determinante para averiguar si

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible. Si es invertible, calcule su inversa. En cualquier caso, resuelva $BX = \mathbf{0}$.

53. Utilice el determinante para averiguar si

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

es invertible. Si es invertible, calcule su inversa. En cualquier caso, resuelva $CX = \mathbf{0}$.

54. Utilice el determinante para averiguar si

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

es invertible. Si es invertible, calcule su inversa. En cualquier caso, resuelva $DX = \mathbf{0}$.

(9.2.4)

En los Problemas 55-58, calcule la matriz inversa de las matrices dadas, si existe.

55.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

56.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

57.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

58.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(9.2.5)

En los Problemas 59-62, suponga que la reproducción se produce una vez al año y que se toma el censo al final de cada estación reproductiva.

59. Suponga que una población se divide en tres clases de edad y que el 20% de las hembras de edad 0 y el 70% de las hembras de edad 1 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Suponga además que las hembras de edad 1 tienen un promedio de 3.2 crías hembra y que las hembras de edad 2 tienen un promedio de 1.7 crías hembra. Si en el instante 0 la población consta de 2000 hembras de edad 0, 800 hembras de edad 1 y 200 hembras de edad 2, obtenga la matriz de Leslie y la distribución de edades en el instante 2.

60. Suponga que una población se divide en tres clases de edad y que el 80% de las hembras de edad 0 y el 10% de las hembras de edad 1 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Suponga además que las hembras de edad 1 tienen un promedio de 1.6 crías hembra y que las hembras de edad 2 tienen un promedio de 3.9 crías hembra. Si en el instante 0 la población consta de 1000 hembras de edad 0, 100 hembras de edad 1 y 20 hembras de edad 2, obtenga la matriz de Leslie y la distribución de edades en el instante 3.

61. Suponga que una población se divide en cuatro clases de edad y que el 70% de las hembras de edad 0, el 50% de las hembras de edad 1 y el 10% de las hembras de edad 2 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Suponga además que las hembras de edad 2 tienen un promedio de 4.6 crías hembra y que las hembras de edad 3 tienen un promedio de 3.7 crías hembra. Si en el instante 0 la población consta de 1500 hembras de edad 0, 500 hembras de edad 1, 250 hembras de edad 2 y 50 hembras de edad 3, obtenga la matriz de Leslie y la distribución de edades en el instante 2.

62. Suponga que una población se divide en cuatro clases de edad y que el 65% de las hembras de edad 0, el 40% de las

hembras de edad 1 y el 30% de las hembras de edad 2 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Suponga además que las hembras de edad 1 tienen un promedio de 2.8 crías hembra y que las hembras de edad 2 tienen un promedio de 7.2 crías hembra. Si en el instante 0 la población consta de 1500 hembras de edad 0, 500 hembras de edad 1, 250 hembras de edad 2 y 50 hembras de edad 3, obtenga la matriz de Leslie y la distribución de edades en el instante 3.

En los Problemas 63-64, asuma la matriz de Leslie dada L. Determine el número de clases de edad de la población, la fracción de hembras de un año de edad que sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva y el número medio de crías por hembra que tiene cada hembra de dos años de edad.

63. $$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

64. $$L = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

En los Problemas 65-66, asuma la matriz de Leslie dada L. Determine el número de clases de edad de la población, la fracción de hembras de dos años de edad que sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva y el número medio de crías por hembra que tiene cada hembra de un año de edad.

65. $$L = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 3 & 1.5 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

66. $$L = \begin{bmatrix} 0 & 4.2 & 3.7 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

67. Suponga que la matriz de Leslie es de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.2 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponga que el instante $t = 0$, $N_0(0) = 100$ y $N_1(0) = 0$. Calcule los vectores de población para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Calcule los sucesivos cocientes

$$q_0(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(t-1)} \quad \text{y} \quad q_1(t) = \frac{N_1(t)}{N_1(t-1)}$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. ¿A qué valor se aproximan $q_0(t)$ y $q_1(t)$ cuando $t \to \infty$? (Haga una suposición.) Calcule la fracción de hembras de edad 0 para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. ¿Puede obtener una distribución de edades estable?

68. Suponga que la matriz de Leslie es de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 5.2 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponga que en el instante $t = 0$, $N_0(0) = 100$ y $N_1(0) = 0$. Calcule los vectores de población para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Calcule los sucesivos cocientes

$$q_0(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(t-1)} \quad \text{y} \quad q_1(t) = \frac{N_1(t)}{N_1(t-1)}$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. ¿A qué valor se aproximan $q_0(t)$ y $q_1(t)$ cuando $t \to \infty$? (Haga una suposición.) Calcule la fracción de hembras de edad 0 para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. ¿Puede obtener una distribución de edades estable?

9.3 APLICACIONES LINEALES, AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

En esta sección consideraremos aplicaciones de la forma

$$\mathbf{x} \to A\mathbf{x} \tag{9.18}$$

siendo A una matriz 2×2 y $\mathbf{x}$ un vector columna 2×1 (o simplemente, un vector). Como $A\mathbf{x}$ es un vector 2×1, esta aplicación toma un vector 2×1 y lo transforma en otro vector 2×1. Esto permite aplicar A repetidamente. Se puede calcular $A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x}$, que es de nuevo un vector 2×1, y así sucesivamente. Consideraremos primero los vectores. Luego las aplicaciones $A\mathbf{x}$ y finalmente estudiaremos iteraciones de la aplicación A, es decir, $A^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, etc.

En lo que sigue utilizaremos para los vectores letras minúsculas en negrilla. A partir de las propiedades del producto de matrices, se deduce que la aplicación (9.18) cumple lo siguiente:

1. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$, y
2. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$, siendo λ un escalar.

Debido a esas dos propiedades, se dice que la aplicación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ es lineal.

En la sección anterior apareció un ejemplo de esta aplicación. Si A es una matriz de Leslie 2×2 y $\mathbf{x}$ es un vector de población en el instante 0, entonces $A\mathbf{x}$ representa el vector de población en el instante 1.

Las aplicaciones lineales son importantes también en otros contextos, y aparecerán en los Capítulos 10 y 11. Limitaremos nuestra presentación a matrices 2×2, pero hay que señalar que la teoría es generalizable a matrices $n \times n$ (estos temas se tratan en cursos de álgebra lineal o matricial).

9.3.1 Representación gráfica

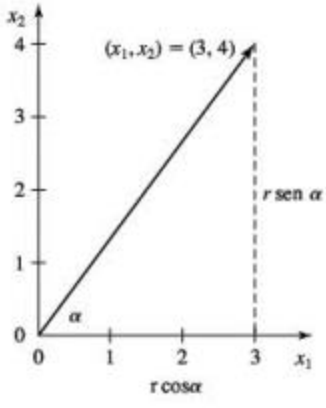
Vectores Comenzaremos con la representación gráfica de vectores. Sea $\mathbf{x}$ una matriz 2×1. Denominaremos a $\mathbf{x}$ vector columna o simplemente vector. Como una matriz 2×1 tiene sólo dos componentes, el vector se puede representar en el plano. Por ejemplo, para representar el vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

en el plano $x_1 - x_2$, se dibuja una flecha desde el origen (0, 0) hasta el punto (3, 4), como se muestra en la Figura 9.11. Podemos ver en la figura que un vector tiene una longitud y una dirección. La longitud del vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, que se denomina $|\mathbf{x}|$, es la distancia desde el origen (0, 0) hasta el punto (3, 4), es decir,

$$\text{longitud de } \mathbf{x} = |\mathbf{x}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Se define la dirección de $\mathbf{x}$ como el ángulo α que forman el eje x positivo y dicho vector (medido en la dirección contraria a las agujas del reloj), como se muestra en la Figura 9.11. El ángulo α está en el intervalo $[0, 2\pi)$. En nuestro ejemplo, el ángulo cumple que $\alpha = 4/3$.



▲ **Figura 9.11**
El vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en el plano $x_1 - x_2$

De forma más general, (*véase* de nuevo la Figura 9.11), la longitud de un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

y su dirección es α, con $\alpha \in [0, 2\pi)$ y que cumple

$$\tan \alpha = \frac{x_2}{x_1}$$

El ángulo α se mide siempre en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje x_1 positivo.

Si se denomina r a la longitud de $\mathbf{x}$, es decir $r = |\mathbf{x}|$, entonces, como se muestra en la Figura 9.11, como $x_1 = r\cos\alpha$ y $x_2 = r\operatorname{sen}\alpha$, el vector $\mathbf{x}$ se puede expresar también como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

Por tanto, tenemos una forma alternativa de representar vectores en el plano. Se puede indicar el extremo (x_1, x_2), o bien la longitud y la dirección (r, α). La primera representación nos conduce al familiar sistema de coordenadas cartesianas. La segunda representación, utilizando la longitud y la dirección del vector correspondiente, nos lleva al **sistema de coordenadas polares**. En lo que sigue, utilizaremos ambas representaciones.

▶ Ejemplo 1 Si la longitud de un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es 4 y el ángulo que forma con el eje x_1 positivo es de 120° (medido en el sentido de las agujas del reloj), ¿cuál es su representación en coordenadas cartesianas?

Solución

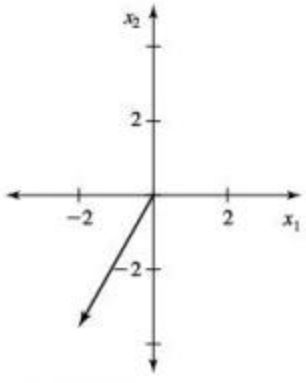
Un ángulo de 120° medido en el sentido de las agujas del reloj desde el eje x_1 positivo corresponde a un ángulo de $360° - 120° = 240°$, medido en la dirección contraria a las agujas del reloj desde el eje x_1 positivo (Figura 9.12). Como la longitud del vector es 4, se obtiene

$$x_1 = 4\cos(240°) = (4)\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$x_2 = 4\operatorname{sen}(240°) = (4)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3}$$

con lo que resulta la representación en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$ ◀

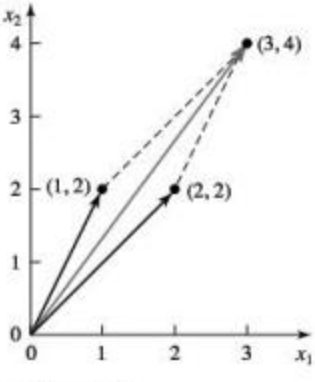


▲ **Figura 9.12**
El vector del Ejemplo 1

Como los vectores son matrices, se suman como matrices. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esto tiene una interpretación gráfica (*véase* la Figura 9.13). Para sumar $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ con $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se lleva el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ a la punta del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sin modificar su longitud ni su dirección. La suma de los dos vectores comienza entonces en (0, 0) y termina en la punta del vector que se ha movido. Este proceso se puede describir también de la siguiente forma. La suma es la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Por eso la regla para la suma de vectores se denomina **ley del paralelogramo**.



▲ **Figura 9.13**
Suma de dos vectores

La multiplicación de un vector por un escalar se realiza componente a componente. Por ejemplo, si se multiplica $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ por 2 se obtiene

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esto equivale a cambiar la longitud del vector. El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene una longitud de $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, y el vector $2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene una longitud de $\sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Es decir, al multiplicar el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ por 2 se aumenta su longitud en un factor de 2. Como 2 es positivo, el vector resultante apunta en la misma dirección que el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Si se multiplicara $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ por -1, el vector resultante sería $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, cuya longitud es igual que la del vector original, pero apunta en la dirección contraria, como se ilustra en la Figura 9.14.

Ejemplo 2

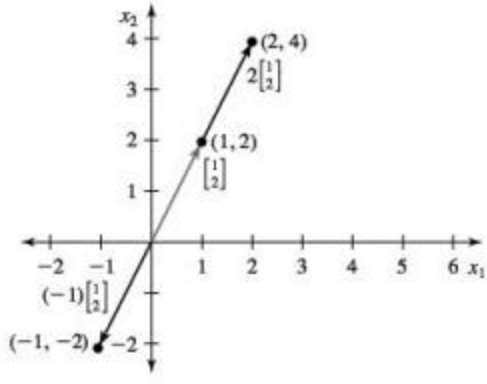
Sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

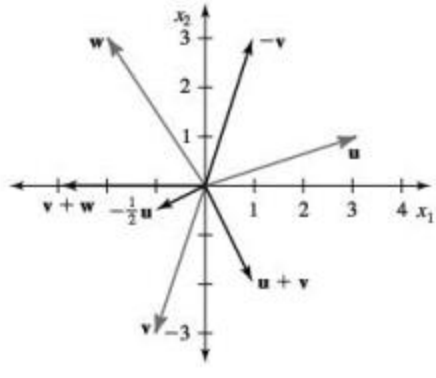
Calcule $-\frac{1}{2}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $-\mathbf{v}$, e ilustre los resultados gráficamente.

Solución

$$-\frac{1}{2}\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



◀ **Figura 9.14**
El vector del Ejemplo 2



◀ **Figura 9.15**
Los vectores del Ejemplo 1

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{v} = -\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

Los resultados se ilustran en la Figura 15. ◀

En el recuadro que sigue se resume la suma de vectores y la multiplicación de vectores por un escalar.

Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix}x_1 + y_1\\x_2 + y_2\end{bmatrix}$$

Si a es un escalar, entonces

$$a\mathbf{x} = \begin{bmatrix}ax_1\\ax_2\end{bmatrix}$$

Si $|\mathbf{x}|$ indica la longitud de $\mathbf{x}$, entonces la longitud de $a\mathbf{x}$ es el valor absoluto de a por la longitud de $\mathbf{x}$, es decir, $|a|\|\mathbf{x}|$.

Aplicaciones lineales Volvamos ahora a las aplicaciones de la forma

$$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$$

siendo A una matriz 2×2 y $\mathbf{x}$ un vector 2×1. Como $A\mathbf{x}$ es también un vector 2×1, la aplicación A toma un vector 2×1 y lo transforma en otro vector 2×1. Se pueden representar estas aplicaciones en el plano, y estudiar gráficamente la acción de A sobre el vector $\mathbf{x}$.

La forma más simple de aplicación es la **aplicación identidad**, representada por la matriz identidad I_2,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Como

$$I_2\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

se concluye que la matriz identidad no modifica al vector $\mathbf{x}$.

Algo más complicada es la aplicación

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{bmatrix}$$

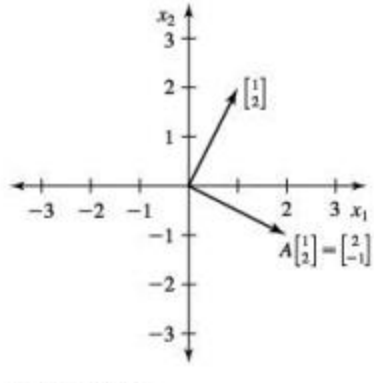
Esta aplicación extiende o contrae cada coordenada separadamente. En la Figura 9.16 se muestra la acción de la aplicación sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ cuando $a = 2$ y $b = -\frac{1}{2}$. Se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

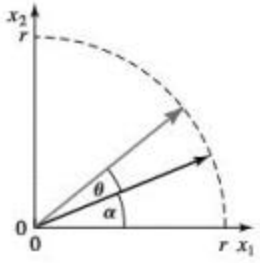
Esta aplicación expande la primera coordenada por un factor de 2 y contrae la segunda coordenada por un factor de 1/2. El signo menos delante de 1/2 equivale a reflejar la segunda coordenada respecto al eje x_1.

Otro tipo de aplicación lineal es la **rotación**, que gira un vector en un ángulo fijo en el plano $x_1 - x_2$. La matriz que se presenta a continuación gira un vector en un ángulo fijo θ. Si $\theta > 0$, la rotación es en sentido contrario a las agujas del reloj. Si $\theta < 0$, la rotación es en el sentido de las agujas del reloj un ángulo $|\theta|$.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 9.16**
Acción de la matriz A sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



▲ **Figura 9.17**
Rotación de un vector

Para comprobar que esto corresponde realmente a una rotación, estudiaremos el efecto de R_θ sobre un vector de coordenadas (x_1, x_2), como se muestra en la Figura 9.17. Utilizando el sistema de coordenadas polares, el vector se puede expresar de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{bmatrix}$$

siendo r la longitud del vector y α el ángulo que forma con el eje x_1 positivo.

Aplicando R_θ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos\theta\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\,\mathrm{sen}\,(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$$

donde se han utilizado las igualdades trigonométricas

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$\mathrm{sen}\,(\theta+\alpha) = \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Puede verse entonces que el vector resultante tiene longitud r y forma un ángulo $\alpha + \theta$ con el eje x_1 positivo. Si $\theta > 0$, entonces el vector se gira un ángulo θ en sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo 3 Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ un ángulo $\pi/3$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

Solución

La matriz de rotación correspondiente es

$$R_{\pi/3} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\mathrm{sen}\,(\pi/3) \\ \mathrm{sen}\,(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas del vector rotado son

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + 3 \end{bmatrix}$$ ◀

A partir de esta breve exposición de las aplicaciones lineales, se puede ver que la aplicación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ generalmente toma un vector $\mathbf{x}$ y lo rota, lo amplía o lo contrae. Dada una matriz A arbitraria, el movimiento que produce en los vectores puede no tener una interpretación geométrica simple.

Ejemplo 4 Estudie el efecto de

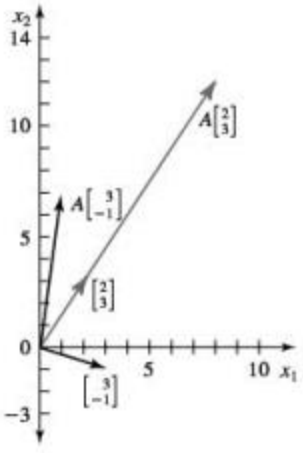
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

sobre $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución

Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ entonces

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 9.18**
Efecto de la matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$ sobre dos vectores

Hemos calculado el resultado de la aplicación, pero no parece haber una explicación geométrica directa (*véase* la Figura 9.18). Por otra parte, si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, entonces,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\12\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

El resultado de $A\mathbf{x}$ es simplemente un múltiplo de $\mathbf{x}$. Los vectores que cumplen esto se denominan autovectores, y el factor de expansión o contracción se denomina autovalor. Los autovectores y autovalores se consideran en la siguiente subsección. ◀

9.3.2 Autovalores y autovectores

En la sección anterior hemos visto que hay matrices y vectores para los que la aplicación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ toma una forma particularmente simple, concretamente

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{9.19}$$

siendo λ un escalar. Esta subsección está dedicada a investigar esta relación. Limitaremos de nuevo nuestro estudio a matrices 2×2, y comenzaremos con la siguiente definición.

Definición Sea A una matriz cuadrada. Todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero que cumpla la relación

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

se denomina autovector de la matriz A y el número λ se denomina autovalor de la matriz A.

Nótese que se supone que el vector $\mathbf{x}$ es distinto del vector cero (el vector $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cumple siempre la relación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y por tanto no es especial). Sin embargo, el autovalor λ sí puede ser 0. Veremos que λ puede ser incluso un número complejo.

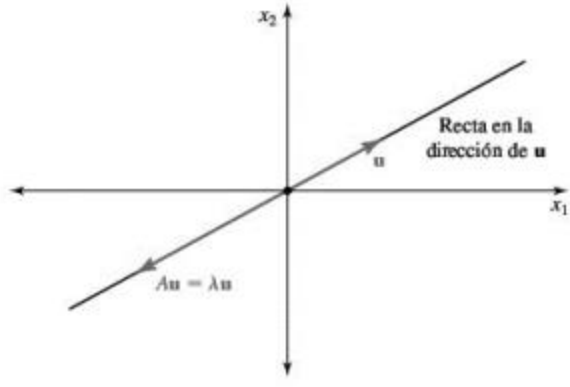
El efecto de A sobre los autovectores es particularmente simple. Si se aplica A a un autovector $\mathbf{x}$ (es decir, se calcula $A\mathbf{x}$), el resultado es simplemente el vector $\mathbf{x}$ multiplicado por una constante. Esta propiedad de los autovectores tiene una interpretación geométrica importante cuando λ es un número real. Concretamente, si se dibuja una recta que pasa por el origen y tiene la dirección del autovector, entonces cualquier vector de esta recta permanecerá en ella tras su transformación por la aplicación A (*véase* la Figura 9.19).

¿Cómo se pueden calcular los autovectores y los autovalores de matrices 2×2? Veremos que las matrices 2×2 tienen dos autovalores, que pueden ser distintos o iguales. Sólo consideraremos el caso en el que los dos autovalores son distintos. El caso en el que los autovalores son iguales es más complicado y se considera en los cursos de álgebra lineal. Para nuestros propósitos, es suficiente considerar el caso de autovalores distintos.

Estudiaremos cómo se obtienen los autovalores y los autovectores mediante un ejemplo. Utilizaremos la misma matriz que en el Ejemplo 4.

Ejemplo 5 Calcule todos los autovalores y autovectores de

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$$



▲ **Figura 9.19**
Cualquier vector que esté en una recta en la dirección del autovector permanecerá en dicha recta tras su transformación por la aplicación A

Solución

Nuestro interés es encontrar $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y λ, tales que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

La ecuación anterior se puede escribir así

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para sacar factor común $\mathbf{x}$, hay que multiplicar $\lambda\mathbf{x}$ por la matriz identidad $I = I_2$ (como sólo consideraremos matrices 2×2 escribiremos I en vez de I_2). Se obtiene entonces

$$A\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ahora ya se puede sacar factor común $\mathbf{x}$, con lo que resulta

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

En la Sección 9.2 demostramos que para que exista solución no trivial ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), la matriz $A - \lambda I$ debe ser singular, es decir,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ahora,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - (2)(3) \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

Por tanto, se necesita resolver

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

y calcular

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 4$$

Estos dos números son los autovalores de la matriz A. Cada autovalor tiene su propio autovector.

Para calcular los autovectores, se realizan los siguientes cálculos. Si $\lambda_1 = -1$, hay que obtener un vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ distinto de cero tal que

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Escribiéndolo como un sistema de ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

Simplificando, resulta

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones son iguales y se reducen a

$$x_1 + x_2 = 0$$

Buscamos un vector distinto de cero que cumpla esta ecuación. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sería una elección razonable. Para comprobar que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es realmente un autovector correspondiente al autovalor $\lambda_1 - 1$, se calcula

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

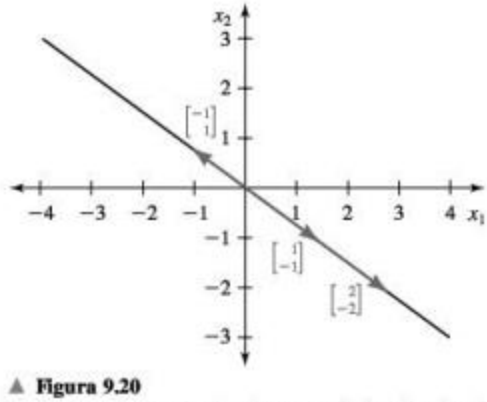
El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ no es el único autovector asociado a $\lambda_1 = 1$. De hecho, cualquier vector de la forma $a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$ es un autovector asociado con el autovalor -1. Por ejemplo $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ son otras opciones (*véase* la Figura 9.20).

Para calcular un autovector asociado a $\lambda_2 = 4$ debemos resolver

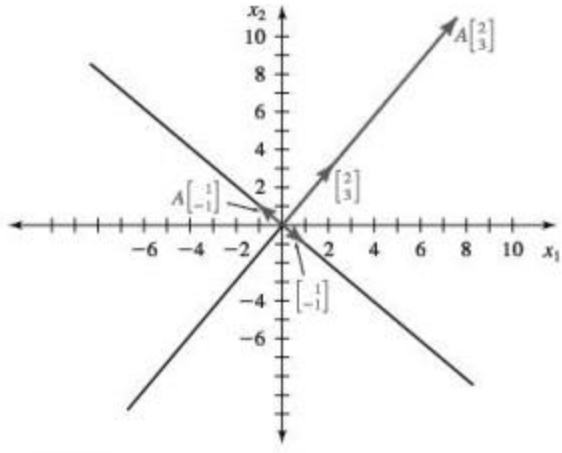
$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

con lo que resulta

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4x_2 \end{aligned}$$



▲ **Figura 9.20**
Los tres vectores son autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -1$



▲ **Figura 9.21**
Los dos autovectores con sus rectas correspondientes. Cualquier imagen de los autovectores mediante la aplicación A permanece en su recta respectiva

Simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

cumple las ecuaciones. Vemos entonces que A tiene dos autovalores, -1 y 4. Un autovector asociado con el autovalor -1 es $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, y un autovector asociado con el autovalor 4 es $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (*véase* la Figura 9.21). Como antes, cualquier vector $b\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b \neq 0$ es un autovector asociado con el autovalor 4. ◀

Los autovectores no son únicos. Están determinados salvo una constante multiplicativa. Cuando los autovectores son reales, como en nuestro ejemplo, todos los autovectores asociados con un autovalor particular están en la *misma* recta que pasa por el origen. La recta representada por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ se expresa como

$$l_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\}$$

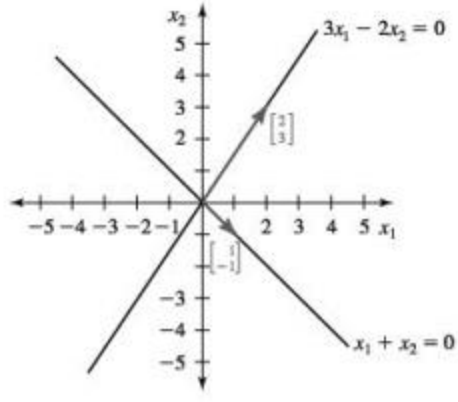
y la recta representada por el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ se expresa como

$$l_2 = \{(x_1, x_2) : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$$

Las rectas l_1 y l_2 son **invariantes** bajo la aplicación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$, en el sentido de que si se escoge un punto (x_1, x_2) de la recta representada por el autovector, entonces como

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

el resultado de la aplicación es un punto que está en la misma recta. Comprobaremos esto para la recta l_1. Supongamos que $(x_1, x_2) \in l_1$, es decir, $x_1 + x_2 = 0$. Entonces el punto $(\lambda x_1, \lambda x_2) \in l_1$ también, ya que $\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = 0$. Esto se ilustra en la Figura 9.22, donde se dibujan los autovectores y las rectas correspondientes. Esto se denomina interpretación geométrica de los autovalores y autovectores.



◀ **Figura 9.22**
Autovectores y rectas asociadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

En el siguiente ejemplo mostraremos una vez más el procedimiento para calcular los autovalores y los autovectores, utilizando una matriz diferente, que también tendrá autovalores reales y distintos.

Ejemplo 6 **(Cálculo de autovalores y autovectores)** Calcule todos los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

Para calcular los autovalores de A, hay que resolver

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Se obtiene

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3$$

Para calcular el autovector asociado con el autovalor $\lambda_1 = 2$, hay que determinar x_1 y x_2 (que no sean simultáneamente iguales a 0), tales que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma de sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 2x_1 \\ x_1 - 2x_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

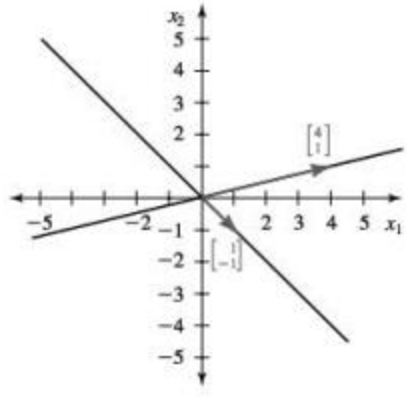
Vemos que las dos ecuaciones son en realidad la misma. Simplificando se obtiene

$$-x_1 + 4x_2 = 0$$

Haciendo $x_2 = 1$ se obtiene $x_1 = 4$, es decir, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$.

Para calcular el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -3$, hay que determinar x_1 y x_2 (que no sean simultáneamente iguales a 0), tales que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 9.23**
Autovectores y rectas asociadas en el Ejemplo 6

Escribiendo la ecuación anterior en forma de sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$x_1 + 4x_2 = -3x_1$$
$$x_1 - 2x_2 = -3x_2$$

Vemos que las dos ecuaciones son en realidad la misma. Simplificando se obtiene

$$x_1 + x_2 = 0$$

Haciendo $x_1 = 1$ se obtiene $x_2 = -1$, es decir, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -3$.

Los autovectores y sus rectas correspondientes se ilustran en la Figura 9.23. ◀

Presentamos a continuación un último ejemplo de cálculo de autovalores y autovectores. Esta vez se escoge una matriz en la que se pueden leer los autovalores directamente.

Ejemplo 7 **(Lectura de los autovalores directamente de la matriz)** Calcule todos los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

Para calcular los autovalores de A hay que resolver

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= (-2 - \lambda)(-1 - \lambda) - (0)(1) = 0$$

Se obtiene

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1$$

Detengámonos un momento y observemos la matriz A. Los autovalores que hemos obtenido coinciden con los elementos de la diagonal de A. Esto es porque uno de los elementos que no están en la diagonal es 0. Conocer esta propiedad simplifica el cálculo de autovalores. Si en una matriz 2×2 uno de los elementos que no están en la diagonal (o ambos) son iguales a cero, entonces los autovalores son iguales a los elementos de la diagonal.

Calcularemos ahora los autovectores asociados. Para calcular el autovector asociado con el autovalor $\lambda_1 = -2$, hay que determinar x_1 y x_2 (que no sean simultáneamente iguales a 0), tales que

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma de sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= -2x_1 \\ -x_2 &= -2x_2 \end{aligned}$$

Simplificando cualquiera de las ecuaciones resulta

$$x_2 = 0$$

Esta vez, no se puede escoger un valor para x_2, (ya que $x_2 = 0$). Pero observando la primera ecuación $-2x_1 + x_2 = 2x_1$ se puede ver que cualquier valor de x_1 cumplirá dicha ecuación si $x_2 = 0$. Como $x_2 = 0$ no se puede escoger $x_1 = 0$ (ya que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ no es un autovector). Sin embargo, cualquier valor $x_1 \neq 0$ servirá. Escojamos por ejemplo $x_1 = 1$. Entonces $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado con el autovalor $\lambda_1 = -2$.

Para obtener un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$, hay que determinar x_1 y x_2 (que no sean simultáneamente iguales a 0), tales que

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma de sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= -x_1 \\ -x_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

Simplificando el sistema resulta

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ 0x_2 &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación dice que $x_1 = x_2$, y la segunda, que se puede escoger cualquier valor para x_2. Escogiendo por ejemplo $x_2 = 1$, hay que hacer $x_1 = 1$, con lo que se obtiene $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$. ◀

Hasta ahora, sólo hemos visto ejemplos en los que los autovalores eran reales y distintos. En el siguiente ejemplo veremos que los autovalores pueden ser complejos. Cuando los autovalores son complejos, no calcularemos los correspondientes autovectores, ya que éstos pueden ser también complejos, lo que se sale de los límites de este curso.

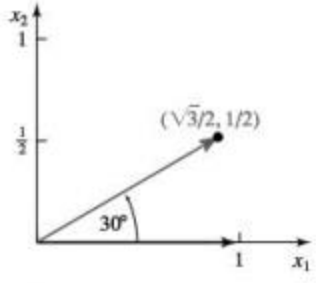
Ejemplo 8 **(Autovalores complejos)** Sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

Describa el efecto de A sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule los autovalores de A.

Solución

Se puede reconocer en A la matriz que describe una rotación de 30° en sentido contrario a las agujas del reloj. (La matriz A es la matriz R_θ para $\theta = 30^\circ$, tal como se definió en la Subsección 9.3.1.) Por tanto, el efecto sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ será rotarlo 30° en sentido contrario a las agujas del reloj, y $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ (*véase* la Figura 9.24).



▲ **Figura 9.24**
El vector $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ se gira 30° en sentido contrario a las agujas del reloj en el Ejemplo 8

Calcularemos a continuación los autovalores asociados con esta matriz. Sea

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Utilizando que $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen} 30^0 = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

o

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{3}{4} - \lambda\sqrt{3} + \lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se obtiene

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$$

siendo $i^2 = -1$. Esto demuestra que los autovalores pueden ser números complejos. ◀

En el Capítulo 11 estudiaremos la estabilidad de los equilibrios en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto nos conducirá a estudiar los autovalores de ciertas aplicaciones lineales. Será importante determinar si las partes reales de los autovalores son positivas o negativas. En el caso de que la aplicación lineal sea una matriz 2×2, existe un criterio útil. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Entonces, el determinante de A es

$$\det A = ad - bc$$

y la **traza** de A (que se indica $\operatorname{tr} A$) se define así.

$$\operatorname{tr} A = a + d$$

La traza es la suma de los elementos de la diagonal de A. La traza y el determinante de una matriz están relacionados con sus autovalores, como sigue.

Los autovalores de A cumplen

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

o

$$\det\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

lo que lleva a

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Como $\det A = ad - bc$ y $\operatorname{tr} A = a + d$, la ecuación anterior se puede expresar así.

$$\lambda^2 = (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0 \tag{9.20}$$

Si λ_1 y λ_2 son las dos soluciones de (9.20), entonces deben cumplir

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

Realizando la multiplicación, se obtiene que λ_1 y λ_2 cumplen

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

Comparando esto con (9.20), se obtiene el siguiente importante resultado

Si A es una matriz 2×2 cuyos autovalores son λ_1 y λ_2, entonces

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{y} \quad \det A = \lambda_1\lambda_2$$

Para preparar el siguiente resultado, hay que hacer previamente algunas observaciones. Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales y negativos. Entonces la traza de A, que es la suma de los autovalores, es negativa, y el determinante de A, que es el producto de los autovalores, es positivo.

En el caso de que los autovalores sean complejos conjugados, se obtiene el mismo resultado. Supongamos que λ_1 y λ_2 son complejos conjugados y que sus partes reales son negativas. Se puede demostrar entonces que la traza de A es negativa y que el determinante es positivo (veremos más adelante un ejemplo de este hecho).

Es decir, siempre que las partes reales de los dos autovalores λ_1 y λ_2 sean negativas, se deduce que $\operatorname{tr} A < 0$ y $\det A > 0$. A la inversa también es cierto. Es decir, si $\operatorname{tr} A < 0$ y $\det A > 0$, entonces los dos autovalores tienen partes reales negativas. Este criterio será de utilidad en el Capítulo 11, ya que nos permitirá determinar si los autovalores tienen partes reales negativas sin necesidad de calcular dichos autovalores.

Teorema Sea A una matriz 2×2 cuyos autovalores son λ_1 y λ_2. Entonces las partes reales de λ_1 y λ_2 son negativas si y sólo si

$$\operatorname{tr} A < 0 \quad \text{y} \quad \det A > 0$$

Ejemplo 9 **(Traza y determinante)** Utilice el teorema anterior para demostrar que los dos autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

tienen partes reales negativas. Calcule después los autovalores y utilícelos para volver a calcular la traza y determinante de A.

Solución

Como

$$\operatorname{tr} A = -1 - 2 = -3 < 0 \quad \text{y} \quad \det A = (-1)(-2) - (1)(-3) = 5 > 0$$

se deduce del anterior teorema que los dos autovalores tienen partes reales negativas. Para calcular los autovalores, se resuelve

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

o

$$\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Evaluando la ecuación anterior, se obtiene

$$(-1-\lambda)(-2-\lambda) - (1)(-3) = 0$$
$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$$

es decir,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2}$$
$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{11}$$

Esto demuestra también que las partes reales de los autovalores son negativas.

Podemos utilizar ahora los autovalores para volver a calcular la traza y el determinante de A.

$$\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{11}\right) + \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{11}\right) = -3$$

que es mismo resultado obtenido anteriormente. Nótese que como λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, las partes imaginarias se cancelan al sumarlos. El determinante de A es

$$\det A = \lambda_1\lambda_2 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{11}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{11}\right)$$
$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{4} i^2(11) = \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

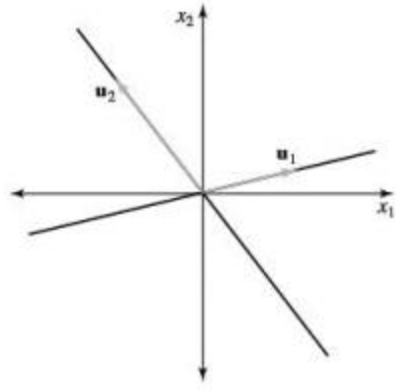
que es también el mismo resultado obtenido anteriormente. Nótese que como λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, el producto que se calcula es de la forma $(x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$, que es un número real (y positivo). ◀

9.3.3 Aplicaciones iterativas (necesario para la Sección 10.7)

Nos hemos limitado al caso en el que A es una matriz 2×2 con autovalores reales. Hemos visto que en este caso los autovectores definen rectas que pasan por el origen y que son invariantes bajo la aplicación A. Si las dos rectas invariantes *no* son idénticas, se dice que los autovectores son **linealmente independientes** (*véase* la Figura 9.25). Esto se puede formular en términos de autovectores como sigue. Si se denominan $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ a los dos autovectores, entonces serán linealmente independientes si no existe un número a tal que $\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u}_2$ (la independencia lineal no se define sólo para autovectores: dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ distintos de cero son linealmente independientes si no existe un número a tal que $\mathbf{x}_1 = a\mathbf{x}_2$).

El siguiente criterio es de utilidad cuando se desea determinar si los autovalores son linealmente independientes.

> Sea A una matriz 2×2 cuyos autovalores son λ_1 y λ_2. Sea $\mathbf{u}_1$ el autovector asociado con el autovalor λ_1 y $\mathbf{u}_2$ el autovalor asociado con λ_2. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes.



◀ **Figura 9.25**
Los dos autovectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes

Hay también casos en los que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_1$ son linealmente independientes incluso cuando $\lambda_1 = \lambda_2$. Nuestro interés principal será, sin embargo, cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Por tanto, el criterio anterior será suficiente para nuestros propósitos (los otros casos se estudian en los cursos de álgebra lineal).

Una consecuencia de la independencia lineal es que se puede escribir cualquier vector de forma única como **combinación lineal** de los dos autovectores. Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ los autovectores linealmente independientes de una matriz 2×2. Entonces, cualquier vector 2×1 se puede expresar así:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$$

siendo a_1 y a_2 constantes únicas. No demostraremos este resultado, pero sí examinaremos en qué nos puede ser de utilidad.

Si se aplica A a un vector $\mathbf{x}$ (expresado como combinación lineal de los dos autovectores de A), entonces, utilizando la linealidad de la aplicación A, se puede obtener

$$A\mathbf{x} = A(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2) = a_1A\mathbf{u}_1 + a_2A\mathbf{u}_2$$

Como $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son autovectores de A, $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$ y $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$. Por tanto resulta

$$A\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2$$

Esta representación de $\mathbf{x}$ es particularmente útil si se aplica A al vector $\mathbf{x}$ repetidamente. Aplicando A a $A\mathbf{x}$, se obtiene

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) &= A(a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2) = a_1\lambda_1A\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2A\mathbf{u}_2 \\ &= a_1\lambda_1^2\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2^2\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado de nuevo el hecho de que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son autovectores de la matriz A. Continuando de esta forma, se obtiene que

$$A^n\mathbf{x} = a_1\lambda_1^n\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2^n\mathbf{u}_2 \tag{9.21}$$

En vez de multiplicar A por sí misma n veces (proceso que consume mucho tiempo), se puede utilizar el miembro derecho de la expresión (9.21), que simplemente requiere sumar dos vectores (que es mucho más rápido). ¿Estamos convencidos de que esto puede ser útil? Si no, veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^{10}\mathbf{x}$ siendo $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución

Primero se calculan los autovalores y autovectores de la matriz A. Se obtiene

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\lambda_2 = 4 \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Representaremos ahora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Para ello, debemos encontrar las constantes a_1 y a_2 tales que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la expresión anterior en forma de sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 4 \\ -a_1 + 3a_2 &= 1 \end{aligned}$$

Utilizando el método de eliminación, se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 4 \\ 5a_2 &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, $a_2 = 1$ y $a_1 = 4 - 2a_2 = 4 - 2 = 2$. Se obtiene

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para calcular $A^{10}\mathbf{x}$, se utiliza el miembro derecho de la Ecuación (9.21):

$$\begin{aligned} A^{10}\mathbf{x} = A^{10} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} &= A^{10} \left(2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= 2A^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + A^{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 2(-1)^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4^{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4^{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,\ 097,\ 154 \\ 3,\ 145,\ 726 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calcular directamente A^{10} habría requerido mucho más tiempo. ◀

La matriz de Leslie de nuevo

Ejemplo 11 En la Subsección 9.2.5 se estudió una población estructurada por edades cuya matriz de Leslie era

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule sus autovalores y autovectores.

Solución

Para calcular sus autovalores hay que resolver

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

Como

$$L - \lambda I = \begin{bmatrix} 1.5 - \lambda & 2 \\ 0.08 & -\lambda \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= (1.5 - \lambda)(-\lambda) - (2)(0.08) \\ &= -1.5\lambda + \lambda^2 - 0.16 \end{aligned}$$

Como

$$\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.16 = (\lambda - 1.6)(\lambda + 0.1)$$

los autovalores son

$$\lambda_1 = 1.6 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -0.1$$

Para calcular los correspondientes autovectores, comenzaremos con el mayor autovalor $\lambda_1 = 1.6$. Hay que resolver

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1.6) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 2x_2 &= 1.6x_1 \\ 0.08x_1 &= 1.6x_2 \end{aligned}$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} -0.1x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0.08x_1 - 1.6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_1 - 20x_2 &= 0 \\ x_1 - 20x_2 &= 0 \end{aligned}$$

A partir de esto, se puede deducir que

$$x_1 = 20x_2$$

Por ejemplo, $x_1 = 1$ y $x_2 = 20$ lo cumplen. Por tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un autovector correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1.6$.

El autovector correspondiente a $\lambda_2 = -0.1$ cumple

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -0.1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 2x_2 &= -0.1x_1 \\ 0.08x_1 &= -0.1x_2 \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} 1.6x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0.08x_1 + 0.1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 0.8x_1 + x_2 &= 0 \\ 0.8x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, se deduce que

$$0.8x_1 = -x_2$$

Por ejemplo, $x_1 = 5$ y $x_2 = -4$ cumplen la ecuación anterior. Por tanto,

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -0.1$. ◀

Demostraremos a continuación que el autovalor mayor determina la velocidad de crecimiento de la población y que el autovector correspondiente al mayor autovalor es una distribución de edades estable. Para ilustrar esto, asumiremos que el vector de población en el instante 0 es

$$N(0) = \begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$N(1)$ se puede calcular evaluando

$$N(1) = LN(0) = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 159.5 \\ 8.4 \end{bmatrix}$$

Si se deseara calcular $N(t)$ para algún valor entero de t, sería necesario obtener

$$N(t) = L^t N(0)$$

que se puede calcular utilizando (9.21). Es necesario escribir primero $N(0)$ en forma de combinación lineal de los dos autovectores y aplicar después L^t a dicha combinación lineal.

Observando los autovalores, se puede ver que $N(0)$, expresado como combinación lineal de los autovectores, es

$$\begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ahora, para obtener $N(1)$, es necesario calcular

$$\begin{aligned} N(1) = LN(0) &= L\begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix} = L\left(5\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}\right) \\ &= 5L\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + L\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1.6$, se cumple que $L\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.6\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$. Asimismo, como $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = -0.1$, se cumple que $L\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = 1.6\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} N(1) &= (5)(1.6)\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + (-0.1)\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 159.5 \\ 8.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que, por supuesto, coincide con la respuesta anterior. Calculemos ahora $N(t)$. Para ello es necesario calcular

$$\begin{aligned} N(t) = L^t N(0) &= L^t\begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix} = L^t\left(5\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}\right) \\ &= 5(1.6)^t\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + (-0.1)^t\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puede verse entonces que $(1.6)^t$ crece mucho más rápido que $(-0.1)^t$. De hecho, $(-0.1)^t$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$. Se concluye entonces que el mayor autovalor determina la velocidad de crecimiento de la población.

Se puede demostrar que el mayor autovalor de una matriz de Leslie es siempre positivo, suponiendo que sobreviva una fracción positiva de las hembras de cero años de edad, y que o bien las hembras de cero años de edad o las de un año de edad tengan descendencia. Además $\lambda_1 \geqslant |\lambda_2|$. La inecuación estricta $\lambda_1 > |\lambda_2|$ se cumple si las hembras de cero años de edad pueden tener descendencia. Por tanto, se cumple lo siguiente.

> Si L es una matriz 2×2 de Leslie cuyos autovalores son λ_1 y λ_2, entonces el mayor autovalor determina el parámetro de crecimiento de la población.

Si λ_1 es el mayor autovalor y $0 < \lambda_1 < 1$, entonces el tamaño de la población disminuye con el tiempo. Si $\lambda_1 > 1$, entonces el tamaño de la población aumenta con el tiempo.

Demostraremos ahora que el autovector correspondiente al mayor autovalor es una distribución de edades estable. Sea λ_1 el mayor autovalor y $\mathbf{u}_1$ el correspondiente autovector. Entonces, si $N(0) = \mathbf{u}_1$, se deduce que

$$N(t) = L^t N(0) = L^t \mathbf{u}_1 = \lambda_1^t \mathbf{u}_1$$

Para demostrar que $\mathbf{u}_1$ es una distribución de edades estable, obsérvese que si $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, entonces la fracción de hembras de edad cero en el instante t es

$$\frac{\lambda^t x}{\lambda^t x + \lambda^t y} = \frac{x}{x + y}$$

que coincide con la fracción de hembras de edad cero en el instante 0. Además, como $\lambda_1 > 0$, se puede escoger $\mathbf{u}_1$ de forma que sus dos elementos sean positivos (una condición necesaria si los elementos representan tamaños de poblaciones). Resumimos estas ideas en el siguiente recuadro.

> Si L es una matriz 2×2 de Leslie cuyos autovalores son λ_1 y λ_2, entonces el autovector correspondiente al mayor autovalor es una distribución de edades estable.

Para la matriz

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

el vector

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un autovector correspondiente al mayor autovalor, y por tanto es una distribución de edades estable. En la Subsección 9.2.5, dijimos que $\begin{bmatrix} 2000 \\ 100 \end{bmatrix}$ es también una distribución de edades estable. En ambos casos, la fracción de hembras de edad cero es la misma, concretamente, $20/21 = 2000/2100$. Es decir, ambos vectores representan la misma proporción de hembras de edad cero en la población. Resulta que $\begin{bmatrix} 2000 \\ 100 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$, lo que demuestra que los dos vectores son autovectores (recuérdese que si $\mathbf{u}$ es un autovector, entonces cualquier vector $a\mathbf{u}$ con $a \neq 0$ es también un autovector). Al indicar una distribución de edades estable, hay que asegurarse de que los dos elementos son positivos, ya que representan números de individuos de cada clase de edad.

Si $\lambda_1 > |\lambda_2|$, entonces el vector de población $N(t)$ convergerá a una distribución de edades estable cuando $t \to \infty$ si $N(0) \neq \mathbf{u}_2$. Esto se puede deducir escribiendo $N(0)$ como combinación lineal de los dos autovectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{y}_2$ y aplicando L^t al resultado:

$$L^t N(0) = L^t(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2) = a_1\lambda_1^t\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2^t\mathbf{u}_2$$

$$= a_1\lambda_1^t\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + a_2\lambda_2^t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

siendo $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Debe cumplirse que $a_1 \neq 0$ ya que $N(0) \neq \mathbf{u}_2$. La fracción de hembras de cero años de edad en el instante t es

$$\frac{a_1\lambda_1^t x_1 + a_2\lambda_2^t x_2}{a_1\lambda_1^t x_1 + a_2\lambda_2^t x_2 + a_1\lambda_1^t y_1 + a_2\lambda_2^t y_2} \to \frac{x_1}{x_1 + y_1}$$

cuando $t \to \infty$.

9.3.4. Problemas

(9.3.1)

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre por cálculo directo que $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$.

(b) Demuestre por cálculo directo que $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$.

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre por cálculo directo que $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$.

(b) Demuestre por cálculo directo que $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$.

En los Problemas 3-8, represente los vectores $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *en el plano* x_1-x_2 *y determine su longitud y el ángulo que forman con el eje* x_1 *positivo (medido en sentido contrario a las agujas del reloj).*

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

En los Problemas 9-12, los vectores se dan en representación polar (longitud r *y ángulo* α *medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje* x_1 *positivo). Calcule la representación de los vectores* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *en coordenadas cartesianas.*

9. $r = 2$, $\alpha = 30°$

10. $r = 3$, $\alpha = 150°$

11. $r = 1$, $\alpha = 70°$

12. $r = 5$, $\alpha = 215°$

13. Suponga que un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tiene una longitud de 3 y forma un ángulo de 15° en el sentido de las agujas del reloj con el eje x_1 positivo. Calcule x_1 y x_2.

14. Suponga que un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tiene una longitud de 2 y forma un ángulo de 140° en el sentido de las agujas del reloj con el eje x_1 positivo. Calcule x_1 y x_2.

15. Suponga que un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tiene una longitud de 5 y forma un ángulo de 25° en sentido contrario a las agujas del reloj con el eje x_1 positivo. Calcule x_1 y x_2.

16. Suponga que un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tiene una longitud de 4 y forma un ángulo de 70° en sentido contrario a las agujas del reloj con el eje x_2 positivo. Calcule x_1 y x_2.

En los Problemas 17-22, calcule $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *para los vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *dados. Represente* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *y* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *en el plano, y explique gráficamente cómo se suman* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.

17. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

20. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

21. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

*En los Problemas 23-28, calcule a***x** *para los vectores* **x** *y escalares a dados. Represente en el plano* **x** *y a***x** *y explique gráficamente cómo se obtiene a***x**.

23. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $a = 2$

24. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $a = -1$

25. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $a = 0.5$

26. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ y $a = -1/3$

27. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $a = 1/4$

28. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ y $a = 4$

En los Problemas 29-34, sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

29. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e ilustre el resultado gráficamente.

30. Calcule $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e ilustre el resultado gráficamente.

31. Calcule $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ e ilustre el resultado gráficamente.

32. Calcule $\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}$ e ilustre el resultado gráficamente.

33. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e ilustre el resultado gráficamente.

34. Calcule $2\mathbf{v} - \mathbf{w}$ e ilustre el resultado gráficamente.

En los Problemas 35-40, proporcione una interpretación geométrica de la aplicación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ *para las aplicaciones A dadas.*

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

39. $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

40. $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

41. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/6$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

42. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/3$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

43. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/12$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

44. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/9$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

45. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/4$ en el sentido de las agujas del reloj.

46. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/3$ en el sentido de las agujas del reloj.

47. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/7$ en el sentido de las agujas del reloj.

48. Utilice una matriz de rotación para girar el vector $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ un ángulo de $\pi/8$ en el sentido de las agujas del reloj.

(9.3.2)

En los Problemas 49-56, calcule los autovalores λ_1 *y* λ_2 *y los correspondientes autovectores* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *para las matrices A dadas. Determine las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen y tiene la dirección de los autovectores* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$*, y dibuje dichas rectas junto con los autovectores* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *y los vectores* $A\mathbf{v}_1$ *y* $A\mathbf{v}_2$.

49. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

52. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

53. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

54. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

55. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

56. $A = \begin{bmatrix} -3 & -0.5 \\ 7 & 1.5 \end{bmatrix}$

En los Problemas 57-62, calcule los autovalores λ_1 *y* λ_2 *para las matrices A dadas.*

57. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

58. $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

59. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

60. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

61. $A = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

62.
$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

63. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$
Sin calcular explícitamente los autovalores de A, decida si sus partes reales son negativas.

64. Sea
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
Sin calcular explícitamente los autovalores de A, decida si sus partes reales son negativas.

65. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$
Sin calcular explícitamente los autovalores de A, decida si sus partes reales son negativas.

66. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
Sin calcular explícitamente los autovalores de A, decida si sus partes reales son negativas.

67. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
Sin calcular explícitamente los autovalores de A, decida si sus partes reales son negativas.

68. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$
Sin calcular explícitamente los autovalores de A, decida si sus partes reales son negativas.

(9.3.3)

69. Sea
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
(a) Demuestre que
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
y
$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
son autovectores de A, y que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes.
(b) Represente
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.
(c) Utilice los resultados de (a) y (b) para calcular $A^{20}\mathbf{x}$.

70. Sea
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$
(a) Demuestre que
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
y
$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
son autovectores de A, y que son linealmente independientes.
(b) Represente
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.
(c) Utilice los resultados de (a) y (b) para calcular $A^{10}\mathbf{x}$.

71. Sea
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
Calcule
$$A^{15} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
sin utilizar calculadora.

72. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
Calcule
$$A^{30} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$
sin utilizar calculadora.

73. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$
Calcule
$$A^{20} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$
sin utilizar calculadora.

74. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$
Calcule
$$A^{30} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$
sin utilizar calculadora.

75. Suponga que
$$L = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$
es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.
(a) Determine los dos autovalores.
(b) Interprete biológicamente el mayor autovalor.
(c) Calcule la distribución de edades estable.

76. Suponga que
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.
(a) Determine los dos autovalores.
(b) Interprete biológicamente el mayor autovalor.
(c) Calcule la distribución de edades estable.

77. Suponga que
$$L = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.

(a) Determine los dos autovalores.

(b) Interprete biológicamente el mayor autovalor.

(c) Calcule la distribución de edades estable.

78. Suponga que

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.

(a) Determine los dos autovalores.

(b) Interprete biológicamente el mayor autovalor.

(c) Calcule la distribución de edades estable.

79. Suponga que

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0.09 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.

(a) Determine los dos autovalores.

(b) Interprete biológicamente el mayor autovalor.

(c) Calcule la distribución de edades estable.

9.4 GEOMETRÍA ANALÍTICA

René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) son reconocidos como los inventores de la geometría analítica, que combina técnicas de álgebra y geometría y proporciona importantes herramientas para el cálculo multidimensional. En el Capítulo 10 estudiaremos algunos aspectos del cálculo multidimensional, y necesitaremos algunos resultados de geometría analítica. La primera tarea será generalizar los puntos y vectores en el plano a dimensiones más altas. Presentaremos después un producto entre vectores que permitirá calcular la longitud de un vector y el ángulo que forman dos vectores. Finalmente, estudiaremos una representación vectorial de rectas y planos en el espacio tridimensional.

9.4.1 Puntos y vectores en dimensiones superiores

Ya estamos familiarizados con los puntos y vectores en el plano. Para representar puntos, se utiliza el sistema de coordenadas cartesianas en el plano que consiste en dos ejes, el eje x_1 y el eje x_2, perpendiculares entre sí. Cualquier punto del plano se puede representar mediante un par ordenado de números reales, (a_1, a_2), siendo a_1 la coordenada x_1 y a_2 la coordenada x_2. Como para localizar un número en el plano se necesitan dos números, se dice que el plano es «bidimensional».

Se puede ver entonces el plano como el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2) con $x_1 \in \mathbf{R}$ y $x_2 \in \mathbf{R}$. Introducimos la notación $\mathbf{R}^2$ para indicar el conjunto de esos puntos. Es decir, el plano bidimensional es

$$\mathbf{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

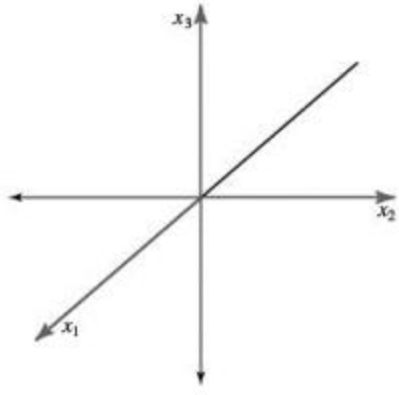
Para generalizar a n dimensiones, se define

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

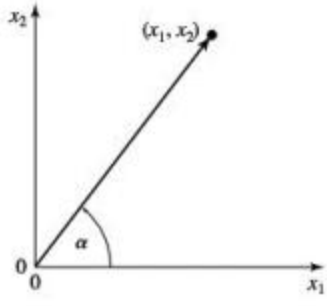
Por ejemplo, $\mathbf{R}^3$ es el espacio tridimensional. Está formado por todos los puntos (x_1, x_2, x_3), con $x_i \in \mathbf{R}$ para $i = 1, 2, 3$. En tres dimensiones se utiliza un sistema de coordenadas orientado a la derecha para representar los puntos y vectores en $\mathbf{R}^3$. Este sistema de coordenadas consiste en tres ejes mutuamente perpendiculares en un sistema de coordenadas orientado hacia la derecha. Es decir, los ejes son perpendiculares entre sí y están orientados de forma que el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección del eje x_1 positivo, el dedo índice apunta en la dirección del eje x_2 positivo y el dedo anular en la dirección del eje x_3 positivo. La Figura 9.26 muestra este sistema de coordenadas.

En cuatro dimensiones o más es imposible representar el sistema de coordenadas.

En la Sección 9.3 se estudiaron los vectores en dos dimensiones. Un vector es una magnitud con una dirección y una longitud. En la Sección 9.3 vimos que un vector es un par ordenado que se puede representar mediante un segmento dirigido,



◀ **Figura 9.26**
Sistema de coordenadas tridimensional orientado a la derecha. Los ejes son perpendiculares. El eje x_1 apunta en la dirección del pulgar, el eje x_2 apunta en la dirección del índice y el eje x_3 apunta en la dirección del dedo medio de la mano derecha



▲ **Figura 9.27**
El vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ en el plano $x_1 - x_2$

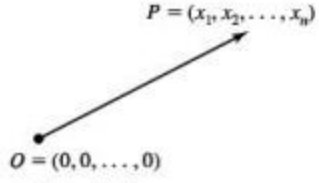
como se muestra en la Figura 9.27. En esta figura, el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se representa mediante un segmento dirigido con punto inicial (0, 0) y punto final (x_1, x_2). La flecha en la punta indica la dirección del vector. Generalizaremos a continuación esta idea a n dimensiones.

Definición Un vector en un espacio n-dimensional es una n-tupla ordenada

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de números reales. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan **componentes** de $\mathbf{x}$.

Los vectores en el espacio n-dimensional se representan también como segmentos dirigidos cuyo extremo inicial es $(0, 0, \ldots, 0)$ y cuyo extremo final es $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En tres dimensiones se puede utilizar el sistema de coordenadas cartesianas orientado hacia la derecha para visualizar los vectores. En cuatro o más dimensiones, no es posible dibujar el sistema de coordenadas. En este caso, lo ilustraremos en el plano de la siguiente forma: para dibujar un vector $\mathbf{x}$ cuyo extremo tenga las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dibujaremos una flecha dirigida del origen $(0, 0, \ldots, 0)$ al punto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (Figura 9.28).



▲ **Figura 9.28**
Un vector en el espacio n-dimensional

A continuación, generalizaremos la suma de vectores a n dimensiones. En la sección anterior vimos cómo sumar vectores en el espacio bidimensional. En n dimensiones, la suma de vectores se define de forma similar.

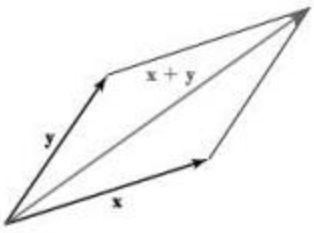
Suma de vectores Si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

La interpretación geométrica es la misma que en el espacio bidimensional. La ley de suma de vectores se denomina también ley del paralelogramo, por razones que se pueden ver en la Figura 9.29, donde se ilustra la suma de dos vectores.



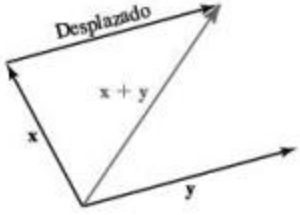
▲ **Figura 9.29**
El paralelogramo de la suma de vectores

En la Figura 9.29 podemos ver que la suma de vectores se puede interpretar también de la siguiente forma: para calcular $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, se sitúa el vector $\mathbf{y}$ en la punta del vector $\mathbf{x}$. El vector suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es un vector que empieza en el mismo punto que $\mathbf{x}$ y termina en el punto donde termina el vector $\mathbf{y}$ que se ha movido, como se ilustra en la Figura 9.30.

La multiplicación de un vector por un escalar se generaliza también fácilmente a dimensiones mayores, y tiene la misma interpetación geométrica.

Multiplicación de un vector por un escalar Si a es un escalar y $\mathbf{x}$ es un vector en el espacio n-dimensional, entonces

$$a\mathbf{x} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 9.30**
Suma de dos vectores

Representación de vectores Un vector $\mathbf{x}$ es un segmento dirigido de recta $\overline{AB}$ desde el punto inicial A hasta el punto final B. Una representación particular de $\mathbf{x}$ tiene el origen como punto inicial y la misma dirección y longitud que el segmento dirigido $\overline{AB}$. El punto final de $\mathbf{x}$ se puede utilizar como su representación si el punto inicial es el origen. Esta representación particular se denomina **representación vectorial** de $\overline{AB}$.

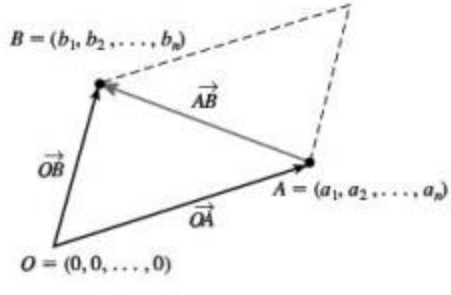
Podemos utilizar la Figura 9.31 para calcular la representación de un segmento dirigido $\overline{AB}$ desde el punto A de coordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ hasta el punto B de coordenadas $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Utilizando la ley del paralelogramo podemos ver que

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

o, despejando $\overline{AB}$,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$\overline{OB}$ tiene como representación vectorial $[b_1, b_2, ..., b_n]'$, y $\overline{OA}$ tiene como representación vectorial $[a_1, a_2, ..., a_n]'$. La diferencia $\overline{OB} - \overline{OA}$ es simplemente la diferen-



▲ **Figura 9.31**
Representación vectorial de un segmento dirigido

cia entre los dos vectores, es decir,

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{bmatrix}$$

La representación vectorial del segmento $\overline{AB}$ es por tanto

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 Calcule la representación vectorial de $\overrightarrow{AB}$ siendo $A = (2, -1)$ y $B = (1, 3)$.

Solución

La representación vectorial de $\overrightarrow{AB}$ es

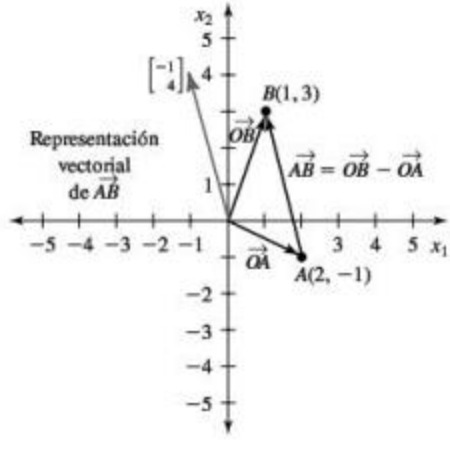
$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2 \\ 3 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que se ilustra gráficamente en la Figura 9.32.

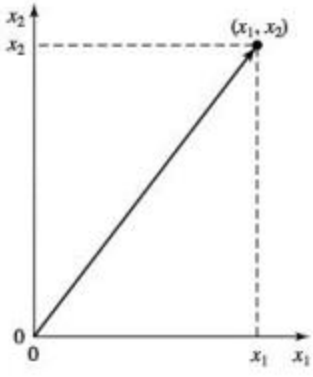
En la Figura 9.32 podemos ver que si desplazamos al origen el vector $\overrightarrow{AB}$, su extremo final está en $(-1, 4)$, lo que confirma que la representación vectorial de $\overrightarrow{AB}$ es $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. ◀

Longitud de un vector La longitud de un vector en dos dimensiones se calcula mediante el teorema de Pitágoras. Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, entonces la longitud de $\mathbf{x}$ se expresa como $|\mathbf{x}|$, y se calcula de la siguiente forma

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



▲ **Figura 9.32**
Representación vectorial del vector $\overrightarrow{AB}$



▲ **Figura 9.33**
Longitud del vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

como se ilustra en la Figura 9.33. Esta idea se puede generalizar a n dimensiones. Recuérdese que el traspuesto de un vector se indica con el superíndice prima, es decir,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

que permite expresar los vectores columna como los traspuestos de los correspondientes vectores fila, lo que es más conveniente para escribir vectores columna grandes.

La longitud de un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ es

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

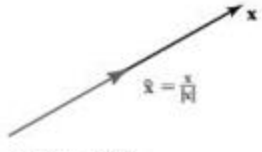
Ejemplo 2 Calcule la longitud de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución

La longitud de $\mathbf{x}$ está dada por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{26}$$ ◀



▲ **Figura 9.34**
El vector normalizado $\hat{\mathbf{x}}$ tiene la misma longitud que $\mathbf{x}$, y su longitud es 1

Si se conoce la longitud de un vector $\mathbf{x}$, se puede **normalizar** para obtener un vector de longitud 1 en la misma dirección que $\mathbf{x}$ (*véase* la Figura 9.34). Este vector se denomina **vector unitario** en la dirección de $\mathbf{x}$, y se escribe $\hat{\mathbf{x}}$, es decir,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

y, por supuesto, $|\hat{\mathbf{x}}| = 1$. Resumimos esta idea en el recuadro siguiente.

$\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ es un vector de longitud 1 en la dirección de $\mathbf{x}$.

Ejemplo 3 Normalice el vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Solución

Hay que calcular primero la longitud de $\mathbf{x}$.

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2 + (6)^2} = \sqrt{81} = 9$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{x}}$ es entonces

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que $\hat{\mathbf{x}}$ es realmente un vector unitario.

$$\hat{\mathbf{x}} = \sqrt{(1/3)^2 + (-2/3)^2 + (2/3)^2} = 1 \quad \blacktriangleleft$$

9.4.2 El producto escalar

Definiremos ahora el producto escalar de dos vectores, que nos permitirá calcular el ángulo entre vectores.

Definición El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ es el número

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Nótese que el resultado es un escalar (de ahí el nombre de producto escalar).

Ejemplo 4 Calcule el producto escalar de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Utilizando la definición de producto escalar, se obtiene

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [2 \quad 3 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 + 6 + 0 = 4 \quad \blacktriangleleft$$

El producto escalar cumple las dos propiedades siguientes:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
2. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

El producto escalar se puede utilizar para expresar la longitud de un vector. Recordamos que en n dimensiones la longitud de un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ se define así:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

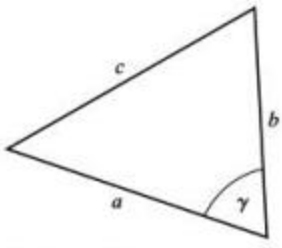
Si se calcula el producto escalar de $\mathbf{x}$ consigo mismo, se obtiene

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Por tanto, comparando $|\mathbf{x}|$ y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, se observa que se cumple lo siguiente:

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

La longitud de un vector es por tanto $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.



▲ **Figura 9.35**
El teorema del coseno:
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$

Ángulo entre dos vectores La otra aplicación importante del producto escalar es que permite calcular el ángulo que forman dos vectores. Para obtener este resultado, necesitaremos una ley trigonométrica, denominada teorema del coseno, que se ilustra en la Figura 9.35.

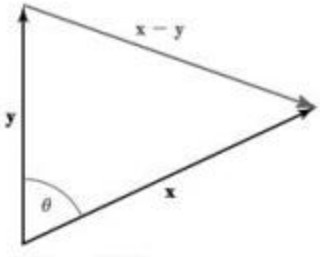
Sean ahora $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores distintos de cero cuyos puntos iniciales coinciden. Entonces, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es el vector que une el extremo del vector $\mathbf{y}$ con el extremo del vector $\mathbf{x}$. Esto se deduce de la ley del paralelogramo para la suma de vectores, concretamente, $\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x}$, como se muestra en la Figura 9.36.

Utilizando el teorema del coseno se obtiene

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta$$

siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, como se ilustra en la Figura 9.36. Por otra parte, la longitud del vector $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, es decir, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, se puede calcular utilizando el producto escalar:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{y})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\ &= |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \end{aligned}$$



▲ **Figura 9.36**
Ángulo entre dos vectores

Igualando las dos expresiones de $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$, se obtiene

$$|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta = |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2$$

Despejando $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, resulta lo siguiente:

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta \qquad (9.22)$$

La Ecuación (9.22) permite calcular el ángulo que forman dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintos de cero, ya que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}\right)$$

Nótese que $\theta \in [0, \pi)$, ya que este intervalo es el que se utiliza para obtener la inversa de la función coseno.

Ejemplo 5 Calcule el ángulo entre los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Para determinar el ángulo θ entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, se utiliza

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta$$

Se obtiene

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + 1 = 3$$

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

y, por tanto,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18.4^\circ \quad \text{o} \quad 0.3218$$ ◀

Es interesante resaltar el caso de $\theta = \pi/2$. Se dice que dos vectores son **perpendiculares** entre sí si el ángulo que forman es $\pi/2$, como se ilustra en la Figura 9.37.

▲ **Figura 9.37**
Los vectores x e y son perpendiculares

Una importante consecuencia de (9.22) es que proporciona un criterio para determinar si dos vectores son perpendiculares. Como $\cos(\pi/2) = 0$, se cumple lo siguiente.

Teorema

x e **y** son perpendiculares si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.

Presentamos a continuación dos ejemplos que ilustran cómo utilizar este resultado.

Ejemplo 6 Sea $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ de forma que **x** e **y** sean perpendiculares.

Solución

Los vectores **x** e **y** serán perpendiculares si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$. Tenemos entonces que

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = y_1 + 2y_2$$

Igualando a 0, se obtiene la ecuación

$$y_1 + 2y_2 = 0$$

Cualquier pareja de números (y_1, y_2) que cumpla esta ecuación determinará un vector perpendicular a **x**. Por ejemplo, si se escoge $y_2 = 1$ e $y_1 = -2$, entonces

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

es perpendicular a **x**. ◀

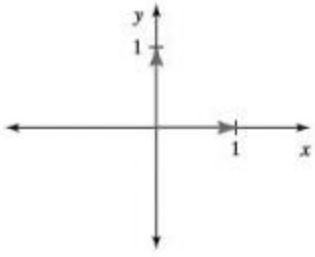
Ejemplo 7 Demuestre que los ejes de coordenadas de un sistema de coordenadas cartesiano bidimensional son perpendiculares.

Solución

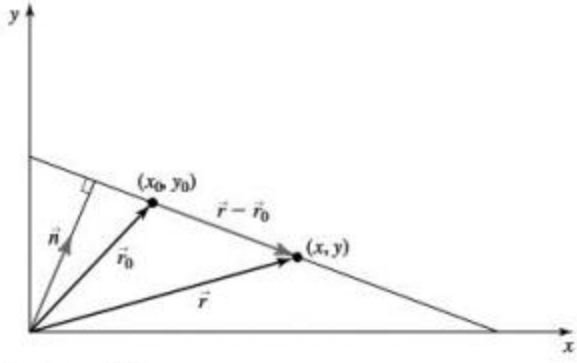
La Figura 9.38 muestra un sistema de coordenadas cartesiano bidimensional. El eje x se representa con el vector $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y el eje y con el vector $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Calculando el producto escalar entre los dos vectores, se obtiene

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = (1)(0) + (0)(1) = 0$$

por lo que se concluye que los dos vectores son perpendiculares. Por tanto, el eje x y el eje y son perpendiculares. ◀



▲ **Figura 9.38**
Los ejes coordenados en un sistema de coordenadas cartesiano bidimensional son perpendiculares



▲ **Figura 9.39**
El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{n}$

Utilizaremos ahora el producto escalar, y el resultado de que el producto escalar de vectores perpendiculares es cero, para obtener la ecuación de una recta en el espacio bidimensional y la ecuación de un plano en el espacio tridimensional.

Rectas en el plano Utilizaremos el producto escalar para escribir las ecuaciones de las rectas en el plano. Supongamos que se desea obtener la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y que es perpendicular al vector $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Si (x, y) es otro punto de la recta, entonces el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{n}$, como se muestra en la Figura 9.39.

Por tanto,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

que se denomina **ecuación vectorial** de la recta en el plano. Para obtener la **ecuación escalar** de la recta, se hace

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

Es decir, hemos obtenido lo siguiente.

La ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0) y es perpendicular al vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{9.23}$$

Ejemplo 8 Calcule la ecuación de la recta que pasa por (4, 3) y es perpendicular al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución

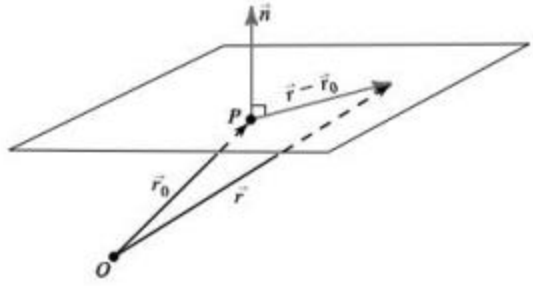
Utilizando (9.23) se obtiene

$$(1)(x - 4) + (2)(y - 3) = 0$$

Simplificando resulta

$$x + 2y = 10$$

◀



▲ **Figura 9.40**
El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{n}$

Planos en el espacio Un plano se puede caracterizar por un punto P perteneciente al mismo y un vector cuyo punto inicial es P y es perpendicular a todos los vectores del plano cuyos puntos iniciales coincidan con P, como se ilustra en la Figura 9.40. Si P es el extremo de $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un vector en el plano cuyo punto inicial es P, y $\mathbf{n}$ es un vector perpendicular al plano, entonces

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$$

Esta ecuación se denomina ecuación vectorial del plano. Para obtener la ecuación escalar del plano en el espacio tridimensional, se hace

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ es la ecuación escalar del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con vector normal $\mathbf{n} = [a, b, c]'$.

Calculando el producto escalar resulta

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

El siguiente recuadro resume este resultado.

La ecuación del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = [a, b, c]'$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (9.24)$$

Ejemplo 9 Calcule la ecuación del plano que pasa por el punto (2, 0, 3) y es perpendicular al vector $[-1, 4, 1]'$.

Solución

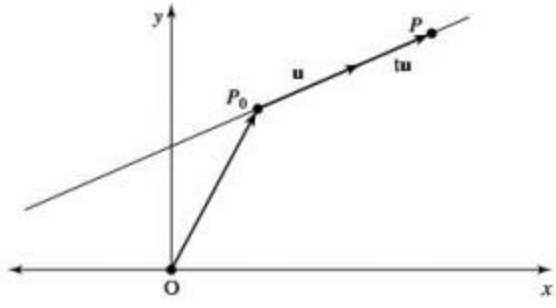
Utilizando (9.24) se obtiene

$$(-1)(x - 2) + (4)(y - 0) + (1)(z - 3) = 0$$

Simplificando resulta

$$-x + 4y + z = 1$$

◀



▲ **Figura 9.41**
Ecuación paramétrica de la recta

9.4.3 Ecuación paramétrica de la recta

Existe otra forma de caracterizar las rectas en $\mathbf{R}^2$. Observando a la Figura 9.41, la recta se puede describir mediante el vector que une los puntos O y P_0, es decir, $\overrightarrow{OP_0}$, y el vector $\mathbf{u}$. Cualquier punto P de la recta se puede expresar como el extremo de la suma del vector $\overrightarrow{OP_0}$ y el vector $\overrightarrow{P_0P}$. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es un múltiplo del vector $\mathbf{u}$. Con todo lo anterior, se puede escribir la ecuación de la recta en forma vectorial

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{u} \tag{9.25}$$

para algún valor $t \in \mathbf{R}$. Si las coordenadas de P son (x, y), las de P_0 son (x_0, y_0) y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{9.26}$$

para algún valor $t \in \mathbf{R}$. Variando t, se puede alcanzar *cualquier* punto de la recta. La Ecuación (9.25) [o la (9.26)] se denomina **ecuación paramétrica** en forma vectorial de la recta y t se denomina **parámetro**. Se puede escribir la ecuación parámetrica de la recta de forma separada para cada coordenada:

$$x = x_0 + tu_1$$
$$y = y_0 + tu_2$$

para algún valor $t \in \mathbf{R}$.

Ejemplo 10 Calcule la ecuación paramétrica de la recta en el plano x-y que pasa por el punto $(2, 1)$ en la dirección de $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Solución

Se obtiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

o $x = 2 - t$ e $y = 1 - 3t$ para $t \in \mathbf{R}$. Eliminando t se puede expresar la ecuación de la recta en el plano $x - y$ en la forma estándar familiar. Concretamente, $t = 2 - x$ y por tanto,

$$y = 1 - 3(2 - x) = 1 - 6 + 3x$$

y entonces

$$3x - y - 5 = 0$$

es la forma estándar de la ecuación de esta recta. ◀

Ejemplo 11 Calcule la ecuación paramétrica de la recta en el plano x-y que pasa por el punto $(-1, 2)$ y $(3, 5)$.

Solución

Uno de los dos puntos, por ejemplo el $(-1, 2)$ será el punto P_0 y $\mathbf{u}$ será el vector que empieza en $(-1, 2)$ y termina en $(3, 5)$. Entonces

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3-(-1) \\ 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y la ecuación paramétrica de esta recta es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$ ◀

En el primer ejemplo vimos que eliminando t se puede obtener la forma estándar de la ecuación de la recta. Es posible también pasar de la forma estándar a la forma paramétrica introduciendo un parámetro t.

Ejemplo 12 Obtenga una forma paramétrica de la recta cuya ecuación estándar es

$$2x - 3y + 1 = 0$$

Solución

La forma más sencilla de parametrizar esta ecuación es hacer $x = t$, despejar y en la ecuación y sustituir t por x:

$$3y = 2x + 1 \quad \text{es equivalente a} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Con $x = t$, se puede expresar la ecuación paramétrica como

$$x = t$$

$$y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$$

para $t \in \mathbf{R}$.

Ésta no es ni mucho menos la única forma de parametrizar la recta. Si se hubiera escogido $t = \frac{1}{3}(x - 1)$, el resultado habría sido

$$x = 3t + 1$$

$$y = \frac{2}{3}(3t + 1) + \frac{1}{3} = 2t + 1$$ ◀

La representación vectorial de la recta se puede utilizar en dimensiones superiores. Por ejemplo, una recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en la dirección $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

o, si se escriben las tres coordenadas de forma separada,

$$x = x_0 + tu_1$$
$$y = y_0 + tu_2$$
$$z = z_0 + tu_3$$

para $t \in \mathbf{R}$.

Ejemplo 13 Obtenga la ecuación paramétrica de la recta en el espacio x-y-z que pasa por los puntos $(1, -1, 3)$ y $(2, 4, -1)$.

Solución

Uno de los puntos, por ejemplo el $(2, 4, -1)$ será P_0, y $\mathbf{u}$ será el vector que conecta los dos puntos (no importa cuál de los dos puntos se selecciona como punto inicial P_0):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 4-(-1) \\ -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación paramétrica de esta recta es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

o

$$x = 2 + t$$
$$y = 4 + 5t$$
$$z = -1 - 4t$$

para $t \in \mathbf{R}$. ◀

Eliminar t en la ecuación paramétrica de la recta en $\mathbf{R}^3$ no es muy útil ya que no produce una sola ecuación como en el caso de la recta en $\mathbf{R}^2$. Por tanto no lo haremos.

9.4.4. Problemas

(9.4.1)

1. Sea $\mathbf{x} = [1, 4, -1]'$ e $\mathbf{y} = [-2, 1, 0]'$.

(a) Calcule $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

(b) Calcule $2\mathbf{x}$.

(c) Calcule $-3\mathbf{y}$.

2. Sea $\mathbf{x} = [-4, 3, 1]$ e $\mathbf{y} = [0, -2, 3]'$.

(a) Calcule $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

(b) Calcule $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$.

(c) Calcule $-\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$.

3. Sea $A = (2, 3)$ y $B = (4, 1)$. Calcule la representación vectorial de $\overline{AB}$.

4. Sea $A = (-1, 0)$ y $B = (2, -4)$. Calcule la representación vectorial de $\overline{AB}$.

5. Sea $A = (0, 1, -3)$ y $B = (-1, -1, 2)$. Calcule la representación vectorial de $\overline{AB}$.

6. Sea $A = (1, 3, -2)$ y $B = (0, -1, 0)$. Calcule la representación vectorial de $\overline{AB}$.

7. Calcule la longitud de $\mathbf{x} = [1, 3]'$.

8. Calcule la longitud de $\mathbf{x} = [-1, 4]'$.

9. Calcule la longitud de $\mathbf{x} = [0, 1, 5]'$.

10. Calcule la longitud de $\mathbf{x} = [-2, 3, -3]'$.

11. Normalice $[1, 3, -1]'$.

12. Normalice $[2, 0, -4]'$.

13. Normalice $[1, 0, 0]'$.

14. Normalice $[0, -3, 1, 3]'$.

(9.4.2)

15. Calcule el producto escalar de $\mathbf{x} = [1, 2]'$ e $\mathbf{y} = [3, -1]'$.

16. Calcule el producto escalar de $\mathbf{x} = [-1, 2]'$ e $\mathbf{y} = [-2, -4]'$.

17. Calcule el producto escalar de $\mathbf{x} = [0, -1, 3]'$ e $\mathbf{y} = [-3, 1, 1]'$.

18. Calcule el producto escalar de $\mathbf{x} = [1, -3, 2]'$ e $\mathbf{y} = [3, 1, -4]'$.

19. Utilice el producto escalar para calcular la longitud de $[0, -1, 2]'$.

20. Utilice el producto escalar para calcular la longitud de $[-1, 4, 3]'$.

21. Utilice el producto escalar para calcular la longitud de $[1, 2, 3, 4]'$.

22. Utilice el producto escalar para calcular la longitud de $[-1, -2, -3, -4]'$.

23. Calcule el ángulo que forman los vectores $\mathbf{x} = [1, 2]'$ e $\mathbf{y} = [3, -1]'$.

24. Calcule el ángulo que forman los vectores $\mathbf{x} = [-1, 2]'$ e $\mathbf{y} = [-2, -4]'$.

25. Calcule el ángulo que forman los vectores $\mathbf{x} = [0, -1, 3]'$ e $\mathbf{y} = [-3, 1, 1]'$.

26. Calcule el ángulo que forman los vectores $\mathbf{x} = [1, -3, 2]'$ e $\mathbf{y} = [3, 1, -4]'$.

27. Sea $\mathbf{x} = [1, -1]'$. Calcule un vector $\mathbf{y}$ de forma que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sean perpendiculares.

28. Sea $\mathbf{x} = [-2, 1]'$. Calcule un vector $\mathbf{y}$ de forma que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sean perpendiculares.

29. Sea $\mathbf{x} = [1, -2, 4]'$. Calcule un vector $\mathbf{y}$ de forma que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sean perpendiculares.

30. Sea $\mathbf{x} = [2, 0, -1]'$. Calcule un vector $\mathbf{y}$ de forma que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sean perpendiculares.

31. Los vértices de un triángulo son $P = (0, 0)$, $Q = (4, 0)$ y $R = (4, 3)$.

(a) Utilice trigonometría básica para calcular las longitudes de los tres lados y los valores de los tres ángulos.

(b) Utilice los resultados de esta sección para repetir (a).

32. Los vértices de un triángulo son $P = (0, 0)$, $Q = (0, 3)$ y $R = (5, 0)$.

(a) Utilice trigonometría básica para calcular las longitudes de los tres lados y los valores de los tres ángulos.

(b) Utilice los resultados de esta sección para repetir (a).

33. Los vértices de un triángulo son $P = (1, 2, 3)$, $Q = (1, 5, 2)$ y $R = (2, 4, 2)$.

(a) Calcule las longitudes de los tres lados.

(b) Calcule los valores de los tres ángulos en radianes y en grados.

34. Los vértices de un triángulo son $P = (2, 1, 5)$, $Q = (-1, -3, 7)$ y $R = (2, -4, 1)$.

(a) Calcule las longitudes de los tres lados.

(b) Calcule los valores de los tres ángulos en radianes y en grados.

35. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y es perpendicular al vector $[1, 2]'$.

36. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es perpendicular al vector $[-1, 1]'$.

37. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y es perpendicular al vector $[4, 1]'$.

38. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 1)$ y es perpendicular al vector $[1, 0]'$.

39. Calcule la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $[0, -1, 1]'$.

40. Calcule la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 0, -3)$ y es perpendicular al vector $[1, -2, 1]'$.

41. Calcule la ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ y es perpendicular al vector $[1, 0, 0]'$.

42. Calcule la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y es perpendicular al vector $[-1, 1, 1]'$.

(9.4.3)

En los Problemas 43-46, calcule la ecuación paramétrica de la recta en el plano x-y que pasa por los puntos indicados y tiene la dirección de los vectores indicados.

43. $(1, -1)$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

44. $(3, -4)$, $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

45. $(-1, -2)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

46. $(-1, 4)$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

En los Problemas 47-50, calcule la ecuación paramétrica de las rectas en el plano x-y que pasan por los puntos dados. Elimine después los parámetros para obtener las ecuaciones de la recta en forma estándar.

47. $(-1, 2)$ y $(3, 4)$

48. $(2, 1)$ y $(3, 5)$

49. $(1, -3)$ y $(4, 0)$

50. $(2, 3)$ y $(-1, -4)$

En los Problemas 51-54, parametrice las ecuaciones de las rectas dadas en forma estándar.

51. $3x + 4y - 1 = 0$

52. $x - 2y + 5 = 0$

53. $2x + y - 3 = 0$

54. $x - 5y + 7 = 0$

En los Problemas 55-58, calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas en el espacio x-y-z que pasan por los puntos indicados y tienen la dirección de los vectores indicados.

55. $(1, -1, 2)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

56. $(2, 0, 4)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

57. $(-1, 3, -2)$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

58. $(2, 1, -3)$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

En los Problemas 59-62, calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas en el espacio x-y-z que pasan por los puntos indicados.

59. (5, 4, −1) y (2, 0, 3)

60. (1, 0, −3) y (4, 1, 0)

61. (2, −3, 1) y (−5, 2, 1)

62. (1, 0, 4) y (3, 1, 0)

63. Dado un plano que pasa por el punto (1, −1, 2) y que es perpendicular al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, y una recta que pasa por los puntos (0, −3, 2) y (−1, −2, 3). ¿Dónde se cortan la recta y el plano?

64. Dado un plano que pasa por el punto (2, 0, −1) y que es perpendicular al vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, y una recta que pasa por los puntos (1, 0, −2) y (−1, −1, 1). ¿Dónde se cortan la recta y el plano?

65. Sea un plano que pasa por el punto (0, −2, 1) y que es perpendicular al vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule la recta que pasa por el punto (5, −1, 0) y que es paralela al plano.

66. Dado el plano $x + 2y - z + 1 = 0$, calcule la ecuación en forma paramétrica de la recta que es perpendicular al plano.

9.5. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 9: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Sistema de ecuaciones lineales
2. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales
3. Forma triangular superior
4. Eliminación gaussiana
5. Matriz
6. Operaciones básicas con matrices: multiplicación por un escalar
7. Trasposición
8. Multiplicación de matrices
9. Matriz identidad
10. Matriz inversa
11. Determinante
12. Matriz de Leslie
13. Distribución de edades estable
14. Vector
15. Ley del paralelogramo
16. Aplicación lineal
17. Autovalores y autovectores
18. Suma de vectores
19. Multiplicación de un vector por un escalar
20. Longitud de un vector
21. Producto escalar
22. Ángulo entre dos vectores
23. Vectores perpendiculares
24. Rectas en el plano y en el espacio
25. Ecuación del plano
26. Ecuación paramétrica de la recta

9.6. PROBLEMAS DE REPASO

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $A\mathbf{x}$ cuando $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dibuje $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Calcule los autovalores λ_1 y λ_2 y los correspondientes autovectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ de A.

(c) Si $\mathbf{u}_i$ es el autovector correspondiente al autovalor λ_i, calcule $A\mathbf{u}_i$ y explique gráficamente lo que sucede cuando se aplica A a $\mathbf{u}_i$.

(d) Escriba $\mathbf{x}$ como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Es decir, calcule a_1 y a_2 de forma que

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$$

Demuestre que

$$A\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2$$

e ilústrelo gráficamente.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ -5 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $A\mathbf{x}$ cuando $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dibuje $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Calcule los autovalores λ_1 y λ_2 y los correspondientes autovectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ de A.

(c) Si $\mathbf{u}_i$ es el autovector correspondiente al autovalor λ_i, calcule $A\mathbf{u}_i$ y explique gráficamente lo que sucede cuando se aplica A a $\mathbf{u}_i$.

(d) Escriba $\mathbf{x}$ como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Es decir, calcule a_1 y a_2 de forma que

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$$

Demuestre que

$$A\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2$$

e ilústrelo gráficamente.

3. Dada la matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.875 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule la velocidad de crecimiento de la población y determine su distribución de edades estable.

4. Dada la matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.99 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule la velocidad de crecimiento de la población y determine su distribución de edades estable.

5. Sea

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule B.

6. Sea

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule A.

7. Explique dos formas diferentes de resolver un sistema de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

cuando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

8. Suponga que

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones. Si se escribe el sistema en forma matricial $AX = B$, ¿se podría obtener X calculando $A^{-1}B$?

9. Sea

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

¿Cómo se debería escoger a para que el sistema tenga infinitas soluciones?

10. Sea A una matriz 2×2, y X y B matrices 2×1. Asuma que $\det A = 0$. Explique cómo afecta la elección de B al número de soluciones de $AX = B$.

11. Suponga que

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.3 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad. ¿Para qué valores de a crece la población?

12. Suponga que

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.

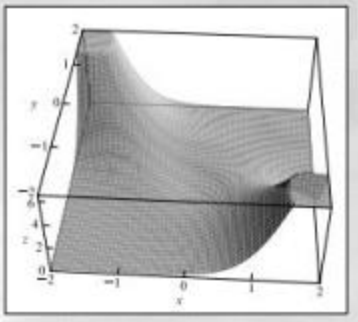
(a) Si tuviera que gestionar esta población, ¿tendría que estar preocupado por su supervivencia a largo plazo?

(b) Suponga que puede aumentar la fecundidad o la supervivencia de las hembras de cero años de edad, pero que debido a restricciones fisiológicas y del entorno, la fecundidad de las hembras de cero años de edad no superará el valor de 1.5 y su supervivencia no superará el valor de 0.4. Estudie cómo resulta afectada la velocidad de crecimiento de la población cambiando la fecundidad o la supervivencia de las hembras de cero años, o ambas cosas ¿Cuál sería el máximo valor alcanzable de la velocidad de crecimiento?

(c) En situaciones reales, ¿qué otros factores habría que considerar al decidir estrategias de gestión?

CAPÍTULO 10

CÁLCULO MULTIVARIABLE



Para sobrevivir a bajas temperaturas, los humanos debemos mantener un nivel metabólico alto o bien regular la pérdida de calor cubriendo la piel con un material aislante. Hay una relación funcional que da la mínima temperatura de supervivencia (T_e) en función de la producción metabólica de calor (M) y la conductancia térmica del cuerpo (g_{Hb}). La producción metabólica de calor depende del tipo de actividad. La tabla que sigue presenta algunos valores para humanos.

Actividad	M **en** $\mathrm{Wm^{-2}}$
Dormir	50
Trabajo de oficina	95
Paseo en llano a 2.5 mph	180
Paseo en llano a 3.5 mph con un paquete de 40 lb	350

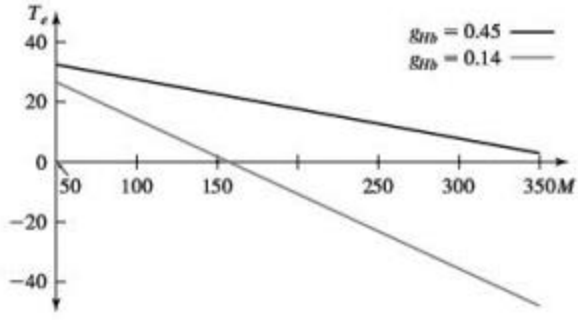
Datos adaptados de Landsberg (1969).

La conductancia térmica del cuerpo g_{Hb} da cuenta de la rapidez de pérdida de calor. Su valor depende del tipo de protección. Por ejemplo, $g_{Hb} = 0.45$ mol $\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$ sin ropa, $g_{Hb} = 0.14$ mol $\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$ con ropa de lana y $g_{Hb} = 0.04$ mol $\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$ en un saco de dormir de abrigo. Es decir, cuanto mayor sea g_{Hb}, más protección proporciona el material contra el frío. La relación entre T_e, M y g_{Hb} es

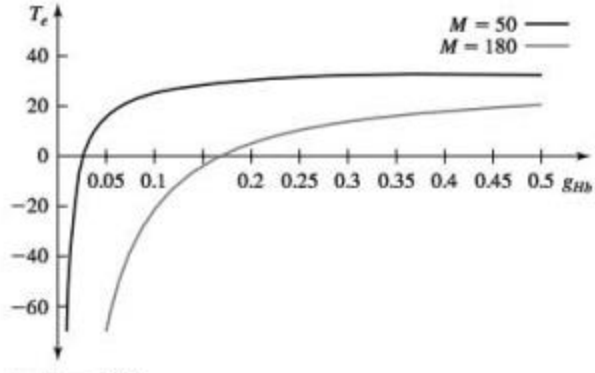
$$T_e = 36 - \frac{(0.9M - 12)(g_{Hb} + 0.95)}{27.8g_{Hb}}$$

donde M se mide en $\mathrm{Wm^{-2}}$, g_{Hb}, se mide en mol $\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$ y T_e se mide en grados Celsius (Campbell, 1986). La temperatura T_e es función por tanto de dos variables, M y g_{Hb}. Para obtener la temperatura deseada se puede cambiar M (empezando a movernos cuando tenemos frío) o g_{Hb} (poniéndonos más ropa). Se puede dibujar T_e en función de M para diferentes valores de g_{Hb} o bien dibujar T_e en función de g_{Hb} para diferentes valores de M, como se muestra en las Figuras 10.1 y 10.2.

Observando la Figura 10.1, se puede ver que dada una determinada conductancia térmica (por ejemplo, llevando ropa de lana), al aumentar el frío es necesario aumentar la producción metabólica de calor para permanecer por encima de la temperatura de supervivencia. La Figura 10.2 muestra que dado un nivel de actividad (por ejemplo, pasear a 2.5 mph), al aumentar el frío es necesario reducir la conductancia térmica (es decir, ponerse ropas más calientes) para permanecer por encima de la temperatura de supervivencia.



▲ **Figura 10.1**
Gráfica de T_e en función de M para diferentes valores de g_{Hb}



▲ **Figura 10.2**
Gráfica de T_e en función de g_{Hb} para diferentes valores de M

Como se pueden variar independientemente las variables M y g_{Hb}, se puede decir que T_e es función de dos variables independientes. En este capítulo estudiaremos funciones de dos o más variables independientes, desarrollaremos la teoría del cálculo diferencial para esas funciones y presentaremos diversas aplicaciones.

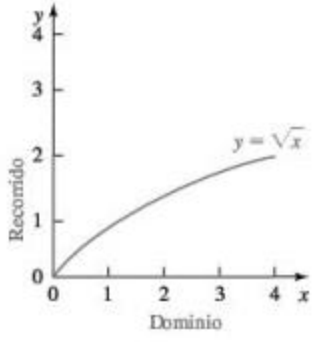
10.1 FUNCIONES DE DOS O MÁS VARIABLES INDEPENDIENTES

Para recordar la notación y terminología que utilizamos al considerar funciones de una variable, sea

$$\begin{aligned} f : [0, 4] &\to \mathbf{R} \\ x &\to \sqrt{x} \end{aligned}$$

La función $y = f(x)$ depende de una variable, concretamente x. Su dominio es el conjunto de números que se pueden utilizar para evaluar $f(x)$, concretamente, el intervalo $[0, 4]$. Su recorrido es el conjunto de todos los posibles valores $y = f(x)$ con x en el dominio de f. Podemos ver en la Figura 10.3 que el recorrido de $f(x)$ es el intervalo $[0, 2]$.

Consideraremos ahora funciones en las que el dominio está formado por parejas de números reales (x, y) con $x, y \in \mathbf{R}$ o, de forma más general, n-tuplas de números reales $(x_1, x_2, ..., x_n)$, con $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$. Las n-tuplas se denominarán



▲ **Figura 10.3**
Dominio y recorrido de una función

también puntos. Utilizaremos la notación $\mathbf{R}^n$ para denominar al conjunto de todas las n-tuplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ con $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}, ..., x_n \in \mathbf{R}\}$$

Si $n = 1$, $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$, que es el conjunto de los números reales. Si $n = 2$, $\mathbf{R}^2$ es el conjunto de los puntos del plano, y así sucesivamente. Nótese que las n-tuplas están *ordenadas*; por ejemplo, $(2, 3) \neq (3, 2)$. Consideraremos funciones cuyos recorridos sean subconjuntos de los números reales. Estas funciones se denominan funciones reales.

Definición Sea $D \subset \mathbf{R}^n$. Una **función real** f en D asigna un número real a cada elemento de D, y se expresa

$$f : D \to \mathbf{R}$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

El conjunto D es el dominio de la función f y el conjunto $\{w \in \mathbf{R} f(x_1, x_2, ..., x_n) = w$ para algún $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$ es el recorrido de la función f.

Si una función f depende sólo de dos variables independientes, frecuentemente las denominaremos x e y, y escribiremos $f(x, y)$. En el caso de tres variables, frecuentemente escribiremos $f(x, y, z)$. Si f es función de más de tres variables independientes, es más conveniente utilizar subíndices para denominar las variables, por ejemplo, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

El primer ejemplo muestra cómo se evalúa una función de más de una variable independiente en puntos dados. Hay que poner atención en el hecho de que el dominio consiste en n-tuplas *ordenadas*.

Ejemplo 1 Evalúe la función

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z^2}$$

en los puntos $(2, 3, -1)$ y $(-1, 2, 3)$.

Solución

$$f(2, 3, -1) = \frac{(2)(3)}{(-1)^2} = 6$$

$$f(-1, 2, 3) = \frac{(-1)(2)}{(3)^2} = -\frac{2}{9}$$ ◀

El siguiente ejemplo muestra cómo determinar el recorrido de una función real para un dominio dado.

Ejemplo 2 Sea $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ y

$$f : \quad D \to \mathbf{R}$$
$$(x, y) \to x + y$$

Dibuje el dominio de f en el plano $x - y$, y determine el recorrido de f.

Solución

El dominio de f es el conjunto D, formado por todos los puntos cuyas coordenadas x e y tienen valores entre 0 y 1. Es el cuadrado que se muestra en la Figura 10.4.

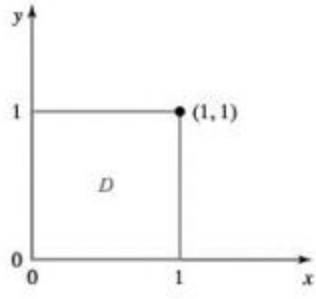


Figura 10.4
Dominio de la función del Ejemplo 2

Para obtener el dominio de f es necesario calcular qué valores puede tomar f cuando se dan valores (x, y) del dominio D. La función $2 = f(x, y)$ toma su valor mínimo cuando $(x, y) = (0, 0)$, concretamente $f(0, 0) = 0$. La función $z = f(x, y)$ toma su valor máximo cuando $(x, y) = (1, 1)$, concretamente $f(1, 1) = 2$. La función toma además todos los valores intermedios, por lo que el recorrido de f es $\{z : 0 \leqslant z \leqslant 2\}$. ◀

Como en el caso de funciones de una variable, a veces es necesario restringir el dominio. El siguiente ejemplo ilustra cómo obtener el dominio más grande posible.

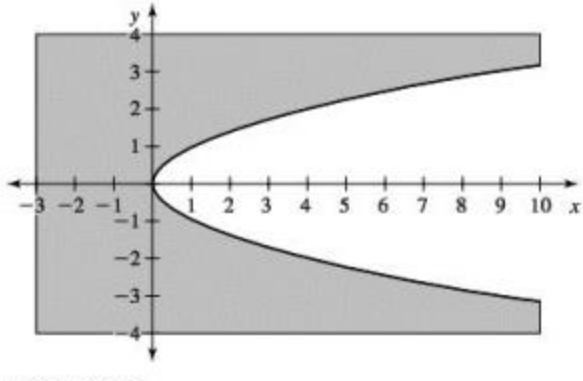
Ejemplo 3 Calcule el máximo dominio posible de la función

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$$

Solución

El máximo dominio posible de f es el conjunto de puntos (x, y) que cumplen que $y^2 - x \geqslant 0$. Ese conjunto de puntos se puede representar en el plano $x - y$, y su frontera será la gráfica de $y^2 - x = 0$. Esta gráfica es una parábola que se abre hacia la derecha. El conjunto de puntos (x, y) que cumplen que $y^2 - x \geqslant 0$ es por tanto el área sombreada de la Figura 10.5, incluyendo la curva frontera.

La forma más sencilla de comprobar la afirmación anterior es utilizar un punto de prueba. La curva frontera $y^2 - x = 0$ divide al plano en dos regiones: el conjunto de puntos que están dentro de la parábola y el conjunto de puntos que están fuera de la parábola. En una de las regiones, $y^2 - x > 0$ y en la otra $y^2 - x < 0$. Si se utiliza un punto de prueba en el interior de la parábola, por ejemplo el punto $(1, 0)$, se cumple que $y^2 - x = 0 - 1 < 0$. Si se utiliza un punto de prueba



▲ **Figura 10.5**
Dominio de $f(x, y)$ en el Ejemplo 3

exterior a la parábola, como el $(-1, 0)$, entonces $y^2 - x = 0 - (-1) > 0$. Por tanto se concluye que el conjunto de puntos que cumplen $y^2 - x \geqslant 0$ es el exterior de la curva frontera incluyendo dicha curva. ◀

Gráfica de una función de dos variables independientes Es posible dibujar la gráfica de una función real de dos variables. Para ello se obtiene $z = f(x, y)$ y se sitúa el punto (x, y, z) en el espacio tridimensional. La siguiente definición precisa esta idea.

Definición Si f es una función de dos variables independientes con dominio D, entonces la gráfica de f está formada por el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$. Es decir, la gráfica de f es el conjunto

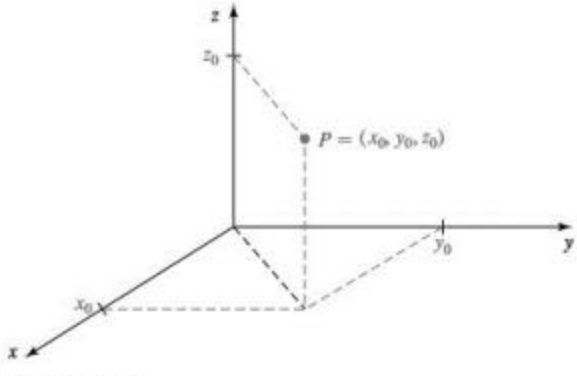
$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Para situar un punto (x, y, z) en el espacio tridimensional se utiliza el sistema de coordenadas cartesianas que se presentó en el Capítulo 9. Consiste en tres ejes mutuamente perpendiculares que surgen de un punto común denominado origen, cuyas coordenadas son $(0, 0, 0)$. El sistema de coordenadas está orientado a la derecha, como se explicó en el Capítulo 9. La Figura 10.6 muestra este sistema de coordenadas y un punto cuyas coordenadas son (x_0, y_0, z_0).

La Figura 10.6 sugiere que se puede visualizar la gráfica de $f(x, y)$, $(x, y) \in D$ directamente encima (o debajo) del dominio D en el plano $x - y$. La gráfica de $f(x, y)$ es por tanto una **superficie** en el espacio tridimensional, como se ilustra en la Figura 10.7 para $f(x, y) = 2x^2 - y^2$.

Es difícil dibujar una superficie en el espacio tridimensional. Afortunadamente, existen buenos programas de ordenador que facilitan la tarea. Las Figuras 10.7 a 10.10 muestran algunas superficies generadas por ordenador. No dedicaremos esfuerzo a aprender cómo se dibujan estas funciones, sino que en la sección de problemas plantearemos algunos en los que hay que asociar funciones y gráficas. Para ver cómo se hace, observemos las superficies de las gráficas 10.7 a 10.10.

Para entender la forma de la gráfica de $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ en la Figura 10.7, podemos fijar un valor de x y después «pasear» por la superficie en la dirección de y. Como la función para x fijo es de la forma «constante menos y^2», la curva tomará la forma de una parábola invertida. Observando la superficie de la Figura 10.7, eso es lo que realmente ocurre. Por otra parte, si fijamos y, y nos movemos



▲ **Figura 10.6**
Un punto en un sistema de coordenadas orientado a la derecha

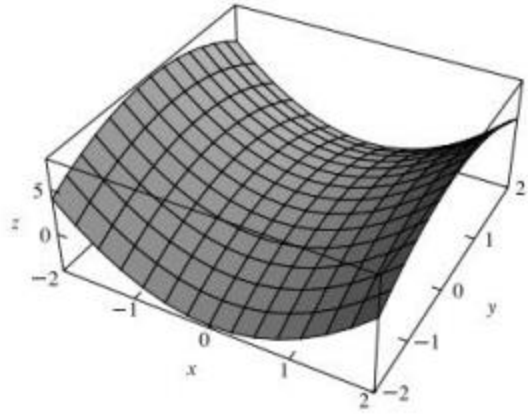


Figura 10.7
La gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio tridimensional (en este ejemplo $f(x, y) = 2x^2 - y^2$)

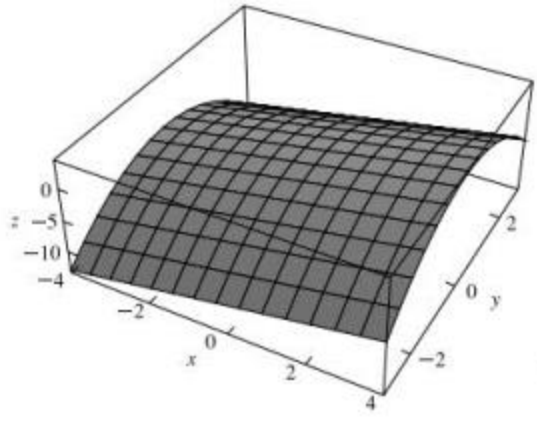


Figura 10.8
Gráfica de $f(x, y) = x - y^2$

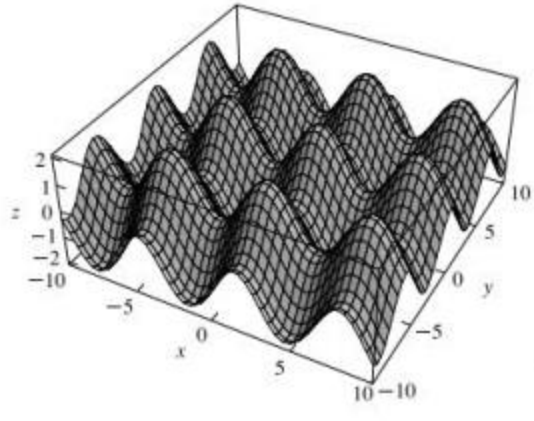
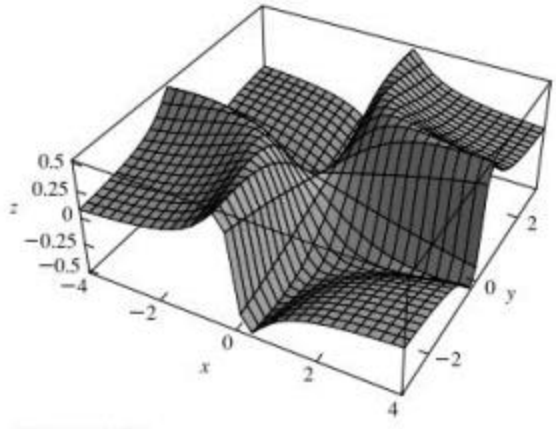


Figura 10.9
Gráfica de $f(x, y) = \text{sen}x + \cos y$

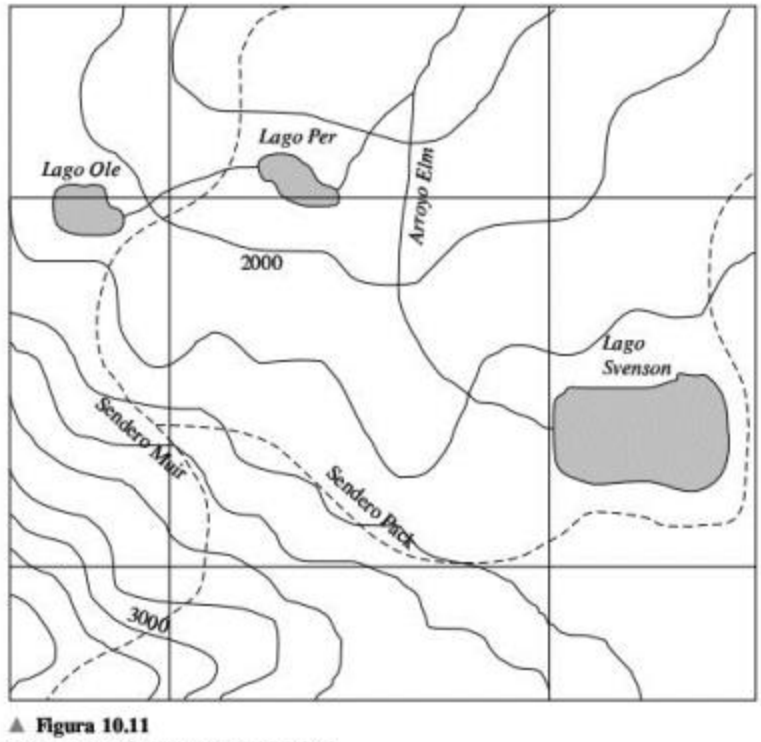
en la dirección de x, recorreremos una curva de la forma «$2x^2$ menos una constante», que es una parábola. Observando la Figura 10.7, se confirma que es así.

La Figura 10.8 se puede analizar de la misma manera. En la Figura 10.9 se reconocen las ondas formadas por las funciones seno y coseno. La Figura 10.10 se incluye para mostrar que las funciones de dos variables pueden presentar formas interesantes (y complicadas).



▲ **Figura 10.10**

Gráfica de $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2y^2}$



▲ **Figura 10.11**

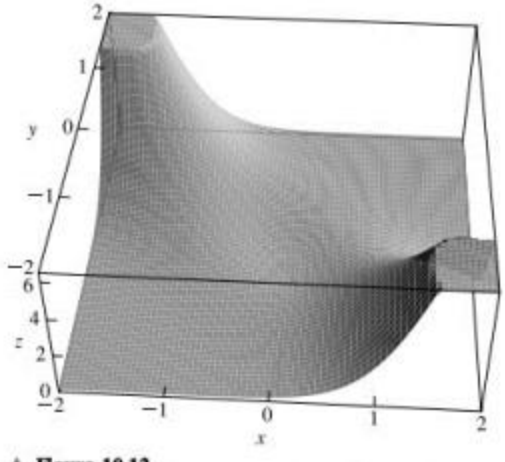
Mapa topográfico con curvas de nivel

Otra forma de visualizar funciones es utilizando **curvas de nivel** o **líneas de contorno**. Este método se utiliza, por ejemplo, en mapas topográficos (*véase* la Figura 10.11). Hay una diferencia sutil entre curvas de nivel y líneas de contorno: las curvas de nivel se dibujan en el dominio de la función y las líneas de contorno se dibujan en la superficie. No siempre se hace esta distinción, y es frecuente utilizar los dos términos de forma indistinta. En este texto, utilizaremos casi exclusivamente curvas de nivel, por lo que daremos a continuación su definición precisa.

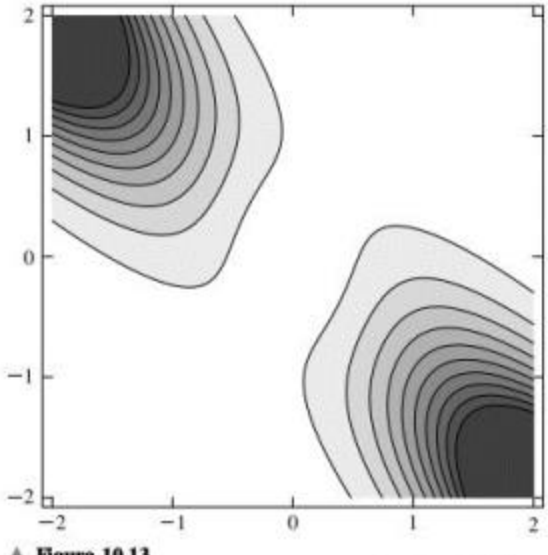
Definición Sea $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$. Las curvas de nivel de f están formadas por el conjunto de puntos (x, y) del plano $x - y$ en los que la función f tiene un valor constante: $f(x, y) = c$.

En la Figura 10.12 se dibuja la superficie de la función $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x+y)^2}$, y en la Figura 10.13 sus curvas de nivel. Para que la información de la gráfica de las curvas de nivel sea de utilidad hay que escoger valores de c equidistantes, por ejemplo, $c = 0, 1, 2, \ldots$ o $c = 0, -0.1, -0.2, \ldots$, de forma que la inclinación de la curva se pueda deducir de la separación de las curvas de nivel. En la Figura 10.13 las curvas son equidistantes, con $c = 0.5, 1, 1.5, \ldots$.

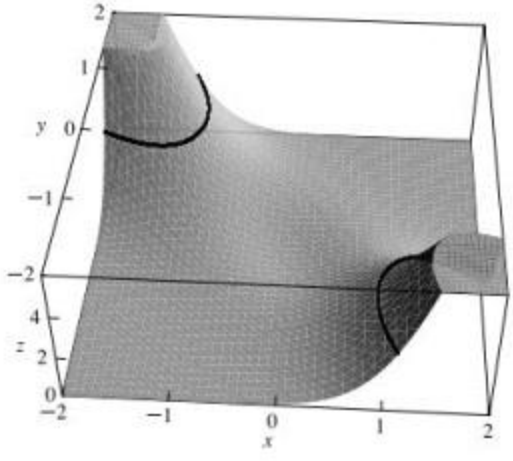
Si se proyecta la curva de nivel $f(x, y) = c$ hasta su altura c, se denomina línea de contorno. La curva está en la superficie de $f(x, y)$ y corresponde a la intersección de f con un plano horizontal de altura c (Figura 10.14).



▲ **Figura 10.12**
Gráfica de la función $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x+y)^2}$



▲ **Figura 10.13**
Curvas de nivel de la función $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x+y)^2}$



◀ **Figura 10.14**
Una línea de contorno de la función $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x+y)^2}$

Ejemplo 4 Sea $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Compare las curvas de nivel de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{para } (x, y) \in D$$

y

$$g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{para } (x, y) \in D$$

Solución

La curva de nivel $f(x, y) = c$ es el conjunto de puntos (x, y) que cumplen

$$4 - x^2 - y^2 = c \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = 4 - c$$

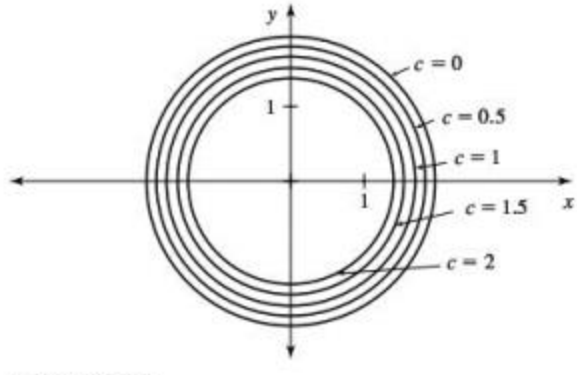
es decir, un círculo centrado en el origen y de radio $\sqrt{4 - c}$, que se muestra en la Figura 10.15 para $c = 0$, 0.5, 1, 1.5 y 2.

La curva de nivel $g(x, y) = c$ cumple

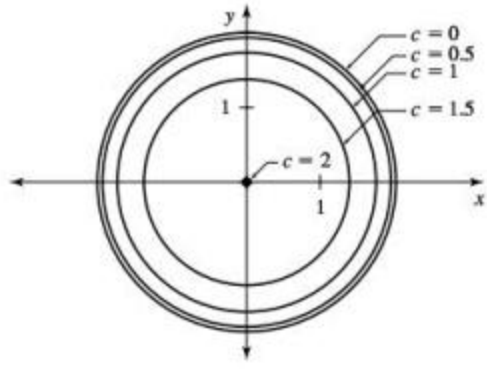
$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = 4 - c^2$$

que es también un círculo centrado en el origen pero de radio $\sqrt{4 - c^2}$. Se muestra en la Figura 10.16 para $c = 0$, 0.5, 1, 1.5 y 2.

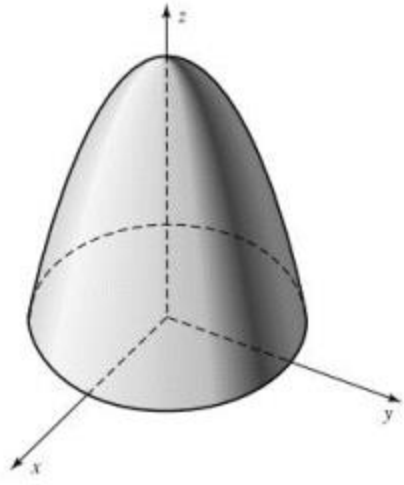
Para comparar las curvas de nivel de las dos funciones, se escogen los valores $c = 0$, 0.5, 1, 1.5 y 2. Las curvas de nivel para $c = 0$ y 1 son las mismas para las



▲ **Figura 10.15**
Curvas de nivel de la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$



◀ **Figura 10.16**
Curvas de nivel de la funcion $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



◀ **Figura 10.17**
La superficie de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ es un paraboloide

dos funciones, pero las líneas de contorno de $f(x, y)$ para los valores de $c = 1.5$ y 2 están mucho más cerca de la línea de contorno para $c = 1$ que las de $g(x, y)$. Esto se puede explicar observando las gráficas de las superficies. La gráfica de $f(x, y)$ se obtiene rotando la parábola $z = 4 - x^2$ del plano $x - z$ alrededor del eje z. Esta superficie se denomina paraboloide (*véase* la Figura 10.17).

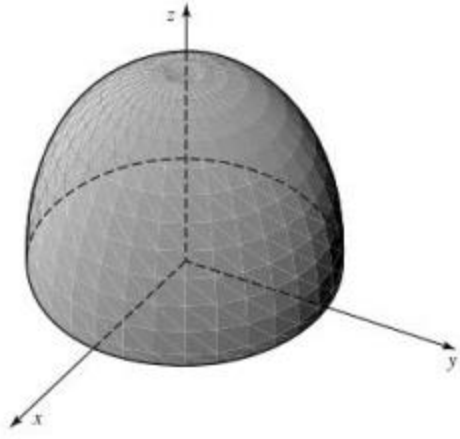
La gráfica de $g(x, y)$ se obtiene rotando el semicírculo $z = \sqrt{4 - x^2}$ del plano $x - z$ alrededor del eje z. La superficie que se obtiene es la mitad superior de una esfera (*véase* la Figura 10.18).

Como el paraboloide tiene mayor pendiente que la esfera para valores de c entre 1 y 2 (y al contrario para valores de c entre 0 y 1), las líneas de contorno del paraboloide están más cercanas entre sí que las de la esfera para valores de c entre 1 y 2 (y al contrario para valores de c entre 0 y 1). ◀

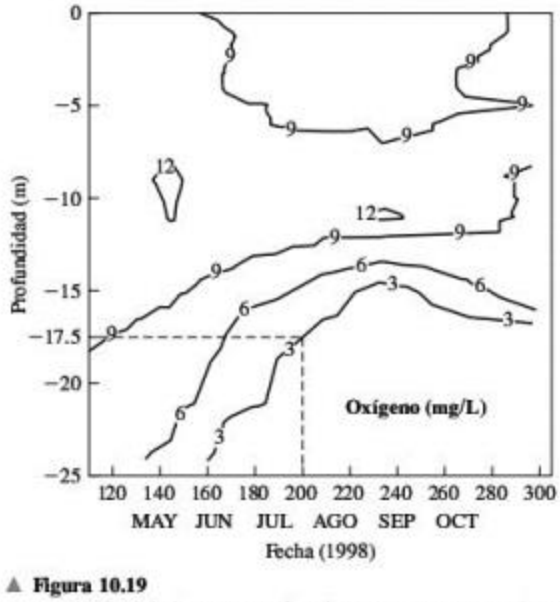
Aplicaciones biológicas

Ejemplo 5 En la Figura 10.19 se muestran curvas de nivel de la concentración de oxígeno (en mg/l) en Long Lake, Clear Water County (Minnesota), en función de la fecha y de la profundidad. Por ejemplo, el día 140 (20 de mayo de 1998), a 10 m de profundidad, la concentración de oxígeno era de 12 mg/l.

La pulga de agua *Daphnia* necesita un mínimo de 3 mg/l de oxígeno para sobrevivir. Supongamos que vamos a Long Lake el día 200 (19 de julio de 1998)



◀ **Figura 10.18**
La superficie de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ es la mitad superior de una esfera



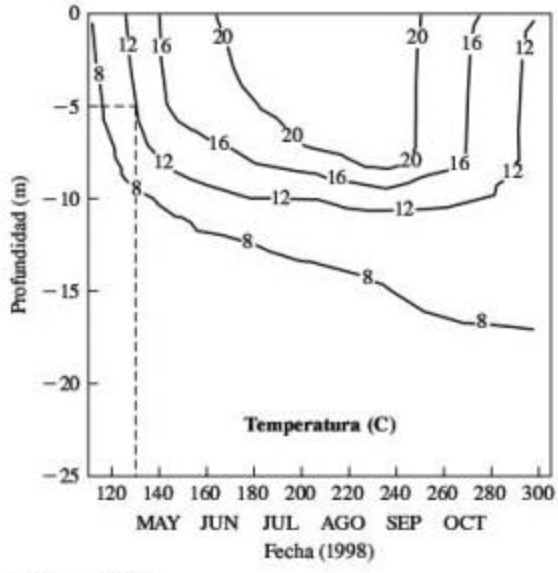
▲ **Figura 10.19**
Curvas de nivel de la concentración de oxígeno en Long Lake, Clear Water County (Minessota). Cortesía de Leif Hembre

y queremos buscar *Daphnia* en el lago ¿Por debajo de qué profundidad no encontraremos ninguna?

Solución

Como *Daphnia* requiere una concentración mínima de oxígeno de 3 mg/l, hay que encontrar la profundidad a la que el 19 de julio de 1998, la concentración de oxígeno era siempre inferior a 3 mg/l. La curva de nivel de oxígeno de 3 mg/l pasa por el punto $(200, -17.5)$. Por tanto, el 19 de julio de 1998, *Daphnia* necesitaba permanecer por encima de 17.5 m. Es decir, podíamos estar bastante seguros de no encontrar *Daphnia* por debajo de 17.5 m. ◀

Ejemplo 6 En la Figura 10.20, se muestran las curvas **isoclinas** (denominadas también **isotermas**) de Long Lake, Clear Water County (Minnesota). Las isoclinas de temperatura son las líneas de igual temperatura, es decir, son curvas de nivel. Las isoclinas



▲ **Figura 10.20**
Isotermas en Long Lake, Clear Country (Minessota). Cortesía de Leif Hembre

son función de la fecha y de la profundidad. Por ejemplo, el día 130 (10 de mayo de 1998) la temperatura a 5 m era aproximadamente de 12 °C. Si estamos interesados en saber cómo cambia con el tiempo la temperatura a una profundidad fija, se dibuja una recta horizontal a la temperatura apropiada y se leen los días y las temperaturas en los puntos donde la recta horizontal corta a las isoclinas. Si se toma por ejemplo una profundidad de 5 metros, se observa que la temperatura sube desde 8 °C en la primavera a más de 20°C en verano y después cae por debajo de 12 °C hacia finales del otoño. ◀

10.1.1. Problemas

1. Sitúe los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional.

(a) (1, 3, 2)

(b) (−1, −2, 1)

(c) (0, 1, 2)

(d) (2, 0, 3)

2. Describa con palabras el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^3$ que cumplen lo siguiente:

(a) $x = 0$

(b) $y = 0$

(c) $z = 0$

(d) $z \geqslant 0$

(e) $y \leqslant 0$

En los Problemas 3-6, evalúe las funciones en los puntos dados.

3. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$ en (2, 3)

4. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 3y + z}$ en (3, −1, 1)

5. $h(x, t) = \exp\left[-\dfrac{(x, -2)^2}{2t}\right]$ en (1, 5)

6. $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4 \sqrt{x_2 x_3}$ en (1, 8, 2, −1)

En los Problemas 7-10, calcule al máximo dominio posible y el recorrido correspondiente de las funciones. Determine la ecuación de las curvas de nivel $f(x, y) = c$, junto con los posibles valores de c.

7. $f(x, y) = x^2 + y^2$

8. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$

10. $f(x, y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$

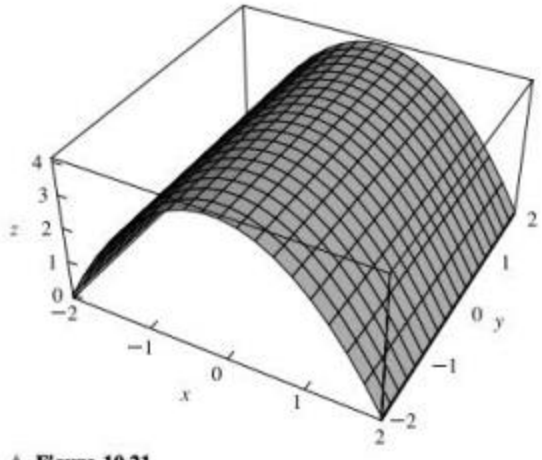
En los Problemas 11-14, asocie las funciones con los gráficos adecuados de las Figuras 10.21-10.24.

11. $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

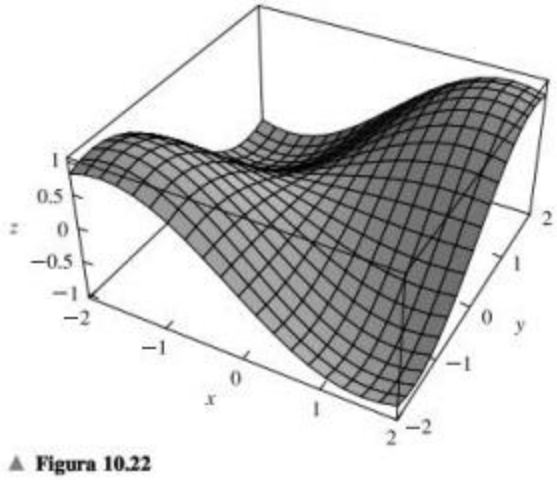
12. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

13. $f(x, y) = y^2 - x^2$

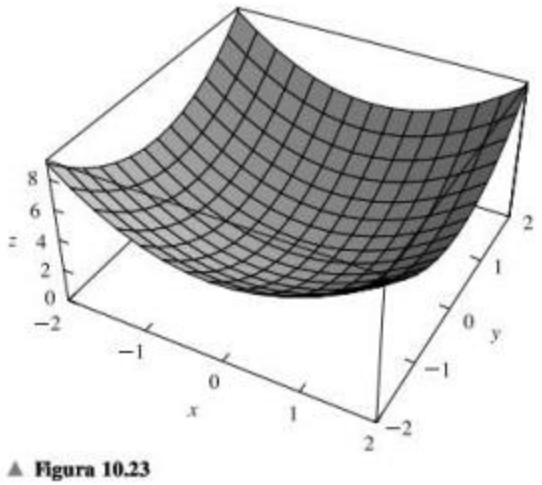
14. $f(x, y) = 4 - x^2$



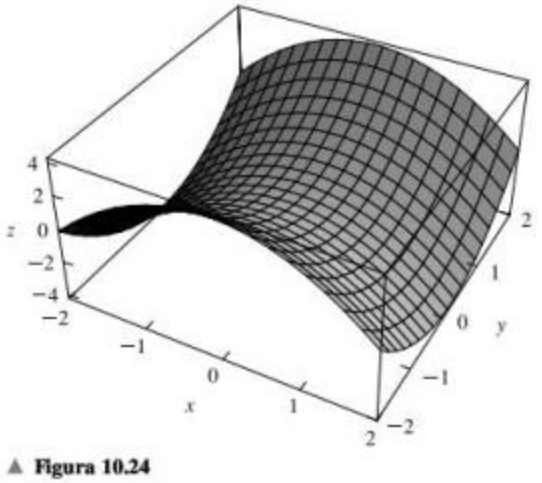
▲ **Figura 10.21**



▲ **Figura 10.22**



▲ **Figura 10.23**



▲ **Figura 10.24**

15. Sea

$$f_a(x, y) = ax^2 + y^2$$

para $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, siendo a una constante positiva.

(a) Suponga que $a = 1$ y describa las curvas de nivel. La gráfica de $f(x, y)$ corta al plano $x - z$ y al plano $y - z$. Demuestre que las dos curvas de intersección son parábolas.

(b) Suponga que $a = 4$. Entonces

$$f_4(x, y) = 4x^2 + y^2$$

y las curvas de nivel cumplen

$$4x^2 + y^2 = c$$

Utilice una calculadora gráfica para dibujar las curvas de nivel correspondientes a $c = 0, 1, 2, 3$ y 4. Estas curvas son elipses. Calcule las curvas de intersección de $f_4(x, y)$ con el plano $x - z$ y con el plano $y - z$.

(c) Repita el Apartado (b) para $a = 1/4$.

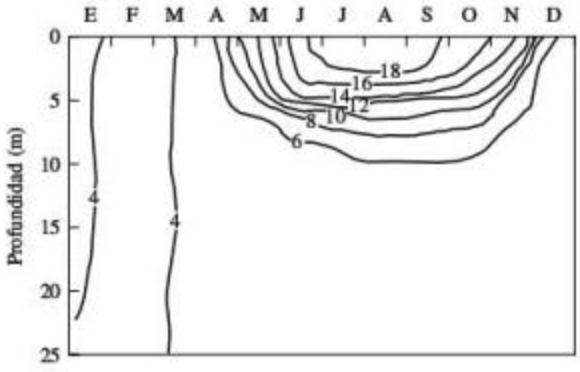
(d) Explique con palabras cómo cambian con a las superficies $f_a(x, y)$.

16. La gráfica de la Figura 10.25 muestra las isotermas de un lago en un clima correspondiente al hemisferio norte.

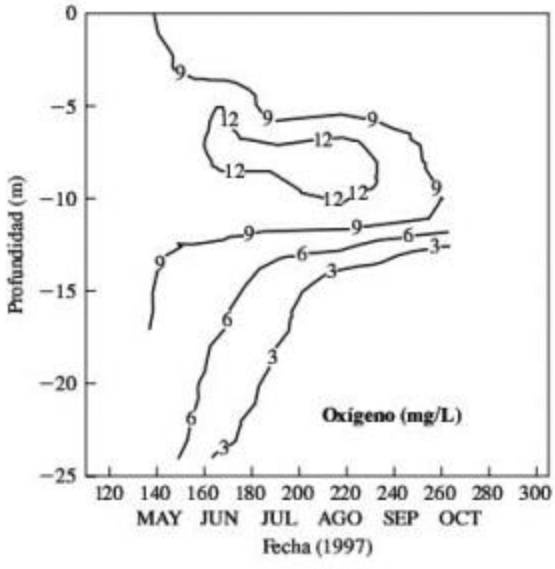
(a) Utilice la gráfica para dibujar los perfiles de temperatura en marzo y junio. Es decir, dibuje la temperatura en función de la profundidad en un día de marzo y en un día de junio.

(b) Explique cómo se puede deducir de esas gráficas de temperatura que el lago es **homeotérmico** en marzo. Es decir, tiene la misma temperatura desde la superficie hasta el fondo.

(c) Explique cómo se puede deducir de las gráficas de temperatura que el lago está **estratificado** en junio. Es decir, tiene una capa caliente en la superficie (denominada **epilimnio**, seguida de una región donde la temperatura cambia rápidamente (denominada **metalimnio**), seguida de una capa fría en el fondo (denominada **hipolimnio**).



▲ **Figura 10.25**
Isotermas de un algo típico del hemisferio norte



▲ **Figura 10.26**
Curvas de nivel de la concentración de oxígeno en Long Lake, Clear Water Country (Minessota). Cortesía de Leif Hembre

17. La Figura 10.26 muestra la concentración de oxígeno en Long Lake, Clear Water County (Minessota). La pulga de agua *Daphnia* sólo puede sobrevivir si la concentración de oxígeno es superior a 3 mg/l. Suponga que desea tomar muestras de la población de *Daphnia* los días 180, 200 y 220 de 1997 ¿Por debajo de qué profundidad estará razonablemente seguro de no encontrar ninguna?

18. Al principio de este capítulo se comentó la mínima temperatura requerida para la supervivencia en función de la producción metabólica de calor y la conductancia térmica del cuerpo. Suponga que desea ir de camping en invierno al norte de Minessota y la predicción de mínimas nocturnas es de -15 °F. Utilice la información expuesta al principio del capítulo para calcular el mínimo valor de g_{Hb} del saco de dormir que permitirá dormir de forma segura.

10.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

10.2.1 Definición informal de límite

Necesitaremos extender las nociones de límite y continuidad al caso de varias variables. Las ideas son las mismas que en el caso unidimensional. Sólo estudiaremos el caso bidimensional, pero debe tenerse en cuenta que todo lo que se presenta en esta sección se puede generalizar a dimensiones mayores.

Empezaremos con una definición informal de límite. Se dice que el «límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) se aproxima a (x_0, y_0) es igual a L» si $f(x, y)$ se puede hacer arbitrariamente próxima a L acercando suficientemente el punto (x, y) al punto (x_0, y_0) [pero sin llegar a hacerse igual a (x_0, y_0)]. Expresaremos esta idea de la siguiente forma

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

El siguiente ejemplo muestra cómo se calculan límites en casos simples.

Ejemplo 1

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0^2 = 0$

(b) $\lim_{(x,y)\to(4,-3)} (x^2 + y^2) = 4^2 + (-3)^2 = 25$

(c) $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x^2y = (-1)^2(2) = 2$ ◀

Como en el caso unidimensional, existe una definición formal de límite que es difícil de utilizar. Afortunadamente, existen leyes similares a las del caso unidimensional que permiten el cálculo de límites.

LEYES DE LOS LÍMITES PARA EL CASO BIDIMENSIONAL

Si a es una constante y si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$$

siendo L_1 y L_2 números reales, se cumplen las siguientes reglas.

1. (Regla de la suma)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

2. (Regla del factor constante)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} af(x,y) = a \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

3. (Regla del producto)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right] \times \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right]$$

4. (Regla del cociente)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$$

suponiendo que $L_2 \neq 0$.

Límites que existen

Ejemplo 2

(a)
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y + 3x) = \left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y\right) + \left(3 \lim_{(x,y)\to(1,2)} x\right)$$

$$= \left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y\right) + \left(3 \lim_{(x,y)\to(1,2)} x\right)$$

$$= (1)^2(2) + (3)(1) = 5$$

(b)
$$\lim_{(x,y)\to(-1,3)} \left(2y^2 - \frac{3x}{y}\right) = (2)(3)^2 - \frac{(3)(-1)}{3} = 18 + 1 = 19$$

(c)
$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{4y + 2x}{x^2 + 2xy - 3} = \frac{(4)(0) + (2)(2)}{(2)^2 + (2)(2)(0) - 3} = \frac{4}{4 - 3} = 4$$

Podemos ver en el Ejemplo 2 que los límites de polinomios y funciones racionales se pueden calcular simplemente evaluando las funciones en los puntos respectivos, suponiendo que las funciones están definidas en dichos puntos.

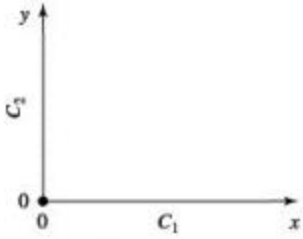
Límites que no existen En el caso unidimensional sólo es posible aproximarse a un número de dos formas: por la izquierda o por la derecha. Si los dos límites son diferentes, se dice que el límite no existe. En dos dimensiones, hay muchas formas de aproximarse al punto (x_0, y_0), concretamente, cualquier curva del plano $x - y$ que termine en dicho punto. Llamaremos a estas curvas **trayectorias**.

> Si $f(x, y)$ se aproxima a L_1 cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ siguiendo la trayectoria C_1 y $f(x, y)$ se aproxima a L_2 cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ siguiendo la trayectoria C_2, y $L_1 \neq L_2$, entonces el $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ no existe.

Ejemplo 3 Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

no existe.



▲ **Figura 10.27**
Las trayectorias C_1 y C_2 del Ejemplo 3

Solución

Hagamos primero $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo el eje x positivo. Es la curva C_1 que se muestra en la Figura 10.27. En C_1, $y = 0$ y $x > 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Hagamos ahora $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo el eje y positivo. Es la curva C_2 que se muestra en la Figura 10.27. En C_2, $x = 0$ e $y > 0$. Entonces

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Como $1 \neq -1$, se concluye que el límite no existe. ◀

A menos que tengamos mucha experiencia, no es fácil buscar trayectorias en las que los límites sean diferentes. Por tanto, en la sección de problemas, proporcionaremos siempre las trayectorias para comprobar los límites, en el caso de que el límite no exista.

Ejemplo 4 Demuestre que

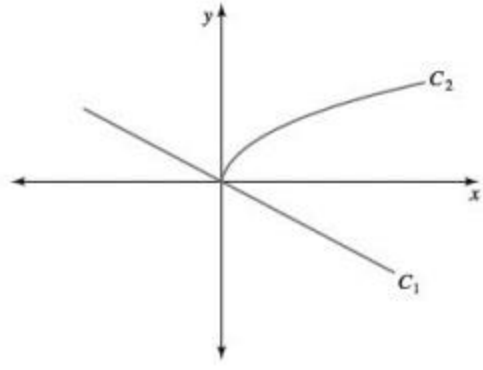
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{xy + y^3}$$

no existe.

Solución

Una elección natural de trayectorias hacia el punto (0, 0) son rectas de la forma $y = mx$. Se supone que $m \neq 0$. Si se sustituye $y = mx$ en el límite anterior, entonces $(x, y) \to (0, 0)$ se reduce a $x \to 0$ y se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{4mx^2}{mx^2 + (mx)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{1 + m^2x} = 4$$



◀ **Figura 10.28**
Las trayectorias C_1 y C_2 del Ejemplo 4

Es decir, a medida que nos acercamos a (0, 0) siguiendo la recta $y = mx$, $m \neq 0$. El límite es siempre 4, independientemente de m. Una trayectoria de este tipo, denominada C_1, se muestra en la Figura 10.28.

Podríamos sentir la tentación de decir que el límite existe. Pero veamos qué sucede cuando nos acercamos a (0, 0) siguiendo la parábola $x = y^2$. Es la curva de C_2 en la Figura 10.28. Sustituyendo x por y^2 se obtiene

$$\lim_{y \to 0} \frac{4y^3}{y^3 + y^3} = 2 \neq 4$$

Entonces, existen trayectorias por las que los límites son diferentes. Por tanto, el límite no existe. ◀

Para demostrar que un límite no existe, hay que encontrar dos trayectorias por las que los límites sean diferentes. Para demostrar que un límite existe, no se pueden utilizar las trayectorias, ya que los límites deben coincidir por *todas* las posibles trayectorias, y no hay forma de comprobarlas todas. Para demostrar que un límite existe, se procede como en el caso unidimensional. Concretamente, se combina la definición formal de límite con las leyes de los límites.

10.2.2 Definición formal de límite (opcional)

Recordemos la definición formal de límite en el caso unidimensional. Para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

hay que demostrar que siempre que x se acerca a 2 (pero sin ser igual a 2), entonces x^2 se acerca a 4. Formalmente, esto significa que hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 2| < \delta$$

Para generalizar esta idea a dimensiones más altas, es necesaria una noción de proximidad. En el caso unidimensional, se escoge un intervalo centrado en un punto particular que contiene todos los puntos a una distancia δ del centro del intervalo, excluyendo el centro del intervalo. En dos dimensiones, se sustituye el intervalo por un disco. Un disco de radio δ centrado en el punto (x_0, y_0) es el conjunto de todos los puntos que están a distancia menor (o menor o igual) que δ de $(x_0\ y_0)$.

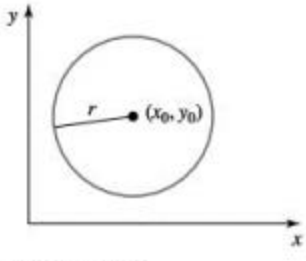
De igual forma que hay intervalos abiertos y cerrados, hay discos abiertos y cerrados. Tenemos así la siguiente definición.

Definición Un **disco abierto** de radio r centrado en $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ es el conjunto

$$B_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

Un **disco cerrado** de radio r centrado en $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ es el conjunto

$$\bar{B}_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\}$$



▲ **Figura 10.29**
Un disco cerrado de radio r centrado en (x_0, y_0)

Por tanto, en un disco abierto la curva de la frontera no es parte del disco, y un disco cerrado contiene a la curva de la frontera. Esto es análogo al caso de los intervalos. Un intervalo abierto no contiene a sus dos extremos (que son su frontera), mientras que un intervalo cerrado sí los contiene. La Figura 10.29 muestra un disco cerrado.

Al definir $\lim_{x \to x_0} f(x)$ resaltamos que el valor de f en x_0 no es importante. Esto se expresa en la definición formal $\varepsilon - \delta$ excluyendo el punto x_0 del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, expresándolo en la forma $0 < |x - x_0| < \delta$. Al generalizar la definición de límite a dos dimensiones hay que hacer lo mismo. Denominaremos $B_\delta(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}$ al disco abierto de radio δ centrado en (x_0, y_0), sin incluir el centro (x_0, y_0). Ahora ya se puede generalizar a dos dimensiones la definición de límite.

Definición El límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) se aproxima a (x_0, y_0), que se escribe

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

es el número L tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}$$

La definición es muy similar a la de una dimensión. Se requiere que siempre que (x, y) se acerque a (x_0, y_0) (pero sin ser igual), $f(x, y)$ se acerque a L.

Presentaremos seguidamente un ejemplo en el que se utiliza la definición formal de límite. Después usaremos las leyes de los límites, que son extensiones de las correspondientes leyes en el caso unidimensional. El uso de la definición formal es difícil, y no necesitaremos emplearla en adelante. No obstante, el ejemplo puede ayudar a entender la definición.

Ejemplo 5 Sea

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Demuestre que

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$$

Solución

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad (x, y) \in B_\delta(0, 0) - \{(0, 0)\}$$

Tenemos que $(x, y) \in B_\delta(0, 0)$ si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, o $x^2 + y^2 < \delta^2$. Hay que demostrar que $|x^2 + y^2| < \varepsilon$. Esto sugiere que se debe escoger δ de forma que $\delta^2 = \varepsilon$. Tomemos ese valor y hagamos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

implica que

$$|x^2 + y^2| < \varepsilon$$

Pero esto es lo que queríamos demostrar. En otras palabras, hemos demostrado que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ (concretamente $\delta = \sqrt{\varepsilon}$) de forma que siempre que (x, y) se acerque a $(0, 0)$, $x^2 + y^2$ se acerque a 0. ◀

10.2.3 Continuidad

La definición de continuidad es también análoga a la del caso unidimensional.

Una función $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x, y)$ está definida en (x_0, y_0)
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Ejemplo 6 Demuestre que

$$f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$$

es continua en $(0, 0)$.

Solución

1. $f(x, y)$ está definida en $(0, 0)$. Concretamente,

$$f(0, 0) = 2$$

2. Para demostrar que existe el límite, nos remitimos al Ejemplo 1(a), cuyo resultado fue

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2) = 0$$

lo que indica que el límite existe. Utilizando las leyes de los límites, se concluye que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 2 + \lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)$$

existe.

3. Utilizando que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2) = 0$$

se obtiene

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (2 + x^2 + y^2) = 2 + \lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2) = 2 + 0 = 2$$

Como $f(0, 0) = 2$, hemos demostrado que $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$. ◀

Ejemplo 7 Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es discontinua en (0, 0).

Solución

La función $f(x, y)$ está definida en (0, 0). Por tanto, la condición (1) se cumple. Pero en el Ejemplo 3 demostramos que

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$$

no existe. Por tanto, la condición (2) no se cumple y se concluye que $f(x, y)$ es discontinua en $(x, y) = (0, 0)$. ◀

Composición de funciones Utilizando la definición de continuidad y las reglas del cálculo de límites, se puede demostrar que las funciones polinómicas de dos variables (es decir, funciones que son suma de términos de la forma $ax^n y^m$, siendo a una constante y n y m enteros no negativos) son continuas.

Si se realizan composiciones de funciones se puede obtener una clase mucho más grande de funciones continuas. Por ejemplo, la función $h(x, y) = e^{x^2+y^2}$ se puede expresar como composición de dos funciones. Concretamente, si se hace $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(z) = e^z$, entonces

$$h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g[f(x, y)] = e^{x^2+y^2}$$

Otro ejemplo puede ser $h(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$. En este caso, $z = f(x, y) = y^2 - x$ y $g(z) = \sqrt{z}$. Entonces $h(x, y) = (g \circ f)(x, y)$. De forma más general, si

$$f : D \to \mathbf{R}, \quad D \subset \mathbf{R}^2$$

y

$$g : I \to \mathbf{R}, \quad I \subset \mathbf{R}$$

entonces la composición $(g \circ f)(x, y)$ se define así:

$$h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g[f(x, y)]$$

Se puede demostrar que si f es continua en y (x_0, y_0) y g es continua en $z = f(x_0, y_0)$, entonces

$$h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g[f(x, y)]$$

es continua en (x_0, y_0). Como ejemplo, volvamos a la función

$$h(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

Siendo $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(z) = e^z$, $h(x, y) = g[f(x, y)]$ es continua, ya que $f(x, y)$ es continua para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ y $g(z)$ es continua para todo z perteneciente al recorrido de $f(x, y)$. Asimismo, $h(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$ es continua para todo $(x, y) \in \{(x, y) : y^2 - x \geq 0\}$, ya que $z = f(x, y) = y^2 - x$ es continua para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, y $g(z) = \sqrt{z}$ es continua para todo $z \geq 0$.

10.2.4. Problemas

(10.2.1)

En los Problemas 1-8, utilice las propiedades de los límites para calcularlos.

1. $\lim_{(x, y) \to (1, 0)} (x^2 - 3y^2)$
2. $\lim_{(x, y) \to (-1, 1)} (2xy + 3x^2)$
3. $\lim_{(x, y) \to (0, 2)} \left(4xy^2 - \frac{x+1}{y}\right)$
4. $\lim_{(x, y) \to (1, 1)} (x^2 + y^2)$
5. $\lim_{(x, y) \to (0, 1)} \frac{2xy - 3}{x^2 + y^2 + 1}$
6. $\lim_{(x, y) \to (-1, -2)} \frac{x^2 - y^2}{2xy + 2}$

7. $\lim_{(x, y)\to(2, 0)} \frac{2x+4y^2}{y^2+3x}$

8. $\lim_{(x, y)\to(1, -2)} \frac{2xy^2+y}{2xy+3y}$

9. Demuestre que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$$

no existe, calculando el límite siguiendo una trayectoria por el eje x positivo y otra por el eje y positivo.

10. Demuestre que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

no existe, calculando el límite siguiendo una trayectoria por el eje x positivo y otra por el eje y positivo.

11. Calcule

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

siguiendo trayectorias por el eje x, por el eje y, y por la recta $y = x$ ¿Qué se puede concluir?

12. Calcule

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3xy}{x^2 + y^3}$$

siguiendo trayectorias de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$. ¿Qué se puede concluir?

13. Calcule

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2xy}{x^3 + yx}$$

siguiendo trayectorias de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$, y siguiendo la parábola $y = x^2$. ¿Qué se puede concluir?

14. Calcule

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y^2}{x^3 + y^6}$$

siguiendo trayectorias de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$, y siguiendo la parábola $x = y^2$. ¿Qué se puede concluir?

(10.2.2)

15. Dibuje un disco abierto en el plano $x - y$, de radio 2 centrado en el punto $(1, -1)$, y proporcione una descripción matemática de este conjunto.

16. Dibuje un disco cerrado en el plano $x - y$, de radio 3 centrado en el punto $(2, 0)$, y proporcione una descripción matemática de este conjunto.

17. Proporcione una interpretación geométrica del conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} < 3\right\}$$

18. Proporcione una interpretación geométrica del conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10} < 2\right\}$$

19. Sea

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

Utilice la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$$

20. Sea

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

Utilice la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$$

(10.2.3)

21. Utilice la definición de continuidad para demostrar que

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

es continua en el punto $(0, 0)$.

22. Utilice la definición de continuidad para demostrar que

$$f(x, y) = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$$

es continua en el punto $(0, 0)$.

23. Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2 + y^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es discontinua en el punto $(0, 0)$. (*Sugerencia*: utilice el Problema 11.)

24. Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2 + y^3} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es discontinua en el punto $(0, 0)$. (*Sugerencia*: utilice el Problema 12.)

25. Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^3 + yx} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es discontinua en el punto $(0, 0)$. (*Sugerencia*: utilice el Problema 13.)

26. Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^3 + y^6} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es discontinua en el punto $(0, 0)$. (*Sugerencia*: utilice el Problema 14.)

27. **(a)** Escriba

$$h(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

en forma de composición de dos funciones.

(b) ¿Para qué valores de (x, y) es $h(x, y)$ continua?

28. **(a)** Escriba

$$h(x, y) = \sqrt{x + y}$$

en forma de composición de dos funciones.

(b) ¿Para qué valores de (x, y) es $h(x, y)$ continua?

29. **(a)** Escriba

$$h(x, y) = e^{xy}$$

en forma de composición de dos funciones.

(b) ¿Para qué valores de (x, y) es $h(x, y)$ continua?

30. **(a)** Escriba

$$h(x, y) = \cos(y - x)$$

en forma de composición de dos funciones.

(b) ¿Para qué valores de (x, y) es $h(x, y)$ continua?

10.3 DERIVADAS PARCIALES

10.3.1 Funciones de dos variables

Suponga que la respuesta de un organismo depende de varias variables independientes. Para estudiar esta dependencia, un diseño experimental habitual es medir

la respuesta al cambio en una variable manteniendo la otra constante. Por ejemplo, Pisek *et al.* (1969), midieron la asimilación neta de CO_2 del *Ranunculus glacialis*, un miembro de la familia de los ranúnculos, en función de la temperatura manteniendo constante la intensidad de luz. Repitiendo el experimento con diferentes intensidades de luz, fueron capaces de determinar cómo cambia la asimilación neta de CO_2 en función de la temperatura y de la intensidad de luz.

Este diseño experimental ilustra la idea en la que se basan las derivadas parciales. Supongamos que se desea saber cómo varía la función $f(x, y)$ cuando cambian x e y. En vez de variar simultáneamente las dos variables, se puede obtener una idea de la forma en la que depende $f(x, y)$ de x e y cambiando una de las variables mientras se mantiene la otra constante.

Para ilustrar esta idea, sea la función

$$f(x, y) = x^2y$$

Se desea saber cómo varía $f(x, y)$ si se modifica una de las variables, por ejemplo x y se mantiene constante la otra variable, en este caso y. Si se fija $y = y_0$, entonces la variación de f con respecto a x es simplemente la derivada de f con respecto a x particularizada en $y = y_0$. Es decir,

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0) = \frac{d}{dx} x^2y_0 = 2xy_0$$

Esta derivada se denomina derivada parcial.

Definición Sea f una función de dos variables independientes x e y. La **derivada parcial** de f con respecto a x se define así:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

La derivada parcial de f con respecto a y se define así:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Para indicar derivada parcial, se utiliza el signo «∂» en vez de «d». También se utiliza la notación

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

En la definición de derivadas parciales se puede reconocer la definición formal de derivada que presentamos en el Capítulo 4. Concretamente, para calcular $\partial f/\partial x$, se evalúa el cociente de la diferencia en los valores de f, $f(x + h, y) - f(x, y)$ y la diferencia en los valores de x, $x + h - x$. La otra variable, y, no se modifica. Después se hace tender h a 0.

Para calcular $\partial f(x, y)/\partial x$ se deriva f con respecto a x tratando y como si fuera una constante. La notación $\partial f(x, y)/\partial x$ se lee «derivada parcial de f de x e y con respecto a x». La notación $f_x(x, y)$ se lee «f sub x de x e y».

El cálculo de derivadas parciales no es diferente del cálculo de derivadas de funciones de una variable, ya que al mantener constantes todas las variables excepto una, el cálculo de la derivada parcial se reduce al cálculo de la derivada de una función de una variable. Sólo hay que tener en cuenta qué variables se fijan y qué variable varía.

Ejemplo 1 Calcule $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para

$$f(x, y) = ye^{xy}$$

Solución

Para calcular $\partial f/\partial x$ se trata y como si fuera una constante y se deriva f con respecto a x utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}) = ye^{xy}y = y^2e^{xy}$$

Para calcular $\partial f/\partial y$ se trata x como si fuera una constante y se deriva f con respecto a y utilizando la regla del producto en combinación con la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) \\ &= 1 \cdot e^{xy} + ye^{xy}x \\ &= e^{xy}(1 + xy)\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 2 Calcule $\partial f/\partial x$ para

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + \cos y}$$

Solución

Se trata y como si fuera constante y se utiliza la regla del cociente.

$$u = \operatorname{sen}(xy) \qquad v = x^2 + \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(xy) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

Por tanto,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y(x^2 + \cos y)\cos(xy) - 2x\operatorname{sen}(xy)}{(x^2 + \cos y)^2}$$

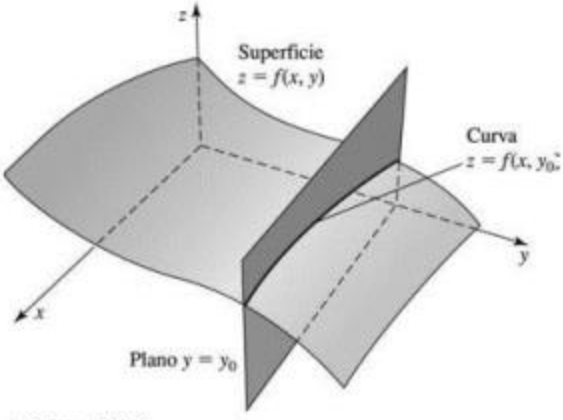
◀

Interpretación geométrica Como en el caso de las derivadas ordinarias, las derivadas parciales representan pendientes de rectas tangentes a ciertas curvas. Dichas curvas están en la superficie $z = f(x, y)$.

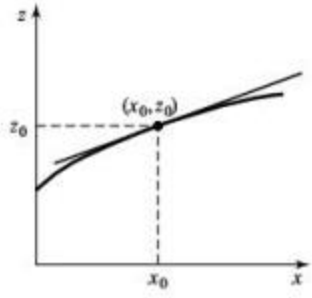
Comencemos con la interpretación de $\partial f/\partial x$. Se hace $y = y_0$. Entonces, $f(x, y_0)$ en función de x se obtiene como la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con un plano vertical paralelo al plano $x - z$ y que pasa por $y = y_0$. La curva de intersección es la gráfica de $z = f(x, y_0)$ tal como se muestra en la Figura 10.30.

Ahora se puede proyectar esta curva en el plano $x - z$, como se muestra en la Figura 10.31. La curva es la gráfica de una función que depende sólo de x. Entonces, se puede calcular la pendiente de la recta tangente en cualquier punto P de coordenadas (x_0, z_0) siendo $z_0 = f(x_0, y_0)$. La pendiente de la recta tangente está dada por la derivada de la función f en la dirección x, es decir, por $\partial f/\partial x$. Este es el significado geométrico de $\partial f/\partial x$. El siguiente recuadro resume estas ideas.

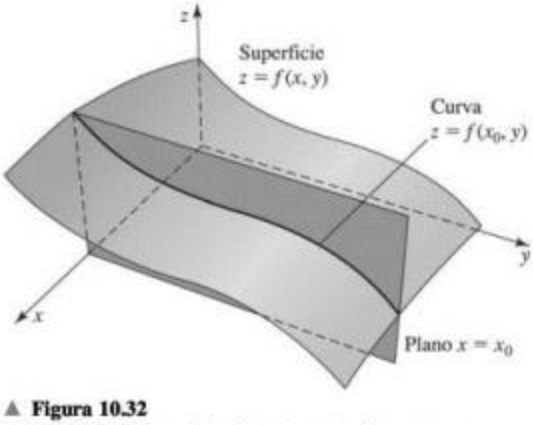
> La derivada parcial $\partial f/\partial x$ evaluada en (x_0, y_0) es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$.



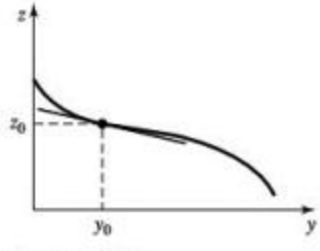
▲ **Figura 10.30**
Intersección de superficie $f(x, y)$ con el plano $y = y_0$



▲ **Figura 10.31**
Proyección de la curva $z = f(x, y_0)$ en el plano $x - z$



▲ **Figura 10.32**
Intersección de superficie $f(x, y)$ con el plano $x = x_0$



▲ **Figura 10.33**
Proyección de la curva $z = f(x_0, y)$ en el plano $y - z$

La derivada $\partial f/\partial y$ tiene un significado similar. Esta vez se hace $x = x_0$ y se corta la superficie $z = f(x, y)$ con un plano vertical paralelo al plano $y - z$ que pasa por $x = x_0$. La curva de intersección es la gráfica de $z = f(x_0, y)$, como muestra la Figura 10.32.

La proyección de esta curva en el plano $y - z$ junto con la recta tangente en (y_0, z_0) se ilustra en la Figura 10.33. De forma análoga a la interpretación de $\partial f/\partial x$, el significado geométrico de $\partial f/\partial y$ es el siguiente.

La derivada parcial $\partial f/\partial y$ evaluada en (x_0, y_0) es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x_0, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = (x_0, y_0)$.

Ejemplo 3 Sea

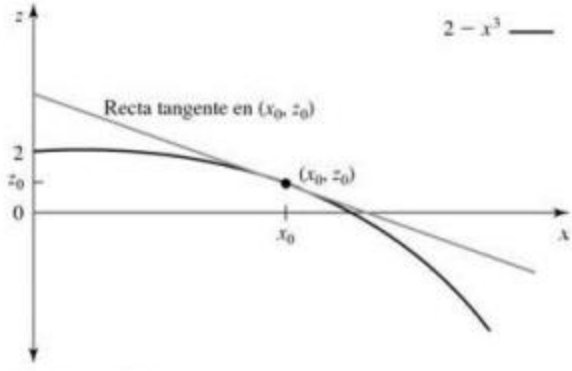
$$f(x, y) = 3 - x^3 - y^2$$

Calcule $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$, e interprete geométricamente los resultados.

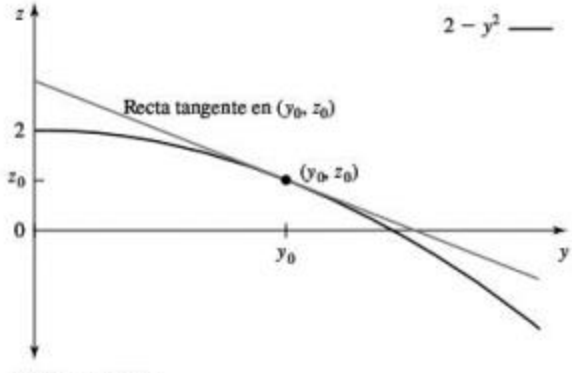
Solución

Tenemos

$$f_x(x, y) = -3x^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$



▲ **Figura 10.34**
Curva de intersección de la gráfica $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. Se dibuja la curva en el plano de intersección junto con su recta tangente en (x_0, z_0)



▲ **Figura 10.35**
Curva de intersección de la gráfica $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$. Se dibuja la curva en el plano de intersección junto con su recta tangente en (y_0, z_0)

Entonces,

$$f_x(1, 1) = -3 \qquad \text{y} \qquad f_y(1, 1) = -2$$

Para interpretar geométricamente $f_x(1, 1)$, se hace $y = 1$. El plano vertical $y = 1$ corta a la gráfica de $f(x, y)$. La curva de intersección tiene pendiente -3 cuando $x = 1$. La Figura 10.34 muestra la proyección de la curva de intersección.

De forma análoga, para interpretar $f_y(1, 1)$, se corta la gráfica de $f(x, y)$ con el plano vertical $x = 1$. La recta tangente a la curva de intersección tiene pendiente -2 cuando $y = 1$. La Figura 10.35 muestra la proyección de la curva de intersección. ◀

Una aplicación biológica

Ejemplo 4 Holling (1959) obtuvo una expresión del número de presas devoradas por un depredador, P_e, durante el intervalo de tiempo T, en función de la densidad de presas N y el tiempo dedicado a cada presa, T_h:

$$P_e = \frac{aNT}{1 + aT_hN} \tag{10.1}$$

siendo a una constante positiva (la tasa de ataque del depredador). La Ecuación (10.1) se denomina ecuación del disco de Holling [Holling obtuvo la Ecuación (10.1) midiendo cuántos discos de papel de lija (que representaban a las presas) podía encontrar un ayudante con los ojos vendados (que representaba al depredador) durante un cierto intervalo de tiempo]. P_e se puede considerar función de N y T_h.

Para calcular cómo influye el tiempo dedicado a cada presa en el número de presas devoradas se calcula

$$\frac{\partial P_e(N, T_h)}{\partial T_h} = aNT(-1)(1 + aT_hN)^{-2}aN$$

$$= -\frac{a^2N^2T}{(1 + aT_hN)^2} < 0$$

ya que $a^2N^2T > 0$ y $(1 + aT_hN)^2 > 0$. Como $\partial P_e/\partial T_h$ es negativa, el número de presas devoradas disminuye al aumentar el tiempo dedicado a cada presa, como podría esperarse.

Para determinar cómo varía P_e con N se calcula

$$\frac{\partial P_e(N, T_h)}{\partial N} = \frac{aT(1 + aT_hN) - aNTaT_h}{(1 + aT_hN)^2}$$

$$= \frac{aT}{(1 + aT_hN)^2} > 0$$

ya que $aT > 0$ y $(1 + aT_hN)^2 > 0$. Como $\partial P_e/\partial N$ es positiva, el número de presas devoradas crece al aumentar la densidad de presas, como podría esperarse. ◀

10.3.2 Funciones de más de dos variables

La definición de derivadas parciales se puede ampliar de forma inmediata a funciones de más de dos variables. Se calculan como las derivadas ordinarias con respecto a una variable considerando las otras variables como constantes.

Ejemplo 5 Sea f una función de las variables independientes x, y, y z

$$f(x, y, z) = e^{yz}(x^2 + z^3)$$

Calcule $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$.

Solución

Para calcular $\partial f/\partial x$ se deriva f con respecto a x tratando y y z como si fueran constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz}2x$$

Asimismo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ze^{yz}(x^2 + z^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^{yz}(x^2 + z^3) + e^{yz}3z^2$$ ◀

10.3.3 Derivadas parciales de orden superior

Como en el caso de funciones de una variable, en funciones de más de una variable se pueden definir también derivadas de orden superior. Por ejemplo, para obtener la derivada parcial segunda de $f(x, y)$ con respecto a x, denominada $\partial^2 f/\partial x^2$, se calcula

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$\partial^2 f/\partial x^2$ se puede escribir también como f_{xx}.

Se pueden calcular también **derivadas mixtas**. Por ejemplo

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Nótese el subíndice «yx» de f y el orden $\partial x \partial y$ en el denominador. Las dos notaciones significan que se deriva primero con respecto a y.

Ejemplo 6 Sea

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + xe^y$$

Calcule $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, y $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Solución

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} x + xe^y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[\cos x + e^y] = -\operatorname{sen} x$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x + xe^y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[0 + xe^y] = e^y$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} x + xe^y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[\cos x + e^y] = e^y$$

◀

En el ejemplo anterior podemos ver que $f_{xy} = f_{yx}$, lo que implica que el orden de derivación no importa. Aunque esto no se cumple siempre, existen condiciones que garantizan que el orden de derivación en derivadas parciales mixtas no es relevante. Para enunciar este teorema, es necesario conocer las nociones de disco abierto y disco cerrado, que recordamos a continuación.

Definición Un **disco abierto** de radio r centrado en $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ es el conjunto

$$B_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

Un **disco cerrado** de radio r centrado en $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ es el conjunto

$$\bar{B}_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leqslant r\right\}$$

En un disco abierto la frontera no es parte del disco, mientras que un disco cerrado sí contiene a la frontera. Esto es análogo al caso de los intervalos. Un intervalo abierto no contiene a sus dos extremos (que son su frontera), mientras que un intervalo cerrado sí los contiene.

Ahora podemos enunciar el teorema de las derivadas mixtas.

Teorema de las derivadas mixtas Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}, son continuas en un disco abierto centrado en el punto (x_0, y_0), entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

La definición de derivadas parciales de orden superior es inmediata. Por ejemplo, si f es una función de las variables independientes x e y, entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Podemos ilustrar esta idea con la función

$$f(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x$$

para la que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(2y \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2y \cos x) = -2y \operatorname{sen} x$$

y

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(2y \operatorname{sen} x) = \frac{\partial}{\partial x}(2 \operatorname{sen} x) = 2 \cos x$$

y así sucesivamente.

El teorema de las derivadas mixtas se puede extender a derivadas de orden superior. El orden de derivación no importa mientras la función y sus derivadas hasta el orden utilizado sean continuas en un disco abierto centrado en el punto donde se desea calcular la derivada. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(y^2 \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(2y \cos x) = 2 \cos x$$

que es lo mismo que $\partial^3 f/(\partial x \partial y^2)$.

10.3.4. Problemas

(10.3.1)

En los Problemas 1-16, calcule $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para las funciones dadas.

1. $f(x, y) = x^2y + xy^2$

2. $f(x, y) = 2x\sqrt{y} - \frac{1}{xy}$

3. $f(x, y) = (xy)^{3/2} - (xy)^{2/3}$

4. $f(x, y) = x^3y^4 - \frac{1}{x^3y^4}$

5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$

6. $f(x, y) = \tan(x - y)$

7. $f(x, y) = \cos^2(x^2 - 2y)$

8. $f(x, y) = \sec(y^2x - x^2)$

9. $f(x, y) = e^{\sqrt{x+y}}$

10. $f(x, y) = x^2e^{-xy}$

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$

12. $f(x, y) = e^{-y^2}\cos(x^2 + y^2)$

13. $f(x, y) = \ln(2x + y)$

14. $f(x, y) = \ln(3x^2 - y)$

15. $f(x, y) = \log_3(y^2 - x^2)$

16. $f(x, y) = \log_5(3xy)$

En los Problemas 17-24, calcule las derivadas parciales que se indican.

17. $f(x, y) = 3x^2 - y - 2y^2$; $f_x(1, 0)$

18. $f(x, y) = x^{1/3}y - xy^{1/3}$; $f_y(1, 1)$

19. $g(x, y) = e^{x+3y}$; $g_y(2, 1)$

20. $h(u, v) = e^u \operatorname{sen}(u + v)$; $h_u(1, -1)$

21. $f(x, z) = \ln(xz)$; $f_z(e, 1)$

22. $g(v, w) = \frac{w^2}{v+w}$; $g_v(1, 1)$

23. $f(x, y) = \frac{xy}{x^3+2}$; $f_x(-1, 2)$

24. $f(u, v) = e^{u^2/2}\ln(u + v)$; $f_u(2, 1)$

25. Sea

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

Calcule $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$ e interprételas geométricamente.

26. Sea

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Calcule $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$ e interprételas geométricamente.

27. Sea

$$f(x, y) = 1 + x^2y$$

Calcule $f_x(-2, 1)$ y $f_y(-2, 1)$ e interprételas geométricamente.

28. Sea

$$f(x, y) = 2x^3 - 3yx$$

Calcule $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprételas geométricamente.

29. En el Ejemplo 4 se estudió la ecuación del disco de Holling

$$P_e = \frac{aNT}{1 + aT_hN}$$

(*véase* el Ejemplo 4 para la interpretación de esta ecuación). Se considera ahora P_e función de la tasa de ataque del depredador, a, y de la longitud del intervalo temporal en el que el depredador busca alimento, T.

(a) Determine cómo influye la tasa de ataque del depredador, a, en el número de presas devoradas por depredador.

(b) Determine cómo influye la longitud del intervalo temporal, T, en el número de presas devoradas por depredador.

30. Suponga que la velocidad de crecimiento per cápita de las presas en el instante t depende de la densidad de presas en dicho instante, $H(t)$, y de la densidad de depredadores en dicho instante, $P(t)$. Asuma que la relación es la siguiente:

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = r\left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP \tag{10.2}$$

siendo r, K y a constantes positivas. El miembro derecho de (10.2) es función de la densidad de presas y de la densidad de depredadores. Estudie cómo afecta a la velocidad de crecimiento per cápita de esta especie de presas un incremento en (a) la densidad de presas y (b) la densidad de depredadores.

(10.3.2)

En los Problemas 31-38, calcule $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ para las funciones dadas.

31. $f(x, y, z) = x^2z + yz^2 - xy$

32. $f(x, y, z) = xyz$

33. $f(x, y, z) = x^3y^2z + \frac{x}{yz}$

34. $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^3+y^2+z^2}$

35. $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$

36. $f(x, y, z) = e^{yz}\operatorname{sen}x$

37. $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$

38. $f(x, y, z) = y\tan(x^2 + z)$

(10.3.3)

En los Problemas 39-48, calcule las derivadas parciales que se indican.

39. $f(x, y) = x^2y + xy^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

40. $f(x, y) = y^3(x - y)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

41. $f(x, y) = xe^y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

42. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

43. $f(u, w) = \tan(u + w)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

44. $g(s, t) = \ln(s^2 + 3t)$; $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$

45. $f(x, y) = x^3\cos y$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

46. $f(x, y) = e^{x-y}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

47. $f(x, y) = \ln(x + y)$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$

48. $f(x, y) = \operatorname{sen}(3xy)$; $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

49. Las respuestas funcionales de algunos depredadores son sigmoidales. Es decir, el número de presas atacadas por depredador en función de la densidad de presas tiene forma sigmoidal.

Si se denomina N a la densidad de presas, P a la densidad de depredadores, T al tiempo disponible para la búsqueda de presas y T_h el tiempo que dedica un depredador a la presa, entonces el número de presas que encuentra un depredador en función de N, T y T_h tiene la expresión

$$f(N, T, T_h) = \frac{b^2N^2T}{1 + cN + bT_hN^2}$$

siendo b y c constantes positivas.

(a) Estudie cómo afecta a la función $f(N, T, T_h)$ un incremento en la densidad de presas N.

(b) Estudie cómo afecta a la función $f(N, T, T_h)$ un incremento en el tiempo disponible para búsqueda de presas T.

(c) Estudie cómo afecta a la función $f(N, T, T_h)$ un incremento en el tiempo que dedica un depredador a cada presa T_h.

(d) Dibuje $f(N, T, T_h)$ en función de N para los valores $T = 2.4$ horas, $T_h = 0.2$ horas, $b = 0.8$ y $c = 0.5$.

50. En este problema se estudia cómo afecta la interferencia mutua de parasitoides en la eficiencia de su búsqueda de huéspedes. Suponga que N es la densidad e huéspedes y P la densidad de parasitoides. Un modelo que se utiliza frecuentemente en las interacciones huésped-parasitoide es el modelo de **Nicholson-Bailey** (Nicholson, 1933; Nicholson y Bailey, 1935), en el que se supone que el número de huéspedes parasitados, denominado N_a, se expresa como

$$N_a = N[1 - e^{-bP}] \tag{10.3}$$

siendo b la eficiencia de búsqueda.

(a) Demuestre que

$$b = \frac{1}{P} \ln \frac{N}{N - N_a}$$

despejando b en (10.3).

(b) Considere

$$b = f(P, N, N_a) = \frac{1}{P} \ln \frac{N}{N - N_a}$$

como función de P, N y N_a. ¿Cómo afecta a la eficiencia de búsqueda b un incremento en la densidad de parasitoides?

(c) Suponga ahora que la fracción de huéspedes parasitados depende de la densidad de huéspedes. Es decir, suponga que

$$N_a = g(N)$$

siendo $g(N)$ una función no negativa y derivable. La eficiencia de búsqueda b se puede expresar en función de P y N, concretamente,

$$b = h(P, N) = \frac{1}{P} \ln \frac{N}{N - g(N)}$$

¿Cómo depende la eficiencia de búsqueda de la densidad de huéspedes cuando $g(N)$ es una función decreciente con N? (Utilice el hecho de que $g(N) < N$).

51. Leopold y Kriedemann (1975) midieron la velocidad de crecimiento de cultivos de girasoles en función del índice de área de las hojas y del porcentaje de luz solar directa (el índice de área de la hoja es el cociente entre el área de la superficie de la hoja y el área de tierra que cubre la planta). Obtuvieron que dado un nivel fijo de luz solar, la velocidad de crecimiento del cultivo en función del índice de área de las hojas primero crece y después decrece. Para un índice de área de las hojas determinado, la velocidad de crecimiento del cultivo aumenta con el nivel de luz solar. El índice de área de las hojas que maximiza la velocidad de crecimiento del cultivo es una función creciente con el nivel de luz solar. Dibuje la velocidad de crecimiento del cultivo en función del índice de área de las hojas para diversos porcentajes de luz solar directa.

10.4 PLANOS TANGENTES, FUNCIONES DERIVABLES Y LINEALIZACIÓN

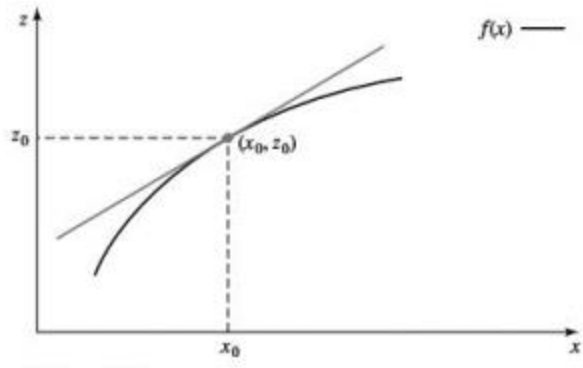
10.4.1 Funciones de dos variables

Planos tangentes Suponga que $z = f(x)$ es derivable en $x = x_0$. La ecuación de la recta tangente a $z = f(x)$ en (x_0, z_0) con $z_0 = f(x_0)$ es

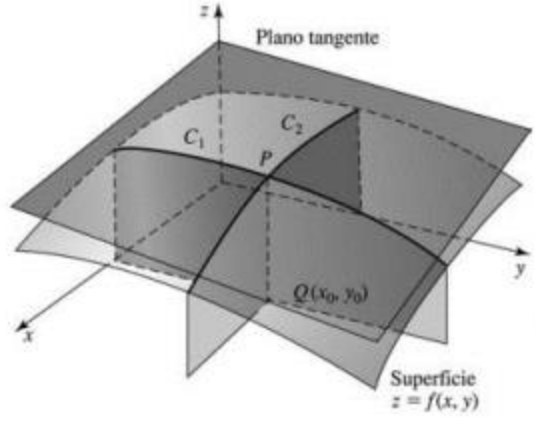
$$z - z_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{10.4}$$

como se ilustra en la Figura 10.36.

Generalizaremos a continuación esta idea a funciones de dos variables. El análogo a la recta tangente se denomina **plano tangente**, como el que se muestra en la Figura 10.37. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. En la sección anterior hemos visto que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, evaluadas en (x_0, y_0), son las pendientes de las rectas tangentes en el punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$, a ciertas curvas que pasan por (x_0, y_0, z_0) en la superficie $z = f(x, y)$. Estas dos rectas tangentes, una de ellas en la dirección x y la otra en la dirección y, definen un único plano. Además, si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas en un disco abierto que contenga al punto (x_0, y_0), entonces se puede demostrar que la recta tangente en (x_0, y_0, z_0) a cualquier otra curva suave sobre la superficie $z = f(x, y)$ que pase por (x_0, y_0, z_0) está contenida en dicho plano. Este plano se denomina entonces plano tangente.



▲ **Figura 10.36**
La curva $z = f(x)$ con su recta tangente en el punto (x_0, z_0)



◀ **Figura 10.37**
La superficie $z = f(x, y)$ con su plano tangente en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$

Utilizaremos las dos rectas tangentes originales mencionadas anteriormente para calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0). Sea C_1 la curva que se obtiene como intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con un plano paralelo al plano $y - z$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) (es decir, el plano $x = x_0$). La recta tangente a esa curva en el punto (x_0, y_0, z_0) está contenida en el plano tangente (*véase* la Figura 10.37). Asimismo, sea C_2 la curva que se obtiene como intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con un plano paralelo al plano $x - z$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) (es decir, el plano $y = y_0$). La recta tangente a esa curva en el punto (x_0, y_0, z_0) está contenida en el plano tangente (*véase* la Figura 10.37).

En la Sección 9.4 obtuvimos la ecuación general de un plano, concretamente

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{10.5}$$

Utilizaremos las curvas C_1 y C_2 para determinar las constantes A y B. La curva C_1 satisface la ecuación

$$z = f(x_0, y)$$

La recta tangente a C_1 en el punto (x_0, y_0, z_0) cumple entonces

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \tag{10.6}$$

La recta tangente en (x_0, y_0, z_0) está contenida en el plano tangente en (x_0, y_0, z_0). Por tanto, la ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0, z_0) se puede obtener también

haciendo $x = x_0$ en (10.5). De este modo resulta

$$z - z_0 = (A)(0) + B(y - y_0)$$
$$= B(y - y_0)$$

Comparando esto con (10.6) se obtiene

$$B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Análogamente, utilizando C_2 resulta

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Por tanto, se llega al siguiente resultado.

Si existe el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0), entonces su ecuación es

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Es interesante observar la semejanza de esta ecuación con la de la recta tangente en (10.4). Posteriormente veremos que la mera existencia de las derivadas parciales $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ *no* es suficiente para garantizar la existencia de un plano tangente en (x_0, y_0). Se necesitan condiciones más fuertes. Pero antes de estudiar las condiciones bajo las que existe el plano tangente, veremos un ejemplo.

Ejemplo 1 Se puede demostrar que existe el plano tangente a la superficie

$$z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

en el punto (1, 2, 8). Calcule su ecuación.

Solución

Nótese primero que el punto (1, 2, 8) pertenece a la superficie $z = f(x, y)$ ya que $8 = f(1, 2)$. Para calcular el plano tangente hay que calcular las derivadas parciales de $f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

y evaluándolas en $(x_0, y_0) = (1, 2)$,

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = 8 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} = 4$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$z - 8 = 8(x - 1) + 4(y - 2)$$

La ecuación anterior se puede escribir de forma más compacta, concretamente,

$$z - 8 = 8x - 8 + 4y - 8$$

o

$$8x + 4y - z = 8$$

◀

Funciones derivables Estudiaremos a continuación las condiciones bajo las que existen los planos tangentes. Para ello, hay que definir lo que significa que una función de dos variables sea derivable. Para clarificar la conexión con funciones de una variable, recuérdese que la recta tangente se utiliza para aproximar linealmente la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Esta aproximación lineal se expresa mediante la ecuación

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{10.7}$$

La distancia entre $f(x)$ y su aproximación lineal en $x = x_0$ es entonces

$$|f(x) - L(x)| = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \tag{10.8}$$

Utilizando la definición de derivada, sabemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{10.9}$$

Si se divide (10.8) por la distancia entre x y x_0, $|x - x_0|$, se obtiene

$$\frac{|f(x) - L(x)|}{|x - x_0|} = \left|\frac{f(x) - L(x)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right|$$

Tomando el límite cuando $x \to x_0$ y utilizando (10.9) resulta

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x) - L(x)}{x - x_0}\right| = 0 \tag{10.10}$$

Se puede decir por tanto que $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ si se cumple la Ecuación (10.10).

La definición de funciones derivables de dos variables se basa en la misma idea. Antes de dar la definición, es necesario considerar un punto adicional. En el desarrollo anterior se ha dividido por la distancia entre x y x_0. En dos dimensiones, la distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) es $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Definición Sea $f(x, y)$ una función de dos variables y supongamos que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ están definidas en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0). Sea

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Entonces $f(x, y)$ es derivable en si (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \left|\frac{f(x, y) - L(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right| = 0$$

Además, si $f(x, y)$ es derivable en (x_0, y_0) entonces $z = L(x, y)$ define el plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Se dice que $f(x, y)$ es derivable si lo es en todos los puntos de su dominio.

La idea clave tanto en el caso unidimensional como en el bidimensional es aproximar las funciones utilizando funciones lineales, de forma que el error de la

aproximación tienda a cero a medida que nos acercamos al punto donde se aproxima la función [x_0 en el caso unidimensional y (x_0, y_0) y en el caso bidimensional].

Se cumple el siguiente teorema, como en el caso unidimensional.

Teorema Si $f(x, y)$ es derivable en (x_0, y_0), entonces es también continua en (x_0, y_0).

Decir que la función $f(x, y)$ es derivable en (x_0, y_0) significa que dicha función está cerca del plano tangente en el punto (x_0, y_0) para todo (x, y) que esté cerca de (x_0, y_0). Sin embargo, la mera existencia de las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ *no* es suficiente para garantizar que la función sea derivable (y, por tanto, para garantizar la existencia de un plano tangente en un punto dado). Presentamos seguidamente un ejemplo muy simple que muestra lo incorrecto de esa suposición.

Ejemplo 2 Suponga que

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Demuestre que las derivadas parciales $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$ existen, pero que $f(x, y)$ no es continua, y por tanto no es derivable, en $(0, 0)$.

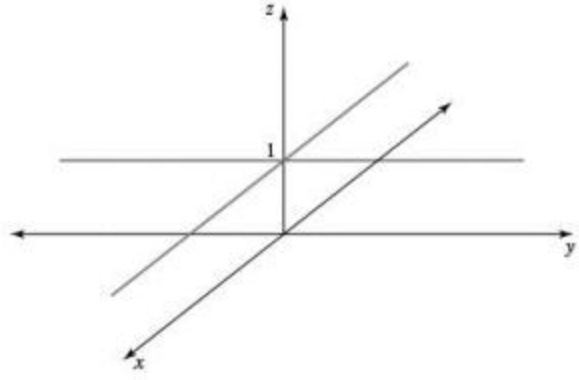
Solución

La Figura 10.38 muestra la gráfica de $f(x, y)$. Para calcular $\partial f/\partial x$ en $(0, 0)$ se hace $y = 0$. Entonces, $f(x, 0) = 1$ y por tanto

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$$

Asimismo, haciendo $x = 0$, resulta $f(0, y) = 1$ y por tanto

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$$



▲ **Figura 10.38**
Gráfica de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Aunque $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$ existen, la función no es continua en $(0, 0)$

Es decir, ambas derivadas parciales existen en (0, 0), pero $f(x, y)$ no es continua en (0, 0). Para ver que es así, es suficiente con demostrar que $f(x, y)$ tiene límites diferentes cundo se siguen dos trayectorias diferentes al aproximarse (x, y) a (0, 0). La primera trayectoria, que denominaremos C_1, es $y = 0$. Entonces

$$\lim_{\substack{C_1 \\ (x, y)\to(0, 0)}} f(x, y) = 1$$

La segunda trayectoria, que denominaremos C_2, es $y = x$. Entonces

$$\lim_{\substack{C_2 \\ (x, y)\to(0, 0)}} f(x, y) = 0$$

Como $1 \neq 0$, $f(x, y)$ no es continua en (0, 0). Como para ser derivable debe ser continua, se concluye que la función no es derivable en (0, 0). ◀

La definición de función derivable no es fácil de utilizar para comprobar si una función determinada es derivable en un cierto punto. Afortunadamente, existe otro criterio para comprobar si una función $f(x, y)$ es derivable que basta para la mayoría de los propósitos. En el Ejemplo 2 hemos visto que la mera existencia de las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ *no* es suficiente para garantizar que la función $f(x, y)$ sea derivable. Sin embargo, si las derivadas parciales son continuas en un disco centrado en (x_0, y_0), es suficiente para garantizar que la función es derivable.

CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE UNA FUNCIÓN SEA DERIVABLE

Sea $f(x, y)$ una función definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), y supongamos que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en un disco abierto centrado en (x_0, y_0). Entonces $f(x, y)$ es derivable en (x_0, y_0).

Ejemplo 3 Demuestre que $f(x, y) = 2x^2y - y^2$ es derivable para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Solución

Se utilizará la condición suficiente para que una función sea derivable. Obsérvese en primer lugar que $f(x, y)$ está definida para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 2y$$

Como $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son polinomios, son continuas para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ y por tanto, $f(x, y)$ es derivable para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. ◀

Linealización

Definición Sea $f(x, y)$ una función derivable en (x_0, y_0). La linealización de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

La aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

se denomina **aproximación lineal estándar** o **aproximación por plano tangente** de $f(x, y)$ en (x_0, y_0).

Ejemplo 4 Calcule la aproximación lineal a

$$f(x, y) = x^2y + 2xe^y$$

en el punto (2, 0).

Solución

La linealización de $f(x, y)$ en (2, 0) es

$$L(x, y) = f(2, 0) + \frac{\partial f(2, 0)}{\partial x}(x - 2) + \frac{\partial f(2, 0)}{\partial y}(y - 0)$$

Como, $f(2, 0) = 4$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2e^y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xe^y$$

Entonces

$$\frac{\partial f(2, 0)}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial f(2, 0)}{\partial y} = 4 + 4 = 8$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} L(x, y) &= 4 + 2(x - 2) + 8(y - 0) = 4 + 2x - 4 + 8y \\ &= 2x + 8y \end{aligned}$$

◀

Ejemplo 5 Calcule la aproximación lineal a

$$f(x, y) = \ln(x - 2y^2)$$

en el punto (3, 1) y utilícela para obtener una aproximación de $f(3.05, 0{,}95)$. Utilice una calculadora para obtener el valor de $f(3.05, 0.95)$ y compárelo con la aproximación.

Solución

La linealización de $f(x, y)$ en (3, 1) es

$$L(x, y) = f(3, 1) + \frac{\partial f(3, 1)}{\partial x}(x - 3) + \frac{\partial f(3, 1)}{\partial y}(y - 1)$$

Como $f(3, 1) = \ln(3 - 2) = \ln 1 = 0$,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{x - 2y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{-4y}{x - 2y^2}$$

Entonces

$$\frac{\partial f(3, 1)}{\partial x} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(3, 11)}{\partial y} = \frac{-4}{3 - 2} = -4$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} L(x, y) &= 0 + (1)(x - 3) + (-4)(y - 1) \\ &= x - 3 - 4y + 4 = x - 4y + 1 \end{aligned}$$

Utilizando (3.05, 0.95) resulta

$$L(3.05, 0.95) = 3.05 - (4)(0.95) + 1 = 0.25$$

Comparando con el valor de $f(3.05, 0.95) \approx 0.2191$ podemos ver que el error de la aproximación vale aproximadamente $|0.25 - 0.2191| = 0.031$. ◀

10.4.2 Funciones vectoriales

Hasta ahora sólo hemos considerado funciones reales,

$$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

Extenderemos ahora nuestro estudio a funciones cuyo recorrido es un subconjunto de $\mathbf{R}^m$, es decir,

$$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

Estas funciones se denominan **funciones vectoriales** ya que los valores que toman se pueden representar mediante vectores,

$$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

En la expresión anterior, las funciones $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ son funciones reales.

$$f_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

En el Capítulo 11 aparecerán muchas veces funciones vectoriales con $n = m = 2$. Por ejemplo, consideremos una comunidad formada por dos especies. Sean u y v las densidades respectivas de las dos especies, y $f(u, v)$ y $g(u, v)$ las velocidades de crecimiento per cápita de las dos especies en función de las densidades u y v. Esto se puede expresar como una aplicación de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$, en la forma

$$(u, v) \to \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}$$

El principal objetivo de esta subsección es definir la linealización de funciones vectoriales en las que el dominio y el recorrido son $\mathbf{R}^2$. Para ello emplearemos analogías con los casos de funciones $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Al final de esta sección mencionaremos la generalización a funciones vectoriales arbitrarias.

Comenzaremos con funciones derivables $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. La linealización $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de alrededor de x_0 es

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{10.11}$$

Ejemplo 6 Calcule la linealización de

$$f(x) = 2 \ln x$$

en $x_0 = 1$.

Solución

La linealización de $f(x)$ en $x = 1$ es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) \\ &= 0 + (2)(x - 1) = 2x - 2 \end{aligned}$$

ya que $f'(x) = 2/x$. ◀

En la subsección anterior estudiamos la linealización de una función f real con dominio en $\mathbf{R}^2$, $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Su expresión es

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

La expresión anterior se puede escribir en notación matricial:

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7 Calcule la linealización de

$$f(x, y) = \ln x + \ln y$$

en (1, 1).

Solución

El valor de $f(1, 1)$ es 0. Como $f_x(x, y) = \frac{1}{x}$ y $f_y(x, y) = \frac{1}{y}$, se deduce que

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1$$

Entonces,

$$L(x, y) = 0 + [1, 1] \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

$$= x - 1 + y - 1 = x + y - 2$$ ◀

Para nombrar funciones vectoriales emplearemos letras en negrilla. Supongamos que

$$\mathbf{h}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

y supongamos también que todas las derivadas parciales primeras son continuas en un disco centrado en (x_0, y_0). Se pueden linealizar las componentes de la función $\mathbf{h}$. La linealización de f es

$$\alpha(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

y la linealización de g es

$$\beta(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Si se define la función vectorial $\mathbf{L}(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{bmatrix}$, *la linealización de* $\mathbf{h}$ se puede expresar en forma matricial:

$$\mathbf{L}(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \end{bmatrix}$$

o

$$\mathbf{L}(x, y) = \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

donde la matriz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

es una matriz 2×2 que se denomina **matriz de Jacobi** o **matriz de derivadas**. Denominaremos $(D\mathbf{h})$ a la matriz de Jacobi, es decir,

$$(D\mathbf{h})(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8 Suponga que

$$\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

con

$$u(x, y) = x^2y - y^3 \quad \text{y} \quad v(x, y) = 2x^3y^2 + y$$

Calcule la matriz de Jacobi y evalúela en el punto (1, 2).

Solución

La matriz de Jacobi es

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 - 3y^2 \\ 6x^2y^2 & 4x^3y + 1 \end{bmatrix}$$

En el punto (1, 2) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 24 & 9 \end{bmatrix}$$

◀

Ejemplo 9 Sea

$$\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

con

$$u(x, y) = ye^{-x} \quad \text{y} \quad v(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$$

Calcule la aproximación lineal a $\mathbf{f}(x, y)$ en el punto (0, 0). Compare el valor $\mathbf{f}(0.1, -0.1)$ con esta aproximación lineal.

Solución

Primero se calcula la matriz de Jacobi

$$(D\mathbf{f})(x, y) = \begin{bmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{bmatrix}$$

La aproximación lineal a $\mathbf{f}(x, y)$ en el punto $(0, 0)$ es

$$\mathbf{L}(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0, 0) \\ v(0, 0) \end{bmatrix} + (D\mathbf{f})(0, 0) \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $(x, y) = (0.1, -0.1)$ se obtiene

$$\mathbf{L}(0.1, -0.1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{f}(0.1, -0.1) = \begin{bmatrix} -0.1e^{-0.1} \\ \text{sen } 0.1 + \cos(-0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.09 \\ 1.09 \end{bmatrix}$$

Puede verse que la aproximación está cerca del valor real. ◀

La matriz de Jacobi se puede generalizar a matrices de la forma $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Si

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

siendo $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, funciones reales de n variables independientes, entonces la matriz de Jacobi es una matriz $m \times n$ de la forma

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La linealización de $\mathbf{f}$ alrededor del punto $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ es entonces

$$L(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \begin{bmatrix} f_1(x_1^*, \ldots, x_n^*) \\ f_2(x_1^*, \ldots, x_n^* \\ \vdots \\ f_m(x_1^*, \ldots, x_n^* \end{bmatrix} + D\mathbf{f}(x_1^*, \ldots, x_n^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix}$$

10.4.3. Problemas

(10.4.1)

En los Problemas 1-6, existe el plano tangente en el punto indicado (x_0, y_0, z_0) Calcule su ecuación.

1. $f(x, y) + 2x^3 + y^2$; $(1, 2, 6)$
2. $f(x, y) = \text{sen}\, x + \cos y$; $(0, 0, 1)$
3. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$; $(1, 0, e)$
4. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; $(1, 1, \ln 2)$
5. $f(x, y) = \text{sen}(xy)$; $(1, 0, 0)$
6. $f(x, y) = e^x \cos y$; $(0, 0, 1)$

En los Problemas 7-12, demuestre que $f(x, y)$ es derivable en el punto indicado.

7. $f(x, y) = y^2x + x^2y$; $(1, 1)$
8. $f(x, y) = xy - 3x^2$; $(1, 1)$
9. $f(x, y) = \cos(x + y)$; $(0, 0)$
10. $f(x, y) = e^{x-y}$; $(0, 0)$
11. $f(x, y) = x + y^2 - 2xy$; $(-1, 2)$
12. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$; $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

En los Problemas 13-18, calcule la linealización de $f(x, y)$ en el punto indicado (x_0, y_0).

13. $f(x, y) = \sqrt{x} + 2y$; $(1, 0)$
14. $f(x, y) = \cos(x^2y)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
15. $f(x, y) = \tan(x + y)$; $(0, 0)$

16. $f(x, y) = e^{3x+2y}$; (1, 2)

17. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$; (1, 1)

18. $f(x, y) = x^2e^y$; (1, 0)

19. Calcule la aproximación lineal de

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

en (0, 0) y utilícela para aproximar $f(0.1, 0.05)$. Compare la aproximación con el valor de $f(0.1, 0.05)$ utilizando una calculadora.

20. Calcule la aproximación lineal de

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$$

en (0, 0) y utilícela para aproximar $f(-0.1, 0.2)$. Compare la aproximación con el valor de $f(-0.1, 0.2)$ utilizando una calculadora.

21. Calcule la aproximación lineal de

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 3y)$$

en (1, 0) y utilícela para aproximar $f(1.1, 0.1)$. Compare la aproximación con el valor de $f(1.1, 0.1)$ utilizando una calculadora.

22. Calcule la aproximación lineal de

$$f(x, y) = \tan(2x - 3y^2)$$

en (0, 0) y utilícela para aproximar $f(0.03, 0.05)$. Compare la aproximación con el valor de $f(0.03, 0.05)$ utilizando una calculadora.

(10.4.2)

En los Problemas 23-30, calcule las matrices de Jacobi de las funciones dadas.

23. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x^2 \end{bmatrix}$

25. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x-y} \\ e^{x+y} \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} (x - y)^2 \\ \operatorname{sen}(x + y) \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(x - y) \\ \cos(x + y) \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \ln(x + y) \\ e^{x+y} \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x^2y - 3y + x \\ e^x \operatorname{sen} y \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ e^{-x^2} \end{bmatrix}$

En los Problemas 31-36, calcule la aproximación lineal a las funciones $f(x, y)$ dadas en los puntos indicados.

31. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x^2y \\ \frac{1}{xy} \end{bmatrix}$ en (1, 1)

32. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 3x - y^2 \\ 4y \end{bmatrix}$ en (−1, −2)

33. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} e^{2x-y} \\ \ln(2x - y) \end{bmatrix}$ en (1, 1)

34. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \operatorname{sen} y \\ e^{-y} \cos x \end{bmatrix}$ en (0, 0)

35. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} \end{bmatrix}$ en (1, 1)

36. $\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} (x + y)^2 \\ xy \end{bmatrix}$ en (−1, 1)

37. Calcule una aproximación lineal a

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - xy \\ 3y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

en (1, 2). Utilice el resultado para obtener una aproximación a $f(1.1, 1.9)$ y compare la aproximación con el valor de $f(1.1, 1.9)$ obtenido con una calculadora.

38. Calcule una aproximación lineal a

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x/y \\ 2xy \end{bmatrix}$$

en (−1, 1). Utilice el resultado para obtener una aproximación a $f(-0.9, 1.05)$ y compare la aproximación con el valor de $f(-0.9, 1.05)$ obtenido con una calculadora.

39. Calcule una aproximación lineal a

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} (x - y)^2 \\ 2x^2y \end{bmatrix}$$

en (2, −3). Utilice el resultado para obtener una aproximación a $f(1.9, -3.1)$ y compare la aproximación con el valor de $f(1.9, -3.1)$ obtenido con una calculadora.

40. Calcule una aproximación lineal a

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{2x + y} \\ x - y^2 \end{bmatrix}$$

en (1, 2). Utilice el resultado para obtener una aproximación a $f(1.05, 2.05)$ y compare la aproximación con el valor de $f(1.05, 2.05)$ obtenido con una calculadora.

10.5 CONCEPTOS ADICIONALES SOBRE DERIVADAS (OPCIONAL)

10.5.1 Regla de la cadena para funciones de dos variables

En la Sección 10.3 estudiamos el cambio en la asimilación neta de CO_2 en función de la temperatura y de la intensidad de luz. Si se realiza un seguimiento temporal de la asimilación neta de CO_2, hay que tener en cuenta que la temperatura y la intensidad de luz dependen del tiempo. Si se denomina $T(t)$ a la temperatura en

el instante t, $I(t)$ a la intensidad de luz en el instante t y $N(t)$ a la asimilación neta de CO_2 en el instante t, entonces $N(t)$ es función de $T(t)$ e $I(t)$. Se puede escribir

$$N(t) = f(T(t), I(t))$$

La asimilación neta es por tanto una función compuesta.

Para derivar funciones compuestas de una variable se utiliza la regla de la cadena. Por ejemplo, supongamos que $w = f(x)$ es una función de una variable y que x depende de t. Si se desea derivar w con respecto a t, la regla de la cadena dice que

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{10.12}$$

La regla de la cadena se puede extender a funciones de más de una variable.

REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Si la función $w = f(x, y)$ es derivable, y w y x son funciones derivables de t, entonces w es una función derivable de t y se cumple que

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

No daremos una demostración completa, sino que simplemente esbozaremos el razonamiento que conduce a la expresión anterior. Se aproxima la función $w = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) mediante su aproximación lineal

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Si se hace $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ y $\Delta w = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, podemos aproximar $\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ utilizando la aproximación lineal, con lo que se obtiene

$$\Delta w \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Dividiendo ambos miembros por Δt,

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Haciendo $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} \to \frac{dw}{dt}, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$$

y se obtiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

o, en forma más breve,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo 1 Sea

$$w = f(x, y) = x^2y^3$$

con $x(t) = \operatorname{sen} t$ e $y(t) = e^{-t}$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = \pi/2$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= 2xy^3\frac{dx}{dt} + x^2 3y^2\frac{dt}{dt}$$
$$= 2xy^3\cos t + 3x^2y(-1)e^{-t}$$

Como $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\pi/2}$$

Por tanto,

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2} = (2)(1)(e^{-3\pi/2})(0) - (3)(1)^2e^{-\pi}e^{-\pi/2} = -3e^{-3\pi/2}$$

Podemos comprobar la respuesta directamente:

$$w(t) = (\operatorname{sen}^2 t)(e^{-3t})$$

y por tanto

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2} = 2(\operatorname{sen} t)(\cos t)e^{-3t} - 3(\operatorname{sen}^2 t)e^{-3t}\Big|_{t=\pi/2} = -3e^{-3\pi/2}$$ ◀

Ejemplo 2 Suponga que se desea predecir la abundancia de una determinada especie de planta. Se sospecha que los dos principales factores que influyen en dicha abundancia son el nivel de nitrógeno y el nivel de perturbaciones. Estudios previos realizados han demostrado que un incremento en el nivel de nitrógeno del suelo tiene un efecto negativo en la abundancia de esta especie. Asimismo, un aumento de las perturbaciones debidas al pastoreo parece tener también un efecto negativo en la abundancia. Si en los años siguientes aumentan el nivel de nitrógeno y las perturbaciones debidas al pastoreo, ¿cómo resultará afectada la abundancia de esta especie?

Solución

Sea $B(t)$ la abundancia de la planta en el instante t. Nuestro interés es saber cómo cambia $B(t)$ con el tiempo, es decir, saber si $B(t)$ aumentará o disminuirá con el tiempo. Para ello es necesario calcular la derivada de $B(t)$. Si se supone que la abundancia de la planta resulta afectada principalmente por los niveles de nitrógeno y de perturbaciones, se puede considerar B como función de N, el nivel de nitrógeno, y D, el nivel de perturbaciones. Tanto N como D cambian con el tiempo y son por tanto funciones de t. En definitiva, la función $B(t)$ es función de $N(t)$ y de $D(t)$. Utilizando la regla de la cadena para funciones de dos variables independientes, se obtiene

$$\frac{dB}{dt} = \underbrace{\frac{\partial B}{\partial N}}_{<0}\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{>0} + \underbrace{\frac{\partial B}{\partial D}}_{<0}\underbrace{\frac{dD}{dt}}_{>0} < 0$$

ya que la abundancia de B es una función decreciente con N y con D, y se supone que tanto el nivel de nitrógeno como el nivel de perturbaciones aumentan durante los próximos años. Por tanto, durante los siguientes años la abundancia de la planta disminuirá. ◀

10.5.2 Derivación implícita

En la Sección 4.4 estudiamos la derivación implícita, técnica que resultó de utilidad para derivar funciones $y = f(x)$ cuando y se da implícitamente, como por ejemplo en

$$x^2y - e^{-y} = 0 \tag{10.13}$$

Para calcular dy/dx, se derivan los dos miembros con respecto a x, teniendo en mente que y es función de x. Se obtiene

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} - e^{-y}\left(-\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2xy + \frac{dy}{dx}(x^2 + e^{-y}) = 0$$

Despejando dy/dx,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 + e^{-y}} \tag{10.14}$$

Observando (10.13), se puede definir una función $F(x, y)$,

$$F(x, y) = x^2y - e^{-y} \quad \text{con } F(x, y) = 0$$

$F(x, y)$ es una función de dos variables. Se dice que la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente y como función de x.

Volvamos al caso general para ver por qué este enfoque del problema es útil. Consideremos y como función de x y definamos una función $F(x, y)$ tal que $F(x, y) = 0$. Esto define implícitamente y como función de x. Para calcular la derivada de y con respecto a x, se hace

$$w = F(u, v) \quad \text{con } u(x) = x \text{ y } v(x) = y$$

De esta forma, w es función de x, es decir, $w = w(x)$. Se puede usar por tanto la regla de la cadena para derivar w con respecto a x, y se obtiene

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

Como $\frac{du}{dx} = 1$ y $\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$, y se obtiene, con $u = x$ y $v = y$,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{10.15}$$

Como $F(x, y)$ cumple que $F(x, y) = 0$, entonces $w(x) = 0$ para todos los valores de x y por tanto,

$$\frac{dw}{dx} = 0 \tag{10.16}$$

Igualando (10.15) y (10.16), se obtiene

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

de donde se puede despejar dy/dx,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

suponiendo que $\partial F/\partial y \neq 0$. El siguiente recuadro resume este resultado.

> Sea $w = F(x, y)$ una función derivable, y sea $F(x, y) = 0$ una ecuación que define implícitamente y como función derivable de x. Entonces, en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,
>
> $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ejemplo 3 Calcule dy/dx si $x^2y - e^{-y} = 0$.

Solución

Sea $F(x, y) = x^2y - e^{-y}$. Hay que calcular F_x y F_y:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + e^{-y}$$

Como $F(x, y) = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy}{x^2 + e^{-y}}$$

como en (10.14). Como $x^2 + e^{-y} \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, dy/dx está definida para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ con $F(x, y) = 0$. ◀

El ejemplo siguiente muestra el uso de esta idea para calcular derivadas de funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo 4 Calcule dy/dx para

$$y = \operatorname{arcsen} x$$

Solución

Ya conocemos el resultado, puesto que calculamos esta derivada anteriormente en el contexto de funciones inversas. Pero veamos ahora cómo se pueden utilizar los resultados de esta sección para calcular la respuesta. Como

$$x = \operatorname{sen} y \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

es equivalente a

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

se puede definir una función $F(x, y)$ que cumpla que $F(x, y) = 0$, y definir y implícitamente como función de x. Concretamente,

$$F(x, y) = x - \operatorname{sen} y$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{F_y} = -\frac{1}{-\cos y} = \frac{1}{\cos y}$$

Como $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, se obtiene

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

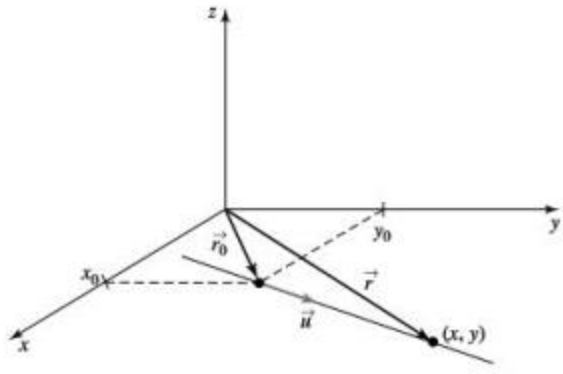
Ahora hay que utilizar el hecho de que $x = \operatorname{sen} y$ está definida para $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ y que $\cos y \geqslant 0$ para valores de y en ese intervalo. Utilizando esta representación de $\cos y$ resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

que está definida en $-1 < x < 1$. ◀

10.5.3 Derivadas direccionales y vectores gradiente

Supongamos que estamos en una superficie inclinada, como la ladera de una colina. Dependiendo de la dirección en la que caminemos, podemos ir colina arriba,



◀ **Figura 10.39**
Movimiento en la dirección de **u** a partir del punto (x_0, y_0)

permanecer a la misma altura o ir colina abajo. Es decir, escogiendo una dirección particular, tenemos un cierto control sobre lo inclinado que es nuestro camino. Esta inclinación se puede describir mediante la pendiente de la recta tangente a nuestro punto de arranque en la dirección de nuestro camino. Esta pendiente se denomina **derivada direccional**.

Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de dos variables independientes. Sea (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$ un punto en la superficie $z = f(x, y)$. Para definir la pendiente de una recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0), hay que especificar la dirección deseada. Ya sabemos cómo tratar este problema si se trata de la dirección x o la dirección y. En estos casos, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ nos indican cómo $f(x, y)$ cambia. Explicaremos a continuación cómo se puede expresar la pendiente cuando se escoge una dirección arbitraria.

El primer paso es encontrar una forma de expresar lo que significa «ir en una cierta dirección». Partiendo del punto (x_0, y_0), supongamos que se desea ir en la dirección indicada por el vector unitario $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ (recuérdese que un vector unitario tiene longitud unidad), como se ilustra en la Figura 10.39. En dicha figura puede verse que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{u} \tag{10.17}$$

siendo $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y t un número real. Diferentes valores de t permiten obtener diferentes puntos de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene la dirección de **u**. La Ecuación (10.17) se puede escribir también de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tu_1 \\ tu_2 \end{bmatrix} \quad \text{para } t \in \mathbf{R} \tag{10.18}$$

La Ecuación (10.18) es la ecuación paramétrica de una recta, que obtuvimos en la Sección 9.4, siendo t el parámetro. Como $x = x_0 + tu_1$ e $y = y_0 + tu_2$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = u_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = u_2 \tag{10.19}$$

Ahora podemos describir lo que le sucede a la función $f(x, y)$ cuando partimos del punto (x_0, y_0) y nos movemos en la dirección del vector **u**, como se muestra en la Figura 10.40. Utilizaremos la ecuación paramétrica (10.18) que describe una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene la dirección de **u**:

$$x = x_0 + tu_1 \qquad \text{y} \qquad y = y_0 + tu_2$$

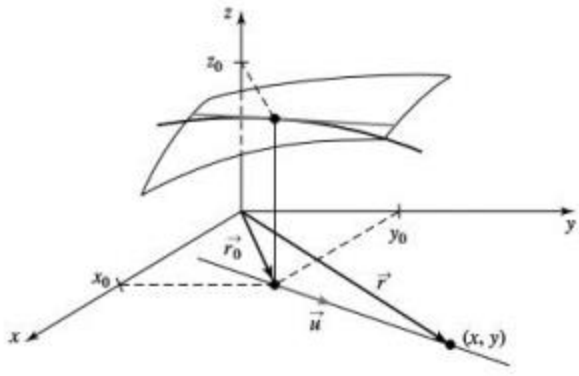


Figura 10.40
Ilustración de la derivada direccional

Como $z(t) = f(x(t), y(t))$, se puede utilizar la regla de la cadena para averiguar cómo cambia f cuando varía t (es decir, cuando nos movemos por la línea recta descrita anteriormente),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 \tag{10.20}$$

donde en el último paso se ha utilizado (10.19). La Ecuación (10.20) se puede escribir en forma de producto escalar:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

El primer vector de este producto escalar se denomina **gradiente** de f.

Definición Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes y supongamos que existen las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$. Entonces el vector

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

se denomina gradiente de f en el punto (x, y).

La notación ∇f se lee «gradiente de f». Una notación alternativa es grad f. Ahora ya se puede definir la derivada de f en una dirección particular.

Definición La derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = (\nabla f(x_0, y_0)) \cdot \mathbf{u}$$

Nótese que en la definición de derivada direccional se supone que $\mathbf{u}$ es un *vector unitario*. Al escoger un vector unitario (en vez de un vector de cualquier otra longitud), la derivada direccional coincide con las derivadas parciales cuando la

dirección es la del eje x o el eje y positivos. Es decir, si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ entonces,

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

y si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces,

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Ejemplo 5 Calcule la derivada direccional de

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$$

en el punto $(-1, 2)$ en la dirección de $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución

Primero se calcula el vector gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \\ \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \end{bmatrix}$$

Evaluando dicho vector en el punto $(-1, 2)$ se obtiene

$$\nabla f(-1, 2) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{1 + 8}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{1 + 8}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ no es un vector unitario, hay que normalizarlo primero. La longitud de este vector es $\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Entonces,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y

$$D_{\mathbf{u}} f(-1, 2) = (\nabla f(-1, 2)) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{10}} + \frac{12}{3\sqrt{10}} = \frac{13}{3\sqrt{10}}$$

◀

Ejemplo 6 Calcule la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 y - 2y^2$$

en el punto $(-3, 2)$ en la dirección del punto $(-1, 1)$.

Solución

Primero se calcula el vector gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - 4y \end{bmatrix}$$

Evaluando dicho vector en el punto $(-3, 2)$, se obtiene

$$\nabla f(-3, 2) = \begin{bmatrix} (2)(-3)(2) \\ (-3)^2 - (4)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector que va de $(-3, 2)$ a $(-1, 1)$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} -1 - (-3) \\ 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La longitud de este vector es $\sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. Normalizándolo, se obtiene

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y la derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}} f(-3, 2) = (\nabla f(-3, 2)) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-24 - 1) = -\frac{25}{\sqrt{5}} = -5\sqrt{5} \quad \blacktriangleleft$$

Propiedades del vector gradiente La derivada direccional es un producto escalar. Por tanto, se puede escribir

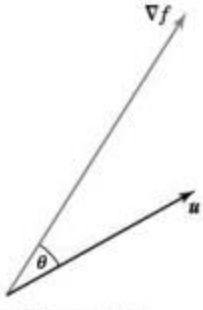
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = (\nabla f(x, y)) \cdot \mathbf{u}$$

$$= |\nabla f(x, y)| |\mathbf{u}| \cos\theta$$

siendo θ el ángulo que forman ∇f y $\mathbf{u}$ (*véase* la Figura 10.41). Como $|\mathbf{u}| = 1$ (ya que $\mathbf{u}$ es un vector unitario), se obtiene

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \cos\theta$$

El ángulo θ está en el intervalo $[0, 2\pi)$ y $\cos\theta$ es máximo cuando $\theta = 0$. Se deduce por tanto que $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es máxima cuando $\mathbf{u}$ está en la dirección de ∇f.



▲ **Figura 10.41**
Ángulo θ que forman ∇f y el vector unitario $\mathbf{u}$

Demostraremos a continuación que geométricamente, el vector gradiente en un punto (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = c$ que pasa por ese punto. Para ello será de utilidad pensar que viajamos por esta curva de nivel comenzando en el instante $t = 0$ en un punto etiquetado con $t = 0$. Se puede determinar cualquier punto de esta curva indicando el instante t en el que se pasa por él. Esta operación se denomina **parametrizar** la curva en función del parámetro t. La curva se escribe como un vector $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, como se hizo en la Sección 9.4.3 para parametrizar rectas. Si se deriva $\mathbf{r}(t)$ con respecto a t se obtiene

$$\frac{d}{dr} \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

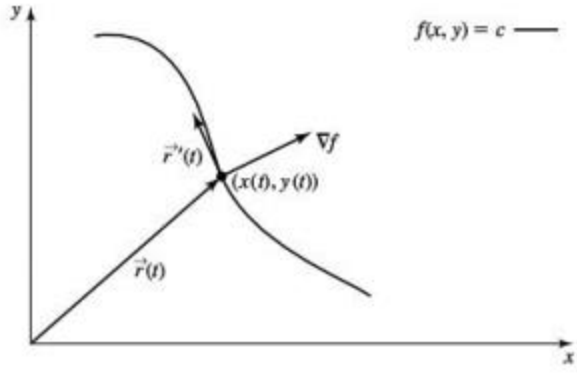


Figura 10.42
El gradiente es perpendicular a la curva de nivel

que es el vector tangente en el punto $(x(t), y(t))$. Como

$$f(x, y) = c \tag{10.21}$$

y x e y son funciones de t, se puede escribir $w(t) = f(x(t), y(t)) = c$ y derivar $w(t)$ con respecto a t. Se obtiene que $dw/dt = 0$, ya que $w(t)$ es constante. Utilizando la regla de la cadena para derivar $f(x(t), y(t))$ se obtiene

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

o

$$\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

Esto demuestra que el gradiente de f en el punto (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel en dicho punto, como se muestra en la Figura 10.42.

El siguiente recuadro resume estas dos importantes propiedades del gradiente.

Sea $f(x, y)$ una función derivable. El vector gradiente $\nabla f(x, y)$ tiene las siguientes propiedades:

1. En cualquier punto (x_0, y_0), $f(x, y)$ tiene su máximo incremento en la dirección del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.
2. El vector gradiente de f en el punto (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0).

Ejemplo 7 Sea

$$f(x, y) = x^2y + y^2$$

¿En qué dirección tiene $f(x, y)$ su máximo incremento en el punto (1, 1)?

Solución

El máximo incremento de $f(x, y)$ en el punto (1, 1) se produce en la dirección de $\nabla f(1, 1)$. Como

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 + 2y \end{bmatrix}$$

se deduce que

$$\nabla f(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Es decir, el incremento más rápido de $f(x, y)$ en el punto $(1, 1)$ se produce en la dirección de $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. ◀

Ejemplo 8 Calcule un vector que sea perpendicular a la curva de nivel de la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

que pasa por el punto $(1, 2)$.

Solución

El gradiente de $f(x, y)$ en el punto $(1, 2)$ es perpendicular a la curva de nivel que pasa por dicho punto. La expresión del gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\nabla f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Para normalizar este vector, se divide $\nabla f(1, 2)$ por su longitud. Como

$$|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

el vector unitario que es perpendicular a la curva de nivel de $f(x, y)$ en el punto $(1, 2)$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$ ◀

10.5.4. Problemas

(10.5.1)

1. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x(t) = 3t$ e $y(t) = e^t$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = \ln 2$.

2. Sea $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ con $x(t) = t$ e $y(t) = t^3$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = 1$.

3. Sea $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x(t) = t$ e $y(t) = \operatorname{sen} t$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = \pi/3$.

4. Sea $f(x, y) = \ln(xy - x^2)$ con $x(t) = t^2$ e $y(t) = t$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = 5$.

5. Sea $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ con $x(t) = \operatorname{sen} t$ e $y(t) = \cos t$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = \pi/4$.

6. Sea $f(x, y) = xe^y$ con $x(t) = e^t$ e $y(t) = t^2$. Calcule la derivada de $w = f(x, y)$ con respecto a t cuando $t = 0$.

7. Calcule $\frac{dz}{dt}$ para $z = f(x, y)$ con $x = u(t)$ e $y = v(t)$.

8. Calcule $\frac{dw}{dt}$ para $w = e^{f(x, y)}$ con $x = u(t)$ e $y = v(t)$.

(10.5.2)

9. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $(x^2 + y^2)e^y = 0$.

10. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $(\operatorname{sen} x + \cos y)x^2 = 0$.

11. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $\ln(x^2 + y^2) = 3xy$.

12. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $\cos(x^2 + y^2) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.

13. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y = \arccos x$.

14. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y = \arctan x$.

15. La velocidad de crecimiento r de un organismo particular resulta afectada por la disponibilidad de alimento y por el número de otros competidores en busca de alimento. Sea $F(t)$ la cantidad de alimento disponible en el instante t y $N(t)$ el número de competidores en el instante t. La velocidad de crecimiento r puede verse entonces como función de las dos variables dependientes del tiempo $F(t)$ y $N(t)$. Suponga que la velocidad de crecimiento es una función creciente con la disponibilidad de alimento y decreciente con el número de competidores ¿Cómo resultará afectada la velocidad de crecimiento si la disponibilidad de alimento crece con el tiempo y el número de competidores decrece con el tiempo?

16. Asuma que viaja por un gradiente ambiental a lo largo del cual la temperatura y las precipitaciones aumentan. Si la abundancia de una especie concreta de planta crece con la temperatura y las precipitaciones, ¿será razonable encontrar más o menos individuos de esta especie durante el viaje? (utilice métodos de cálculo para responder a esta pregunta).

(10.5.3)

En los Problemas 17-24, calcule el gradiente de las funciones.

17. $f(x, y) = x^3y^2$

18. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

19. $f(x, y) = \sqrt{x^3 - 3xy}$

20. $f(x, y) = x(x^2 - y^2)^{2/3}$

21. $f(x, y) = \exp\left[\sqrt{x^2 + y^2}\right]$

22. $f(x, y) = \tan\dfrac{x - y}{x + y}$

23. $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

24. $f(x, y) = \cos(3x^2 - 2y^2)$

En los Problemas 25-30, calcule la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto dado y en la dirección indicada.

25. $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$

en (1, 2) en la dirección de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

26. $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$

en (−1, 0) en la dirección de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

27. $f(x, y) = e^{x+y}$

en (0, 0) en la dirección de $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

28. $f(x, y) = x^3y^2$

en (2, 3) en la dirección de $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

29. $f(x, y) = 2xy^3 - 3x^2y$

en (1, −1) en la dirección de $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

30. $f(x, y) = ye^{x^2}$

en (0, 2) en la dirección de $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

En los Problemas 31-34, calcule la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto P y en la dirección del punto Q.

31. $f(x, y) = 2x^2y - 3x$, $P = (2, 1)$, $Q = (3, 2)$

32. $f(x, y) = 4xy + y^2$, $P = (-1, 1)$, $Q = (3, 2)$

33. $f(x, y) = \sqrt{xy - 2x^2}$, $P = (1, 6)$, $Q = (3, 1)$

34. $f(x, y) = e^{x-y}$, $P = (2, 2)$, $Q = (1, -1)$

35. ¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = 3xy - x^2$ en el punto $(-1, 1)$?

36. ¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = e^x \cos y$ en el punto $(0, \pi/2)$?

37. ¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ en el punto (5, 3)?

38. ¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en el punto (1, 1)?

39. Calcule un vector que sea normal a la curva de nivel de la función

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

en el punto $(-1, 1)$.

40. Calcule un vector que sea normal a la curva de nivel de la función

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{9}$$

en el punto (1, 3).

41. Calcule un vector que sea normal a la curva de nivel de la función

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

en el punto (1, 3).

42. Calcule un vector que sea normal a la curva de nivel de la función

$$f(x, y) = xy$$

en el punto (2, 3).

43. (*Quimiotaxis*) La quimiotaxis es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración, es decir, en la dirección en la que la concentración aumenta con más rapidez. El moho del cieno *Dictyoselium discoideum* muestra este comportamiento. En este caso, las amebas unicelulares de esta especie se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico). Suponga que la expresión de la concentración de AMP cíclico en el punto del plano x-y es

$$f(x, y) = \frac{4}{|x| + |y| + 1}$$

Si se sitúa una ameba en el punto (3, 1) del plano x-y, determine en qué dirección se moverá si su movimiento está dirigido por la quimiotaxis.

44. Suponga que un organismo se mueve por una superficie inclinada siguiendo la línea de máxima pendiente descendente. Si la expresión de la superficie es

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

calcule la dirección en la que se moverá el organismo en el punto (2, 3).

10.6 APLICACIONES (OPCIONAL)

10.6.1 Máximos y mínimos

En la Sección 5.1 presentamos los extremos locales en funciones de una variable. Los extremos locales se pueden definir también en funciones de más de una variable independiente. Aquí limitaremos nuestro estudio a funciones de dos variables. Recuérdese que hemos denominado $B_\delta(x_0, y_0)$ al disco abierto de radio δ centrado en (x_0, y_0). La siguiente definición, que es conveniente comparar con la definición correspondiente de la Sección 5.1, extiende el concepto de extremo local a funciones de dos variables.

Definición Una función $f(x, y)$ definida en un conjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ tiene un **máximo local** (o **relativo**) en el punto (x_0, y_0) si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap D$$

Una función $f(x, y)$ definida en un conjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ tiene un **mínimo local** (o **relativo**) en el punto (x_0, y_0) si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0) \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap D$$

Informalmente, un máximo local (o respectivamente, un mínimo local) es un punto en el que el valor de la función es mayor (o respectivamente menor) que en todos los puntos cercanos. Se pueden definir también los extremos **globales** (o **absolutos**). Concretamente, si las inecuaciones de la definición se cumplen para todo $(x, y) \in D$, entonces f tiene un máximo (o respectivamente, un mínimo) absoluto en (x_0, y_0). La Figura 10.43 muestra un ejemplo de función de dos variables con un máximo local en el punto (0, 0).

¿Cómo se calculan extremos locales? Recuérdese que en el caso de una sola variable, una condición necesaria para que un punto en la gráfica de una función derivable sea un extremo local es que la tangente en dicho punto sea horizontal (teorema de Fermat). Esta idea se puede generalizar a funciones de más de una variable. Observando la Figura 10.43, se puede ver que el plano tangente en el extremo local es horizontal. La ecuación del plano horizontal tangente a la gráfica de una función diferenciable $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es

$$z = f(x_0, y_0)$$

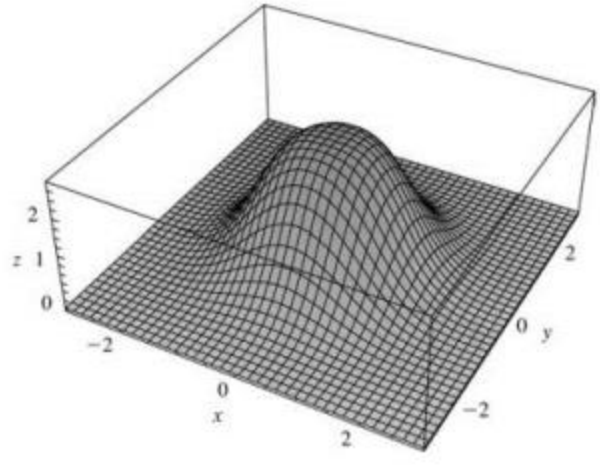


Figura 10.43
Gráfica de una función $f(x, y)$ con un máximo local en el punto (0, 0)

Comparando la expresión anterior con la forma general del plano tangente (Sección 10.4), se puede ver que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ valen 0 en el punto (x_0, y_0), o en otras palabras, $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Otra forma de deducir esta idea es argumentar que si el gradiente no fuera cero en el punto (x_0, y_0), entonces la función crecería en la dirección del gradiente y decrecería en la dirección opuesta, y dicho punto no podría ser un extremo local. Por tanto,

> Si $f(x, y)$ tiene un extremo local en el punto (x_0, y_0) y es derivable en dicho punto, entonces
>
> $$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.22}$$

Los puntos (x_0, y_0) que cumplen (10.22) se denominan **puntos críticos**. Los puntos donde $f(x, y)$ no es derivable se denominan también puntos críticos. Es conveniente resaltar que, como en la Sección 5.1, (10.22) es una condición *necesaria*, y por tanto sólo identifica los *candidatos* a extremos locales. Otros puntos críticos son también candidatos a extremos locales. Es necesario un estudio posterior para determinar si un candidato es en realidad un extremo local.

Ejemplo 1 La Figura 10.44 muestra la gráfica de la función derivable $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Se puede ver que $f(x, y)$ tiene un mínimo local en el punto $(0, 0)$. Demuestre que $\nabla f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y determine la ecuación del plano tangente en $(0, 0)$.

Solución

Se calcula

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

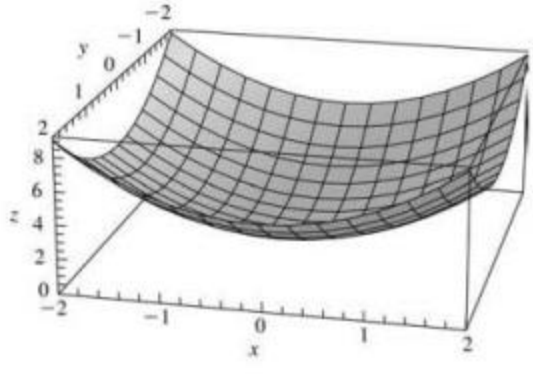
Evaluando $\nabla f(0, 0)$ en el punto $(0, 0)$ se obtiene

$$\nabla f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La expresión del plano tangente en $(0, 0)$ es

$$z = f(0, 0) + (x - 0)f_x(0, 0) + (y - 0)f_y(0, 0)$$

Como $f(0, 0) = 1$, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, la ecuación del plano tangente en $(0, 0)$ es $z = 1$, lo que demuestra que el plano tangente es horizontal. ◀



◀ **Figura 10.44** Gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

Ejemplo 2 Obtenga los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy, (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Solución

Como la función $f(x, y)$ es derivable en $\mathbf{R}^2$, los únicos puntos críticos son aquellos que cumplen $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$2x + y = 0$$

$$x + 2y = 0$$

De la primera ecuación se deduce que $y = -2x$. Sustituyendo en la segunda ecuación resulta

$$x + 2(-2x) = 0 \quad \text{o} \quad -3x = 0 \quad \text{o} \quad x = 0$$

y por tanto, $y = 0$. La función tiene entonces un punto crítico, el punto $(0, 0)$. ◀

A continuación se presenta una condición suficiente que permitirá determinar si un candidato a extremo local lo es en realidad y en caso de que lo sea, si se trata de un máximo o de un mínimo. La demostración de esta condición se sale del alcance de este libro.

Recuérdese que en el caso de funciones de una variable, se obtuvo la siguiente condición para funciones derivables dos veces: si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ [o respectivamente, $f''(x_0) < 0$], entonces $f(x)$ tiene un mínimo local (o respectivamente, un máximo local) en $x = x_0$. En el caso de varias variables existe una condición análoga en la que intervienen las derivadas parciales segundas.

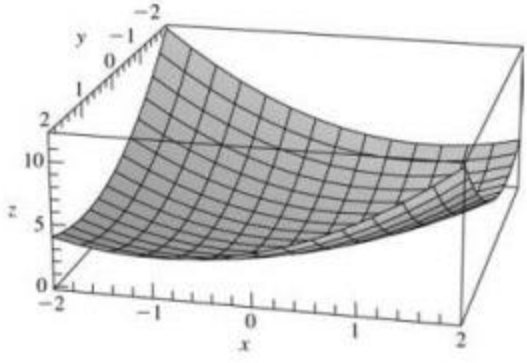
Teorema Sea f una función cuyas derivadas parciales segundas son continuas en un disco centrado en (x_0, y_0) y tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se define

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

1. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
2. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
3. Si $D < 0$, entonces f no tiene extremo local en (x_0, y_0). El punto se denomina de **ensilladura**.

En los demás casos, el test no permite extraer conclusiones. Volvamos ahora al Ejemplo 2 y determinemos si $(0, 0)$ es un extremo local.

Ejemplo 2 **(continuación)** Determine si el punto crítico $(0, 0)$ de $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ en el Ejemplo 2 es un máximo local o un mínimo local (Figura 10.45).



◀ **Figura 10.45**
Gráfica de la función
$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

Solución

Es necesario calcular las derivadas parciales segundas. Como

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x + 2y$$

tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \partial^2 f \partial x \partial y = 1$$

Por tanto,

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0$$

Como $D > 0$ y $f_{xx>0}$, se concluye que (0, 0) es un mínimo local (Figura 10.45). ◀

Ejemplo 3 Calcule todos los extremos locales de

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3, (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

y clasifíquelos como máximos locales, mínimos locales o ninguna de las dos cosas.

Solución

La función $f(x, y)$ es derivable en su dominio. Los puntos críticos cumplen

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3y - 3x^2 \\ 3x - 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que $y = x^2$ y $x = y^2$. Las soluciones de estas ecuaciones son (0, 0) y (1, 1). Como

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -6x, \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -6y, \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 3$$

se cumple que

$$D = f_{xx} f_{yy} - + (f_{xy})^2 = 36xy - 9$$

En el punto (1, 1), $D = 36 - 9 > 0$. Como $f_{xx}(1, 1) = -6 < 0$, $f(x, y)$, tiene un máximo local en (1, 1). En el punto (0, 0), $D = -9 < 0$. El punto crítico (0, 0) no es ni máximo local ni mínimo local, ya que $D < 0$ (Figura 10.46). ◀

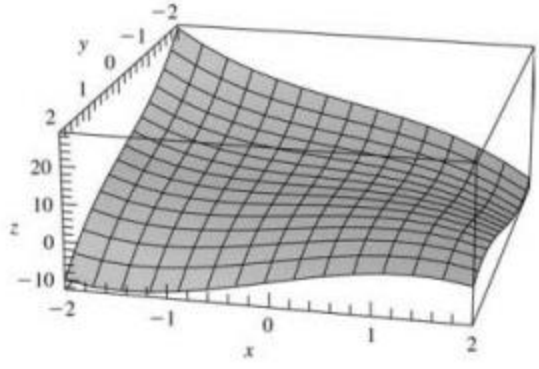


Figura 10.46
Gráfica de la función
$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

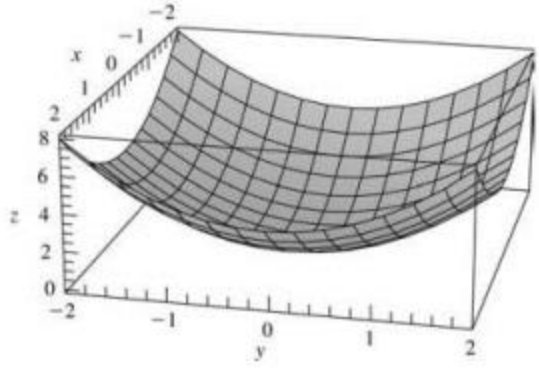


Figura 10.47
Gráfica de la función
$f_1(x, y) = x^2 + y^2$

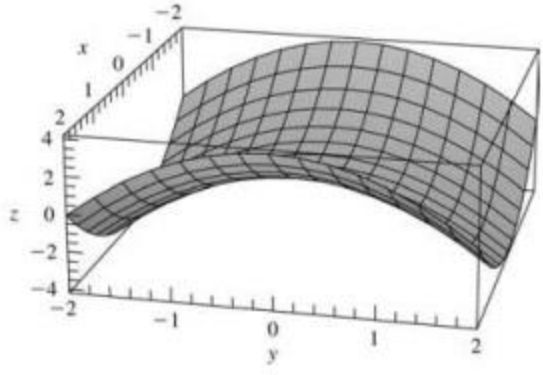


Figura 10.48
Gráfica de la función
$f_2(x, y) = x^2 - y^2$

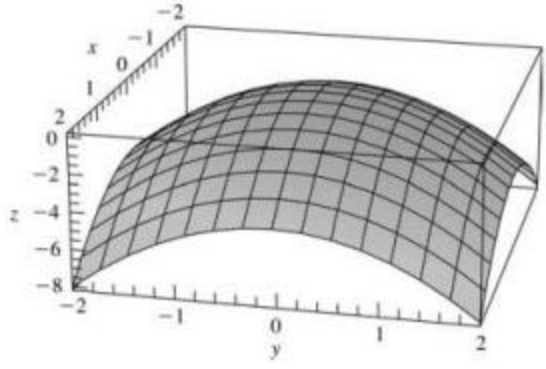
Condición suficiente basada en los autovalores (opcional) Presentaremos ahora una condición suficiente expresada en términos de autovalores, que servirá para determinar si un candidato a extremo local lo es en realidad, y si es así, de qué tipo (máximo local o mínimo local). Para motivar esta condición, veamos las tres funciones siguientes definidas para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, \qquad f_2(x, y) = x^2 - y^2, \qquad f_3(x, y) = -x^2 - y^2$$

que se muestran en las Figuras 10.47 a 10.49.

Los valores de $\nabla f_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ son

$$\nabla f_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \qquad \nabla f_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}, \qquad \nabla f_3(x, y) = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}$$



◀ **Figura 10.49**
Gráfica de la función $f_3(x, y) = -x^2 - y^2$

Se puede ver inmediatamente que (0, 0) es un candidato a extremo local de las tres funciones.

El análogo en una función de dos variables a la segunda derivada en una función de una variable es la siguiente matriz de derivadas segundas, denominada **hessiano**,

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Calculando estas matrices para las funciones $f_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ se obtiene

$$\text{Hess } f_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{Hess } f_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

y

$$\text{Hess } f_3(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resulta que los autovalores de la matriz de derivadas segundas proporcionan una condición suficiente para determinar si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas. Se cumple lo siguiente.

Sea f una función cuyas derivadas parciales segundas son continuas en un disco centrado en $(x_0, y_0$ y tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces

1. Si los dos autovalores de la matriz de segundas derivadas en el punto (x_0, y_0), Hess $f(x_0, y_0)$, son positivos, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
2. Si los dos autovalores de la matriz Hess $f(x_0, y_0)$ son negativos, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
3. Si los dos autovalores de la matriz Hess $f(x_0, y_0)$ son de signos opuestos, entonces f no tiene un extremo local en (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es de **ensilladura**.

En todos los demás casos, el test no permite extraer conclusiones. Volviendo a nuestro ejemplo, hay que evaluar Hess $f_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ en (0, 0). Se puede ver

que Hess f_i, (x, y) $i = 1, 2, 3$ no depende de la variable x ni de y. Por tanto, se cumplirá que Hess $f_i(0, 0) =$ Hess $f_i(x, y)$. Los valores de los autovalores de las matrices de derivadas segundas se pueden leer directamente en dichas matrices evaluadas en $(0, 0)$, ya que son diagonales. Por tanto, los autovalores de Hess $f_1(0, 0)$ valen 2, por lo que $f_1(0, 0)$ es un mínimo local, lo que concuerda con la gráfica de la Figura 10.47. Los autovalores de Hess f_2 $(0, 0)$ valen 2 y -2, por lo que $f_2(0, 0)$ no es un extremo local (*véase* la Figura 10.48), la forma de la gráfica de $f_2(x, y)$ cerca de $(0, 0)$ recuerda a una silla de montar. De ahí el nombre de punto de ensilladura. Los autovalores de la matriz Hess $f_3(0, 0)$ valen -2, por lo que $f_3(0, 0)$ es un máximo local (*véase* la Figura 10.49).

En el criterio de la segunda derivada se supone que todas las derivadas parciales segundas son continuas en un disco centrado en el punto (x_0, y_0). Esto implica que

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Es decir, los elementos externos a la diagonal de Hess $f(x, y)$ son iguales y la matriz es de la forma $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$. Se trata de una matriz **simétrica**. Se puede demostrar que los autovalores de una matriz simétrica son siempre reales (*véase* el Problema 34). Este hecho tiene una importante consecuencia: si las derivadas parciales segundas de f son continuas en un disco centrado en (x_0, y_0), entonces los autovalores de Hess $f(x_0, y_0)$ son reales. Suponiendo que ninguno sea igual a cero, se cumplirá uno de los tres casos del criterio de la segunda derivada, lo que permitirá resolver la cuestión de si el candidato (x_0, y_0) para el que $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un extremo local y de qué tipo. Si uno de los autovalores o ambos son iguales a cero, no se puede decir nada sobre la naturaleza del punto crítico basándose en el hessiano. Esta idea se estudia en el Problema 11.

Ejemplo 4 Calcule los extremos locales de

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^4, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Solución

Se calcula

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x - y \\ -x + 4y^3 \end{bmatrix}$$

Igualando a 0 ambas derivadas parciales, se obtiene

$$4x - y = 0 \quad \text{y} \quad -x + 4y^3 = 0$$

De la primera ecuación se deduce que $x = y/4$. Sustituyendo en la segunda ecuación resulta

$$-\frac{y}{4} + 4y^3 = 0$$

$$-\frac{y}{4}(1 - 16^2) = 0$$

con lo que

$$y_1 = 0 \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad y_3 = -\frac{1}{4}$$

y por tanto, los correspondientes valores de x son

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{16} \quad \text{y} \quad x_3 = -\frac{1}{16}$$

Como ∇f está definido para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, no hay más puntos críticos. Los tres candidatos a extremos locales son por tanto

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{14}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right)$$

El hessiano es de la forma

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Evaluaremos la matriz en cada uno de los puntos candidatos y calcularemos sus autovalores.

(i) $$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores cumplen

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 4) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

Por tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \approx \begin{cases} 4.2361 \\ -0.2361 \end{cases}$$

lo que implica que f tiene un punto de ensilladura en $(0, 0)$.

(ii) $$\text{Hess } f\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Los autovalores cumplen

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & \frac{3}{4}-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)\left(\frac{3}{4}-\lambda\right) - 1 = 3 - 4\lambda - \frac{3}{4}\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - \frac{19}{4}\lambda + 2 = 0$$

Por tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{19}{4} \pm \sqrt{\frac{361}{16} - 8}}{2} = \frac{19}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{233} \approx \begin{cases} 4.2830 \\ 0.4670 \end{cases}$$

lo que implica que f tiene un mínimo local en $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$.

(iii) $$\text{Hess } f\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Es la misma matriz que para $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$ [es decir, el caso (ii)]. Por tanto se concluye que f tiene también un mínimo local en $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right)$.

La Figura 10.50 muestra la gráfica de $f(x, y)$. ◀

En el último ejemplo hemos visto que el cálculo de los autovalores del hessiano puede llevar su tiempo. Existe otro criterio que se deduce de la relación que expresa el determinante y la traza de una matriz 2×2 en función de sus autovalores. Recuérdese que si A es una matriz 2×2 cuyos autovalores son λ_1 y λ_2, entonces $\det A = \lambda_1\lambda_2$ y $\text{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2$. Si los autovalores de A son reales (cosa que ocurre si la matriz es simétrica), y si $\det A > 0$, entonces λ_1 y λ_2 son los dos positivos o los dos negativos. Si además $\text{tr}\, A > 0$, entonces ambos autovalores deben ser positivos. Por tanto, se llega al siguiente criterio.

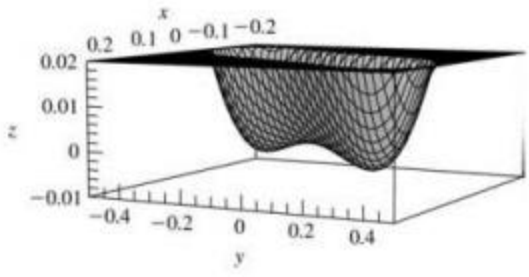


Figura 10.50
Gráfica de la función $f(x, y) = 2x^3 - xy + y^4$

Sea f una función cuyas derivadas parciales segundas son continuas en un disco centrado en (x_0, y_0) y tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces

1. Si det Hess $f(x_0, y_0) > 0$ y tr Hess $f(x_0, y_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
2. Si det Hess $f(x_0, y_0) > 0$ y tr Hess $f(x_0, y_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
3. Si det Hess $f(x_0, y_0) < 0$, entonces f no tiene un extremo local en (x_0, y_0). El punto es de ensilladura.

Recuérdese que si uno de los autovalores de Hess $f(x_0, y_0)$ es igual a 0 [o de forma equivalente det Hess $f(x_0, y_0) = 0$] no se puede decir nada sobre la naturaleza del punto crítico basándose en el hessiano (este caso se considera en el Problema 11).

Ejemplo 5 Calcule y clasifique los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^3 - 4xy + y, (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Solución

Se calcula

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 4y \\ -4x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y se resuelve

$$3x^2 - 4y = 0 \qquad \text{y} \qquad -4x + 1 = 0$$

De la segunda ecuación resulta $x = 1/4$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$\frac{3}{16} - 4y = 0$$

lo que implica que $y = 3/64$. Como f es derivable para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, sólo existe un punto crítico, concretamente $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{64}\right)$. Para clasificar el punto crítico, se calcula

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz en el punto crítico se obtiene

$$\text{Hess } f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{64}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

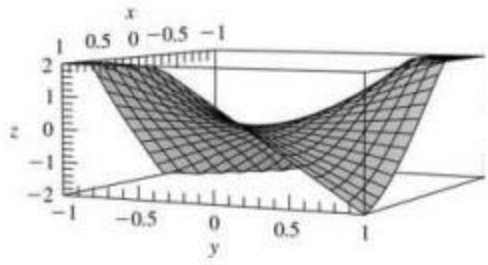


Figura 10.51
Gráfica de la función
$f(x, y) = x^3 - 4xy + y$

Como det Hess $f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{64}\right) = -16 < 0$, se concluye que $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{64}\right)$ (*véase* la Figura 10.51). ◀

Ejemplo 6 Calcule y clasifique los puntos críticos de

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Solución

Se calcula

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ (x, y) \neq (0, 0)$$

Como el gradiente de f no está definido en (0, 0), este punto es un punto crítico. No hay ningún otro punto crítico ya que $\nabla f(x, y) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. Se cumple además que $f(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ para $(x, y) = (0, 0)$. Por tanto, $f(x, y)$ tiene un mínimo local en (0, 0) (*véase* la Figura 10.52). Nótese que no se puede utilizar el hessiano para decidir si el punto (0, 0) es un extremo local ni de qué tipo ya que el teorema exige que el gradiente sea cero en el punto, pero en este caso el gradiente no está definido en (0, 0) [el hessiano tampoco está definido en (0, 0)]. ◀

Extremos globales Estudiaremos ahora los extremos globales. Recuérdese que para funciones de una variable, el teorema de los valores extremos asegura la existencia de extremos globales en funciones definidas en un intervalo *cerrado*. El análogo al intervalo cerrado en el plano bidimensional es el conjunto **cerrado**, y el análogo del intervalo abierto es el conjunto **abierto**. Un ejemplo de conjunto cerrado es un disco cerrado, y un ejemplo de conjunto abierto es un disco abierto (*véase* la Sección 10.2).

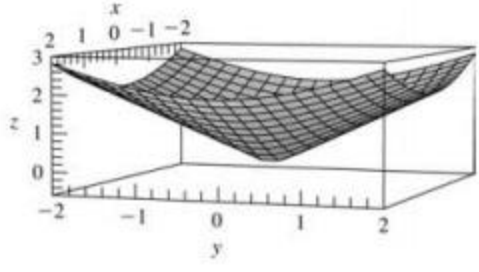
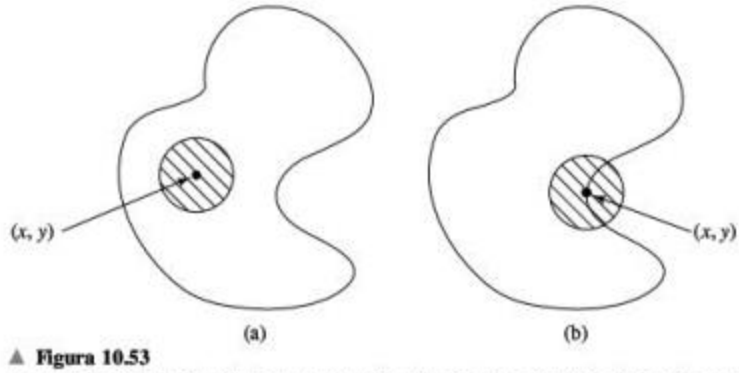
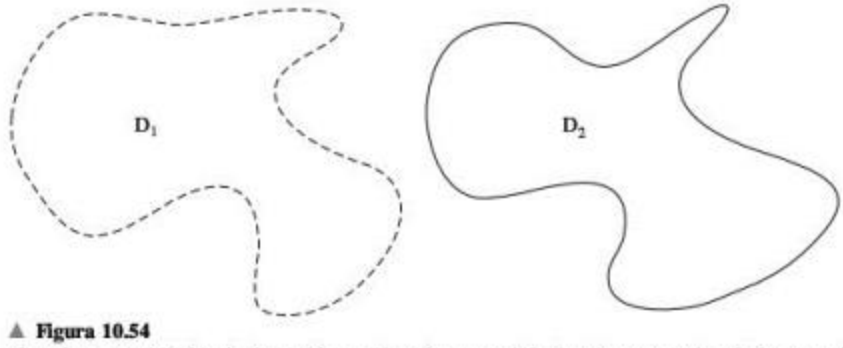


Figura 10.52
Gráfica de la función
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



▲ **Figura 10.53**
El punto (x, y) de la izquierda es un punto interior. El punto (x, y) de la derecha es un punto frontera



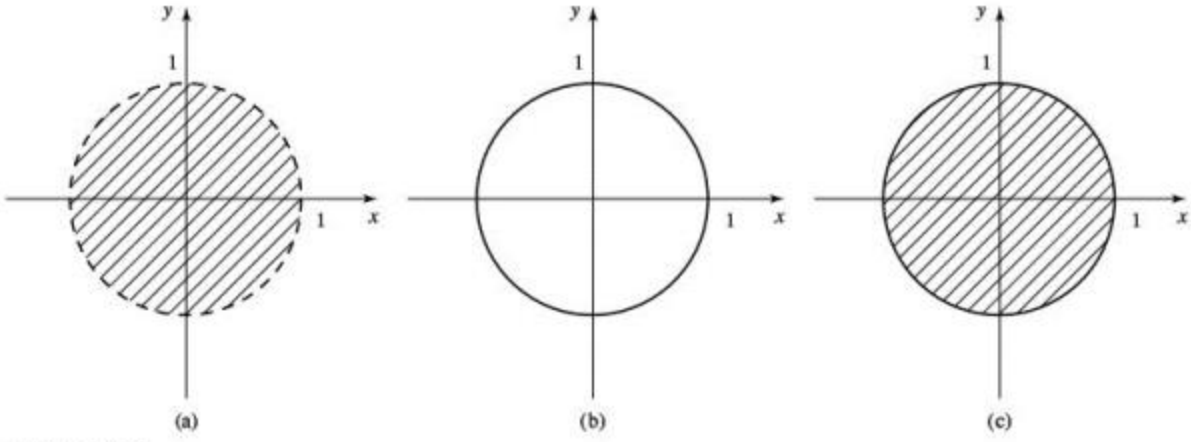
▲ **Figura 10.54**
El conjunto D_1 de la izquierda es abierto. El conjunto D_2 de la derecha es cerrado y la línea continua es la frontera

Para definir estos conceptos de forma más general, comenzaremos con un conjunto $D \subset \mathbf{R}^2$. Un punto (x, y) se denomina **punto interior** de D si existe un $\delta > 0$ tal que el disco de radio δ centrado en (x, y) está completamente contenido en D, es decir, $B_\delta(x, y) \subset D$ (*véase* la Figura 10.53a). Un punto (x, y) se denomina **punto frontera** de D si todo disco centrado en (x, y) contiene puntos que están en D y puntos que no están en D. Los puntos frontera (x, y) no tienen que pertenecer necesariamente a D. Un conjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ es **abierto** si está formado sólo por puntos interiores, y es **cerrado** si contiene todos sus puntos frontera (*véase* la Figura 10.54).

La mayor parte de las veces los dominios de nuestras funciones serán rectángulos o discos. La Figura 10.55 ilustra en el disco unidad los conceptos que se acaban de exponer. Partimos del disco unidad abierto $\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ (Figura 10.55a). Todos los puntos de este conjunto son interiores. El círculo unidad $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ es la frontera del disco unidad abierto (Figura 10.55b). Si se combinan el disco abierto y su frontera se obtiene el disco unidad cerrado $\{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ (Figura 10.55c).

Para formular el teorema de los valores extremos en $\mathbf{R}^2$ se necesita también el concepto de conjunto **acotado**. Un conjunto está acotado si está contenido en algún disco.

Teorema de los valores extremos en $\mathbf{R}^2$ Si f es una función continua en un conjunto cerrado y acotado $D \subset \mathbf{R}^2$, entonces f tiene un máximo global y un mínimo global en D.



▲ **Figura 10.55**
El conjunto de la izquierda es un disco unidad abierto. La línea continua en la figura del centro es la frontera del disco unidad. El conjunto de la derecha combina el disco abierto y su frontera, y es el disco unidad cerrado.

Los extremos globales pueden estar en el interior de D o en su frontera. Ya hemos estudiado cómo se obtienen candidatos a extremos locales en el interior de D. Para obtener extremos locales en la frontera de D, es útil pensar en la función $f(x, y)$ restringida a la frontera de D. A menudo, esto permite escribir la función restringida a la frontera como una función de una sola variable. Se pueden usar entonces técnicas de cálculo en una sola variable para obtener todos los candidatos a puntos extremos en la frontera de D (*véase* el Ejemplo 7). Para calcular los extremos globales de funciones continuas definidas en un conjunto cerrado y acotado, se procede por tanto de la siguiente forma:

1. Se determinan todos los candidatos a extremos locales en el interior de D.
2. Se determinan todos los candidatos a extremos locales en la frontera de D.
3. Se seleccionan el máximo global y el mínimo global del conjunto de puntos determinados en los pasos 1 y 2.

Ejemplo 7 Calcule los extremos globales de

$$f(x, y) = x^2 - 3y + y^2, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Solución

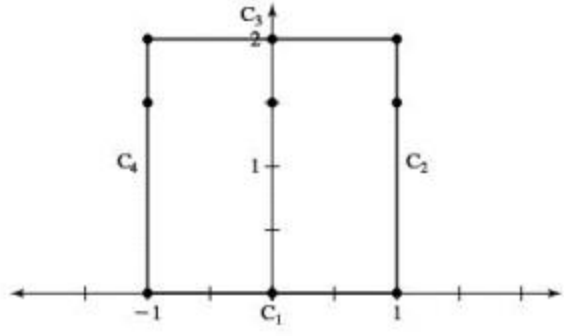
La función está definida en un rectángulo cerrado y acotado, y es continua. Por tanto, el teorema de los valores extremos garantiza la existencia de extremos globales. Comenzaremos calculando los puntos críticos del interior del dominio,

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ -3 + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que $x = 0$ e $y = 3/2$. El punto $(0, 3/2)$ está en el interior del dominio de f y es por tanto un punto crítico con $f(0,3/2) = -2.25$. No hay más puntos críticos en el interior del dominio de f.

Seguidamente, hay que comprobar los valores de la frontera (*véase* la Figura 10.56). Empezaremos con el segmento C_1, que une los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ en el eje x. En el segmento C_1, $y = 0$. Por tanto, f en C_1 es de la forma

$$f(x, 0) = x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$



▲ **Figura 10.56**
El dominio de $f(x, y)$ del Ejemplo 7. La frontera está formada por los segmentos C_1, C_2, C_3 y C_4

Al restringir $f(x, y)$ a la curva $y = 0$, se obtiene una función de sólo una variable. Utilizando métodos de cálculo de una variable, se obtiene que $f'(x, 0) = 2x = 0$ para $x = 0$. El punto crítico en C_1 es por tanto $(0, 0)$ con $f(0, 0) = 0$. Además, hay que considerar los puntos de los extremos $(-1, 0)$ con $f(-1, 0) = 1$ y $(1, 0)$ con $f(1, 0) = 1$.

En C_2, $x = 1$ por lo que $f(1, y) = 1 - 3y + y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, que es de nuevo una función de una variable. $f'(1, y) = -3 + 2y = 0$ para $y = 3/2$. Por tanto, hemos encontrado un candidato en $(1, 3/2)$ con $f(1, 3/2) = -1.25$. Otros candidatos son los puntos de los extremos $(1, 0)$ con $f(1, 0) = 1$ y $(1, 2)$ con $f(1, 2) = -1$.

En C_3, $y = 2$ por lo que $f(x, 2) = x^2 - 2$. Por tanto, $f'(x, 2) = 2x = 0$ para $x = 0$, con lo que un punto crítico es $(0, 2)$ con $f(0, 2) = -2$. Otros candidatos son los puntos de los extremos $(-1, 2)$ con $f(-1, 2) = -1$ y $(1, 2)$ con $f(1, 2) = -1$.

En C_4, $x = -1$ y $f(-1, y) = 1 - 3y + y^2$, que es la misma función que en C_2. Por tanto, tenemos los puntos adicionales $(-1, 3/2)$ con $f(-1, 3/2) = -1.25$ y $(-1, 0)$ con $f(-1, 0) = 1$ y $(-1, 2)$ con $f(-1, 2) = -1$.

Comparando todos los valores de $f(x, y)$ en los puntos candidatos (*véanse* la Figura 10.56 y la tabla que sigue), se obtiene que el mínimo global es $f(0, 3/2) = -2.25$ y que los máximos globales son $f(-1, 0) = 1$ y $f(1, 0) = 1$.

(x, y)	$(0, 3/2)$	$(0, 0)$	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 3/2)$	$(1, 2)$	$(0, 2)$	$(-1, 2)$	$(1, 2)$	$(-1, 3/2)$
$f(x, y)$	-1.25	0	1	1	-1.25	-1	-2	-1	-1	-1.25

◀

Ejemplo 8 Calcule los máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4$ en el disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Solución

La función está definida en un disco cerrado y acotado y es continua. Por tanto, el teorema de los valores extremos garantiza la existencia de extremos globales. Comenzaremos por calcular los puntos críticos en el interior del dominio:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El gradiente se hace igual a cero para $x = 1$ e $y = 0$. Como $x^2 + y^2 = 1 \leqslant 4$, el punto $(1, 0)$ está en el interior del dominio de f y por tanto es un punto crítico, con $f(1, 0) = 3$. No existen más puntos críticos en el interior del dominio de f.

Seguidamente, hay que calcular los extremos en la frontera del dominio, que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Esta circunferencia está centrada en el origen (0, 0) y su radio es 2. Hay que encontrar una descripción matemática de esta circunferencia en forma de función de una sola variable de forma que se puedan utilizar los procedimientos de cálculo de una variable para encontrar los extremos en la frontera. Cualquier punto de la circunferencia se puede expresar de esta forma:

$$x = 2\cos\theta$$
$$y = 2\operatorname{sen}\theta$$

con $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Esto se denomina **parametrización** de la circunferencia.

En esta circunferencia,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 2x + 4 \\ &= 4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta - 4\cos\theta + 4 \\ &= 4 - 4\cos\theta + 4 = 8 - 4\cos\theta \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Para calcular los máximos y mínimos de la función de una variable $g(\theta) = 8 - 4\cos\theta$ hay que derivarla.

$$g'(\theta) = 4\operatorname{sen}\theta$$

y resolver la ecuación $g'(\theta) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. Se obtienen como solución los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Entonces,

$$g(0) = 8 - 4 = 4 \qquad \text{y} \qquad g(\pi) = 8 + 4 = 12$$

El máximo en la frontera está en $\theta = \pi$, que corresponde al punto $(-2, 0)$. El mínimo en la frontera está en $\theta = 0$, que corresponde al punto (2, 0).

Comparando los extremos de la frontera y el extremo en el interior del conjunto D, se obtiene que el mínimo global está en el interior en el punto (1, 0) y el máximo global está en la frontera en el punto $(-2, 0)$ (Figura 10.57).

Concluiremos esta sección con una aplicación. ◀

Ejemplo 9 Determine los valores de tres números no negativos cuya suma sea 90 y cuyo producto sea máximo.

Solución

Denominaremos a los tres números x, y y z. Entonces, $x + y + z = 90$, y el producto es xyz. Como $z = 90 - x - y$, el producto se puede escribir como $xyz = xy(90 - x - y)$. El objetivo es maximizar este producto. Se define la función

$$f(x, y) = xy(90 - x - y), \quad x + y \leqslant 90, x \geqslant 0, y \geqslant 0$$

Como x, y y z son números no negativos y su suma es igual a 90, el dominio es el conjunto $\{(x, y): x + y \leqslant 90, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, que es la región triangular limitada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 90 - x$.

Hay que obtener los puntos (x, y) donde $f(x, y)$ es máxima. Entonces,

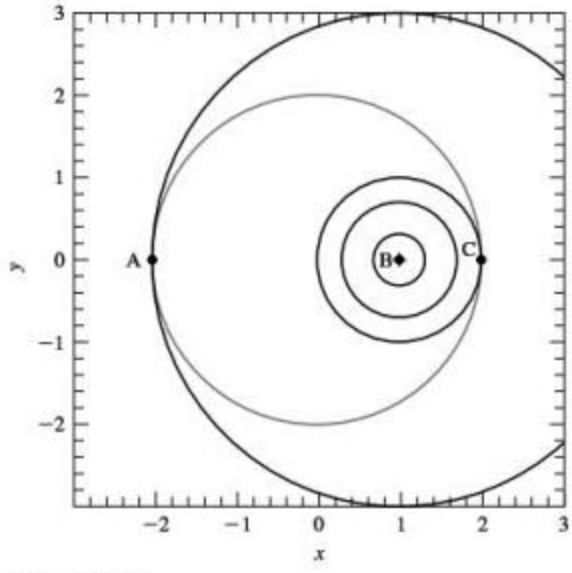
$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 90y - 2xy - y^2 \\ 90x - x^2 - 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuando

$$y(90 - 2x - y) = 0 \qquad \text{y} \qquad x(90 - 2y - x) = 0$$

Las soluciones con $x = 0$ o $y = 0$ son puntos de la frontera. Para calcular soluciones en el interior del dominio hay que resolver

$$2x + y = 90$$
$$x + 2y = 90$$



▲ **Figura 10.57**
Se muestran las líneas de contorno de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4$ (en línea continua para los valores $f(x, y) = c$ con $c = 3.1, 3.5, 4$ y 12) y la frontera del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$ (en línea discontinua). El punto $B = (1, 0)$ es el mínimo local en el interior del disco, $x^2 + y^2 \leqslant 4$ el punto $A = (-2, 0)$ es el máximo local en la frontera del disco y el punto $C = (2, 0)$ es el mínimo local en la frontera del disco.

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restando la primera ecuación se obtiene

$$3y = 90$$

o $y = 30$. Utilizando la primera ecuación, $2x = 90 - y = 60$, se obtiene $x = 30$, con lo que el candidato es el punto (30, 30), que está en el interior del dominio, con $f(30, 30) = 30^3 = 27\,000$. No hay más candidatos a puntos extremos en el interior de D.

La función $f(x, y)$ es continua en un conjunto cerrado y acotado, concretamente el triángulo de vértices (0, 0), (0, 90) y (90, 0). El teorema de los valores extremos garantiza que f tiene un máximo global en el dominio. Podemos ver que $f(x, y)$ vale 0 en la frontera del dominio. Comparando los valores de $f(x, y)$ en la frontera con el valor de la función en el punto candidato (30, 30), se concluye que la función $f(x, y)$ tiene su máximo global en el candidato del interior (30, 30).

Por tanto, el producto xyz es máximo cuando $x = y = z = 30$. ◀

10.6.2 Extremos con restricciones

Diversos estudios han demostrado que las mariposas que depositan sus huevos individualmente, el tamaño de los huevos disminuye con la edad de la madre. Begon y Parker (1986), propusieron un modelo matemático para explicar esta disminución del tamaño del huevo en función de una estrategia materna que optimizaría la aptitud reproductiva. Las hipótesis básicas de su modelo eran que los recursos necesarios para la producción de huevos son adquiridos antes de su depósito, y que el tamaño de la nidada es fijo (por ejemplo, un solo huevo por nidada). Bajo esas hipótesis, Begon y Parker demostraron que si la aptitud del huevo es una función creciente y cóncava con su tamaño, entonces una disminución del tamaño del huevo con la edad de la madre es una estrategia materna óptima (es decir, una estrategia que maximiza la aptitud reproductiva materna).

Matemáticamente, el problema se puede formular como el cálculo del máximo de la función que modela la aptitud reproductiva materna en función del tamaño del huevo por nidada durante el tiempo de vida de un individuo bajo la restricción de que la cantidad total de recursos para la reproducción es fija al comienzo de dicha reproducción. Este tipo de problema pertenece a la categoría del cálculo de extremos con restricciones.

Para manejar un ejemplo concreto durante el desarrollo que sigue sobre el cálculo de estos extremos, tomemos el caso de una hembra que tiene como máximo durante su vida dos nidadas, cada una de ellas de tamaño n. Denominaremos x_1 al tamaño del huevo de la primera nidada y x_2 al tamaño del huevo de la segunda nidada. Supondremos además que todos los huevos de la misma nidada tienen el mismo tamaño. Si la cantidad total de recursos para la reproducción es R, entonces la restricción se puede expresar en la forma

$$nx_1 + nx_2 = R \tag{10.23}$$

Para que las unidades de (10.23) concuerden se supone que el tamaño del huevo y la cantidad de recursos disponibles se miden en las mismas unidades, por ejemplo, calorías. Se define una función $\rho(x)$ que describe la aptitud del huevo en función de su tamaño x. Si p_i representa la probabilidad de que una hembra sobreviva a su i-ésima nidada ($i = 1, 2$), entonces para expresar la aptitud reproductiva materna se puede utilizar la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = p_1 n\rho(x_1) + p_2 n\rho(x_2)$$

Nuestro objetivo es calcular los extremos de la función $f(x_1, x_2)$ bajo la restricción $nx_1 + nx_2 = R$.

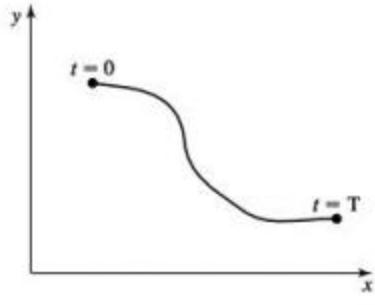
En el cálculo de extremos con restricciones intervienen dos funciones, la función que describe la restricción y la función que se desea maximizar. Todas las restricciones de esta sección se expresarán de la forma

$$g(x, y) = 0$$

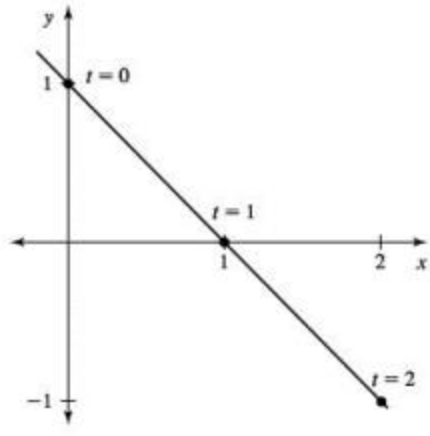
Por ejemplo, la restricción (10.23) se puede escribir en la forma $g(x_1, x_2) = nx_1 + nx_2 - R = 0$.

La restricción $g(x, y)$ se puede ver como un conjunto de puntos en el plano $x - y$: $\{(x, y): g(x, y) = 0\}$. Se trata en general de curvas con la forma que se muestra en la Figura 10.58. En la explicación que sigue, será útil imaginarse recorriendo esta curva empezando, por ejemplo, en el extremo etiquetado con $t = 0$ y terminando en el extremo etiquetado con $t = T$. Se puede indicar cualquier punto de la curva dando el valor de t en el que se pasa por dicho punto. Esto se denomina *parametrizar* la curva utilizando el parámetro t. Por tanto, la curva se puede expresar como una función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$



◀ **Figura 10.58**
Una curva de restricción



◀ **Figura 10.59**
La curva de restricción del Ejemplo 10

donde en el instante t se pasa por el punto $(x(t), y(t))$, como en la Sección 9.4.3, donde se parametrizaban rectas. La restricción cumple entonces la ecuación $g(\mathbf{r}(t)) = 0$. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 10 Sea

$$g(x, y) = x + y - 1$$

Entonces el conjunto $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ representa una curva en el plano $x - y$, concretamente la recta $y = 1 - x$. Esta curva se puede parametrizar haciendo

$$x(t) = t \qquad \text{y por tanto} \qquad y(t) = 1 - t$$

La parametrización realizada no es la única, pero es la más simple. En el instante $t = 0$, por ejemplo, estaremos en el punto $(0, 1)$. En el instante $t = 1$, estaremos en $(1, 0)$, en el instante $t = 2$, en $(2, -1)$, y así sucesivamente, como se muestra en la Figura 10.59. Esta parametrización describe el movimiento por la recta a la derecha y hacia abajo, a una velocidad de una unidad de x por unidad de tiempo. ◀

Nótese que la parametrización $x = t$ e $y = f(t)$ siempre funciona cuando y es una función explícita de x, es decir, $y = f(x)$ como en el Ejemplo 10. El siguiente ejemplo muestra una parametrización de la circunferencia unidad.

Ejemplo 11 Sea

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

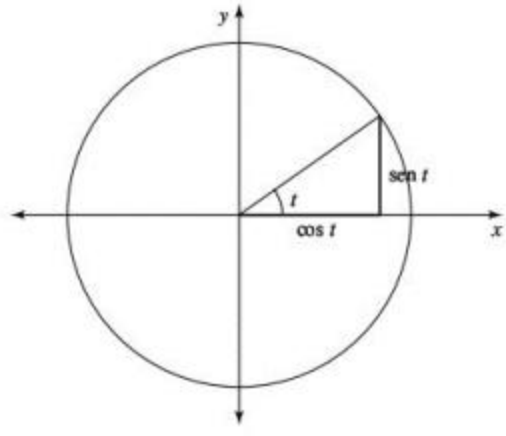
Entonces $g(x, y) = 0$ es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Una parametrización natural de la circunferencia unidad es

$$x(t) = \cos t \qquad \text{y} \qquad y(t) = \operatorname{sen} t, \ 0 \leqslant t < 2\pi$$

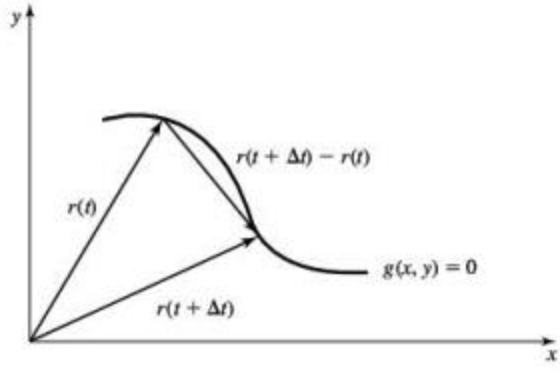
El parámetro t representa el ángulo, como se muestra en la Figura 10.60. Es decir, nos movemos por la circunferencia unidad en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad de un radian por unidad de tiempo. ◀

¿Cuál es la ventaja de realizar esta parametrización? Nos permitirá relacionar el gradiente de g en el punto (x, y), $\nabla g(x, y)$, con la tangente de la gráfica de la curva de restricciones en (x, y). Veamos cómo. Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector que va del origen al punto $(x(t), y(t))$ de la curva parametrizada de restricciones $g(x, y) = 0$. Utilizando la definición formal de derivada, se define la derivada de $\mathbf{r}(t)$ con respecto a t:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$



◀ **Figura 10.60**
La curva de restricción del Ejemplo 11



◀ **Figura 10.61**
El vector $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

suponiendo que el límite existe. La Figura 10.61 muestra el vector $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Al dividir este vector por Δt se modifica su longitud pero no su dirección. Por tanto, en el límite cuando $\Delta t \to 0$, el vector límite $\mathbf{r}'(t)$, si existe, es tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$ (*véase* la Figura 10.62). Veamos ahora el caso en el que la curva $g(x, y) = 0$ se puede escribir como una función que expresa y explícitamente como función de x, concretamente $y = h(x)$, existiendo $h'(x)$. Recuérdese que la derivada de $\mathbf{r}(t)$ con respecto a t se define componente a componente:

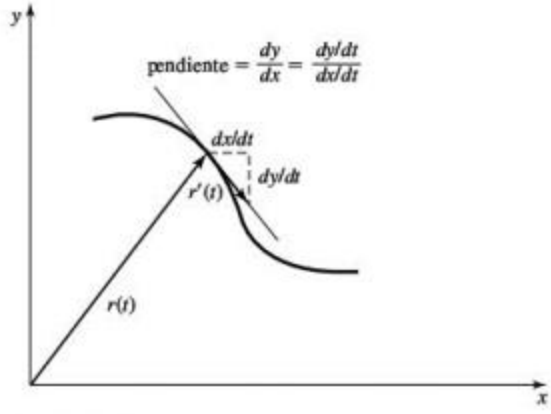
$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

La pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) de la curva es $h'(x)$. Como

$$h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

podemos ver que la pendiente de la recta tangente se puede expresar como el cociente de las componentes dx/dt y dy/dt del vector $\mathbf{r}'(t)$, como se muestra en la Figura 10.62, lo que implica que $\mathbf{r}'(t)$ es tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$.

Esto tiene una implicación importante: como $g(x, y) = 0$ es una curva de nivel, el gradiente de g en el punto (x, y), $\nabla g(x, y)$, es perpendicular a la curva de nivel en dicho punto, y por tanto, también es perpendicular a $\mathbf{r}'(t)$ (*véase* la Sub-



▲ **Figura 10.62**
El vector $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

sección 10.5.3) ¿Cómo se puede verificar esto? Como la curva está dada por la ecuación $g(x(t), y(t)) = 0$, entonces $\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = 0$. Utilizando ahora la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla g(x, g) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

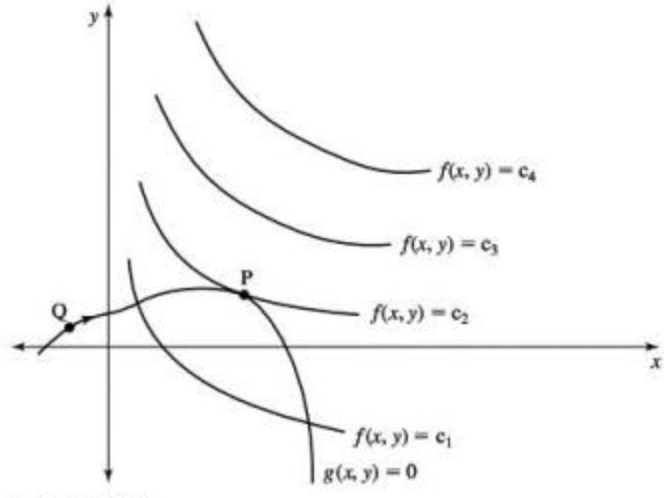
donde en el último paso se ha utilizado la definición de producto escalar. Por tanto, tenemos

$$\nabla g(x, y) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

lo que implica que el vector gradiente $\nabla g(x, y)$ es perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ en el punto $(x(t), y(t))$, como se dijo anteriormente. Este es un hecho importante que necesitaremos utilizar posteriormente para calcular extremos con restricciones.

Volvamos ahora al problema de calcular extremos con restricciones. Denominaremos $f(x, y)$ a la función a optimizar y $g(x, y) = 0$ la restricción. Para calcular extremos con restricciones se particulariza la función $f(x, y)$ en la curva de restricciones y se buscan los extremos en dicha curva. La restricción $g(x, y)$ define un conjunto de puntos (x, y) en el plano $x - y$. La gráfica de $z = f(x, y)$, es una superficie en el espacio tridimensional $x - y - z$. Utilizando curvas de nivel se puede representar $f(x, y)$ en el plano $x - y$. Se pueden dibujar entonces las curvas de nivel de $f(x, y)$ y la restricción $g(x, y) = 0$ en el mismo sistema de coordenadas bidimensional (*véase* la Figura 10.63). Vamos a ver que $f(x, y)$ tiene un extremo local en el punto P de la Figura 10.63 bajo la restricción $g(x, y) = 0$. Para ver que esto es así, imaginémonos viajando por la curva $g(x, y) = 0$ empezando en el punto Q en la dirección de la flecha. Primero cortaremos a la curva de nivel $f(x, y) = c_1$ y después a la curva $f(x, y) = c_2$. Para concretar la exposición que sigue, supongamos que $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ (otras posibilidades se presentarán en los Problemas 59 y 60). Los valores de f en nuestro viaje aumentarán hasta que alcancemos el punto P. Una vez pasado P, los valores de f volverán a descender. Por tanto, a lo largo de la curva $g(x, y) = 0$, la función f tiene un extremo local (en este caso un máximo) en P.

¿Qué caracteriza al punto P? La curva de nivel que pasa por P y la curva de restricción se tocan en el punto P. Es decir, ambas comparten la misma recta tangente en ese punto. Recordamos de la Subsección 10.5.3 que el gradiente de f en el punto P es perpendicular a la curva de nivel que pasa por P. Combinando esto



▲ **Figura 10.63**
Curvas de nivel y restricciones

con el resultado obtenido anteriormente (concretamente, que el gradiente de g en P es perpendicular a la recta tangente en P a la gráfica de g), se concluye que si hay un extremo en P, ∇g y ∇f son paralelos.

Para formular el teorema de forma más general [y no sólo en el caso en el que $g(x, y)$ se pueda escribir como una función que exprese y explícitamente en términos de x], es necesario requerir que $\nabla g(x, y) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en el punto P. Si las coordenadas de P son (x_0, y_0), se puede establecer el siguiente resultado.

Teorema de Lagrange Sean f y g dos funciones con derivadas parciales continuas y tales que $f(x, y)$ tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces existe un número λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \qquad (10.24)$$

El número λ se denomina **multiplicador de Lagrange**. El cálculo de candidatos a extremos con restricciones utilizando estos multiplicadores se denomina **método de los multiplicadores de Lagrange**. La condición (10.24) es una condición necesaria. En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de los multiplicadores de Lagrange para calcular extremos con restricciones.

Ejemplo 12 Calcule todos los extremos de

$$f(x, y) = e^{-xy}$$

con la restricción $x^2 + 4y^2 = 1$.

Solución

Se define la función $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$. La restricción es ahora de la forma $g(x, y) = 0$. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, hay que calcular un punto (x, y) y un valor de λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = 0$$

Como

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -ye^{-xy} \\ -xe^{-xy} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 8y \end{bmatrix}$$

esto se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones

$$-ye^{-xy} = 2\lambda x \quad \text{y} \quad -xe^{-xy} = 8\lambda y \quad \text{y} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Se puede eliminar λ de las dos primeras ecuaciones (multiplicando la primera ecuación por $4y$, la segunda ecuación por x y restando ambas ecuaciones). Se obtiene

$$-4y^2e^{-xy} + x^2e^{-xy} = 0$$

Simplificando resulta $e^{-xy}(x^2 - 4y^2) = 0$. Como $e^{-xy} \neq 0$, se obtiene $x^2 - 4y^2 = 0$. Combinando esta ecuación con la de la restricción, se obtiene el sistema

$$x^2 - 4y^2 = 0$$
$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Dejamos la primera ecuación y eliminamos y de la segunda sumando ambas ecuaciones. Se obtiene

$$x^2 - 4y^2 = 0$$
$$2x^2 = 1$$

Por tanto, $x^2 = 1/2$ y $4y^2 = x^2 = 1/2$, lo que implica que $y^2 = 1/8$. Entonces, se obtienen los siguientes candidatos

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

con

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-1/4}, \quad f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{1/4},$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{1/4}, \quad f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-1/4},$$

El teorema de los valores extremos se puede aplicar a la curva de la restricción, puesto que ésta es cerrada y acotada. Por tanto, se concluye que existen máximos y mínimos en la curva de restricción y se pueden seleccionar entre los candidatos. Los máximos son $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; los mínimos son $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ (*véase* la Figura 10.64). ◀

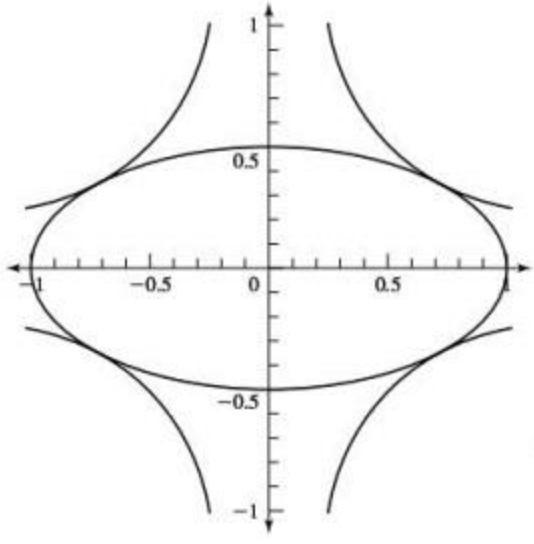
Volviendo al Ejemplo 12, podemos ver que no ha sido necesario calcular el valor real de λ para obtener los extremos. Este será en general el caso.

Al plantear este resultado, se ha dicho que la condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ es una condición necesaria. Esto significa que al calcular los puntos (x_0, y_0) tales que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ sólo se identifican candidatos a extremos locales. Veamos esta idea en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 13 Utilice los multiplicadores de Lagrange para identificar candidatos a extremos locales de

$$f(x, y) = y$$

con la restricción $y - x^3 = 0$, y demuestre que uno de los candidatos no es un extremo local. Demuestre además que la función $f(x, y)$ con la restricción $y - x^3 = 0$ no tiene extremos globales.



◀ **Figura 10.64**
Curvas de nivel $f(x, y)$ que tocan a la curva de restricción $g(x, y) = 0$ en el Ejemplo 12

Solución

Se define $g(x, y) = y - x^3$. Entonces

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $y - x^3 = 0$, se obtiene

$$0 = -3\lambda x^2 \quad \text{y} \quad 1 = \lambda \quad \text{y} \quad y = x^3$$

Eliminando λ, se obtiene $x = 0$ y por tanto $y = 0$. Vamos a ver que $(0, 0)$ no es un extremo local. La forma más sencilla de comprobarlo es averiguar el aspecto que presenta $f(x, y)$ a lo largo de la curva de restricción $y = x^3$. Utilizando la relación $y = x^3$ para sustituir y en la expresión de $f(x, y)$ se obtiene la función de una sola variable $h(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Ya sabemos, de aplicar métodos de cálculo en una variable, que la función $h(x) = x^3$ no tiene extremos locales en $\mathbf{R}$, aún existiendo un candidato a extremo local en $x = 0$, ya que $h'(x) = 0$ para $x = 0$. Como $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, la función $f(x, y)$ con la restricción $y - x^3 = 0$ no tiene extremos globales. ◀

El método de los multiplicadores de Lagrange sólo identifica candidatos a extremos locales y, como hemos visto en el ejemplo anterior, los candidatos pueden no ser extremos locales. Sin embargo, la obtención de candidatos es de gran utilidad si nuestro interés son los extremos globales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14 Suponga que se desea cercar una parcela rectangular. Se dispone de 1600 pies de cerca. Utilizando este material, ¿cuáles serán las dimensiones de la parcela de estudio de área máxima? (*véase* la Figura 10.65).

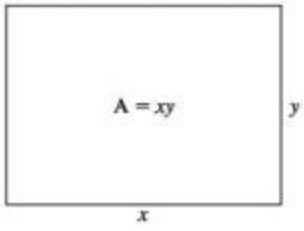
Solución

Se desea maximizar

$$A = xy$$

con la restricción $2x + 2y = 1600$. Se define

$$f(x, y) = xy \quad \text{y} \quad g(x, y) = 2x + 2y - 1600 = 0$$



▲ **Figura 10.65**
La parcela retangular del Ejemplo 14

Entonces

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando los multiplicadores de Lagrange, hay que calcular valores de (x, y) y λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{y} \quad 2x + 2y - 1600 = 0$$

Con lo que resulta el sistema de ecuaciones

$$y = 2\lambda \qquad x = 2\lambda \qquad x + y = 800$$

Eliminando λ de las dos primeras ecuaciones, se concluye que $x = y$ y por tanto $2x = 800$ o $x = 400$. Por razones físicas, x e y sólo pueden tomar valores no negativos. La restricción por tanto acota los valores de x e y al segmento de recta $y = 800 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 800$. Para ver que $f(400, 400)$ es un máximo, se compara $f(400, 400)$ con los valores en los extremos de la recta que describe la restricción, $f(0, 800)$ y $f(800, 0)$. Como $f(400, 400) = 160\,000$ y $f(0, 800) = f(800, 0) = 0$, se concluye que $f(400, 400)$ es un máximo, y de hecho es el máximo global. ◀

Este tipo de problema probablemente nos sea familiar de la Sección 5.4. El método de los multiplicadores de Lagrange es otro método para resolver los problemas que se consideraron en la Sección 5.4. Este método es más general que el de aquella sección, y se puede utilizar incluso si no se puede despejar x o y de la restricción para eliminar una de las dos variables, como se hacía en la Sección 5.4.

Como último ejemplo de esta sección volveremos al ejemplo inicial, donde se deseaba maximizar $f(x_1, x_2) = p_1 n\rho(x_1) + p_2 n\rho(x_2)$ con la restricción $nx_1 + nx_2 = R$. Haremos ahora la hipótesis adicional de que $\rho(x)$ crece con velocidad decreciente y cumple $\rho(0) = 0$ (*véase* la Figura 10.66), lo que implica que hay un retorno en disminución cuando aumenta el tamaño del huevo.

Ejemplo 15 Suponga que x_1 y x_2 son valores no negativos. Maximice

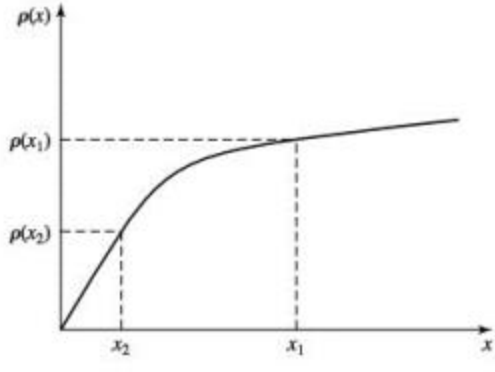
$$f(x_1, x_2) = p_1 n\rho(x_1) + p_2 n\rho(x_2)$$

con la restricción $nx_1 + nx_2 = R$, y demuestre que el tamaño del huevo debe disminuir con la edad materna.

Solución

Se obtiene

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} p_1 n\rho'(x_1) \\ p_2 n\rho'(x_2) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$



◀ **Figura 10.66**
La función $\rho(x)$

Por tanto, hay que calcular valores de (x_1, x_2) y λ tales que

$$p_1 n\rho'(x_1) = n\lambda \qquad p_2 n\rho'(x_2) = n\lambda \qquad nx_1 + nx_2 = R$$

Eliminando λ se obtiene

$$p_1\rho'(x_1) = p_2\rho'(x_2) \tag{10.25}$$

La curva de restricción $nx_1 + nx_2 = R$ es una recta. Por razones biológicas, se requiere que x_1 y x_2 sean valores no negativos. Por tanto, la curva de restricción es el segmento de recta comprendido entre los puntos $(R/n, 0)$ y $(0, R/n)$.

Podría ocurrir que ningún punto (x_1, x_2) de esta recta cumpliera la Ecuación (10.25). Sin embargo, no es difícil demostrar que debe existir al menos un punto que la cumpla. Concretamente, despejando x_2 en la curva de restricción, $x_2 = R/n - x_1$, y sustituyendo esto en la Ecuación (10.25) se obtiene

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho'(R/n - x_1)}{\rho'(x_1)} \tag{10.26}$$

Como $\rho'(x) > 0$ y $\rho''(x) < 0$,

$$\frac{d}{dx_1}\frac{\rho'(R/n - x_1)}{\rho'(x_1)} = \frac{-\rho''(R/n - x_1)\rho'(x_1) - \rho'(R/n - x_1)\rho''(x_1)}{[\rho'(x_1)]^2} > 0$$

y se deduce que debe existir al menos un valor de x_1 tal que (10.26) [y por tanto (10.25)] se cumplan.

Tenemos ahora la siguiente situación: si existe un punto (x_1, x_2) que cumpla (10.25) y esté en el segmento de restricción, entonces hay tres candidatos a extremos globales, concretamente (x_1, x_2), $(R/n, 0)$ y $(0, R/n)$. Si no es así, sólo tendremos los candidatos $(R/n, 0)$ y $(0, R/n)$. Debemos escoger el máximo global de este conjunto de candidatos.

Ahora, si $p_1 > p_2$ entonces $f(R/n, 0) > f(0, R/n)$. Por tanto el máximo global no está en el extremo del segmento $(0, R/n)$. Planteamos que si existe un punto (x_1, x_2) que cumpla la Ecuación (10.25) y esté en el segmento cuyos extremos son $(R/n, 0)$ y $(0, R/n)$, el máximo global está en ese punto (x_1, x_2). Si no es así, el máximo global estará en el extremo $(R/n, 0)$. En cuál de las dos posibilidades se encuentra el máximo global depende de la función ρ y de la relación de las probabilidades de supervivencia p_1 y p_2. Planteamos que si

$$\frac{\rho'(R/n)}{\rho'(0)} < \frac{p_2}{p_1} \tag{10.27}$$

entonces existe un punto (x_1, x_2) que cumple (10.25) y está en el segmento cuyos extremos son $(R/n, 0)$ y $(0, R/n)$. El máximo global se produce entonces en este punto. Si no se cumple la ecuación anterior, entonces el máximo global se produce en el extremo del segmento $(R/n, 0)$. ¿Cómo se puede comprobar esto? Como $x_2 = R/n - x_1$, la función de aptitud f se puede expresar en función sólo de x_1 y determinar dónde es creciente y dónde es decreciente. Se obtiene que

$$y = f(x_1, R/n - x_1) = np_1\rho(x_1) + np_2\rho(R/n - x_1)$$

Derivando el miembro derecho con respecto a x_1 resulta

$$y' = np_1\rho'(x_1) - np_2\rho'(R/n - x_1)$$

que es positivo en $x_1 = 0$ ya que $p_1 > p_2$ y $\rho'(0) > \rho'(R/n)$ [recuérdese que $\rho(x)$ es creciente con velocidad decreciente]. La derivada y' es negativa en $x_1 = R/n$ si se cumple (10.27) [recuérdese que $\rho'(x) > 0$]. Por tanto, si se cumple (10.27), la función f tiene un máximo en algún punto (x_1, x_2) con $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $nx_1 + nx_2 = R$. Si (10.27) no se cumple, el máximo está en el extremo del segmento $(R/n, 0)$. Es decir, la estrategia $(R/n, 0)$ se puede mejorar depositando hue-

vos en la segunda nidada si se cumple (10.27). Si no se cumple (10.27), entonces la estrategia óptima es depositar todos los huevos en la primera nidada y escoger como tamaño del huevo el valor R/n para los n huevos.

Para demostrar que el tamaño del huevo debe disminuir, usaremos de nuevo la hipótesis de que $\rho(x)$ es una función con retorno en disminución, es decir, una función creciente con velocidad decreciente. Como $p_1 > p_2$ (la probabilidad de permanecer vivo a una edad posterior es menor que a una edad más temprana), $\rho'(x_1) < \rho'(x_2)$ y por tanto $x_1 > x_2$ (*véase* la Figura 10.66), lo que implica que el tamaño del huevo debe disminuir. Si la estrategia óptima está en el extremo del segmento $(R/n, 0)$, entonces el tamaño del huevo en la primera nidada es R/n y en la segunda nidada es 0, lo que implica que también disminuye. ◀

10.6.3 Difusión

Supongamos que se sitúa un terrón de azúcar en un vaso de agua sin remover el agua. El azúcar se disuelve y sus moléculas se mueven de forma aleatoria en el agua. Si se espera suficiente tiempo, la concentración de azúcar será uniforme en todo el vaso de agua. Este movimiento aleatorio de las moléculas se denomina **difusión** y tiene un papel muy importante en muchos procesos de la vida. Por ejemplo, el intercambio de gases en organismos unicelulares y en muchos organismos pluricelulares pequeños tiene lugar por difusión. La difusión es un proceso lento, lo que significa que si las células quieren intercambiar gases por difusión deben estar cerca de la superficie. Esto limita el tamaño de los organismos, a menos que surjan mecanismos diferentes de intercambio de gases (existen organismos mayores, como el kelp, que basan su intercambio de gases en la difusión, pero sus hojas son lo suficientemente finas como para que sus células estén cerca de la superficie).

Obtención de la ecuación de difusión unidimensional Se desea estudiar la descripción microscópica del proceso de difusión. Se supone que las moléculas se mueven en el eje x, y se denomina $c(x, t)$ a la concentración de moléculas en x en el instante t. Es decir, el número de moléculas que hay en un intervalo en el instante t es

$$N_{[x_1, x_2)}(t) = \int_{x_1}^{x_2} c(x, t)\, dx \tag{10.28}$$

Como las moléculas se mueven, el número de moléculas que hay en un intervalo dado varía con el tiempo. Expresaremos esta variación como la diferencia entre el movimiento de las moléculas en los extremos izquierdo y derecho del intervalo. La magnitud que describe el movimiento neto se denomina **flujo**, y se expresa como $J(x, t)$. Interpretaremos

$$J(x, t)\Delta t = \text{número de moléculas que cruzan } x \text{ de izquierda a derecha en un intervalo de tiempo de longitud } \Delta t$$

Es decir, si se considera el cambio en el número de moléculas en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x)$ durante el intervalo temporal $[t, t + \Delta)$, entonces

$$\begin{aligned} &N_{[x_0, x_0+\Delta x)}(t + \Delta t) - N_{[x_0, x_0+\Delta x)}(t) \\ &\quad = J(x_0, t)\Delta t - J(x_0 + \Delta x, t)\Delta t \end{aligned} \tag{10.29}$$

Dividiendo los dos miembros de (10.29) por Δt y haciendo $\Delta t \to 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{[x_0, x_0+\Delta x)}(t + \Delta t) - N_{[x_0, x_0+\Delta x)}(t)}{\Delta t} \\ &\quad = J(x_0, t) - J(x_0 + \Delta x, t) \end{aligned} \tag{10.30}$$

El miembro izquierdo de (10.30) es igual a

$$\frac{d}{dt} N_{[x_0, x_0+\Delta x]}(t) \tag{10.31}$$

Utilizando (10.28), (10.31) se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} c(x, t)\, dx$$

Cuando $c(x, t)$ es lo suficientemente suave, se pueden intercambiar el orden de derivación e integración (no podemos justificar este paso aquí, pero se justifica en cursos de análisis real). Se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} c(x, t)\, dx = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t}\, dx$$

Nótese que al intercambiar el orden la «d» de la derivada se ha cambiado por la «∂» de derivada parcial. Antes de cambiar el orden, la derivada era de una función que dependía sólo de t, pero al realizar el cambio, se deriva una función que depende de dos variables, x y t. En resumen, se llega a la ecuación

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} c(x, t)\, dx = J(x_0, t) - J(x_0 + \Delta x, t) \tag{10.32}$$

Para obtener la ecuación de difusión, se dividen los dos miembros de la Ecuación (10.32) por Δx y se toma el límite cuando $\Delta x \to 0$. En el miembro izquierdo de (10.32) se obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} c(x, t)\, dx = \frac{\partial c(x_0, t)}{\partial t}$$

En el miembro derecho de (10.32), tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{J(x_0, t) - J(x_0 - \Delta x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial J(x_0, t)}{\partial x}$$

Recopilando todo, se llega a

$$\frac{\partial c(x_0, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x_0, t)}{\partial x} \tag{10.33}$$

Una ley fenomenológica, denominada ley de Fick, relaciona el flujo con el cambio de concentración. Se cumple, por ejemplo, cuando las moléculas se mueven aleatoriamente en un disolvente. Esta ley dice que

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \tag{10.34}$$

siendo D una constante positiva denominada **constante de difusión**. Significa que el flujo es proporcional al cambio de concentración. El signo menos de la Ecuación (10.34) significa que el movimiento neto de las moléculas va de las regiones de concentración alta a las regiones de concentración baja. Esto coincide con nuestra intuición. Volviendo al ejemplo de la disolución de azúcar en agua, es de esperar que el movimiento neto de las moléculas de azúcar sea de las regiones de concentración alta a las regiones de concentración baja, hasta que la concentración de azúcar sea uniforme.

Combinando las Ecuaciones (10.33) y (10.34), se llega a la **ecuación de difusión**, que es

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{10.35}$$

La difusión es un proceso omnipresente en biología. No sólo se usa en la descripción del movimiento aleatorio de moléculas, sino en un amplio abanico de aplicaciones como el cambio en las frecuencias de alelos debido a la evolución genética aleatoria, la invasión de un hábitat virgen por especies foráneas, el movimiento de organismos orientado por gradientes de productos químicos (quimiotaxis), formación de patrones, y muchas más. La Ecuación (10.35) es la forma más simple que tiene una ecuación que incorpora el efecto de la difusión. En física, esta ecuación se denomina ecuación del calor, y modela la difusión del calor por una barra sólida. En este caso, $c(x, t)$ representa la temperatura en la posición x en el instante t.

La Ecuación (10.35) es un ejemplo de **ecuación diferencial en derivadas parciales**. La teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es complicada y se sale del alcance de este libro, por tanto, sólo comentaremos algunos aspectos de esta ecuación.

Solución de la ecuación de difusión En la mayor parte de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no es posible obtener una solución analítica, por lo que deben resolverse numéricamente, lo que no es en general tarea fácil. Afortunadamente, la Ecuación (10.35) es lo suficientemente sencilla como para que se pueda calcular una solución. Planteamos que

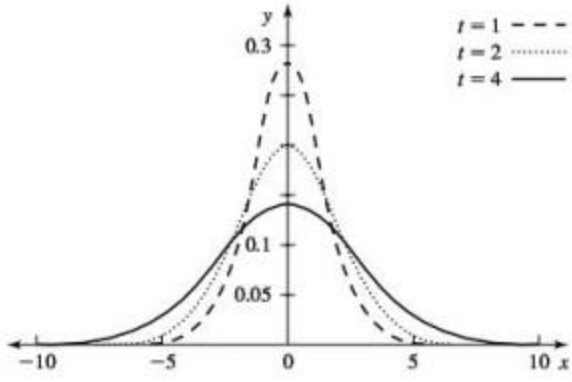
$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \tag{10.36}$$

es una solución de (10.35). Como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, esto se puede comprobar calculando las derivadas apropiadas. En el miembro izquierdo de la Ecuación (10.35), hay que calcular la derivada parcial primera de $c(x, t)$ con respecto a t. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{Dt}\right] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{4\pi D}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \frac{x^2}{4Dt^2} \\
&= \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \left\{ \frac{x^2}{4Dt^2\sqrt{4\pi Dt}} - \frac{2\pi D}{4\pi Dt\sqrt{4\pi Dt}} \right\} \\
&= \frac{1}{2t\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \left\{ \frac{x^2}{2Dt} - 1 \right\}
\end{aligned} \tag{10.37}$$

En el miembro derecho de la Ecuación (10.35), hay que calcular la derivada parcial segunda de $c(x, t)$ con respecto a x. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \left(-\frac{2x}{4Dt}\right)
\end{aligned}$$



▲ **Figura 10.67**
Solución de la ecuación de difusión en diferentes instantes

y

$$\frac{\partial^2 c(x,\ t)}{\partial x^2} = \frac{-1}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{1}{2Dt} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]\left\{1 - x\frac{2x}{4Dt}\right\}$$
$$= \frac{1}{2Dt\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]\left\{\frac{x^2}{2Dt} - 1\right\} \tag{10.38}$$

Juntando los dos resultados, se puede ver que (10.36) cumple (10.35).

La función (10.36) se denomina **densidad gaussiana**. La Figura 10.67 muestra $c(x, t)$ para $t = 1$, 2 y 4. Puede verse claramente que la concentración $c(x, t)$ se va haciendo más uniforme a medida que transcurre el tiempo.

La difusión es un proceso muy lento. La constante de difusión D mide su rapidez. Cuanto mayor sea D, más rápidamente se extiende la concentración y se puede demostrar que tras t unidades de tiempo, el grueso de las moléculas se extiende por una región con longitud del orden de $\sqrt{t}$.

Para dar una idea de la lentitud del proceso de difusión, presentamos algunos ejemplos extraídos de Yeargers, Shonkwiler y Herod (1996). La constante de difusión del oxígeno en la sangre a 20 °C es de 10^{-5} cm^2/s, lo que significa que una molécula de oxígeno tarda unos 500 segundos en cruzar una distancia de 1 mm mediante difusión. La ribonucleasa (una encima que hidroliza el ARN [ácido robonucleico]) tiene una constante de difusión en agua a 20 °C de 1.1×10^{-6} cm^2/s, lo que significa que la ribonucleasa tarda unos 4672 segundos (o 1 hora y 18 minutos) en cruzar una distancia de 1 mm mediante difusión. Estos ejemplos ilustran por qué los organismos utilizan frecuentemente otros mecanismos más activos para el transporte de moléculas.

La Ecuación de difusión (10.35) se puede generalizar a más dimensiones. Concretamente, la Ecuación (10.33) se convierte en

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla J \tag{10.39}$$

y la (10.34) en

$$J = -D\nabla c \tag{10.40}$$

Combinando las ecuaciones (10.39) y (10.40), se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla \cdot (\nabla c)$$

donde $\nabla \cdot (\nabla c)$ debe interpretarse como un producto escalar. Es decir, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $t \in \mathbf{R}$, entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2}\right)$$

Para abreviar la notación se define

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

siendo Δ el **operador de Laplace**. Se puede escribir entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c$$

De forma más general, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, entonces

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

(Δc se lee «laplaciana de c»).

10.6.4. Problemas

(10.6.1)

En los Problemas 1-10, las funciones están definidas para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Calcule todos los candidatos a extremos locales y utilice el hessiano para determinar su tipo (máximo, mínimo o punto de ensilladura).

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$
2. $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 3y$
3. $f(x, y) = x^2y - 4x^2 - 4y$
4. $f(x, y) = xy - 2y^2$
5. $f(x, y) = -2x^2 + y^2 - 6y$
6. $f(x, y) = x(1 - x + y)$
7. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$
8. $f(x, y) = yxe^{-y}$
9. $f(x, y) = x \cos y$
10. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

11. En este problema se ilustra el hecho de que si uno de los autovalores del hessiano es igual a cero en un punto en el que el gradiente es nulo, no se puede decir nada acerca de la condición de extremo local del punto basándose sólo en el hessiano. Considere las siguientes funciones:

$$f_1(x, y) = x^2$$
$$f_2(x, y) = x^2 + y^3$$
$$f_3(x, y) = x^2 + y^4$$

Las Figuras 10.68 a 10.70 muestran sus gráficas.

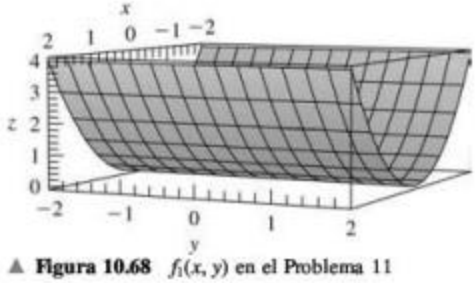
(a) Demuestre que para $i = 1, 2$ y 3,

$$\nabla f_i(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

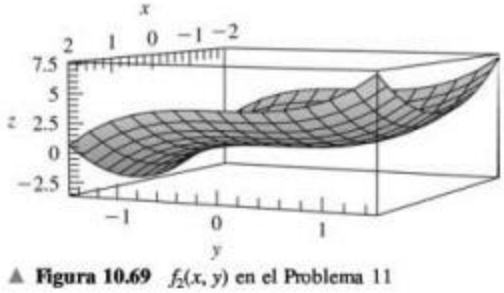
(b) Demuestre que para $i = 1, 2$ y 3,

$$\text{Hess } f_i(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y determine los autovalores de Hess $f_i(0, 0)$.

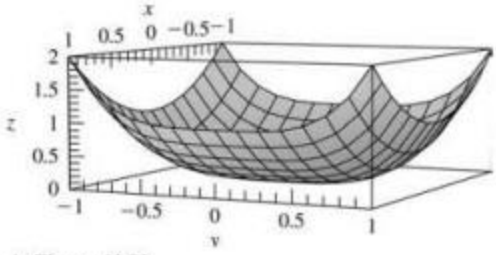


▲ **Figura 10.68** $f_1(x, y)$ en el Problema 11



▲ **Figura 10.69** $f_2(x, y)$ en el Problema 11

(c) Como uno de los autovalores de Hess $f_i(0, 0)$ es igual a 0, no se puede utilizar el criterio explicado en el texto para determinar el comportamiento de las funciones en el punto $(0, 0)$. Utilice las Figuras 10.68 a 10.70 para determinar qué sucede con cada función en el punto $(0, 0)$.



▲ **Figura 10.70**
$f_3(x, y)$ en el Problema 11

12. Considere la función

$$f(x, y) = ax^2 + by^2$$

(a) Demuestre que

$$\Delta f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Calcule valores de a y b de forma que (i) (0, 0) sea un mínimo local, (ii) (0, 0) sea un máximo local y (iii) (0, 0) sea un punto de ensilladura.

En los Problemas 13-16, las funciones están definidas en el dominio rectangular

$$D = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

Calcule los máximos y mínimos absolutos de f en D.

13. $f(x, y) = 2x - y$

14. $f(x, y) = 3 - x + 2y$

15. $f(x, y) = x^2 - y^2$

16. $f(x, y) = x^2 + y^2$

17. Calcule los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x + 2y$$

en el conjunto

$$D = \{(x, y) = 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 0\}$$

18. Calcule los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 4x + y$$

en el conjunto

$$D = \{(x, y) = -4 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

19. Maximice la función

$$f(x, y) = 2xy - x^2y - xy^2$$

en el triángulo limitado por la recta $x+y=2$, el eje x y el eje y.

20. Maximice la función

$$f(x, y) = xy(15 - 5y - 3x)$$

en el triángulo limitado por la recta $5y + 3x = 15$, el eje x y el eje y.

21. Calcule los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 1$$

en el disco

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

22. Calcule los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6y + 3$$

en el disco

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 16\}$$

23. Calcule los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$$

en el disco

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

24. Calcule los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x + 2y$$

en el disco

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

25. ¿Puede una función de dos variables tener dos máximos y ningún mínimo? Explique con palabras cómo serían las propiedades de esa función y compare su comportamiento con el de una función de una variable.

26. Suponga que la función $f(x, y)$ tiene un plano tangente horizontal en el punto (0, 0). ¿Se puede concluir que f tiene un extremo local en ese punto?

27. Suponga que el rendimiento de una cosecha Y depende de las concentraciones de nitrógeno (N) y de fósforo (P), de la siguiente forma

$$Y(N, P) = NPe^{-(N+P)}$$

Calcule el valor de (N, P) que maximiza el rendimiento de la cosecha.

28. Calcule tres números x, y, z tales que su suma sea igual a 60 y su producto sea máximo.

29. Calcule el volumen máximo de una caja rectangular cerrada (cuatro paredes, fondo y tapa), de forma que el área de su superficie sea de 48 m^2.

30. Calcule el volumen máximo de una caja rectangular abierta (cuatro paredes y fondo, sin tapa), de forma que el área de su superficie sea de 75 m^2.

31. Calcule la mínima área de superficie de una caja rectangular cerrada (cuatro paredes, fondo y tapa), de forma que su volumen sea de 216 m^3.

32. Calcule la mínima área de superficie de una caja rectangular abierta (cuatro paredes y fondo, sin tapa), de forma que su volumen sea de 256 m^3.

33. La distancia entre el origen (0, 0, 0) y el punto (x, y, z) es

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Calcule la mínima distancia entre el origen y el plano $x + y + z = 1$. (*Sugerencia:* minimice la distancia al cuadrado entre el origen y el plano.)

34. Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

siendo a, b y c números reales, demuestre que los autovalores de A son reales. (*Sugerencia:* calcule los autovalores.)

35. La comprensión de la riqueza y la diversidad de las especies es de gran interés en estudios ecológicos. Una medida de diversidad frecuentemente utilizada es el índice de Shannon y Weaver:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

siendo p_i la proporción de la especie i, $i = 1, 2, \ldots, n$, y n el número total de especies en el área bajo estudio. Suponga que una comunidad está formada por tres especies cuyas proporciones relativas son p_1, p_2 y p_3.

(a) Utilice el hecho de que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ para demostrar que H es de la forma

$$H(p_1, p_2) = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 \\ -(1 - p_1 - p_2)\ln(1 - p_1 - p_2)$$

y que el dominio de $H(p_1, p_2)$ es el conjunto triangular en el plano $p_1 - p_2$ limitado por las rectas $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ y $p_1 + p_2 = 1$.

(b) Demuestre que H alcanza su máximo absoluto cuando $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

(10.6.2)

En los Problemas 36-45, utilice los multiplicadores de Lagrange para calcular los máximos y mínimos de las funciones con las restricciones dadas.

36. $f(x, y) = 2x - y$; $x^2 + y^2 = 5$

37. $f(x, y) = 3x^2 + y$; $x^2 + y^2 = 1$

38. $f(x, y) = xy$; $x^2 + y^2 = 4$

39. $f(x, y) = xy$; $2x - 4y = 1$

40. $f(x, y) = x^2 - y^2$; $2x + y = 1$

41. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $3x - 2y = 4$

42. $f(x, y) = xy^2$; $x^2 - y = 0$

43. $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + 3y = 1$

44. $f(x, y) = x^2y^2$; $2x - 3y = 4$

45. $f(x, y) = x^2y^2$; $x^2 - y^2 = 1$

En los Problemas 46-55, utilice los multiplicadores de Lagrange para calcular las respuestas a los problemas de la Sección 5.4 que se indican.

46. Problema 1

47. Problema 2

48. Problema 3

49. Problema 4

50. Problema 5

51. Problema 6

52. Problema 7

53. Problema 9

54. Problema 12

55. Problema 18

56. Sea

$$f(x, y) = x + y,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

con la función de restricción $xy = 1$.

(a) Utilice los multiplicadores de Lagrange para calcular todos los extremos locales.

(b) ¿Hay extremos globales?

57. Sea

$$f(x, y) = x + y$$

con la función de restricción

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,\ x \neq 0,\ y \neq 0$$

(a) Utilice los multiplicadores de Lagrange para calcular todos los extremos locales.

(b) ¿Hay extremos globales?

58. Sea

$$f(x, y) = xy,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

con la función de restricción $y - x^2 = 0$.

(a) Utilice los multiplicadores de Lagrange para calcular candidatos a extremos locales.

(b) Utilice la restricción $y - x^2 = 0$ para reducir $f(x, y)$ a una función de una variable y emplee esta función para demostrar que $f(x, y)$ no tiene extremos en la curva de restricciones.

59. Explique por qué $f(x, y)$ en la Figura 10.63 tiene un extremo local con la restricción $g(x, y) = 0$ si $c_1 > c_2 > c_3 > c_4$.

60. Explique por qué $f(x, y)$ en la Figura 10.63 tiene un extremo local con la restricción $g(x, y) = 0$ si $c_1 < c_2$ y $c_2 > c_3 > c_4$.

61. En el ejemplo introductorio explicamos la dependencia del tamaño del huevo con la edad materna. Suponga ahora que la cantidad total de recursos disponibles es 10 (en las unidades apropiadas), el número de huevos por nidada es de 3, el número de nidadas es de 2 y que x_i indica el tamaño del huevo en la nidada i.

(a) Calcule la función de restricción.

(b) Suponga que la función de aptitud es

$$f(x_1, x_2) = \frac{3}{2}\rho(x_1) + \frac{3}{4}\rho(x_2)$$

siendo $\rho(x) = \frac{2x}{5+x}$. Calcule los tamaños óptimos del huevo en las nidadas 1 y 2 con la restricción de (a).

62. En el ejemplo introductorio, explicamos la dependencia del tamaño del huevo con la edad materna. Suponga ahora que la función de aptitud es

$$f(x_1, x_2) = \frac{5}{3}\rho(x_1) + \frac{5}{6}\rho(x_2)$$

con

$$\rho(x) = \frac{3x}{4 + x}$$

La expresión de la función de restricción es

$$5x_1 + 5x_2 = 7$$

(a) Compare las funciones dadas aquí con las expresadas en el texto e identifique los parámetros n, p_1, p_2, y R.

(b) Despeje x_2 en la función de restricción y sustituya su expresión en la función f. Se obtiene así una función de una variable. Calcule el dominio de esta función y utilice los métodos de cálculo de una variable para determinar los tamaños óptimos del huevo en las nidadas 1 y 2.

(10.6.3)

63. Demuestre que

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{8t}\right]$$

resuelve

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}$$

64. Demuestre que

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right]$$

resuelve

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}$$

65. Una solución de

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}$$

es la función

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]$$

para $x \in \mathbf{R}$ y $t > 0$.

(a) Demuestre que $c(x, t)$ como función de x para valores fijos de $t > 0$ es (i) positiva para todo $x \in \mathbf{R}$, (ii) creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$, (iii) tiene un máximo local en $x = 0$ y (iv) tiene puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{2Dt}$.

(b) Dibuje $c(x, t)$ en función de x cuando $D = 1$, y para $t = 0.01$, $t = 0.1$ y $t = 1$.

65. Una solución de

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}$$

es la función

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]$$

para $x \in \mathbf{R}$ y $t > 0$.

(a) Demuestre que $c(x, t)$ para t fijo tiene un máximo local en $x = 0$.

(b) Demuestre que $c(0, t)$ con $t > 0$ es una función decreciente de t.

(c) Calcule

$$\lim_{t \to 0^+} c(x, t)$$

cuando $x = 0$ y cuando $x \neq 0$.

(d) Utilice el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{2\pi}$$

para demostrar que para $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x, t)\, dx = 1$$

(e) La función $c(x, t)$ se puede interpretar como la concentración de una sustancia que se difunde en el espacio. Explique el significado de

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x, t)\, dx = 1$$

y utilice los resultados de (c) y (d) para explicar por qué esto significa que inicialmente (es decir, en $t = 0$), la sustancia se liberó en el origen.

Matemáticamente, se puede expresar esa condición inicial (en la que la sustancia está concentrada en el origen en el instante 0) mediante la función $\delta(x)$, que tiene las propiedades

$$\delta(x) = 0, \qquad \text{para } x \neq 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

67. La ecuación de difusión bidimensional

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 n(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2}\right) \tag{10.41}$$

donde $n(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ indica la densidad de población en el punto $\mathbf{r} = (x, y)$ del plano en el instante t, se puede utilizar para modelar la dispersión de organismos. Suponga que se liberan un gran número de insectos en el instante 0 en el punto (0, 0). Suponga además que en instantes posteriores, la densidad de insectos se puede expresar mediante la Ecuación de difusión (10.41). Demuestre que

$$n(x, y, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right]$$

cumple (10.41).

10.7 SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS (OPCIONAL)

10.7.1 Un ejemplo biológico

Se estima que aproximadamente el 14% de todas las especies de insectos (y por tanto alrededor del 10% de todas las especies de animales multicelulares) pertenecen al grupo de insectos denominados *parasitoides*. Estos insectos (la mayoría del orden Himenópteros) depositan sus huevos en, o cerca del cuerpo de otro artrópodo (en la mayoría de los casos inmaduro), que sirve de huésped para el desarrollo de los parasitoides. Los huevos se desarrollan en los huéspedes adultos vivos y los consumen.

Los parasitoides tienen un papel importante en el control biológico. Un ejemplo es la avispa *Trichogramma* que parasita los huevos de insectos. Estas avispas se desarrollan en factorías y se liberan en los campos. Cada año, millones de hectáreas de tierras de cultivo son tratadas con avispas *Trichogramma* liberadas: por ejemplo, en China se utilizan para proteger la caña de azúcar del parásito perforador *chilo* spp. En Hübner, en Europa, se usan para proteger los campos de cereales del parásito *Ostrinia nubilalis*. Otro ejemplo exitoso de control biológico de una plaga de insectos es la avispa parasitoide *Aphytis melinus* que regula el mantillo rojo (*Aonidiella aurantii*) que daña los árboles cítricos de California.

La importancia de los parasitoides en el control de plagas fue estimulada por trabajos empíricos y teóricos. Los estudios teóricos de las interacciones entre los parasitoides y sus huéspedes se remontan a Thompson (1924) y a Nicholson y

Bailey (1935). El trabajo de Nicholson y Bailey fue particularmente influyente. En él se presentaron modelos huésped-parasitoide de generación discreta con la forma

$$N_{t+1} = bN_t e^{-aP_t}$$

$$P_{t+1} = cN_t[1 - e^{-aP_t}]$$

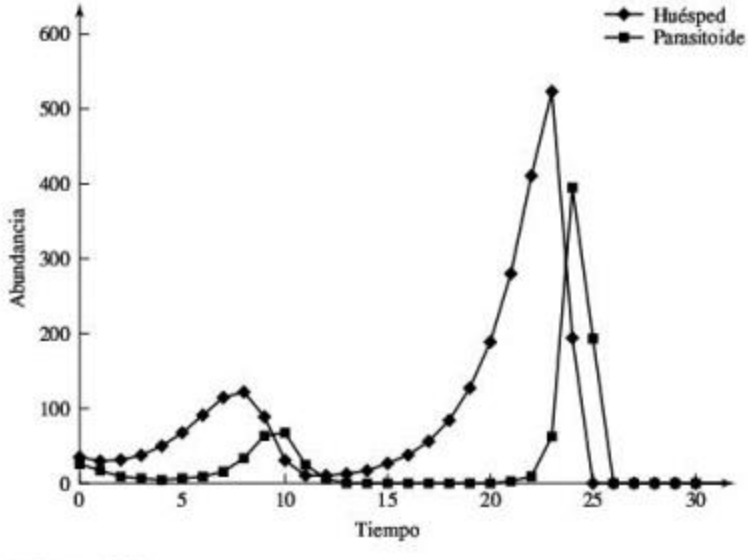
para $t = 0, 1, 2, \ldots$. N y P indican los tamaños de población de huéspedes susceptibles y de hembras adultas de parasitoides en busca de huéspedes en los instantes t y $t + 1$, respectivamente. El parámetro b se interpreta como el *parámetro de crecimiento neto*. En la primera ecuación se puede ver que la población de huéspedes crece exponencialmente en ausencia de parasitoides ($P = 0$). El término e^{-aP_t} es la fracción de huéspedes *no* parasitados (y por tanto, $1 - e^{-aP_t}$ es la fracción de huéspedes parasitados) en la generación t. Los huéspedes parasitados producen parasitoides. El parámetro c es igual al número de parasitoides producidos por huésped parasitado. Nótese que solo se reproducen los huéspedes que no han sido parasitados.

Una simulación numérica de la ecuación de Nicholson-Bailey (Figura 10.71), muestra que el tamaño de la población oscila con amplitud creciente hasta que, o bien se extingue el parasitoide, a lo que sigue un crecimiento exponencial del huésped, o bien el huésped se extingue, a lo que sigue la extinción del parasitoide.

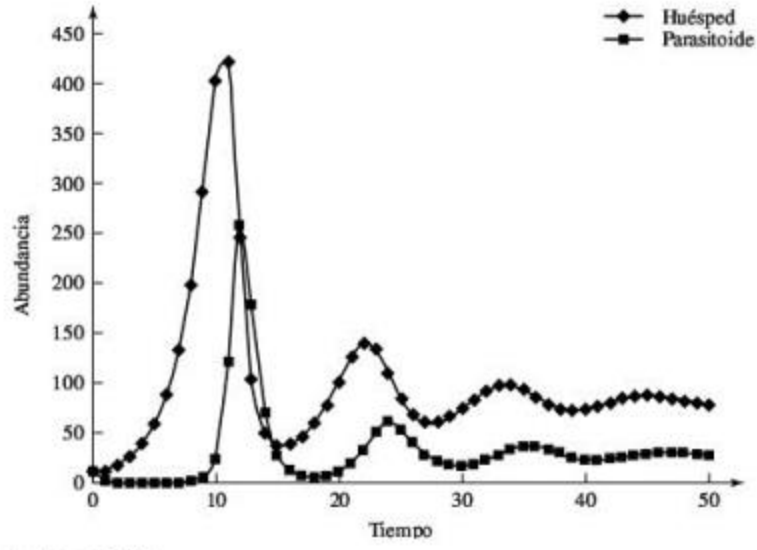
El comportamiento del modelo no concuerda con la mayoría de los estudios empíricos (aunque en algunos experimentos de laboratorio se ha producido este comportamiento inestable). Por ello, el modelo se ha modificado de varias formas para estabilizar su dinámica. Un intento en ese sentido es el modelo binomial negativo (Griffiths, 1969, May, 1978), en el que

$$N_{t+1} = bN_t\left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k}$$

$$P_{t+1} = cN_t\left[1 - \left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k}\right]$$



▲ **Figura 10.71**
Simulación numérica de la ecuación de Nicholson-Bailey con $a = 0.023$, $b = 1.5$, y $c = 1$. El tamaño de la población oscila hasta que se produce la extinción



▲ **Figura 10.72**
Simulación numérica del modelo binomial negativo con $a = 0{,}023$, $b = 1.5$, $c = 1$ y $k = 0.5$. Los valores de los parámetros a, b y c son los mismos que en la Figura 10.71. El valor de k estabiliza las interacciones entre huéspedes y parasitoides y se produce la coexistencia

La forma de este sistema de ecuaciones es bastante similar a la de la ecuación de Nicholson-Bailey, y los parámetros b y c tienen la misma interpretación que antes. La principal (y crucial) diferencia es el término $(1 + \frac{aP_t}{k})^{-k}$ que sustituye el término e^{-aP_t} del modelo de Nicholson-Bailey. Su interpretación es la misma, concretamente la fracción de huéspedes que escapan al parasitismo.

La selección de parámetros en la simulación numérica (Figura 10.72) muestra que las poblaciones de huéspedes y de parasitoides se equilibran, y las dos muestran abundancia positiva (esto se denomina *coexistencia*).

Los dos ejemplos huésped-parasitoide mostrados permiten vislumbrar el comportamiento de las interacciones multiespecie modeladas por generación discreta, con ecuaciones en diferencias. En lo que sigue nos centraremos en modelos en tiempo discreto de la coexistencia de dos especies. El desarrollo será paralelo al de las ecuaciones en diferencias de la Sección 5.6, donde se estudió el equilibrio y la estabilidad de una sola especie con modelos en tiempo discreto de la forma

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

Allí se vio que los puntos de equilibrio cumplen la ecuación

$$x^* = f(x^*)$$

y que son localmente estables si $|f'(x^*)| < 1$. Esta condición se obtuvo linealizando $f(x)$ alrededor del equilibrio x^*.

En esta sección veremos que los puntos de equilibrio satisfacen una condición similar en modelos de dos especies y que la misma estrategia de linealización alrededor del equilibrio produce una condición análoga para la estabilidad local en los modelos de dos especies. Como el estudio de las ecuaciones en diferencias no lineales nos llevará al estudio de ecuaciones en diferencias lineales, comenzaremos por estudiar estas últimas.

10.7.2 Equilibrios y estabilidad en sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Las ecuaciones en diferencias lineales son de la forma

$$x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \tag{10.42}$$

$$x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \tag{10.43}$$

con $t = 0, 1, 2, \ldots$ Se pueden expresar en forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}$$

lo que demuestra que los sistemas de ecuaciones en diferencias lineales son *aplicaciones lineales*, que estudiamos en la Sección 9.3. Nótese en primer lugar que si $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para todo $t = 1, 2, 3, \ldots$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un **(punto de) equilibrio**. De forma más general, un punto de equilibrio cumple la ecuación

$$\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^*$$

Hemos visto que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un punto de equilibrio del sistema $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$. Estudiaremos a continuación lo que sucede cuando $\mathbf{x}(0) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En la Sección 9.3 aprendimos a calcular $\mathbf{x}(t)$ dada una condición inicial $\mathbf{x}(0)$ sin calcular los valores de $\mathbf{x}(s)$ en todos los valores de s entre 0 y t. Obtuvimos que si A tiene dos autovalores reales y distintos, λ_1 y λ_2, entonces cualquier vector $\mathbf{x}(0)$ se puede expresar como una combinación lineal de sus autovectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ (correspondientes, respectivamente a los autovalores λ_1 y λ_2),

$$\mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$$

siendo c_1 y c_2 números reales. Utilizando esta representación de $\mathbf{x}(0)$, obtuvimos que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\lambda_1^t\mathbf{u}_1 + c_2\lambda_2^t\mathbf{u}_2 \tag{10.44}$$

que se puede utilizar para conocer el *comportamiento a largo plazo* de $\mathbf{x}(t)$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$. Volvamos a la cuestión de qué sucede con $\mathbf{x}(t)$ cuando $\mathbf{x}(t) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Observando la representación de* $\mathbf{x}(t)$ de (10.44) se puede ver que si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ independientemente del valor de $\mathbf{x}(0)$. Se dice en este caso que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un **equilibrio estable**. Si $|\lambda_1| > 1$ o $|\lambda_2| > 1$, entonces el equilibrio $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se denomina **inestable**.

La condición de estabilidad del equilibrio $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ del sistema $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$, siendo A una matriz 2×2 se cumple en un caso más general (no sólo para λ_1 y λ_2 reales).

El punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un equilibrio estable del sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

si los dos autovalores de A, λ_1 y λ_2, cumplen

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{y} \quad |\lambda_2| < 1$$

Si $|\lambda_1| > 1$ o $|\lambda_2| > 1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un equilibrio inestable.

En el criterio anterior no hace falta exigir que los autovalores sean reales y distintos. Sin embargo, la demostración del criterio general para λ_1 y λ_2 está fuera del alcance de este libro. Presentamos a continuación un primer ejemplo.

Ejemplo 1 Demuestre que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

Solución

Para comprobar si $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un equilibrio, hay que demostrar que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cumple

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo cual es cierto, ya que $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para cualquier matriz de elementos constantes. Para determinar la estabilidad de A, es necesario calcular sus autovalores. Para ello, hay que resolver

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -0.4 - \lambda & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (-0.4 - \lambda)(0.1 - \lambda) + (0.2)(0.3) \\ &= \lambda^2 + 0.3\lambda + 0.02 = 0 \end{aligned}$$

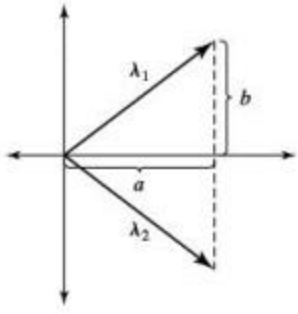
Las soluciones son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.3 \pm \sqrt{0.09 - 0.08}}{2} = \frac{-0.3 \pm 0.1}{2}$$

y, por tanto, $\lambda_1 = -0.1$ y $\lambda_2 = -0.2$. Como $|\lambda_1| = |-0.1| < 1$ y $|\lambda_2| = |-0.2| < 1$, el punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es estable. ◀

Cuando los autovalores λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, el criterio de estabilidad se puede simplificar. Concretamente, si λ_1 y λ_2 son complejos conjugados,

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1\lambda_2 \tag{10.45}$$



▲ **Figura 10.73**
Ilustración gráfica de la igualdad $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2| = \lambda_1\lambda_2$.

Esta igualdad no es obvia a primera vista, pero se puede demostrar si se dibujan λ_1 y λ_2 y se determinan sus valores absolutos. Sean

$$\lambda_1 = a + ib \quad \text{y} \quad \lambda_2 = a - ib$$

los dos autovalores complejos conjugados de A. En la Figura 10.73 se dibujan λ_1 y λ_2 cuando a y b son positivos. La aplicación del teorema de Pitágoras permite demostrar que

$$|\lambda_1|^2 = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad |\lambda_2|^2 = a^2 + b^2 \tag{10.46}$$

Algebraicamente, se obtiene

$$\lambda_1\lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

ya que $i^2 = -1$. Combinando esto con (10.46) se demuestra (10.45). En el siguiente ejemplo se utiliza (10.45).

Ejemplo 2

Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ de

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 \\ 0.7 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

es estable.

Solución

Para comprobar la estabilidad de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hay que resolver

$$\det \begin{bmatrix} -0.3 - \lambda & -0.5 \\ 0.7 & 0.15 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

lo que equivale a resolver la ecuación de segundo grado

$$(-0.3 - \lambda)(0.15 - \lambda) + (0.5)(0.7) = 0$$

o

$$\lambda^2 + 0.15\lambda + 0.305 = 0 \tag{10.47}$$

Como el discriminante $(0.15)^2 - (4)(1)(0.305) = -1.1975 < 0$, se deduce que las dos soluciones λ_1 y λ_2 de la Ecuación (10.47) son complejas conjugadas. Sin calcular λ_1 y λ_2, se puede comprobar si $|\lambda_1|$ y $|\lambda_2|$ son menores que 1 ya que $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1\lambda_2 = \det A$. Entonces,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 \\ 0.7 & 0.15 \end{bmatrix} \\ &= (-0.3)(0.15) - (0.7)(-0.5) = 0.305 < 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un equlibrio estable. ◀

10.7.3 Equilibrios y estabilidad de sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales

Al comienzo de esta sección hemos visto ejemplos de sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales: La ecuación de Nicholson-Bailey y el modelo binomial

negativo. La forma general de un sistema de dos ecuaciones en diferencias no lineales es

$$x_1(t+1) = F(x_1(t), x_2(t)) \tag{10.48}$$

$$x_2(t+1) = G(x_1(t), x_2(t)) \tag{10.49}$$

siendo F y G funciones (no lineales) de dos variables x_1 y x_2 y $t = 0, 1, 2, \ldots$ la variable independiente que indica tiempo.

Como en la subsección anterior, nuestro interés son los equilibrios y la estabilidad. Se dice que el punto (x_1^*, x_2^*) es un **(punto de) equilibrio** del sistema (10.48) y (10.49) si x_1^* y x_2^* cumplen simultáneamente las dos ecuaciones

$$x_1^* = F(x_1^*, x_2^*)$$
$$x_2^* = G(x_1^*, x_2^*)$$

Ejemplo 3 Calcule todos los equilibrios de

$$x_1(t+1) = 2x_1(t)[1 - x_1(t)]$$
$$x_2(t+1) = x_1(t)[1 - x_2(t)]$$

Solución

Para calcular los equilibrios hay que resolver

$$x_1 = 2x_1(1 - x_1)$$
$$x_2 = x_1(1 - x_2)$$

Multiplicando y reordenando términos resulta

$$2x_1^2 - x_1 = 0$$
$$x_2 + x_1x_2 - x_1 = 0$$

Las soluciones de la primera ecuación son $x_1 = 0$ o $\frac{1}{2}$. Despejando x_2 de la segunda ecuación se obtiene

$$x_2(1 + x_1) = x_1 \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{x_1}{1 + x_1}$$

Si $x_1 = 0$, entonces $x_2 = 0$. Si $x_1 = 1/2$, entonces $x_2 = (1/2)/(3/2) = 1/3$. Resumiendo los resultados, existen dos puntos de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

◀

Ejemplo 4 Calcule todos los equilibrios biológicamente relevantes del modelo de Nicholson-Bailey.

$$N_{t+1} = bN_te^{-aP_t}$$
$$P_{t+1} = cN_t[1 - e^{-aP_t}]$$

Solución

Para calcular los equilibrios hay que resolver

$$N = bNe^{-aP} \tag{10.50}$$

$$P = cN[1 - e^{-aP}] \tag{10.51}$$

La primera ecuación se cumple si $N = 0$. Si se sustituye $N = 0$ en la segunda ecuación, se obtiene $P = 0$. El sistema tiene por tanto el equilibrio trivial

$(N^*, P^*) = (0, 0)$, que corresponde al estado de ausencia de huéspedes y de parasitoides.

Si $N \neq 0$, se puede eliminar N en la Ecuación (10.50) y se obtiene

$$e^{aP^*} = b \quad \text{o} \quad P^* = \frac{1}{a} \ln b$$

Se puede ver que para que P^* sea positivo (necesario para que exista un equilibrio no trivial biológicamente razonable), b debe ser mayor que 1. Utilizando ahora $e^{aP^*} = b$ se obtiene

$$P^* = cN^*\left[1 - \frac{1}{b}\right]$$

Si $P^* = \frac{1}{a} \ln b$, entonces,

$$N^* = \frac{P^*}{c[1 - 1/b]} = \frac{\ln b}{ac[1 - 1/b]} = \frac{b}{b-1} \frac{1}{ac} \ln b$$

Se puede ver que para $b > 1$, $N^* > 0$. Se concluye así que además del equilibrio trivial $(N^*, P^*) = (0, 0)$, si $b > 1$ existe un equilibrio no trivial biológicamente razonable, es decir, un equilibrio en el que las densidades de huéspedes y de parasitoides son positivas. La expresión del equilibrio es

$$N^* = \frac{b}{b-1} \frac{1}{ac} \ln b \quad \text{y} \quad P^* = \frac{1}{a} \ln b \qquad \blacktriangleleft$$

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio, se procede de la misma forma que en el caso de una sola especie. Se linealiza alrededor del equilibrio y se utiliza el sistema linealizado y lo que hemos aprendido de las aplicaciones lineales en el Capítulo 9 para obtener una condición analítica de estabilidad local. Se procede como sigue. Comenzamos con el sistema general de ecuaciones en diferencias

$$x_1(t+1) = F(x_1(t), x_2(t)) \tag{10.52}$$

$$x_2(t+1) = G(x_1(t), x_2(t)) \tag{10.53}$$

y se supone que tiene un punto de equilibrio (x_1^*, x_2^*) que cumple simultáneamente

$$x_1^* = F(x_1^*, x_2^*) \quad \text{y} \quad x_2^* = G(x_1^*, x_2^*)$$

Para linealizar alrededor de (x_1^*, x_2^*) se escribe

$$x_1(t) = x_1^* + z_1(t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = x_2^* + z_2(t)$$

donde $z_1(t)$ y $z_2(t)$ se interpretan como pequeñas perturbaciones, como en el Capítulo 5, donde se estudió la estabilidad del equilibrio en ecuaciones en diferencias, o en el Capítulo 8, donde se estudió la estabilidad del equilibrio de ecuaciones diferenciales. Ahora se linealiza $F(x_1(t), x_2(t))$ y $G(x_1(t), x_2(t))$ alrededor del equilibrio (x_1^*, x_2^*). Se obtiene

$$\text{la linealización de } F(x_1(t), x_2(t)) \text{ es } F(x_1^*, x_2^*) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^* z_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^* z_2(t)$$

$$\text{la linealización de } G(x_1(t), x_2(t)) \text{ es } G(x_1^*, x_2^*) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^* z_1(t) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^* z_2(t)$$

donde $(\cdot)^*$ significa que se evalúa la expresión entre paréntesis en el equilibrio (x_1^*, x_2^*).

Haciendo $x_1(t) = x_1^* + z_1(t)$ y $x_2(t) = x_2^* + z_2(t)$ se obtiene aproximadamente

$$x_1^* + z_1(t+1) \approx \underbrace{F(x_1^*, x_2^*)}_{x_1^*} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^* z_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) z_2(t)$$

$$x_2^* + z_2(t+1) \approx \underbrace{G(x_1^*, x_2^*)}_{x_2^*} + \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^* z_1(t) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) z_2(t)$$

Cancelando x_1^* en la primera ecuación y x_2^* en la segunda ecuación, y escribiendo la aproximación resultante en forma matricial, se obtiene

$$\begin{bmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^* & \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^* \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^* & \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \tag{10.54}$$

La matriz 2×2 es la matriz de Jacobi de la función vectorial $\begin{bmatrix} F(x_1, x_2) \\ G(x_1, x_2) \end{bmatrix}$. El miembro derecho de (10.54) es una aplicación lineal de la forma $A\mathbf{x}$ siendo A una matriz 2×2 y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un vector 2×1. En la subsección anterior obtuvimos que la aplicación lineal

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t$$

tiene el equilibrio $(0, 0)$, que es estable si los valores absolutos de los dos autovalores de A son menores que 1. Este es el criterio que necesitamos para determinar la estabilidad del equilibrio (x_1^*, x_2^*) del sistema (10.52) y (10.53).

El punto de equilibrio $\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$ del sistema (10.52) y (10.53) es localmente estable si los dos autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz de Jacobi evaluada en (x_1^*, x_2^*),

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^* & \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^* \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^* & \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^* \end{bmatrix}$$

cumplen que

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{y} \quad |\lambda_2| < 1$$

Si $|\lambda_1| > 1$ o $|\lambda_2| > 1$. El punto de equilibrio $\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$ es inestable.

Nótese que en los Capítulos 5 y 8, el análisis de estabilidad es sólo local y por tanto hay que decir que el equilbrio es *localmente* estable. El análisis local no revela nada sobre la estabilidad global.

Ejemplo 5 Estudie la estabilidad de los equilibrios del sistema del Ejemplo 3.

Solución

En el Ejemplo 3,

$$F(x_1, x_2) = 2x_1(1 - x_1)$$
$$G(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$$

La matriz de Jacobi es

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 - 4x_1 & 0 \\ 1 - x_2 & -x_1 \end{bmatrix}$$

Evaluando $J(x_1, x_2)$ en el equilibrio $(0, 0)$ se obtiene

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$. Como $|\lambda_1| > 1$, $(0, 0)$ es un equilibrio inestable.

Evaluando $J(x_1, x_2)$ en el equilibrio $(1/2, 1/3)$ se obtiene

$$J(1/2, 1/3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2/3 & -1/2 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1/2$. Como $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$, $(1/2, 1/3)$ es un equilibrio localmente estable. ◀

Ejemplo 6 Demuestre que el equilibrio no trivial de la ecuación de Nicholson-Bailey es inestable.

Solución

La ecuación de Nicholson-Bailey es de la forma

$$F(N, P) = bNe^{-aP}$$
$$G(N, P) = cN[1 - e^{-aP}]$$

Para obtener la matriz de Jacobi evaluada en el equilibrio no trivial, se derivan F y G y se particularizan las derivadas en el equilibrio $(N^*, P^*) = (\frac{b}{b-1}\frac{1}{ac}\ln b, \frac{1}{a}\ln b)$ que se calculó en el Ejemplo 3.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^* = be^{-aP}\Big|_{(N^*, P^*)} = 1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)^* = -abNe^{-aP}\Big|_{(N^*, P^*)} = -aN^* \qquad (\text{ya que } be^{-aP^*} = 1)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)^* = c[1 - e^{-aP}]\Big|_{(N^*, P^*)} = c\left[1 - \frac{1}{b}\right] \qquad \left(\text{ya que } e^{-aP^*} = \frac{1}{b}\right)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)^* = caNe^{-aP}\Big|_{(N^*, P^*)} = acN^*\frac{1}{b}$$

La matriz de Jacobi evaluada en (N^*, P^*) es entonces

$$J(N^*, P^*) = \begin{bmatrix} 1 & -aN^* \\ c[1 - \frac{1}{b}] & acN^*\frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

En vez de calcular explícitamente los autovalores, demostraremos primero que los dos autovalores de la matriz J son complejos conjugados si $b > 1$ (esta es la condición que encontramos en el Ejemplo 3 que garantizaba que existía un equilibrio no trivial biológicamente razonable). Los autovalores de J satisfacen la ecuación $\det(J - \lambda I) = 0$. Es decir,

$$(1 - \lambda)\left(acN^* \frac{1}{b} - \lambda\right) + acN^*\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 0$$

que se puede simplificar,

$$\lambda^2 - \left(1 + \frac{ac}{b} N^*\right)\lambda + acN^* = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son complejas conjugadas si el discriminante

$$\left(1 + \frac{ac}{b} N^*\right)^2 - 4acN^* < 0$$

Con $N^* = \frac{b}{b-1} \frac{1}{ac} \ln b$, el discriminante es

$$f(b) = \left(1 + \frac{\ln b}{b-1}\right)^2 - \frac{4b}{b-1} \ln b$$

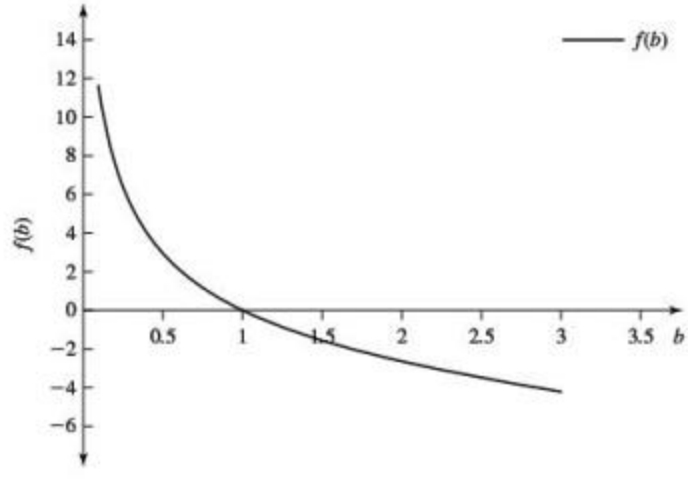
Esta función depende sólo de b. Dibujando $f(b)$ (Figura 10.74) se puede ver que $f(b) < 0$ cuando $b > 1$, lo que confirma que los dos autovalores de J son complejos conjugados si $b > 1$.

Al estudiar los sistemas lineales de ecuaciones en diferencias, obtuvimos la igualdad

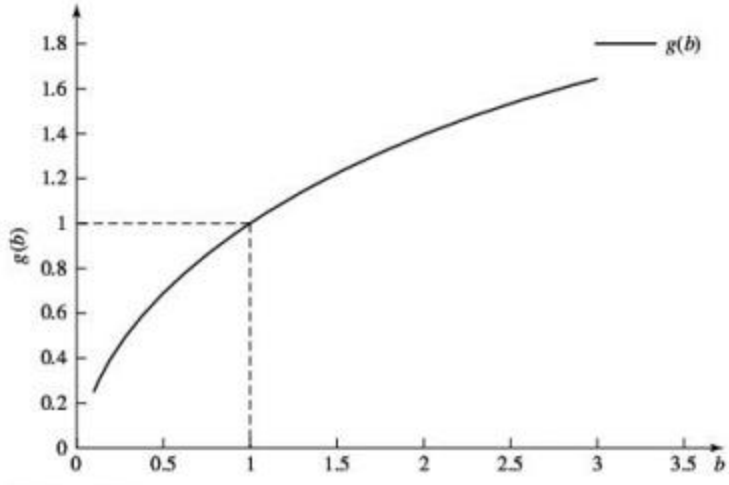
$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \det J$$

El determinante de J está dado por la expresión

$$\det J = acN^* \frac{1}{b} + acN^*\left(1 - \frac{1}{b}\right) = acN^* = \frac{b \ln b}{b-1}$$



▲ **Figura 10.74**
La gráfica de $f(b)$ confirma que $f(b) < 0$ cuando $b > 1$



▲ **Figura 10.75**
La gráfica de $g(b)$ confirma que $g(b) > 1$ cuando $b > 1$

Dibujando $g(b) = \frac{b \ln b}{b-1}$ en función de b (*véase* la Figura 10.75), se puede ver que $g(b) > 1$ *para* $b > 1$, por lo que se concluye que para $b > 1$,

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1 \lambda_2 > 1$$

lo que implica que el equilibrio no trivial es inestable. ◀

10.7.4. Problemas

(10.7.1)

Los Problemas 1-6 se refieren al modelo de huésped-parasitoide de Nicholson-Bailey. Los Problemas 1, 2, 5 y 6 se realizan mejor con la ayuda de una hoja de cálculo pero pueden realizarse también con una calculadora. Nicholson y Bailey obtuvieron el modelo de generación discreta para las relaciones huésped-parasitoide dado por las expresiones

$$N_{t+1} = bN_t e^{-aP_t}$$
$$P_{t+1} = cN_t[1 - e^{-aP_t}]$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots$.

1. Evalúe el modelo de Nicholson-Bailey para las 10 primeras generaciones cuando $a = 0.02$, $c = 3$ y $b = 1.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 5$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 0$.

2. Evalúe el modelo de Nicholson-Bailey para las 10 primeras generaciones cuando $a = 0.02$, $c = 3$ y $b = 0.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 15$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 0$.

3. Demuestre que cuando la densidad inicial de parasitoides es $P_0 = 0$, el modelo de Nicholson-Bailey se reduce a

$$N_{t+1} = bN_t$$

Siendo N_0 la densidad inicial de huéspedes, calcule una expresión de N_t en función de N_0 y b.

4. Cuando la densidad inicial de parasitoides es $P_0 = 0$, el modelo de Nicholson-Bailey se reduce a

$$N_{t+1} = bN_t$$

como se demostró en el problema anterior. ¿Para qué valores de b es creciente la densidad de huéspedes si $N_0 > 0$, y para qué valores es decreciente? (suponga que $b > 0$).

5. Evalúe el modelo de Nicholson-Bailey para las 15 primeras generaciones cuando $a = 0.02$, $c = 3$ y $b = 1.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 5$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 5$.

6. Evalúe el modelo de Nicholson-Bailey para las 25 primeras generaciones cuando $a = 0.02$, $c = 3$ y $b = 1.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 15$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 8$.

Los Problemas 7-12 se refieren al modelo huésped-parasitoide binomial negativo. Los Problemas 7, 8, 11 y 12 se realizan mejor con la ayuda de una hoja de cálculo pero pueden realizarse también con una calculadora. El modelo binomial negativo es un modelo de generación discreta para las relaciones huésped-parasitoide dado por las expresiones

$$N_{t+1} = bN_t\left(1 + \frac{aP_t}{k}\right)^{-k}$$
$$P_{t+1} = cN_t\left[1 - \left(1 + \frac{aP_t}{k}\right)^{-k}\right]$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots$

7. Evalúe el modelo binomial discreto para las 10 primeras generaciones con $a = 0.02$, $c = 3$, $k = 0.75$ y $b = 1.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 5$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 0$.

8. Evalúe el modelo binomial discreto para las 10 primeras generaciones con $a = 0.02$, $c = 3$, $k = 0.75$ y $b = 0.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 15$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 0$.

9. Demuestre que cuando la densidad inicial de parasitoides es $P_0 = 0$, el modelo binomial negativo se reduce a

$$N_{t+1} = bN_t$$

Siendo N_0 la densidad inicial de huéspedes, calcule una expresión de N_t en función de N_0 y b.

10. Cuando la densidad inicial de parasitoides es $P_0 = 0$, el modelo binomial negativo se reduce a

$$N_{t+1} = bN_t$$

como se demostró en el problema anterior. ¿Para qué valores de b es decreciente la densidad de huéspedes si $N_0 > 0$, y para qué valores es decreciente? (suponga que $b > 0$).

11. Evalúe el modelo binomial discreto para las 25 primeras generaciones con $a = 0.02$, $c = 3$, $k = 0.75$ y $b = 1.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 100$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 50$.

12. Evalúe el modelo binomial discreto para las 25 primeras generaciones con $a = 0.02$, $c = 3$, $k = 0.75$ y $b = 0.5$. Como densidad inicial de huéspedes escoja $N_0 = 100$ y como densidad inicial de parasitoides, $P_0 = 50$.

13. En el modelo de Nicholson-Bailey, la fracción de huéspedes que escapan al parasitismo se expresa como

$$f(P) = e^{-aP}$$

(a) Dibuje $f(P)$ en función de P para $a = 0.1$ y $a = 0.01$.
(b) Para un valor dado de P, ¿cómo resultan afectadas las probabilidades de escapar al parasitismo si se incrementa a?

14. En el modelo binomial negativo, la fracción de huéspedes que escapan al parasitismo se expresa como

$$f(P) = \left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k}$$

(a) Dibuje $f(P)$ en función de P para $a = 0.1$ y $a = 0.01$ cuando $k = 0.75$.

(b) Para $k = 0.75$ y un valor dado de P, ¿cómo resultan afectadas las probabilidades de escapar al parasitismo si se incrementa a?

15. En el modelo binomial negativo, la fracción de huéspedes que escapan al parasitismo se expresa como

$$f(P) = \left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k}$$

(a) Dibuje $f(P)$ en función de P para $k = 0.75$ y $k = 0.5$ cuando $a = 0.02$.

(b) Para $a = 0.02$ y un valor dado de P, ¿cómo resultan afectadas las probabilidades de escapar al parasitismo si se incrementa k?

16. El modelo binomial negativo se puede reducir al modelo de Nicholson-Bailey haciendo que el parámetro k del modelo binomial negativo tienda a infinito. Demuestre que

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k} = e^{-aP}$$

(*Sugerencia:* utilice la regla de L'Hôpital.)

(10.7.2)

17. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.7 & 0\\-0.3 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

18. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.4 & 0.2\\0 & -0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

19. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1.4 & 0\\-0.5 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

20. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.1 & 0.4\\0.1 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

21. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

22. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.5 & 02\\0.08 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

y determine su estabilidad.

23. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ el equilibrio de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.2 & -0.4\\0.6 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

es estable.

24. Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\-0.5 & -0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

es estable.

25. Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.2 & -3.4\\2.4 & -1.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

es estable.

26. Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\x_2(t+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4\\5&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

es estable.

(10.7.3)

27. Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$x_1(t+1)=\frac{x_2(t)}{4(1+x_1^2(t))}$$
$$x_2(t+1)=\frac{2x_1(t)}{1+x_2^2(t)}$$

es localmente estable.

28. Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$x_1(t+1)=\frac{3x_2(t)}{1+x_1^2(t)}$$
$$x_2(t+1)=\frac{2x_1(t)}{1+x_2^2(t)}$$

es inestable.

29. Demuestre que el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$x_1(t+1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\frac{2x_2(t)-x_1(t)}{2+x_1(t)}$$

es localmente estable.

30. Demuestre que para todo $a>1$ el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$x_1(t+1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\frac{ax_2(t)-(a-1)x_1(t)}{a+x_1(t)}$$

es localmente estable.

31. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ es un punto de equilibrio de

$$x_1(t+1)=ax_2(t)$$
$$x_2(t+1)=2x_1(t)-\cos(x_2(t))+1$$

Suponga que $a>0$. ¿Para qué valores de a es $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ localmente estable?

32. Demuestre que $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-\pi\\\pi\end{bmatrix}$ son equilibrios de

$$x_1(t+1)=-x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\operatorname{sen}(x_2(t))-x_1(t)$$

y analice su estabilidad.

33. Calcule todos los equilibrios no negativos de

$$x_1(t+1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\frac{1}{2}x_1(t)+\frac{2}{3}x_2(t)-x_2^2(t)$$

y analice su estabilidad.

34. Calcule todos los equilibrios no negativos de

$$x_1(t+1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\frac{1}{2}x_1(t)+\frac{1}{3}x_2(t)-x_2^2(t)$$

y analice su estabilidad.

35. ¿Para qué valores de a es el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$x_1(t+1)=\frac{ax_2(t)}{1+x_1^2(t)}$$
$$x_2(t+1)=\frac{x_1(t)}{1+x_2^2(t)}$$

localmente estable?

36. ¿Para qué valores de a es el equilibrio $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ de

$$x_1(t+1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\frac{1}{2}x_1(t)+ax_2(t)-x_2^2(t)$$

localmente estable?

37. Denomine $x_1(t)$ el número de ejemplares juveniles y $x_2(t)$ el número de ejemplares adultos en el instante t. Suponga que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ evolucionan de acuerdo con

$$x_1(t+1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=\frac{1}{2}x_1(t)+rx_2(t)-x_2^2(t)$$

(a) Demuestre que si $r>1/2$, existe un equilibrio $\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}$ con $x_1^*>0$ y $x_2^*>0$. Calcule x_1^* y x_2^*.

(b) Determine la estabilidad del equilibrio obtenido en (a) cuando $r>1/2$.

38. Calcule todos los equilibrios biológicamente relevantes del modelo de Nicholson-Bailey

$$N_{t+1}=2N_te^{-0.2P_t}$$
$$P_{t+1}=N_t[1-e^{-0.2P_t}]$$

y analice su estabilidad.

39. Calcule todos los equilibrios biológicamente relevantes del modelo de Nicholson-Bailey

$$N_{t+1}=4N_te^{-0.1P_t}$$
$$P_{t+1}=N_t[1-e^{-0.1P_t}]$$

y analice su estabilidad.

40. Calcule todos los equilibrios biológicamente relevantes del modelo binomial negativo

$$N_{t+1}=4N_t\left(1+\frac{0.01P_t}{2}\right)^{-2}$$
$$P_{t+1}=N_t\left[1-\left(1+\frac{0.01P_t}{2}\right)^{-2}\right]$$

y analice su estabilidad.

41. Calcule todos los equilibrios biológicamente relevantes del modelo binomial negativo

$$N_{t+1}=4N_t\left(1+\frac{0.01P_t}{0.5}\right)^{-0.5}$$
$$P_{t+1}=N_t\left[1-\left(1+\frac{0.01P_t}{0.5}\right)^{-0.5}\right]$$

y analice su estabilidad.

10.8. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 10: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos:*

1. Función real
2. Función de dos variables
3. Superficie
4. Curva de nivel
5. Límite
6. Leyes de los límites
7. Continuidad
8. Derivada parcial
9. Intepretación geométrica de la derivada parcial
10. Teorema de las derivadas mixtas
11. Plano tangente
12. Derivabilidad
13. Derivabilidad y continuidad
14. Condición suficiente para derivabilidad
15. Aproximación lineal estándar, aproximación por plano tangente
16. Función vectorial
17. Matriz de Jacobi, matriz de derivadas
18. Regla de la cadena
19. Derivación implícita
20. Derivada direccional
21. Gradiente
22. Extremos locales
23. Condición suficiente para obtener extremos locales
24. Matriz hessiana
25. Extremos globales
26. Teorema de los valores extremos
27. Difusión
28. Sistema de ecuaciones en diferencias
29. Puntos de equilibrio y estabilidad
30. Ecuación de Nicholson-Bailey

10.9. PROBLEMAS DE REPASO

1. Suponga que se realiza un experimento para medir el éxito de germinación de semillas de una cierta planta en función de la temperatura y de la humedad. Se observa que las semillas no germinan en absoluto cuando la humedad es demasiado baja, independientemente de la temperatura. El éxito de germinación es máximo para valores intermedios de temperatura, y las semillas tienden a germinar mejor cuando se aumentan los niveles de humedad. Utilice esta información para dibujar una gráfica del éxito de germinación en función de la temperatura para diversos niveles de humedad. Dibuje también la gráfica del éxito de germinación en función de la humedad para diferentes niveles de temperatura.

2. Gaastra (1959) midió los efectos del enriquecimiento del CO_2 atmosférico en la fijación del CO_2 de las hojas de remolacha azucarera con varios niveles de iluminación. Obtuvo que al aumentar el CO_2 con niveles fijos de iluminación el nivel de fijación aumentaba y al aumentar los niveles de iluminación con una concentración fija de CO_2 atmosférico, la fijación también se incrementaba. Si se denomina a la velocidad de fijación en función de la concentración de CO_2 atmosférico (A) y de la intensidad de luz (I), determine el signo de $\partial F/\partial A$ y de $\partial F/\partial I$.

3. En Burke y Grime (1996) se decribe un experimento a largo plazo realizado en una pradera caliza.

(a) Uno de los experimentos relacionó el área total cubierta por especies *autóctonas* con los gradientes de fertilización y perturbaciones. El experimento se diseñó de forma que las dos variables (fertilización y perturbaciones) se podían alterar independientemente. Burke y Grime obtuvieron que el área cubierta por especies autóctonas aumentaba generalmente con la cantidad de fertilizante añadido y disminuía con la intensidad de perturbaciones. Si $A_i(F, D)$ representa el área cubierta por especies autóctonas en función de la cantidad de fertilizante añadida (F) y de la intensidad de las perturbaciones (D), determine los signos de $\partial A_i/\partial F$ y de $\partial A_i/\partial D$ en el experimento.

(b) En otro experimento, Burke y Grime relacionaron el área total cubierta por especies *introducidas* con los gradientes de fertilidad y perturbaciones. Si $A_e(F, D)$ representa el área cubierta por especies introducidas en función de la cantidad de fertilizante añadida (F) y de la intensidad de las perturbaciones (D), Burke y Grime obtuvieron que

$$\frac{\partial A_e}{\partial F} > 0$$

y

$$\frac{\partial A_e}{\partial D} > 0$$

Explique con palabras lo que eso significa.

(c) Compare las respuestas a la fertilización y a las perturbaciones con el área cubierta en los dos experimentos.

4. Vitousek y Farrington (1997) investigaron las limitaciones de nutrientes en suelos de diferentes edades. En el resumen de su artículo, dicen que

> Walter y Syers (1976) propusieron un modelo conceptual que describe el patrón y la regulación de las reservas de nutrientes del suelo y su disponibilidad durante el desarrollo a largo plazo de un ecosistema. Su modelo implica que la producción de plantas debe estar limitada en general por N [nitrógeno] en suelos jóvenes y por P [fósforo] en suelos viejos. El suministro de N y P debe equilibrarse aproximadamente en suelos de edad intermedia.

Vitousek y Syers probaron esta hipótesis en experimentos con fertilizantes a lo largo de un gradiente de edades de suelo, midiendo el aumento de diámetro medio (en mm/año) de árboles *Metrosideros polymorpha*. Sea $D(\mathrm{N}, \mathrm{P}, t)$ el incremento de diámetro (en mm/año) en función de la cantidad de nitrógeno añadida (N), de la cantidad de fósforo añadida (P) y de la edad del suelo (t). Sus experimentos mostraron que

$$\frac{\partial D}{\partial t}(\mathrm{N}, 0, t) < 0$$

y

$$\frac{\partial D}{\partial t}(0, \mathrm{P}, t) > 0$$

para $\mathrm{N} > 0$ y $\mathrm{P} > 0$. Explique por qué sus resultados avalan las hipótesis de Walker y Syers.

5. Calcule la matriz de Jacobi de

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - y \\ x^3 - y^2 \end{bmatrix}$$

6. Calcule una aproximación lineal a $\mathbf{f}(x, y)$ en el punto indicado:

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ \frac{x}{y} \end{bmatrix}$$

en (1, 1).

7. Se puede calcular el radio promedio de la expansión de individuos en el instante t, que se denomina r_{avg}. Es

$$r_{\text{avg}} = \sqrt{\pi D t} \tag{10.55}$$

(a) Dibuje r_{avg} en función de D para $t = 0.1$, $t = 1$ y $t = 5$. Describa con palabras cómo afecta un incremento de D al radio promedio de expansión.

(b) Demuestre que

$$D = \frac{(r_{\text{avg}})^2}{\pi t} \tag{10.56}$$

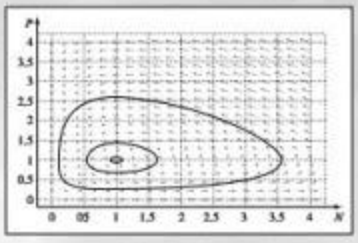
(c) La Ecuación (10.56) se puede utilizar para medir D, la constante de difusión, a partir de experimentos de campo con recaptura de ejemplares marcados, tomados de Kareiva (1983), como sigue: se liberan organismos marcados desde el punto de liberación y se recapturan tras una cierta cantidad de tiempo t desde su liberación. Se mide la distancia de los organismos recapturados al lugar de su liberación. Si se denomina N al número total de organismos recapturados, d_i la distancia del i-ésimo organismo recapturado al lugar de liberación y t al intervalo de tiempo entre la liberación y la recaptura, utilice (10.56) para explicar por qué

$$D = \frac{1}{\pi t}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i\right)^2$$

se puede utilizar para estimar D a partir de los datos de campo (nótese que el tiempo entre la liberación y la recaptura es el mismo para todos los ejemplares del estudio).

CAPÍTULO

11 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES



Los sistemas de ecuaciones diferenciales aparecieron por primera vez en la Sección 8.3. Allí se hizo especial hincapié en comprender dónde surgen esos sistemas y en calcular sus equilibrios (la Sección 8.3 no es un prerrequisito para este capítulo). Ahora presentaremos un tratamiento sistemático de estos sistemas. Suponga que tenemos un conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y cada una de ellas depende de una variable independiente, por ejemplo t, de forma que $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, y que la dinámica de las variables se expresa mediante ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{11.1}$$

Este conjunto de ecuaciones se denomina sistema de ecuaciones diferenciales. En el miembro izquierdo de este sistema de ecuaciones están las derivadas de $x_i(t)$ con respecto a t. En el miembro derecho están las funciones g_i que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y de t. Consideraremos primero el caso en el que las funciones g_i son lineales en las vaiables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es decir, para $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$g_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \cdots + a_{in}(t)x_n + f_i(t)$$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar en forma matricial. Concretamente,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{11.2}$$

siendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

La Ecuación (11.2) se denomina sistema de **ecuaciones lineales de primer orden** (primer orden quiere decir que sólo aparecen las derivadas primeras). Sólo estudiaremos el caso en el que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ y $A(t)$ no depende de t. Entonces, la Ecuación (11.2) se reduce a

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \tag{11.3}$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La Ecuación (11.3) se denomina sistema de primer orden lineal y **homogéneo** con coeficientes constantes (homogéneo se refiere a que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$. Cuando $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$ el sistema se denomina **no homogéneo**). Como la matriz A no depende de t, todos los coeficientes son constantes, y el sistema se denomina **autónomo** (encontramos sistemas autónomos en la Sección 8.1). Nótese que A es una matriz cuadrada.

En la Sección 11.1 presentaremos una parte de la teoría de los sistemas de la forma (11.3). En la Sección 11.2 estudiaremos algunas aplicaciones de los sistemas lineales. La Sección 11.3 está dedicada a la teoría de los sistemas no lineales, y la Sección 11.4 a las aplicaciones de los sistemas no lineales.

11.1 SISTEMAS LINEALES: TEORÍA

En esta sección analizaremos los sistemas de primer orden lineales y homogéneos con coeficientes constantes, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{11.4}$$

donde las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son funciones de t y los parámetros a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ son constantes. El sistema anterior se puede expresar en forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

siendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La mayor parte de las ocasiones nos limitaremos al caso de $n = 2$.

Ejemplo 1 Exprese

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_1 + x_2 \end{aligned}$$

en notación matricial.

Solución

Expresamos $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$. Utilizando las reglas del producto de matrices se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$ ◀

En primer lugar nos ocuparemos de las soluciones de (11.4): una solución es una n-tupla ordenada de funciones $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ que cumple las n ecuaciones de (11.4). En segundo lugar estudiaremos los equilibrios: un equilibrio es un punto $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Empezaremos con un método gráfico para visualizar soluciones.

11.1.1 El campo direccional

Antes de ocuparnos de obtener soluciones de sistemas lineales de primer orden homogéneos con coeficientes constantes, estudiaremos una importante propiedad de las curvas de solución que permitirán dibujar soluciones en el plano $x_1 - x_2$ con la ayuda de los **campos direccionales**. Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \end{aligned} \tag{11.5}$$

Imaginemos ahora que estamos en un punto (x_1, x_2) del plano $x_1 - x_2$ y que el Sistema (11.5) determina nuestra posición futura ¿A dónde debemos dirigirnos? Las dos ecuaciones diferenciales nos indican cómo varían las coordenadas. Para dar un ejemplo concreto, sea el punto $(2, -1)$. Planteamos que nos moveremos por una curva cuya recta tangente en el punto $(2, -1)$ tiene como pendiente

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{x_2}{x_1 - 2x_2} = \frac{-1}{2 - (2)(-1)} = -\frac{1}{4}$$

¿Por qué es eso cierto? Una solución de (11.5) que comienza en el instante 0 en el punto $(x_1(0), x_2(0))$ está dada por puntos de la forma $((x_1(t), x_2(t)), t \geq 0$ que cumplan la Ecuación (11.5). La Figura 11.1 muestra un ejemplo de curva de solución. Puede verse que la solución es una curva en el plano $x_1 - x_2$ y que en cada punto se puede dibujar una tangente cuya pendiente es dx_2/dx_1. La recta tangente en $(2, -1)$, para la que se ha calculado la pendiente (concretamente, $-1/4$) se muestra también en la Figura 11.1.

En cada punto (x_1, x_2) del plano $x_1 - x_2$ se pueden dibujar rectas tangentes. Conociendo todas las rectas tangentes se puede dibujar la correspondiente curva de solución. Esto se hace asignando a cada punto (x_1, x_2) del plano $x_1 - x_2$ un vector $\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}$. Este vector tiene la propiedad de que es tangente a la curva de solución que pasa por el punto (x_1, x_2) y apunta en la dirección de la solución.

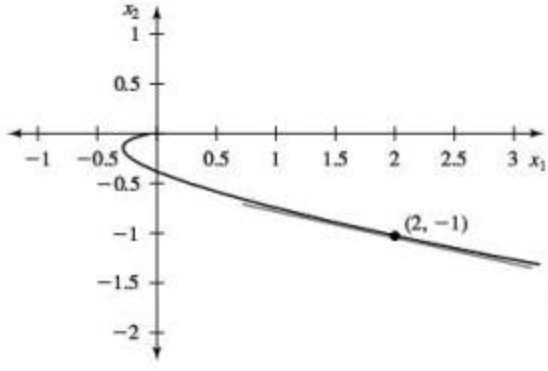


Figura 11.1
Curva de solución que pasa por el punto (2, −1) y recta tangente

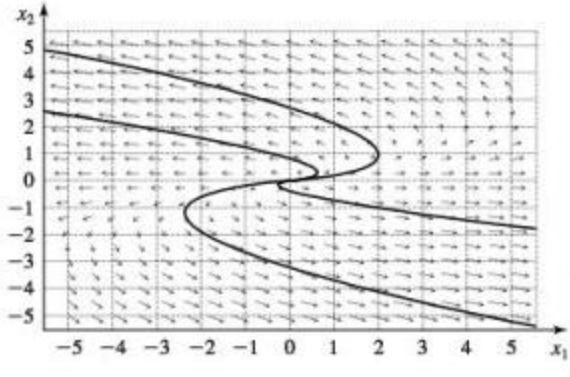


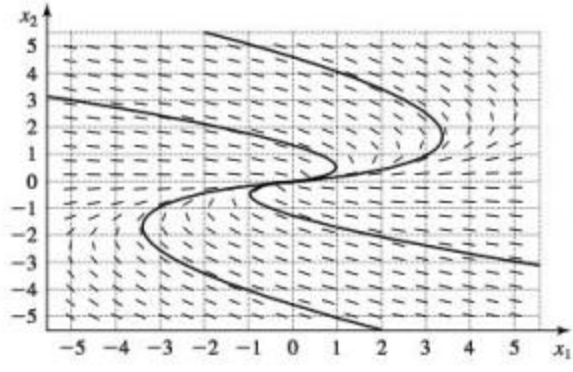
Figura 11.2
Campo direccional del Sistema (11.5) junto con algunas curvas de solución

En nuestro ejemplo, el vector es de la forma $\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, y la pendiente de la curva de solución que pasa por el punto (x_1, x_2) es

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{x_2}{x_1 - 2x_2}$$

El conjunto de estos vectores se denomina **campo direccional** o **de pendientes**, y los vectores del campo direccional se denominan **vectores direccionales**. Como (11.5) es un sistema autónomo, el campo direccional depende sólo de la posición del punto (x_1, x_2) pero no de t. Esto implica que el campo direccional es el mismo en todo instante t.

La Figura 11.2 muestra el campo direccional de (11.5). La Figura muestra también cuatro curvas de solución generadas por ordenador. Cada curva comienza en un punto diferente muy próximo al origen (0, 0). La longitud del vector direccional en un punto dado indica la rapidez con que la curva de solución pasa por ese punto, y es proporcional a $\sqrt{(dx_1/dt)^2 + (dx_2/dt)^2}$. Si sólo estamos interesados en la dirección de las curvas de solución, ésta se puede indicar con pequeños segmentos rectos (como se muestra en la Figura 11.3), lo que resulta en una figura más limpia. La Figura 11.3 contiene también cuatro curvas de solución generadas por ordenador como en la Figura 11.2. Nótese que los vectores direccionales son siempre tangentes a las curvas de solución. Por tanto podemos usar el campo direccional para dibujar curvas de solución de modo que los vectores direccionales sean siempre tangentes a dichas curvas.



◀ **Figura 11.3**
Campo direccional del Sistema (11.5) junto con algunas curvas de solución; los vectores direccionales no se dibujan a escala

El punto (0, 0) es especial. Al calcular el vector direccional en el punto (0, 0) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir, si se empieza en ese punto, ni $x_1(t)$ ni $x_2(t)$ cambian. Estos puntos se denominan equilibrios. En la Subsección 11.1.3 estudiaremos el significado de esos puntos, que tienen un papel central en el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

11.1.2 Solución de sistemas lineales

Soluciones específicas Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden lineal con coeficientes constantes [es decir, es de la forma (11.4) con $n = 1$]. Tras separar las variables, se puede obtener una solución mediante integración (como estudiamos en el Capítulo 8). Todas las soluciones son de la forma

$$x(t) = ce^{at}$$

siendo c una constante que depende de la condición inicial. Una condición inicial selecciona una solución específica del conjunto de soluciones. Por ejemplo, si $x(0) = x_0$, entonces $c = x_0$.

Demostraremos ahora que las funciones exponenciales son también soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Limitaremos nuestro estudio a sistemas de dos ecuaciones diferenciales. Consideremos el sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \tag{11.6}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \tag{11.7}$$

que en forma matricial se expresa

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \tag{11.8}$$

La solución de (11.8) es una función vectorial. Como en el ejemplo anterior $dx/dt = ax$, obtendremos que (11.8) admite un conjunto de soluciones y que si se escoge una condición inicial, se selecciona una solución particular. Más adelante en esta subsección nos ocuparemos de las condiciones iniciales. Veamos primero cómo son las soluciones.

Planteamos que la siguiente función vectorial

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u_1 e^{\lambda t} \\ u_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

siendo λ, u_1 y u_2 constantes, es una solución de (11.8) para una selección apropiada de λ, u_1 y u_2. Para ver cómo se deben escoger λ, u_1 y u_2, se deriva $\mathbf{x}(t)$ en (11.9). Se obtiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} u_1 \lambda e^{\lambda t} \\ u_2 \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{11.10}$$

Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (11.8), debe cumplir dicha ecuación. Utilizando (11.10) en el miembro izquierdo y (11.9) en el miembro derecho, resulta

$$\underbrace{\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}} = \underbrace{A e^{\lambda t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{A\mathbf{x}(t)}$$

o, tras dividir los dos miembros por $e^{\lambda t}$,

$$\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Esta última expresión debería recordarnos los autovalores y autovectores que aparecieron en la Sección 9.3: $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ es el autovector correspondiente al autovalor λ de A. Con esta elección, (11.9) es una solución de (11.8).

En esta subsección solo consideraremos ecuaciones diferenciales de la forma de (11.8) para las que los autovalores de A sean reales y distintos. En la siguiente subsección estudiaremos el caso de los autovalores complejos, pero no estudiaremos el caso de autovalores iguales. Presentamos seguidamente un sistema para ilustrar cómo obtener soluciones específicas de un sistema de la forma de (11.8) en el caso de que los autovalores de A sean reales y distintos.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 3x_2 \end{aligned} \tag{11.11}$$

Cálculo de autovalores

1. La matriz de coeficientes de (11.11) es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Primero se determinan los autovalores y los correspondientes autovectores de A. Para calcular los autovalores de A hay que resolver

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Es decir,

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2$$

Solución correspondiente al autovalor λ_1

2. Para obtener un autovector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ correspondiente a $\lambda_1 = 1$, se resuelve

$$A\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1 = 1$$

Se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2u_1 - 2u_2 \\ 2u_1 - 3u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

que se puede escribir de la siguiente forma

$$u_1 - 2u_2 = 0$$
$$2u_1 - 4u_2 = 0$$

Ambas ecuaciones se reducen a la misma ecuación. Concretamente,

$$u_1 = 2u_2$$

Haciendo por ejemplo $u_2 = 1$ se obtiene $u_1 = 2$. Entonces, un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$ es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Recuérdese que cualquier múltiplo de $\mathbf{u}$ distinto de cero es también un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$).

Planteamos que

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

resuelve (11.11). Vamos a comprobarlo. Se tiene que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

Como $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}(t)$ también cumple

$$A\mathbf{x}(t) = Ae^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

donde se ha utilizado que

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ya que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$. Por tanto,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

y se concluye que $\mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es realmente una solución de (11.11).

Solución correspondiente al autovalor λ_2

3. Ahora se pueden repetir los mismos pasos para el autovalor $\lambda_2 = -2$. Para obtener un autovector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -2$ se resuelve

$$\begin{bmatrix} 2v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

que se puede escribir de la siguiente forma

$$4v_1 - 2v_2 = 0$$
$$2v_1 - v_2 = 0$$

Las dos ecuaciones se reducen a la misma, concretamente

$$2v_1 = v_2$$

Haciendo $v_1 = 1$, se obtiene $v_2 = 2$. Por tanto, un autovector correspondiente a $\lambda_2 = -2$ es

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si

$$\mathbf{x}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -2e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\mathbf{x}(t)$$

y

$$A\mathbf{x}(t) = Ae^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{-2t}A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\mathbf{x}(t)$$

donde se ha utilizado que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ya que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = -2$. Esto demuestra que $\mathbf{x}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es también una solución de (11.11).

El campo direccional

4. Ilustraremos estas dos soluciones particulares con el correspondiente campo direccional. Recuérdese que un autovector se puede utilizar para formar una recta que pasa por el origen en la dirección de dicho autovector. En la Figura 11.4 se muestra el campo direccional junto con las dos rectas en la dirección de los autovectores.

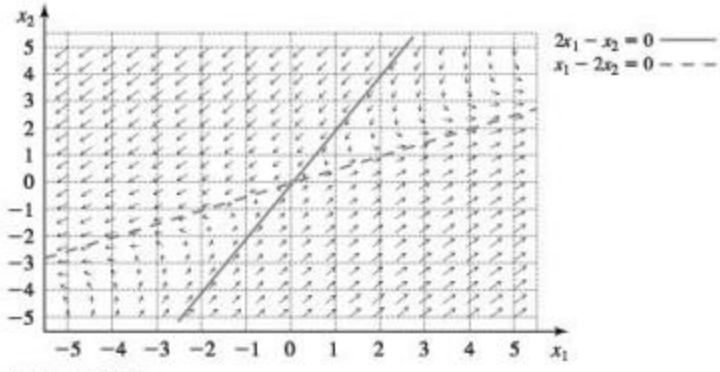
Si $\mathbf{x}(0)$ es un punto de una de las rectas definidas por los autovectores, entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ debe permanecer en esa recta para *todos* los instantes posteriores. La posición en la recta cambiará con el tiempo. Si el correspondiente autovalor es positivo, la solución se alejará del origen, y si el autovalor es negativo, se acercará al origen, como puede verse por la dirección de los vectores direccionales. La recta continua en la Figura 11.4 ($2x_1 - x_2 = 0$) corresponde al autovalor $\lambda_2 = -2$ y se puede ver que los vectores direccionales en esta recta apuntan hacia el origen. La recta discontinua de la Figura 11.4 ($x_1 - 2x_2 = 0$) corresponde al autovalor $\lambda_1 = 1$, y se puede ver que los vectores direccionales de esta recta apuntan en dirección contraria al origen.

La solución general Supongamos que $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$ son dos soluciones de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \tag{11.12}$$

es decir,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}(t) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}(t)$$



▲ **Figura 11.4**
Campo direccional del Sistema (11.11) con las rectas en la dirección de los autovectores

Entonces la combinación lineal

$$c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t) \tag{11.13}$$

también es una solución de (11.12). Esto se puede ver de la siguiente forma. En primer lugar, nótese que

$$\frac{d}{dt}[c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)] = c_1\frac{d\mathbf{y}}{dt} + c_2\frac{d\mathbf{z}}{dt}$$

Pero como $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$ son dos soluciones de (11.12),

$$c_1\frac{d\mathbf{y}}{dt} + c_2\frac{d\mathbf{z}}{dt} = c_1A\mathbf{y}(t) + c_2A\mathbf{z}(t) \tag{11.14}$$

Utilizando las propiedades de linealidad de A, el lado derecho de (11.14) se puede expresar de la siguiente forma

$$A[c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)]$$

Resumiendo, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\underbrace{[c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)]}_{\mathbf{x}(t)} = A\underbrace{[(c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)]}_{\mathbf{x}(t)}$$

lo que demuestra que la combinación lineal $c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)$ es también una solución.

La combinación de soluciones, como en (11.13), ilustra el **principio de superposición**. Como se trata de un principio importante, se enuncia a continuación.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Sea

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Si

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

son soluciones de (11.15), entonces

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)$$

es también una solución de (11.15).

Hemos visto que $e^{\lambda t}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, siendo $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ un autovector correspondiente al autovalor real λ de la matriz A, es una solución de (11.12). Si tenemos dos autovalores reales y distintos λ_1 y λ_2 cuyos correspondientes autovectores son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, haciendo $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}$ y $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}$ y aplicando el principio de superposición, la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v} \tag{11.16}$$

siendo c_1 y c_2 constantes, es también una solución de (11.12). Las constantes c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales. Se puede demostrar que cualquier solución se puede expresar en la forma de (11.16). Por tanto, la solución de la forma de (11.16) se denomina solución general. Cuando A tiene autovalores repetidos, es decir, cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, la situación es más complicada. No daremos la solución general para este caso, sino que presentaremos dos ejemplos en los Problemas 25 y 26. El siguiente recuadro resume las ideas expuestas.

LA SOLUCIÓN GENERAL

Sea

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \tag{11.17}$$

siendo A una matriz 2×2 con dos autovalores reales y distintos λ_1 y λ_2 cuyos correspondientes autovectores son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Entonces

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v} \tag{11.18}$$

es la solución general de (11.17). Las constantes c_1 y c_2 dependen de la condición inicial.

Comprobaremos a continuación que (11.18) es realmente una solución de (11.17). Para ello, se deriva (11.18) con respecto a t, y se obtiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}$$

Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son autovectores correspondientes a λ_1 y λ_2, se obtiene también que

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}(t) &= A(c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c^2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}) \\ &= c_1 e e^{\lambda_1 t} A\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t} A\mathbf{v} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t}\lambda_1\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\lambda_2\mathbf{v} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

Volviendo al ejemplo del principio de esta subsección, la solución general de (11.11)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{11.19}$$

Una condición inicial para (11.11)

5. Supongamos que se sabe que en el instante 0,

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{11.20}$$

se cumple para (11.11). Se pueden determinar ahora las constantes c_1 y c_2 de (11.19) para que $\mathbf{x}(t)$ cumpla la condición inicial (11.20),

$$\mathbf{x}(0) = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para calcular c_1 y c_2 hay que resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$2c_1 + c_2 = -1$$
$$c_1 + 2c_2 = 4$$

Eliminando c_1 en la segunda ecuación se obtiene

$$2c_1 + c_2 = -1$$
$$3c_2 = 9$$

Por tanto, $c_2 = 3$ y entonces

$$2c_1 = -1 - c_2 = -1 - 3 = -4 \quad \text{o} \quad c_1 = -2$$

Por tanto,

$$\mathbf{x}(t) = -2e^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o, expresándolo como ecuaciones separadas,

$$x_1(t) = -4e^{t} + 3e^{-2t}$$
$$x_2(t) = -2e^{t} + 6e^{-2t}$$

Para resumir, esta solución resuelve el sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_2 - 3x_1$$

de (11.11) con las condiciones iniciales $x_1(0) = -1$ y $x_2(0) = 4$.

Vamos a dar un ejemplo más de problema de valor inicial para ilustrar los diferentes pasos que se deben realizar para obtener una solución en el caso de que A tenga autovalores reales y distintos.

Ejemplo 2 Resuelva

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) \tag{11.21}$$

con la condición inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{11.22}$$

Solución

El primer paso es calcular los autovalores y los correspondientes autovectores. Para calcular los autovalores hay que resolver

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3$$
$$= \lambda^2 - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1$$

El autovector $\mathbf{u}$ correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$ cumple

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la expresión anterior en forma de sistema de ecuaciones,

$$2u_1 - 3u_2 = u_1$$
$$u_1 - 2u_2 = u_2$$

Estas dos ecuaciones se reducen a la misma, concretamente,

$$u_1 - 3u_2 = 0$$

Si se hace $u_2 = 1$, entonces $u_1 = 3$ y por tanto,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$.

El autovector $\mathbf{v}$ correspondiente al autovalor $\lambda_2 = -1$ cumple

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la expresión anterior en forma de sistema de ecuaciones,

$$2v_1 - 3v_2 = -v_1$$
$$v_1 - 2v_2 = -v_2$$

Estas dos ecuaciones se reducen a la misma, concretamente,

$$v_1 - v_2 = 0$$

Si se hace $v_1 = 1$, entonces $v_2 = 1$ y por tanto,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = -1$. La solución general de (11.21) es por tanto

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

siendo c_1 y c_2 constantes. La condición inicial (11.22) permite determinar las constantes c_1 y c_2, concretamente,

$$\mathbf{x}(0) = c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

Es decir, c_1 y c_2 cumplen

$$3c_1 + c_2 = 3$$
$$c_1 + c_2 = -1$$

Se resuelve el sistema utilizando el método estándar de eliminación

$$3c_1 + c_2 = 3$$
$$2c_1 = 4$$

Por tanto, $c_1 = 2$ y $c_2 = 3 - 3c_1 = 3 - 6 = -3$. La solución de (11.21) que cumple la condición inicial (11.22) es por tanto

$$\mathbf{x}(t) = 2e^{t}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} - 3e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

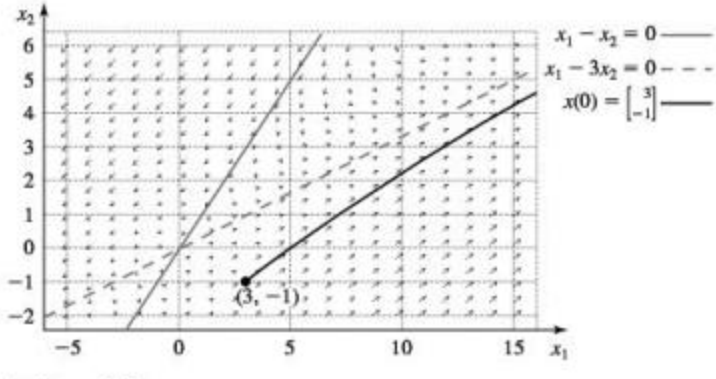
que se puede expresar también de la forma

$$x_1(t) = 6e^{t} - 3e^{-t}$$
$$x_2(t) = 2e^{t} - 3e^{-t}$$

La Figura 11.5 muestra el campo direccional con las dos rectas en la dirección de los autovectores y la solución. ◀

Hemos visto que todas las condiciones iniciales se han formulado en el instante $t = 0$. Esto representa una elección natural de la condición inicial. Sin embargo, podría haberse elegido cualquier otro instante, por ejemplo, $t = 1$. Supongamos que en el Ejemplo 2, la condición inicial hubiera sido

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \tag{11.23}$$



▲ **Figura 11.5**
Campo direccional del sistema (11.21) con las rectas en la dirección de los autovectores y la solución con la condición inicial $\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$

La solución general seguiría siendo

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pero las constantes c_1 y c_2 tendrían que cumplir ahora

$$\begin{aligned} 3ec_1 + e^{-1}c_2 &= 2 \\ ec_1 + e^{-1}c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema utilizando el método estándar de eliminación

$$\begin{aligned} 3ec_1 + e^{-1}c_2 &= 2 \\ 2ec_1 &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $c_1 = \dfrac{1}{2e}$ y $c_2 = \dfrac{e}{2}$. Entonces, la solución que cumple (11.23) es

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} e^{t-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{1-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11.1.3 Equilibrios y estabilidad

En esta sección vamos a estudiar los equilibrios y la estabilidad, dos conceptos que ya hemos encontrado en la Sección 8.2, al estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos conceptos se pueden extender a los sistemas de ecuaciones diferenciales. Nos limitaremos a estudiar el caso

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \tag{11.24}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{11.25}$$

Se dice que un punto

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

es un equilibrio de (11.24) si

$$A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

es decir, un punto en el que el vector direccional del campo direccional correspondiente tiene longitud 0. Si se arranca un sistema de ecuaciones diferenciales en un punto de equilibrio, permanecerá en ese punto en todos los instantes posteriores.

Para calcular los equilibrios de (11.24) hay que resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Se puede ver inmediatamente que $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ es una solución. De los resultados obtenidos en la Subsección 9.2.3 se deduce que si $\det A \neq 0$, entonces (0, 0) es el único equilibrio de (11.24). Si $\det A = 0$, entonces existirán otros equilibrios.

Como en el Capítulo 8, la propiedad característica de un equilibrio es que si el sistema arranca en un equilibrio, permanecerá allí en todos los instantes futuros. Esto *no* significa que si el sistema está en equilibrio y es **perturbado** una pequeña cantidad (es decir, la solución se mueve a un punto cercano), volverá al equilibrio (como vimos en el Capítulo 8). El que una solución vuelva o no al equilibrio tras una pequeña perturbación depende de la **estabilidad** del equilibrio. En la subsección

anterior hemos visto que en el caso de que A tenga dos autovalores reales y distintos, la solución de (11.24) es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v} \tag{11.26}$$

siendo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los autovectores correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz A, y las constantes c_1 y c_2 dependen de la condición inicial. Al conocer la solución (11.26) se puede estudiar su comportamiento cuando $t \to \infty$ y por tanto, considerar la estabilidad al menos cuando los autovalores son reales y distintos.

Como A es una matriz 2×2 y todos sus elementos son reales, sus autovalores serán reales o complejos conjugados. Estudiaremos los dos casos separadamente. Para simplificar el estudio, supondremos de nuevo que los dos autovalores de A son distintos.

Los equilibrios de (11.24) se pueden calcular resolviendo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{11.27}$$

Si $\det A \neq 0$, entonces (11.27) sólo tiene una solución, concretamente, la solución trivial (0, 0) (*véase* la Subsección 9.2.3). Como $\det A = \lambda_1\lambda_2$, siendo λ_1 y λ_2 los autovalores de la matriz A, si λ_1 y λ_2 son distintos de cero, entonces $\det A \neq 0$.

Caso 1: A tiene dos autovalores reales, distintos entre sí y distintos de cero En este caso la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene una solución, concretamente (0, 0), y por tanto el punto (0, 0) es el único equilibrio. La solución general de (11.24) está dada por (11.26) y por tanto se puede estudiar directamente el comportamiento de la solución de (11.24) estudiando el comportamiento de (11.26). Estamos interesados en determinar

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t\to\infty} [c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}] \tag{11.28}$$

Se puede ver inmediatamente que el comportamiento de $\mathbf{x}(t)$ está determinado por $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$. Recuérdese que

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_i < 0 \\ \infty & \text{si } \lambda_i > 0 \end{cases}$$

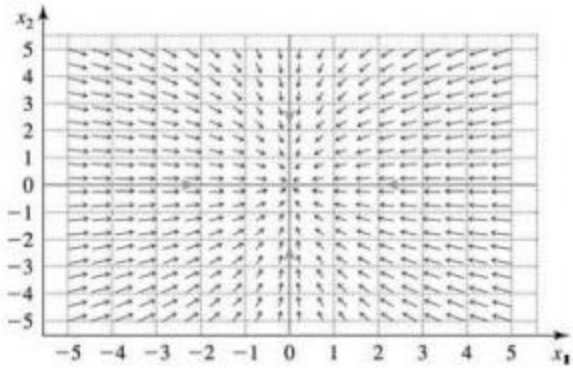
Distinguiremos las tres situaciones siguientes:

1. Ambos autovalores son negativos: $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$.
2. Los autovalores son de signos contrarios: $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$ (o $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$).
3. Ambos autovalores son positivos: $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$.

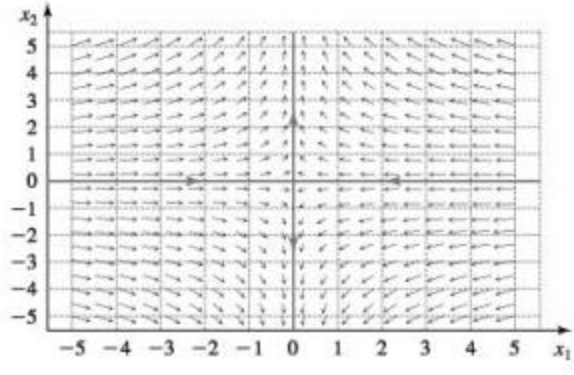
Situación 1 Cuando ambos autovalores son negativos, de (11.28) se concluye que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

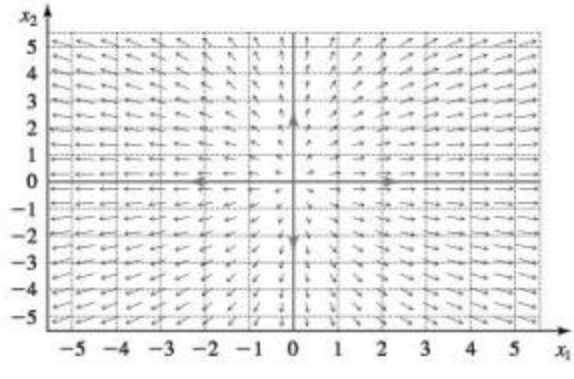
independientemente del valor de $(x_1(0), x_2(0))$. Se dice que el equilibrio (0, 0) es **globalmente estable** ya que la solución se aproximará a dicho equilibrio independiente del punto inicial (y no sólo desde puntos cercanos). (0, 0) se denomina **sumidero**, o **nodo estable**. La Figura 11.6 muestra un campo direccional en este caso. La forma del campo direccional explica porqué se llama sumidero al equilibrio. Todas las soluciones «fluyen» hacia el origen.



▲ **Figura 11.6**
Campo direccional de un sistema en el que ambos autovalores son negativos, junto con las rectas en la dirección de los autovectores



▲ **Figura 11.7**
Campo direccional de un sistema en el que ambos autovalores son de signos opuestos, junto con las rectas en la dirección de los autovectores



▲ **Figura 11.8**
Campo direccional de un sistema en el que ambos autovalores son positivos, junto con las rectas en la dirección de los autovectores

El sistema de ecuaciones diferenciales que da lugar al campo direccional de la Figura 11.6 es

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$. Ambos son negativos. Las dos rectas de la Figura 11.6 tienen la dirección de los dos autovectores. Se puede ver que cuando se empieza en un punto de cualquiera de las rectas, la solución se aproxima al equilibrio (0, 0) siguiendo la correspondiente recta. Además, observando el campo direccional se puede ver que partiendo de cualquier otro punto, la solución se aproximará al equilibrio (0, 0) como se concluye de la forma de la solución general y del hecho de que ambos autovalores son negativos.

Situación 2 Cuando los autovalores son de signos opuestos, se deduce de (11.28) que la componente de la solución asociada al autovalor negativo tenderá a 0 cuando $t \to \infty$, y la componente asociada al autovalor positivo tenderá a infinito. Es decir, a menos que partamos de la dirección asociada al autovalor negativo, la solución no convergerá al equilibrio (0, 0). Se dice que el equilibrio (0, 0) es **inestable**, y (0, 0) se denomina **punto de ensilladura**. La Figura 11.7 muestra el campo direccional en este caso. La forma del campo direccional explica por qué se denomina al equilibrio punto de ensilladura.

El sistema de ecuaciones diferenciales que da lugar al campo direccional es

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$. Las dos rectas de la Figura 11.7 tienen la dirección de los dos autovectores. Se puede ver que cuando se empieza en un punto de la recta correspondiente al autovalor negativo (la recta horizontal), la solución se aproxima al equilibrio (0, 0) siguiendo esa recta. Cuando se empieza en un punto de la recta correspondiente al autovalor positivo (la recta vertical), la solución se aleja del equilibrio (0, 0) siguiendo dicha recta. Además, observando el campo direccional se puede ver que empezando desde cualquier otro punto, la solución también se alejará del equilibrio (0, 0).

En resumen, el campo direccional indica que la solución se aproximará al (0, 0) sólo en una dirección, concretamente en la dirección del autovector asociado al autovalor negativo), y se alejará del (0, 0) en cualquier otro lugar.

Situación 3 Finalmente, si ambos autovalores son positivos, se deduce de (11.28) que la solución no convergerá a (0, 0) a menos que el punto inicial sea el (0, 0). Se dice que el equilibrio (0, 0) es inestable, y (0, 0) se denomina **fuente**, o **nodo inestable**. La Figura 11.8 muestra el campo direccional en este caso. Observando la forma del campo se explica por qué se denomina fuente al equilibrio.

El sistema de ecuaciones diferenciales que da lugar a este campo direccional es

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, que son ambos positivos. Las dos rectas de la Figura 11.8 tienen la dirección de los dos autovectores. Se puede ver que cuando se empieza en un punto de cualquiera de las rectas, la solución se aleja del equilibrio (0, 0) siguiendo la correspondiente recta. Además, observando el campo direccional se puede ver que partiendo de cualquier otro punto, la solución se alejará del equilibrio (0, 0).

Caso 2: A tiene dos autovalores complejos conjugados En este caso no resolveremos el sistema, sino que presentaremos algunos ejemplos para ver el aspecto típico de los campos direccionales.

Situación 1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.29}$$

Entonces

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

con lo que resulta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

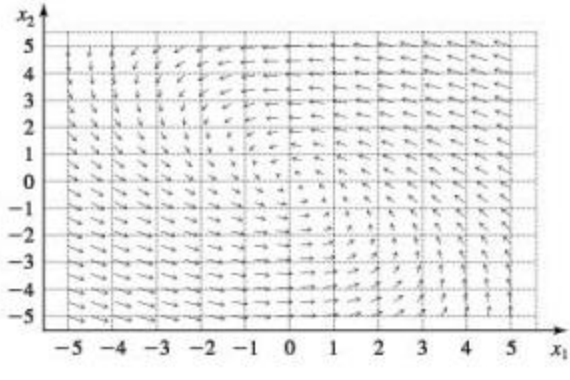
Ambos autovalores son complejos y forman un par conjugado (nótese que las partes reales de los dos autovalores son negativas). Para ver el aspecto de las soluciones de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

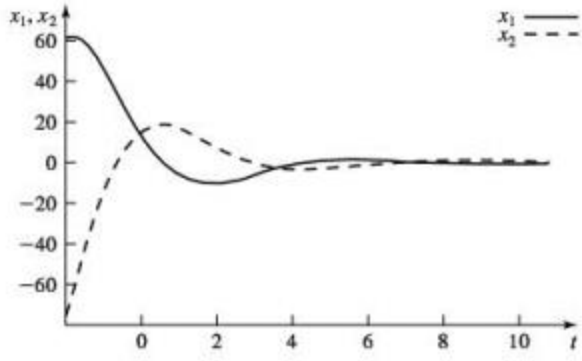
dibujaremos en las Figuras 11.9 y 11.10 el campo direccional y las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente.

Observando el campo direccional se puede ver que empezando en cualquier punto distinto del (0, 0), las soluciones se mueven en espiral hacia el punto (0, 0). Por esta razón, el equilibrio (0, 0) se denomina **espiral estable**. Cuando se dibujan soluciones en función del tiempo, presentan oscilaciones, como se muestra en la Figura 11.10. La amplitud de las oscilaciones disminuye con el tiempo, por lo que se denominan oscilaciones **amortiguadas**.

Las oscilaciones están causadas por la parte imaginaria de los autovalores, y la atenuación de las oscilaciones está causada por la parte real negativa de los autovalores. Antes de explicar esto con más detalle, daremos dos ejemplos más, uno en el que los autovalores complejos conjugados tienen partes reales positivas y otro en el que los autovalores son imaginarios puros.



▲ **Figura 11.9**
Campo direccional del sistema de la matriz A en (11.29)



▲ **Figura 11.10**
Las soluciones de (11.29)

Situación 2 Sea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\det(B - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) + 1$$
$$= \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

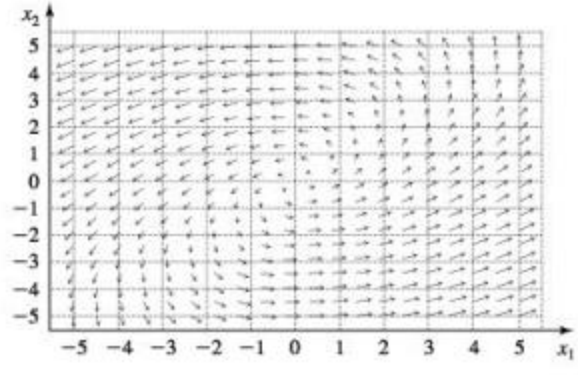
con lo que resulta

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

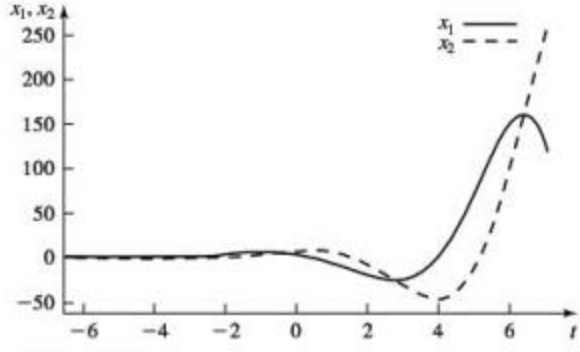
Los dos autovalores de B son complejos y forman un par conjugado pero ahora las partes reales de los dos autovalores son positivas. Para ver el aspecto de las soluciones de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = B\mathbf{x}(t) \tag{11.30}$$

dibujaremos en las Figuras 11.11 y 11.12 el campo direccional y las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente.



▲ **Figura 11.11**
Campo direccional del sistema de la matriz B en (11.30)



▲ **Figura 11.12**
Las soluciones de (11.29)

Observando el campo direccional se puede ver que empezando en cualquier punto distinto del (0, 0), las soluciones se alejan en espiral del punto (0, 0). Por esta razón, el equilibrio (0, 0) se denomina **espiral inestable**. Cuando se dibujan soluciones en función del tiempo presentan oscilaciones, como se muestra en la Figura 11.12, pero ahora la amplitud de las oscilaciones aumenta con el tiempo. Las oscilaciones están también causadas por la parte imaginaria de los autovalores, y el incremento en la amplitud de las oscilaciones está causada por la parte real positiva de los autovalores.

Situación 3 Este es un ejemplo en el que ambos autovalores son imaginarios puros. Sea

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

con lo que resulta

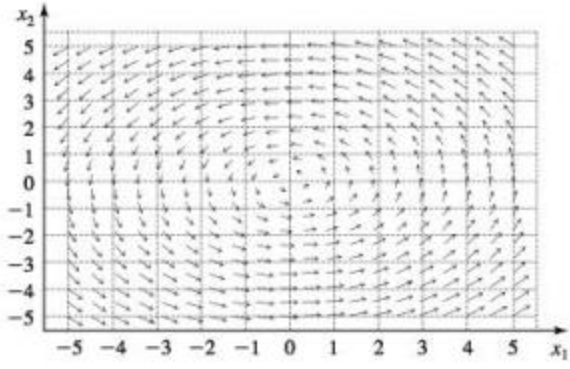
$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Los dos autovalores de C son complejos y forman un par conjugado pero ahora son imaginarios puros (sus partes reales son iguales a cero). Para ver el aspecto de las soluciones de

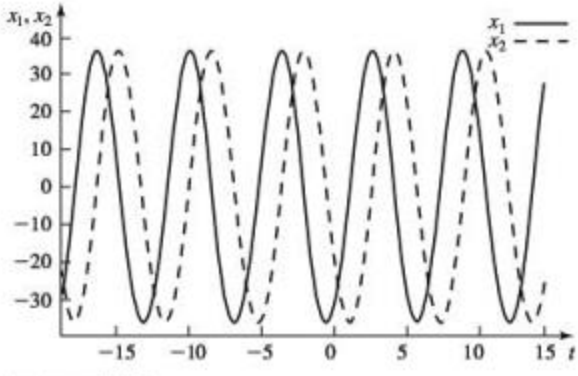
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = C\mathbf{x}(t) \tag{11.31}$$

dibujaremos en las Figuras 11.13 y 11.14 el campo direccional y las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente.

Observando las curvas de solución de la Figura 11.14 se puede ver que las soluciones oscilan como en los ejemplos anteriores, pero esta vez la amplitud no cambia con el tiempo. Observando el campo direccional de la Figura 11.13 se puede ver que las soluciones giran alrededor del punto (0, 0), pero como su amplitud no cambia, las soluciones ni se aproximan ni se alejan del equilibrio. El equilibrio (0, 0) se denomina **espiral neutro** o **centro**. Se puede demostrar que las oscilaciones forman curvas cerradas (en el ejemplo 3 analizaremos esto con más detalle, y mostraremos este campo direccional con una curva de solución).



▲ **Figura 11.13**
Campo direccional del sistema de la matriz C en (11.31)



▲ **Figura 11.14**
Las soluciones de (11.31)

¿De dónde surgen las oscilaciones? Se puede demostrar que las soluciones de (11.24) están dadas por (11.26), independientemente de si los autovalores son reales o complejos, siempre que sean distintos. Si los autovalores son complejos, la solución contiene términos de la forma e^z, siendo z un número complejo.

El número complejo z se puede expresar en la forma

$$z = a + ib$$

siendo a y b reales. El número a se denomina parte real de z y el número b, parte imaginaria de z.

Para entender el significado de e^z cuando z es complejo, se escribe

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$$

El término e^a es un número real y por tanto sabemos su interpretación. El término e^{ib} es una exponencial cuyo exponente es imaginario puro. Esto no ha aparecido antes. La siguiente fórmula, que no podemos demostrar aquí, explica su significado.

FÓRMULA DE EULER

$$e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$$

Tanto el seno como el coseno muestran oscilaciones, y por eso los sistemas de ecuaciones diferenciales con autovalores complejos tienen soluciones que oscilan, como en el ejemplo siguiente, donde se puede intuir la respuesta.

Ejemplo 3 Demuestre que $x_1(t) = \cos t$ y $x_2(t) = \operatorname{sen} t$ resuelve el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \end{aligned} \tag{11.32}$$

con $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$.

Solución

La matriz de coeficientes asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es la misma matriz C que apareció en (11.31). Por tanto, sabemos que

$$\lambda_1 = i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -i$$

es necesario demostrar que

$$x_1(t) = \cos t$$
$$x_2(t) = \operatorname{sen} t$$

resuelve (11.32). Para comprobarlo, se calcula

$$\frac{dx_1}{dt} = -\operatorname{sen} t = -x_2(t)$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = \cos t = x_1(t)$$

Además, hay que comprobar que nuestra solución cumple la condición inicial. De hecho, $x_1(0) = \cos 0 = 1$ y $x_2(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$. La solución de este sistema es una pareja de funciones reales, y se muestra en la Figura 11.15. La trayectoria de $(x_1(t), x_2(t))$ en el plano $x_1 - x_2$ se muestra en la Figura 11.16.

Podemos ver en la Figura 11.15 que las soluciones en este caso son periódicas y muestran oscilaciones sostenidas. Es decir, las amplitudes de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no varían con el tiempo. En la Figura 11.16 se puede ver que la solución forma curvas cerradas en el plano $x_1 - x_2$, lo que indica que las soluciones son periódicas. ◀

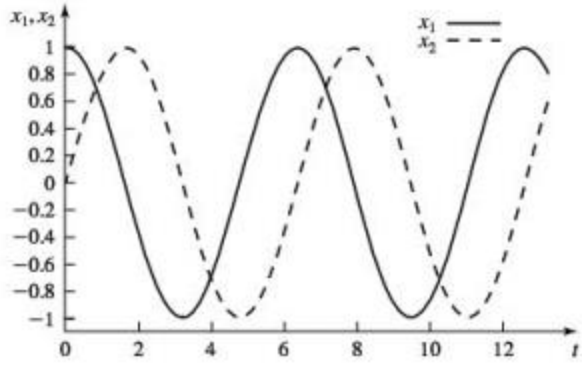
Resumen Daremos a continuación un breve resumen de la clasificación del equilibrio (0, 0) de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

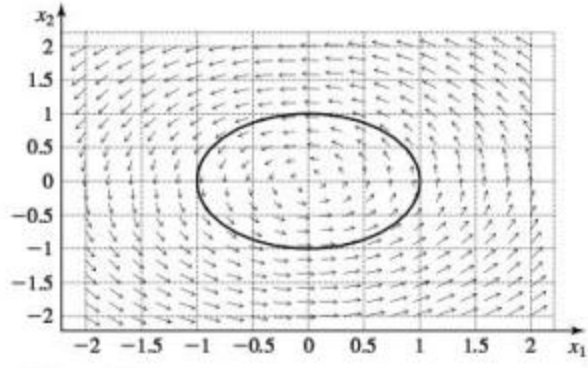
Recuérdese que

La traza de A es $a_{11} + a_{22}$.

El determinante de A es $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.



▲ **Figura 11.15**
Solución del Ejemplo 3 en función de t con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$.



▲ **Figura 11.16**
Trayectoria del Ejemplo 3 en el campo direccional con $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$.
La trayectoria es una curva cerrada.

Denominaremos τ a la traza de A y Δ a su determinante. Los autovalores de A se obtienen resolviendo

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0\end{aligned}$$

donde se ha utilizado $\tau = a_{11} + a_{22}$ y $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Con esto, se obtiene

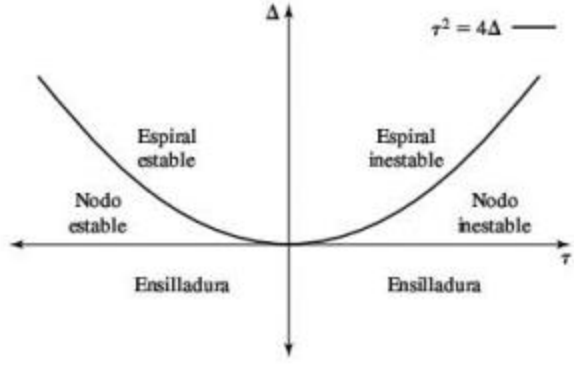
$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \tag{11.33}$$

Se ve inmediatamente que

Si $\tau^2 > 4\Delta$, los dos autovalores son reales y distintos.

Si $\tau^2 < 4\Delta$, los dos autovalores son complejos conjugados.

Cuando los autovalores son reales y distintos (esto es, cuando $\tau^2 > 4\Delta$), se pueden distinguir los tres casos siguientes:



▲ **Figura 11.17**
Comportamiento de estabilidad de un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas, con coeficientes constantes

1. $\Delta < 0$: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (ensilladura)
2. $\Delta > 0$, $\tau < 0$: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (nodo estable o sumidero)
3. $\Delta > 0$, $\tau > 0$: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (nodo inestable o fuente)

Cuando los autovalores son complejos conjugados (esto es, cuando $\tau^2 < 4\Delta$), se pueden distinguir los tres casos siguientes:

1. $\tau < 0$: los dos autovalores tienen parte real negativa (espiral estable).
2. $\tau > 0$: los dos autovalores tienen parte real positiva (espiral inestable).
3. $\tau = 0$: los dos autovalores son imaginarios puros (centro).

Estas ideas se pueden resumir gráficamente utilizando el plano $\tau - \Delta$ como se muestra en la Figura 11.17. La parábola $4\Delta = \tau^2$ marca el límite entre el comportamiento oscilatorio y no oscilatorio. La recta $\tau = 0$ separa las regiones estable e inestable. La recta $\Delta = 0$ separa las regiones de nodo y de ensilladura. El caso de autovalores iguales se encuentra en la curva frontera $4\Delta = \tau^2$.

La recta $\Delta = 0$ corresponde al caso en el que uno de los autovalores es igual a 0. Si el otro autovalor no es igual a cero, los autovalores son distintos y la solución es de la forma (11.26). Sin embargo, en este caso existen otros equilibrios distintos del (0, 0). En los Problemas 57 y 58, y también en la Sección 11.2, veremos algunos ejemplos.

11.1.4. Problemas

(11.1.1)

En los problemas 1-4, exprese los sistemas de ecuaciones diferenciales en forma matricial.

1.
$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2$$

2.
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

3.
$$\frac{dx_1}{dt} = x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2$$

4.
$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 - x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 5x_1 + x_3$$

5. Considere

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

Determine los vectores direccionales asociados con los siguientes puntos en el plano $x_1 - x_2$, y dibuje dichos vectores en dicho plano: (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1), (1, 1), (0, 0) y (−2, 1).

6. Considere

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2$$

Determine los vectores direccionales asociados con los siguientes puntos en el plano $x_1 - x_2$, y dibuje dichos vectores en dicho plano: (2, 0), (1.5, 1), (1, 0), (0, −1), (1, 1), (0, 0) y (−2, 1).

7. Considere

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2$$

Determine los vectores direccionales asociados con los siguientes puntos en el plano $x_1 - x_2$, y dibuje dichos vectores en dicho plano: (1, 0), (0, 1), (−1, 1), (0, −1), (−3, 1), (0, 0) y (−2, 1).

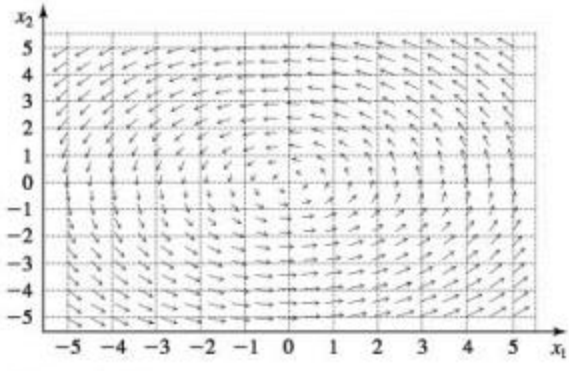
8. Considere

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2$$

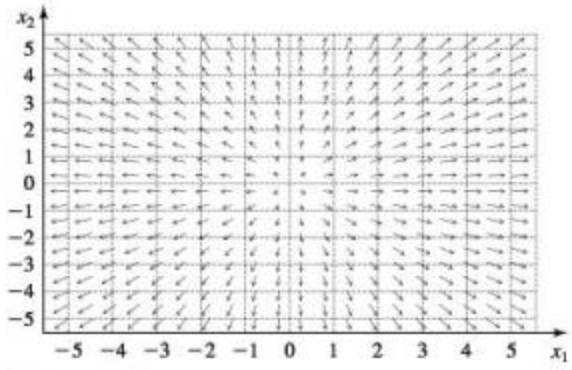
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

Determine los vectores direccionales asociados con los siguientes puntos en el plano $x_1 - x_2$, y dibuje dichos vectores en dicho plano: (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1), (1, 1), (0, 0) y (−2, −2).

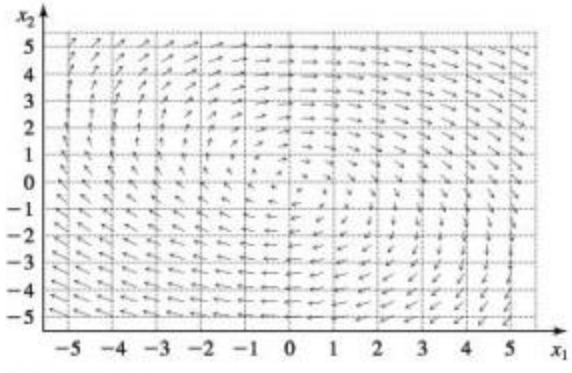
9. En las Figuras 11.18 a 11.21 se muestran campos direccionales. Cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales se corresponde con uno de dichos campos direccionales. Asocie cada sistema con la figura apropiada.



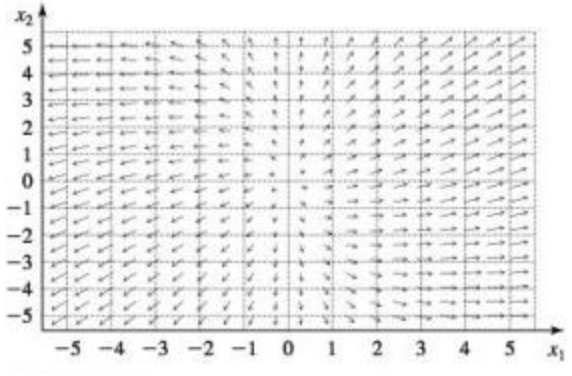
▲ **Figura 11.18**



▲ **Figura 11.19**



▲ **Figura 11.20**



▲ **Figura 11.21**

(a)

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

(b)

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2$$

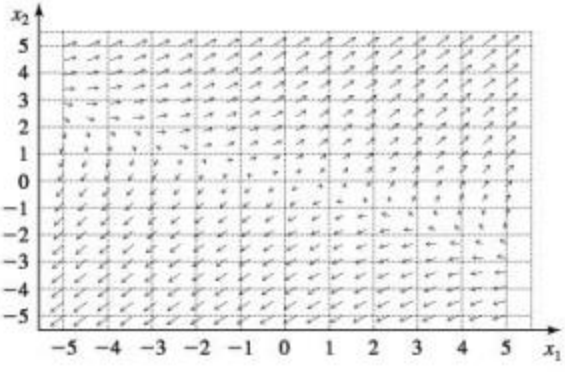
(c)
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1$$

(d)
$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

10. El campo direccional de

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3x_2$$

se muestra en la Figura 11.22. Dibuje la curva de solución que pasa por el punto (1, 0).

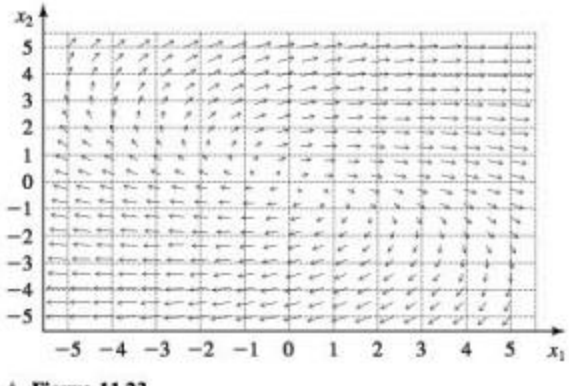


▲ **Figura 11.22**

11. El campo direccional de

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2$$

se muestra en la Figura 11.23. Dibuje la curva de solución que pasa por el punto (2, −1).

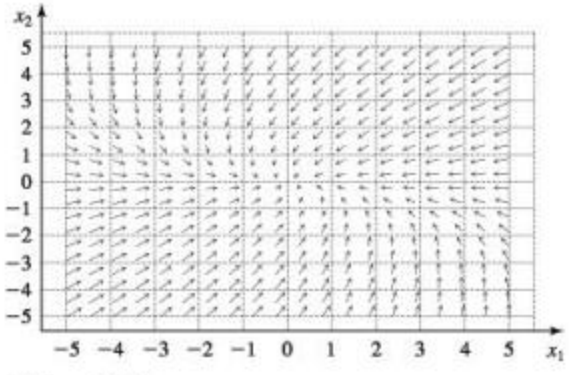


▲ **Figura 11.23**

12. El campo direccional de

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

se muestra en la Figura 11.24. Dibuje la curva de solución que pasa por el punto (−3, −3).



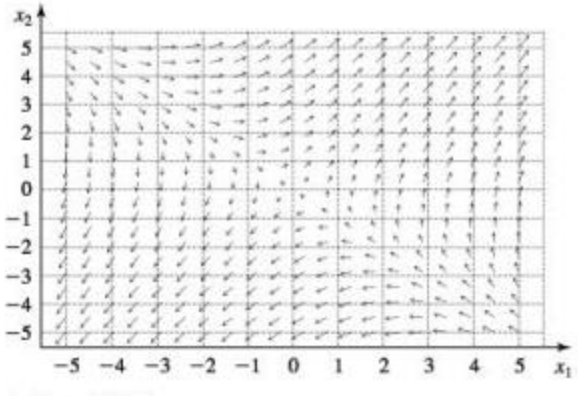
▲ **Figura 11.24**

(11.1.2)

En los Problemas 13-18, calcule la solución general de los sistemas de ecuaciones diferenciales dados y dibuje las rectas en la dirección de los autovectores. Indique sobre cada recta la dirección en que se movería la solución si empezara en dicha recta.

13. (Figura 11.25)

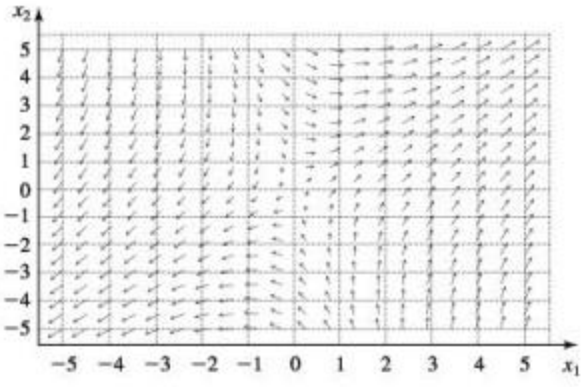
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.25**

14. (Figura 11.26)

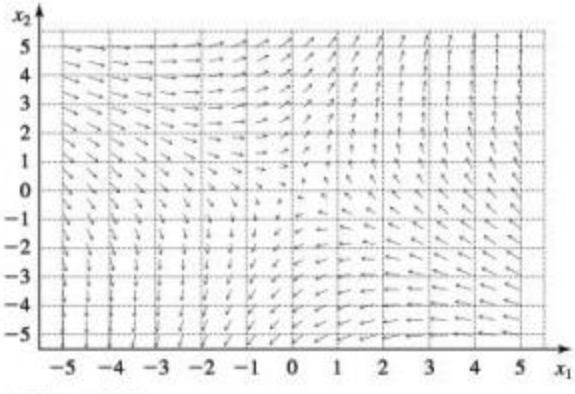
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.26**

15. (Figura 11.27)

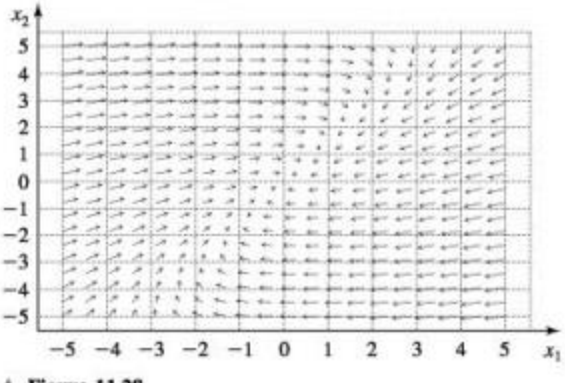
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.27**

16. (Figura 11.28)

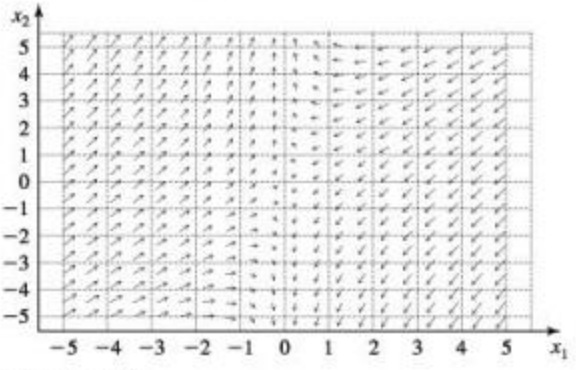
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.28**

17. (Figura 11.29)

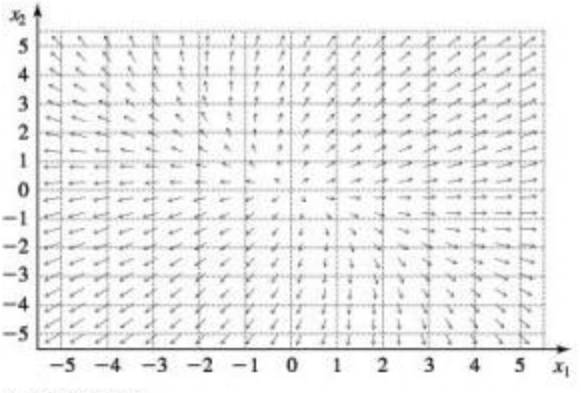
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.29**

18. (Figura 11.30)

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.30**

En los Problemas 19-24, resuelva los problemas de valor inicial dados.

19.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = -5$ y $x_2(0) = 5$.

20.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = -1$.

21. $$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 1$.

22. $$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 2$.

23. $$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = -1$ y $x_2(0) = -2$.

24. $$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = -3$ y $x_2(0) = 1$.

En los Problemas 25 y 26, se estudia el caso de autovalores repetidos.

25. Sea

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{11.34}$$

(a) Demuestre que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene autovalores repetidos, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

(b) Demuestre que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son autovectores de A, y que cualquier vector $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ se puede expresar de la forma

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Demuestre que

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una solución de (11.34) que satisface la condición inicial $x_1(0) = c_1$ y $x_2(0) = c_2$.

26. Sea

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{11.35}$$

(a) Demuestre que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene autovalores repetidos, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

(b) Demuestre que todo autovector de A es de la forma

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

siendo c_1 un número real distinto de 0.

(c) Demuestre que

$$\mathbf{x}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una solución de (11.35).

(d) Demuestre que

$$\mathbf{x}_2(t) = te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

es una solución de (11.35).

(e) Demuestre que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

es una solución de (11.35) (que resulta ser la solución general).

(11.1.3)

En los Problemas 27-36, se consideran ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{siendo} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son reales, distintos entre sí y distintos de cero. Analice la estabilidad del equilibrio (0, 0), y clasifique el equilibrio en sumidero, fuente o punto de ensilladura.

27. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

28. $$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

29. $$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

30. $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

31. $$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

32. $$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

33. $$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

34. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

35. $$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

36. $$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

En los Problemas 37-46, se consideran ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{siendo} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son complejos conjugados. Analice la estabilidad del equilibrio (0, 0), y clasifique el equilibrio en espiral estable, espiral inestable o centro.

37. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

41. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

43. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

44. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

En los Problemas 47-56, se consideran ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{siendo} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Analice la estabilidad del equilibrio (0, 0)*, y clasifique dicho equilibrio.*

47. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

49. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

52. $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

53. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

54. $A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

55. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

56. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

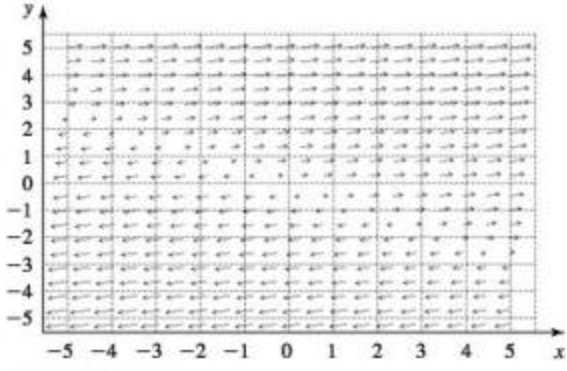
57. El siguiente sistema tiene dos autovalores reales distintos, pero uno de ellos es igual a cero:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \tag{11.36}$$

(a) Calcule los dos autovalores y sus autovectores asociados.

(b) Utilice la solución general (11.26) para calcular $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

(c) El campo direccional se muestra en la Figura 11.31. Dibuje las rectas correspondientes a los autovectores. Calcule dx_2/dx_1 y concluya que todos los vectores direccionales son paralelos a la recta en la dirección del autovector correspondiente al autovalor distinto de cero. Explique con palabras cómo se comportan las soluciones que empiezan en puntos distintos.



▲ **Figura 11.31**

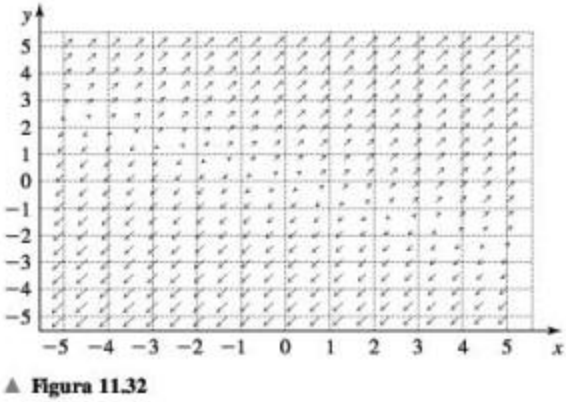
58. El siguiente sistema tiene dos autovalores reales distintos, pero uno de ellos es igual a cero:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \tag{11.37}$$

(a) Calcule los dos autovalores y sus autovectores asociados.

(b) Utilice la solución general (11.26) para calcular $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

(c) El campo direccional se muestra en la Figura 11.32. Dibuje las rectas correspondientes a los autovectores. Calcule dx_2/dx_1 y concluya que todos los vectores direccionales son paralelos a la recta en la dirección del autovector correspondiente al autovalor distinto de cero. Explique con palabras cómo se comportan las soluciones que empiezan en puntos distintos.



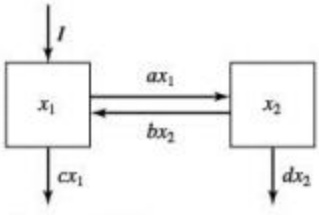
▲ **Figura 11.32**

11.2 SISTEMAS LINEALES: APLICACIONES

11.2.1 Modelos de compartimientos

Los modelos de compartimientos (que encontramos en el Capítulo 8) describen el flujo entre compartimientos, por ejemplo, el flujo de nutrientes entre lagos o el flujo de un trazador radioactivo entre las diferentes partes de un organismo. En las situaciones más simples, el modelo resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Consideraremos un modelo general con dos compartimientos que se puede describir mediante un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales. La Figura 11.33 muestra una descripción esquemática del modelo.



▲ **Figura 11.33**
Descripción esquemática de un modelo general de dos compartimientos

Denominaremos $x_1(t)$ a la cantidad de materia en el compartimiento 1 en el instante t, y $x_2(t)$ a la cantidad de materia en el compartimiento 2 en el instante t. Para tener en mente un ejemplo concreto, imaginemos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan la cantidad de agua que hay en los dos compartimientos. La dirección y la velocidad de los flujos de materia se muestran en la Figura 11.33. Puede verse que la materia entra al compartimiento 1 con velocidad constante I y sale del compartimiento 1 hacia el compartimiento 2 con velocidad ax_1, siendo x_1 la cantidad de materia en el compartimiento 1. La materia del compartimiento 1 se pierde con velocidad cx_1. Además, la materia fluye del compartimiento 2 al compartimiento 1 con una velocidad bx_2, siendo x_2 la cantidad de materia en el compartimiento 2. La materia del compartimiento 2 se pierde con velocidad dx_2. No hay entrada externa de materia al compartimiento 2. Las constantes I, a, b, c y d son no negativas.

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales describe la dinámica de $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= I - (a+c)x_1 + bx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= ax_1 - (b+d)x_2 \end{aligned} \tag{11.38}$$

Si $I > 0$, entonces (11.38) es un sistema de ecuaciones diferenciales lineal y no homogéneo con coeficientes constantes. La entrada constante I es a menudo importante en situaciones reales, como el flujo de nutrientes entre el suelo y las plantas cuando los nutrientes se añaden de forma constante. Sin embargo, en el estudio que sigue, haremos $I = 0$, ya que de esta forma se corresponde con la situación estudiada en la sección anterior (es decir, no se añade materia con el tiempo). No es difícil intuir cómo se comporta el sistema cuando $I = 0$: o bien se pierde materia continuamente, con lo que un compartimiento o los dos se vacían, o no se pierde materia, con lo que al menos uno de los compartimientos contendrá materia. Estudiaremos ambos casos.

Cuando $I = 0$, (11.38) se reduce al sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} -(a+c) & b \\ a & -(b+d) \end{bmatrix} \tag{11.39}$$

Para evitar situaciones triviales. Se supone que al menos uno de los parámetros a, b, c o d es positivo (de lo contrario, no habría movimiento de materia en el sistema).

Para obtener los autovalores de A, se calcula

$$\begin{aligned} &\det \begin{bmatrix} -(a+c) & b \\ a & -(b+d)-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (a+c+\lambda)(b+d+\lambda) - ab \\ &= \lambda^2 + (a+b+c+d)\lambda + (a+c)(b+d) - ab \\ &= \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \end{aligned}$$

siendo τ la traza de A y Δ su determinante:

$$\tau = -(a + b + c + d) < 0$$
$$\Delta = (a + c)(b + d) - ab = ad + bc + cd \geqslant 0$$

Los autovalores λ_1 y λ_2 son las soluciones de $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Para comprobar si los autovalores son reales, se simplifica la expresión bajo la raíz cuadrada,

$$\tau^2 - 4\Delta = (a + b + c + d)^2 - 4(a + c)(b + d) + 4ab$$
$$= [(a + b) - (c + d)]^2 + 4ab \geqslant 0$$

lo que implica que ambos autovalores son reales.

Como $\Delta \geqslant 0$ y $\tau^2 - 4\Delta \geqslant 0$, se deduce que $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \leqslant |\tau|$. Como además, $\tau < 0$, se deduce que ambos autovalores son menores o iguales que 0. Mientras $\Delta > 0$, ambos autovalores serán estrictamente negativos. Por tanto, (0, 0) será el único equilibrio y será un nodo estable.

$\Delta > 0$ Cuando $\Delta = ad + bc + dc > 0$, al menos alguno de los sumandos de $ad + bc + cd$ debe ser positivo. Es decir, o

$$a, d > 0 \quad \text{o} \quad b, c > 0 \quad \text{o} \quad c, d > 0$$

Para ver lo que esto significa, volvamos a la Figura 11.33. Cuando a y d son positivos, la materia del compartimiento 1 se puede mover al compartimiento 2 y la materia del compartimiento 2 puede dejar el sistema. Análogamente, cuando b y c son positivos, la materia de los dos compartimientos puede abandonar el sistema a través del compartimiento 1. Si c y d son positivos, la materia puede abandonar ambos compartimientos. Por tanto, en cualquiera de los tres casos, toda la materia terminará por salir del sistema, por lo que (0, 0) será un equilibrio estable.

$\Delta = 0$ Entonces

$$\lambda_1 = \tau = -(a + b + c + d) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0$$

como se supone que al menos alguno de los cuatro parámetros a, b, c o d es positivo, entonces $\lambda_1 < 0$. Por tanto, los autovalores son distintos. Para que se cumpla que $\Delta = 0$, se debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

$$c = a = 0 \quad \text{o} \quad d = b = 0 \quad \text{o} \quad c = d = 0$$

Si $c = a = 0$, la materia se atasca en el compartimiento 1. Si $d = b = 0$, la materia se atasca en el compartimiento 2. Si $c = d = 0$, la materia no abandona el sistema, y la cantidad de materia presente en el instante t será igual a la cantidad de materia presente en el instante 0. En otras palabras, la cantidad total de materia $x_1(t) + x_2(t)$ permanece constante (no depende de t), y por tanto se denomina **cantidad conservada**. Esto también se deduce de (11.38) ya que en este caso,

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + bx_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1 - bx_2$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = 0$$

Como

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2)$$

se deduce que $x_1(t) + x_2(t)$ es constante.

Solución del sistema cuando $c = d = 0$ Se puede escribir explícitamente la solución para calcular el estado de equilibrio. Para determinar la solución hay que calcular los autovectores correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2.

El autovector $\mathbf{u}$ correspondiente al autovalor $\lambda_1 = \tau$ cumple

$$\begin{bmatrix} -a & b \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -(a+b) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema se obtiene

$$\begin{aligned} -au_1 + bu_2 &= -au_1 - bu_1 \\ au_1 - bu_2 &= -au_2 - bu_2 \end{aligned}$$

que se simplifica a una sola ecuación, concretamente,

$$u_1 = -u_2$$

Si se hace $u_1 = 1$, entonces $u_2 = -1$, y el autovector correspondiente a $\lambda_1 = -(a+b)$ es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El autovector $\mathbf{v}$ correspondiente al autovalor cumple

$$\begin{bmatrix} -a & b \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que se simplifica a una sola ecuación, concretamente,

$$-av_1 + bv_2 = 0$$

Si se hace $v_1 = b$, entonces $v_2 = a$, y el autovector correspondiente a $\lambda_2 = 0$ es

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

La solución general cuando $\Delta = 0$ es por tanto

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-(a+b)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

y

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = c_2 \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

En el instante 0,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} c_1 + bc_2 &= x_1(0) \\ -c_1 + ac_2 &= x_2(0) \end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones, se cancela c_1 y se obtiene

$$(a + b)c_2 = x_1(0) + x_2(0)$$

o

$$c_2 = \frac{x_1(0) + x_2(0)}{a + b}$$

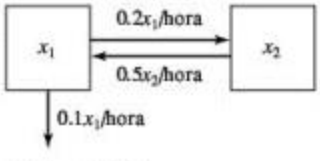
Recuérdese que la suma $x_1(t) + x_2(t)$ es constante para todo $t \geqslant 0$. Hacemos $x_1(0) + x_2(0) = K$ y entonces

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = K\frac{b}{a+b} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = K\frac{a}{a+b}$$

Esto significa que el compartimiento 1 contendrá una fracción $b/(a + b)$ de la cantidad total, y el compartimiento 2, una fracción $a/(a + b)$ de la cantidad total. Son las velocidades relativas con las que la materia entra a los respectivos compartimientos.

Ejemplo 1

Obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente al diagrama de compartimientos que se muestra en la Figura 11.34, y analice la estabilidad en el equilibrio (0, 0).



▲ **Figura 11.34**
El diagrama de compartimientos del Ejemplo 1

Solución

El modelo de compartimientos se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1}{dt} = -(0.1 + 0.2)x_1 + 0.5x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0.2x_1 - 0.5x_2$$

En notación matricial se expresa de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

Para estudiar la estabilidad de (0, 0), se calculan los autovalores de la matriz que describe el sistema. Es decir, se resuelve

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} -0.3-\lambda & 0.5 \\ 0.2 & -0.5-\lambda \end{bmatrix} &= (-0.3-\lambda)(-0.5-\lambda) - (0.2)(0.5) \\ &= (0.3)(0.5) + (0.3 + 0.5)\lambda + \lambda^2 - (0.2)(0.5) \\ &= \lambda^2 + 0.8\lambda + 0.05 = 0 \end{aligned}$$

Se obtiene

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.8 \pm \sqrt{0.64 - 0.2}}{2}$$

$$= \begin{cases} -0.4 + \frac{1}{2}\sqrt{0.44} \approx -0.068 \\ -0.4 - \frac{1}{2}\sqrt{0.44} \approx -0.732 \end{cases}$$

Los dos autovalores son negativos. Por tanto, el equilibrio (0, 0) es un nodo estable. ◀

Ejemplo 2 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = -0.7x_1 + 0.2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0.3x_1 - 0.2x_2$$

determine los parámetros del diagrama de compartimientos de la Figura 11.33.

Solución

El diagrama general de compartimientos que describe un sistema lineal con dos estados se muestra en la Figura 11.33. Comparando el diagrama con el sistema de ecuaciones, se obtiene que $I = 0$ y

$$\begin{aligned} a + c &= 0.7 \\ b &= 0.2 \\ a &= 0.3 \\ b + d &= 0.2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se concluye que

$$a = 0.3, \quad b = 0.2, \quad c = 0.4 \quad \text{y} \quad d = 0$$ ◀

Los modelos de compartimientos se utilizan en farmacología para estudiar cómo cambian las concentraciones de medicamentos en el cuerpo. En el modelo más simple, un medicamento se administra a una persona en una sola dosis. Estudiaremos este caso en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Se administra un medicamento a una persona en una sola dosis. Se supone que el medicamento no se acumula en los tejidos corporales, sino que se elimina por la orina. Se denomina $x_1(t)$ a la cantidad de medicamento presente en el cuerpo en el instante t, y $x_2(t)$ a la cantidad de medicamento presente en la orina en el instante t. Inicialmente

$$x_1(0) = K \quad \text{y} \quad x_2(0) = 0$$

El movimiento del medicamento entre el cuerpo y la orina se modela de la forma

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1(t) \tag{11.40}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1(t) \tag{11.41}$$

Es decir, la cantidad de medicamento en el cuerpo disminuye con la misma velocidad con que aumenta el medicamento en la orina. La Ecuación (11.40) se puede resolver directamente, y se obtiene

$$x_1(t) = c_1 e^{-at}$$

Como $x_1(0) = K = c_1$, resulta

$$x_1(t) = Ke^{-at}$$

Sustituyendo en (11.41), tenemos

$$\frac{dx_2}{dt} = aKe^{-at}$$

o

$$\int dx_2 = \int aKe^{-at}\,dt$$

Entonces,

$$x_2(t) = c_2 - Ke^{-at}$$

Con $x_2(0) = 0$, se obtiene que $0 = c_2 - K$. Por tanto,

$$x_2(t) = K(1 - e^{-at})$$

En esta aplicación, la constante a se denomina velocidad de excreción. El cálculo de la velocidad de excreción es importante para determinar cuánto tiempo permanecerá el medicamento en el cuerpo. Se puede determinar a dibujando $\ln(K - x_2(t))$ en función de t. Concretamente,

$$\begin{aligned}\ln(K - x_2(t)) &= \ln(Ke^{-at}) \\ &= \ln K - at\end{aligned}$$

Es decir, al dibujar $\ln(K - x_2(t))$ en función de t se obtiene una recta de pendiente $-a$, lo que permite determinar a. ◀

11.2.2 El oscilador armónico (opcional)

Consideremos una partícula que se mueve por el eje x. Se supone que la aceleración de la partícula es proporcional a su distancia al origen y que dicha aceleración apunta siempre hacia el origen. Si $x(t)$ es la posición de la partícula en el instante t, entonces la segunda derivada de $x(t)$ es la aceleración de la partícula, y se cumple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) \tag{11.42}$$

para algún $k > 0$. Esto es una **ecuación diferencial de segundo orden**, ya que la derivada de máximo orden que aparece en la ecuación es de orden 2. Utilizaremos este ejemplo para ilustrar cómo se puede transformar una ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello hacemos

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

Entonces

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

y por tanto

$$\frac{dv}{dt} = -kx(t)$$

Obtenemos así el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -kx$$

o

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

Si llamamos a la matriz A, entonces

$$\operatorname{tr} A = 0 \quad \text{y} \quad \det A = k > 0$$

lo que implica que los autovalores de A son complejos conjugados y su parte real es igual a cero. Se obtiene

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + k = 0$$

Por tanto,

$$\lambda_1 = i\sqrt{k} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{k}$$

Por tanto, es de esperar que el equilibrio (0, 0) sea espiral neutro (o centro) y que la solución muestre oscilaciones de amplitud constante con el tiempo.

Se puede resolver (11.42) directamente. Como

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(at) = a\cos(at)$$

$$\frac{d}{dt}\cos(at) = -a\operatorname{sen}(at)$$

se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{sen}(at) = -a^2\operatorname{sen}(at)$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(at) = -a^2\cos(at)$$

Si se hace $a = \sqrt{k}$, se puede ver que $\cos(\sqrt{k}t)$ y $\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$ resuelven la Ecuación (11.42). Utilizando el principio de superposición, se obtiene por tanto que la solución de (11.42) es

$$x(t) = c_1\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) + c_2\cos(\sqrt{k}t)$$

Para determinar las constantes c_1 y c_2 hay que fijar una condición inicial. Si se supone, por ejemplo, que

$$x(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(0) = v_0 \tag{11.43}$$

entonces

$$0 = c_2$$

Como $v(t) = dx/dt$, se obtiene

$$v(t) = c_1\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t) - c_2\sqrt{k}\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$$

y por tanto,

$$v(0) = c_1\sqrt{k} = v_0$$

lo que implica que

$$c_1 = \frac{v_0}{\sqrt{k}}$$

Por consiguiente, la solución de (11.42) que satisface la condición inicial (11.43) es

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\sqrt{k}t)$$

El oscilador armónico es muy importante en física. Modela, por ejemplo, el movimiento de un péndulo sin rozamiento cuando el desplazamiento desde el estado de reposo no es muy grande.

11.2.3. Problemas

(11.2.1)

En los Problemas 1-6, determine el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a cada modelo de compartimientos y analice la estabilidad del equilibrio (0, 0). *Los parámetros tienen el mismo significado que en la Figura 11.33.*

1. $a = 0.5,\ b = 0.1,\ c = 0.05,\ d = 0.02$
2. $a = 0.4,\ b = 1.2,\ c = 0.3,\ d = 0$
3. $a = 2.5,\ b = 0.7,\ c = 0,\ d = 0.1$
4. $a = 1.7,\ b = 0.6,\ c = 0.1,\ d = 0.3$
5. $a = 0,\ b = 0,\ c = 0.1,\ d = 0.3$
6. $a = 0,\ b = 0.1,\ c = 0,\ d = 0$

En los Problemas 7-12, calcule el correspondiente modelo de sistema de compartimientos para los sistemas de ecuaciones diferenciales dados.

7. $$\frac{dx_1}{dt} = -0.4x_1 + 0.3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 0.1x_1 - 0.5x_2$$

8. $$\frac{dx_1}{dt} = -0.4x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 0.2x_1 - 3x_2$$

9. $$\frac{dx_1}{dt} = -1.2x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 0.3x_1 - 0.2x_2$$

10. $$\frac{dx_1}{dt} = -0.2x_1 + 0.4x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 0.2x_1 - 0.4x_2$$

11. $$\frac{dx_1}{dt} = -0.2x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -0.3x_2$$

12. $$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 0.5x_2$$

13. Suponga que se administra un medicamento a una persona en una sola dosis, y que el medicamento no se acumula en los tejidos, sino que se elimina por la orina. Denomine $x_1(t)$ a la cantidad de medicamento en el cuerpo en el instante t, y $x_2(t)$ a la cantidad de medicamento en la orina en el instante t. Si $x_1(0) = 4$ mg y $x_2(0) = 0$, calcule $x_1(t)$ y $x_2(t)$ si

$$\frac{dx_1}{dt} = -0.3x_1(t)$$

14. Suponga que se administra un medicamento a una persona en una sola dosis, y que el medicamento no se acumula en los tejidos, sino que se elimina por la orina. Denomine $x_1(t)$ a la cantidad de medicamento en el cuerpo en el instante t, y $x_2(t)$ a la cantidad de medicamento en la orina en el instante t. Si $x_1(0) = 6$ mg y $x_2(0) = 0$, obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ si transcurren 20 minutos para que el nivel de medicamento en el cuerpo descienda hasta la mitad de su valor inicial.

15. Un modelo muy simple de dos compartimientos para la dinámica de los espacios vacíos en un bosque asume que dichos espacios vacíos son creados por perturbaciones (viento, fuego, etc.) y que los espacios vacíos se vuelven a transformar en bosque cuando crecen árboles en ellos. Sea $x_1(t)$ el área ocupada por los espacios vacíos y el área total ocupada por los árboles adultos. Se supone que la dinámica del sistema es

$$\frac{dx_1}{dt} = -0.2x_1 + 0.1x_2 \tag{11.44}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -0.2x_1 - 0.1x_2 \tag{11.45}$$

(a) Calcule el correspondiente diagrama de compartimientos.

(b) Demuestre que $x_1(t) + x_2(t)$ es constante. Denomine a dicha constante A y explique su significado. (*Sugerencia*: demuestre que $\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = 0$).

(c) Sea $x_1(0) + x_2(0) = 20$. Utilice la respuesta de (b) para explicar por qué esto implica que $x_1(t) + x_2(t) = 20$ para todo $t > 0$.

(d) Utilice el resultado de (c) para sustituir x_2 en (11.44) por $20 - x_1$ y demuestre que esto reduce el sistema de (11.44) y (11.45) a

$$\frac{dx_1}{dt} = 2 - 0.3x_1 \tag{11.46}$$

con $x_1(t) + x_2(t) = 20$ para todo $t \geqslant 0$.

(e) Resuelva el Sistema (11.44) y (11.45) y determine qué fracción de bosque es ocupada por árboles adultos cuando $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = 10$. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?

16. Un modelo simple de sucesión de bosques se puede formular como un sistema de tres compartimentos. Se supone que los espacios vacíos de un bosque se crean por perturbaciones y son colonizados por especies sucesoras tempranas, que son después sustituidas por especies sucesoras tardías. Sea $x_1(t)$ el área ocupada por los espacios vacíos en el instante t, $x_2(t)$ el área total ocupada por las especies sucesoras tempranas en el instante t y $x_3(t)$ el área total ocupada por las especies sucesoras tardías en el instante t. La dinámica del sistema es

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.2x_2 + x_3 - 2x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 0.7x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0.5x_2 - x_3$$

(a) Dibuje el correspondiente diagrama de compartimientos.

(b) Demuestre que

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = A$$

siendo A una constante, y explique el significado de A.

(11.2.2)

17. Resuelva

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x$$

con $x(0) = 0$ y $\frac{dx(0)}{dt} = 6$.

18. Resuelva

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -9x$$

con $x(0) = 0$ y $\frac{dx(0)}{dt} = 12$.

19. Transforme la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

20. Transforme la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}x$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

21. Transforme la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = x$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

22. Transforme la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 3x$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

11.3 SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES: TEORÍA

En esta sección presentaremos la teoría necesaria para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{11.47}$$

siendo $f_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Se supone que las funciones f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ no dependen explícitamente de t. Por tanto, el Sistema (11.47) se denomina autónomo. No supondremos ahora que las funciones f_i son lineales, como en la Sección 11.1. Utilizando notación vectorial el Sistema (11.47) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

siendo $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una función vectorial $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ cuyas componentes son $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ define un campo direccional, como en el caso lineal.

A menos que las funciones f_i sean lineales, en general no es posible calcular soluciones explícitas de estos sistemas de ecuaciones diferenciales. Si se desea resolver estos sistemas hay que recurrir a métodos numéricos. En vez de intentar calcular soluciones, nos centraremos en los puntos de equilibrio y su estabilidad, como en la Sección 8.2.

La definición de punto de equilibrio (dada en la Sección 8.2) se puede extender a sistemas de la forma (11.47). Se dice que un punto

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$$

es un punto de equilibrio (o simplemente un equilibrio) de (11.47) si

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

Un punto de equilibrio se denomina también **punto crítico**. Como en el caso lineal, es un punto del campo direccional en el que el vector direccional tiene longitud 0, lo que implica que si se arranca un sistema de ecuaciones diferenciales en un punto de equilibrio, permanecerá en él en todos los instantes posteriores.

Como en el caso lineal, la solución puede no volver al equilibrio tras una pequeña perturbación. Esto depende de la estabilidad del equilibrio. La teoría de estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos no lineales es paralela a la de la Sección 8.2. Existe un método analítico y otro gráfico que se reducen a la teoría presentada en la Sección 8.2 cuando sólo hay una ecuación. Limitaremos nuestro estudio a sistemas de ecuaciones con dos variables.

11.3.1 Método analítico

Una sola ecuación diferencial autónoma

Ejemplo 1 Calcule todos los equilibrios de

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) \tag{11.48}$$

y analice su estabilidad.

Solución

En la Sección 8.2 estudiamos la teoría de una sola ecuación diferencial autónoma. Para calcular los equilibrios se hace

$$x(1 - x) = 0$$

con lo que resulta

$$\hat{x}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \hat{x}_2 = 1$$

Para analizar su estabilidad, se linealiza la ecuación diferencial (11.48) alrededor de cada equilibrio y se calcula el autovalor correspondiente. Se hace

$$f(x) = x(1 - x)$$

Entonces

$$f'(x) = 1 - 2x$$

El autovalor asociado con el equilibrio $\hat{x}_1 = 0$ es

$$\lambda_1 = f'(0) = 1 > 0$$

lo que implica que $\hat{x}_1 = 0$ es inestable.

El autovalor asociado con el equilibrio $\hat{x}_2 = 1$ es

$$\lambda_2 = f'(1) = -1 < 0$$

lo que implica que $\hat{x}_2 = 1$ es localmente estable. ◀

El autovalor correspondiente a un equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{11.49}$$

es la pendiente de la función $f(x)$ en el valor del equilibrio. La razón de esto se estudia en detalle en la Sección 8.2, Repetiremos aquí el argumento básico. Supongamos que $\hat{x}$ es un equilibrio de (11.49) (es decir, $f(\hat{x}) = 0$). Si se perturba ligeramente (es decir, se obtiene $\hat{x} + z$ para $|z|$ pequeño), se puede ver lo que ocurre en $\hat{x} + z$ estudiando

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{x} + z) = \frac{dz}{dt}$$

y

$$f(\hat{x} + z) \approx f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(\hat{x} + z - \hat{x}) = f'(\hat{x})z$$

En el último paso se ha utilizado que $f(\hat{x}) = 0$. Se obtiene

$$\frac{dz}{dt} \approx f'(\hat{x})z$$

cuya solución aproximada es

$$z(t) \approx z(0)e^{\lambda t} \quad \text{con } \lambda = f'(\hat{x})$$

Por tanto, puede verse que si $f'(\hat{x}) < 0$, entonces $z(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y por tanto, $x(t) = \hat{x} + z(t) \to \hat{x}$ cuando $t \to \infty$. Es decir, la solución vuelve al equilibrio $\hat{x}$ tras una pequeña perturbación. En este caso, $\hat{x}$ es localmente estable. Si $f'(\hat{x}) > 0$, entonces $z(t)$ no tenderá a 0, lo que implica que $\hat{x}$ es inestable. Por tanto, la linealización de $f(x)$ nos indica si el equilibrio es localmente estable o inestable. Exactamente el mismo método se utiliza para sistemas de ecuaciones diferenciales.

Sistemas de dos ecuaciones diferenciales Se consideran sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \tag{11.50}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \tag{11.51}$$

o, utilizando notación vectorial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11.52}$$

siendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una función vectorial con $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$ con $f_i : (\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Un equilibrio o punto crítico, $\hat{\mathbf{x}}$, de (11.52) satisface

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

Supongamos que $\hat{\mathbf{x}}$ es un punto de equilibrio. Entonces, como en el caso de una sola ecuación no lineal, veremos lo que sucede tras una pequeña perturbación de $\hat{\mathbf{x}}$. Perturbamos $\hat{\mathbf{x}}$, es decir, vemos cómo cambia $\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{z}$ bajo la dinámica descrita por (11.52):

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}) = \frac{d}{dt}\mathbf{z} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z})$$

La linealización de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ alrededor de $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ es

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

donde se ha utilizado que $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. La matriz $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ es la matriz de Jacobi particularizada en $\hat{\mathbf{x}}$. Si se aproxima $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z})$ mediante su linealización $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$, entonces

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z} \tag{11.53}$$

es la aproximación lineal de la dinámica de la perturbación $\mathbf{z}$.

Tenemos ahora un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que es una buena aproximación, suponiendo que $\mathbf{z}$ es lo suficientemente próximo a $\mathbf{0}$. En la Sección 11.1 hemos aprendido a analizar sistemas lineales. Vimos que los autovalores de la matriz $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ nos permiten determinar la naturaleza del equilibrio. Será el método que usaremos aquí, pero resaltando que ahora es un análisis *local*, como en el caso de una sola ecuación diferencial, ya que sólo sabemos que la linealización (11.53) es una buena aproximación mientras estemos suficientemente cerca del punto alrededor del que se linealiza.

Volvamos a nuestro esquema de clasificación para el caso lineal,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

siendo $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ y A una matriz 2×2. Sean

$$\Delta = \det A \quad \text{y} \quad \tau = \text{tr}A$$

Cuando se linealiza un sistema no lineal alrededor de un equilibrio, la matriz es la matriz de Jacobi evaluada en el equilibrio:

$$A = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$$

Excluiremos los siguientes casos: (i) $\Delta = 0$, (ii) $\tau = 0$ y $\Delta > 0$,y (iii) $\tau^2 = 4\Delta$. Concretamente, cuando $\Delta = 0$ al menos uno de los autovalores es igual a cero. Cuando $\tau = 0$ y $\Delta > 0$ los dos autovalores son imaginarios puros. Cuando $\tau^2 = 4\Delta$, los dos autovalores son iguales. Excepto en esos tres casos, se puede utilizar el mismo esquema de clasificación que en el caso lineal (Figura 11.35).

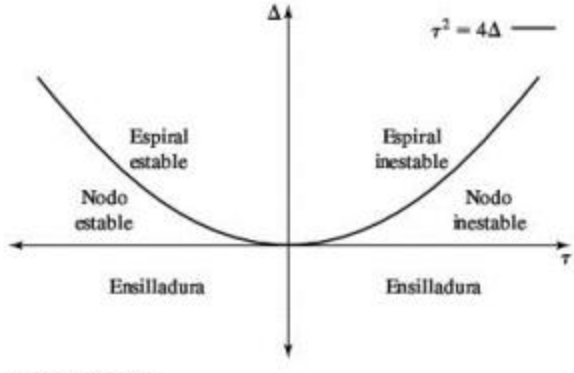
Esto es posible porque el campo direccional linealizado y el campo direccional original son muy similares cerca de un punto de equilibrio (después de todo, ésa es la idea que fundamenta la linealización). Este resultado se conoce como teorema de Hartman-Grobman, que dice que mientras $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ no tenga autovalores cero o imaginarios puros, entonces los campos direccionales original y linealizado son muy similares cerca del equilibrio. Es decir,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

se comportan de forma muy similar para $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{z}$ cercano a $\mathbf{0}$.

Tenemos entonces el mismo esquema de clasificación que en el caso lineal.

- El equilibrio $\hat{\mathbf{x}}$ es un nodo si los dos autovalores de $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ son reales y distintos, distintos de cero y tienen el mismo signo. El nodo es localmente estable si los autovalores son negativos, e inestable si los autovalores son positivos.
- El equilibrio $\hat{\mathbf{x}}$ es un punto de ensilladura si los autovalores son reales y distintos de cero pero tienen signos opuestos. Un punto de ensilladura es inestable.
- El equilibrio $\hat{\mathbf{x}}$ es una espiral si los dos autovalores son complejos conjugados con partes reales distintas de cero. La espiral es localmente estable si las partes reales de los autovalores son negativas, y es inestable si las partes reales de los autovalores son positivas.



▲ **Figura 11.35**
Comportamiento de estabilidad de un sistema de dos ecuaciones autónomas

Cuando los dos autovalores son imaginarios puros, no se puede determinar la estabilidad mediante linealización.

Ejemplo 2 Considere

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 \end{aligned} \tag{11.54}$$

(a) Calcule todos los equilibrios de (11.54) y **(b)** analice su estabilidad.

Solución

(a) Para calcular los equilibrios, se iguala a cero el miembro derecho de (11.54):

$$x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 = 0 \tag{11.55}$$

$$4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 = 0 \tag{11.56}$$

Sacando factor común x_1 en la primera ecuación y x_2 en la segunda resulta

$$x_1(1 - 2x_1 - 2x_2) = 0 \quad \text{y} \quad x_2(4 - 5x_2 - 7x_1) = 0$$

Es decir,

$$x_1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x_1 + 2x_2 = 1$$

y

$$x_2 = 0 \quad \text{o} \quad 7x_1 + 5x_2 = 4$$

Combinando las diferentes soluciones, aparecen cuatro casos

(i) $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

(ii) $x_1 = 0$ y $7x_1 + 5x_2 = 4$

(iii) $x_2 = 0$ y $2x_1 + 2x_2 = 1$

(iv) $2x_1 + 2x_2 = 1$ y $7x_1 + 5x_2 = 4$

Calcularemos primero los equilibrios en estos cuatro casos.

Caso (i): No hay nada que calcular. El equilibrio es $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$.

Caso (ii): Para calcular el equilibrio, hay que resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

Por tanto, el equilibrio es $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(0, \frac{4}{5}\right)$.

Caso (iii): Para calcular el equilibrio, hay que resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el equilibrio es $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\frac{1}{2}, 0)$.

Caso (iv): Para calcular el equilibrio, hay que resolver el sistema

$$2x_1 + 2x_2 = 1$$
$$7x_1 + 5x_2 = 4$$

Utilizaremos el método de eliminación estándar. Multiplicando la primera ecuación por 7, la segunda por 2 y restando la segunda ecuación de la primera, el sistema equivalente es

$$2x_1 + 2x_2 = 1$$
$$4x_2 = -1$$

cuyas soluciones son

$$x_2 = -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{1}{2} - x_2 = \frac{3}{4}$$

Por tanto, el equilibrio es $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$.

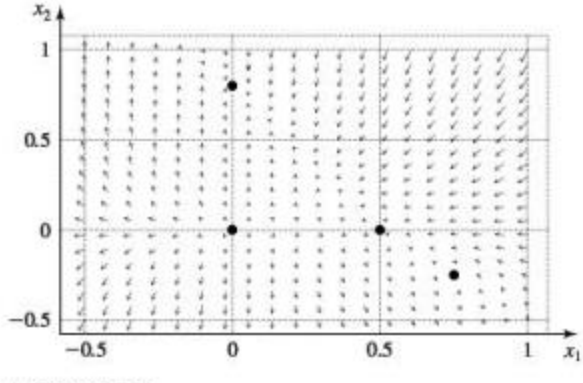
La Figura 11.36 ilustra todos los equilibrios del campo direccional (11.54). Los equilibrios se indican con puntos.

(b) Para analizar la estabilidad de los equilibrios, se calcula la matriz de Jacobi

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Con

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 \quad \text{y} \quad f_2(x_1, x_2) = 4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2$$



▲ **Figura 11.36**
El campo direccional de (11.54) junto con sus equilibrios

se obtiene

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 - 4x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -7x_2 & 4 - 10x_2 - 7x_1 \end{bmatrix}$$

Distinguiremos los cuatro casos y analizaremos los equilibrios.

Caso (i): El equilibrio es el punto (0, 0). La matriz de Jacobi en (0, 0) es

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Como la matriz está en forma diagonal, los autovalores son los elementos de su diagonal, por lo que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Como los dos autovalores son positivos, el equilibrio es inestable. Utilizando la misma clasificación que en el caso lineal, diremos que (0, 0) es un nodo inestable.

La Figura 11.37 muestra la linealización del campo direccional alrededor del (0, 0). La figura muestra el campo direccional de

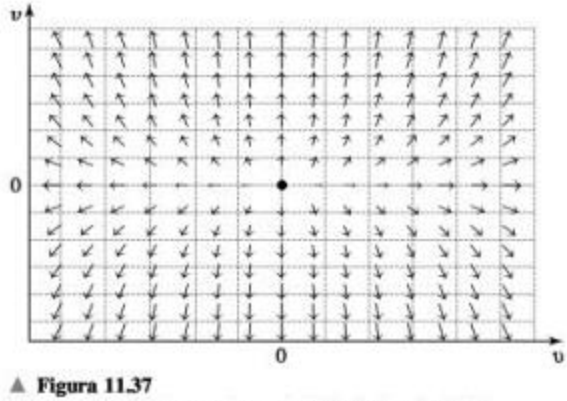
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

La Figura 11.37 confirma que (0, 0) es un nodo inestable (o fuente). Es interesante comparar la Figura 11.37 con el campo direccional de (11.54) que se muestra en la Figura 11.36. Se observa que el campo direccional linealizado y el campo direccional de (11.54) cerca del equilibrio (0, 0) son muy similares.

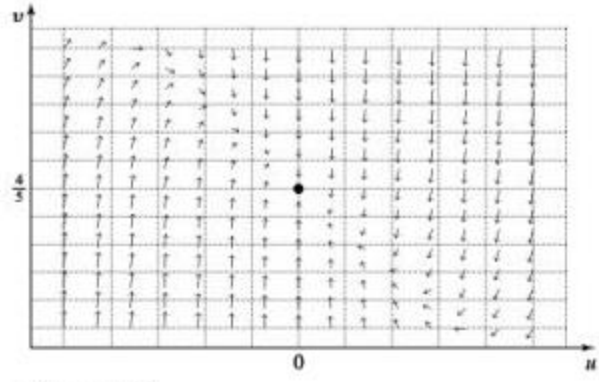
Caso (ii): El equilibrio es el punto $(0, \frac{4}{5})$. La matriz de Jacobi en ese punto es

$$D\mathbf{f}\left(0, \frac{4}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{8}{5} & 0 \\ -\frac{28}{5} & 4 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{28}{5} & -4 \end{bmatrix}$$

Como esta matriz es triangular inferior, los autovalores son simplemente los elementos de la diagonal, por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = -\frac{3}{5}$ y $\lambda_2 = -4$. Como los dos autovalores son negativos, $(0, \frac{4}{5})$ es localmente estable. Utilizando la misma clasificación que en el caso lineal, diremos que $(0, \frac{4}{5})$ es un nodo estable.



▲ **Figura 11.37**
Linealización del campo direccional alrededor de (0, 0)



▲ **Figura 11.38**
Linealización del campo direccional alrededor de $(0, \frac{4}{5})$

La Figura 11.38 muestra la linealización del campo direccional alrededor de $(0, \frac{4}{5})$. Esta Figura confirma que $(0, \frac{4}{5})$ es un nodo estable (o sumidero). Es interesante comparar la Figura 11.38 con el campo direccional de (11.54) que se muestra en la Figura 11.36. Se observa que el campo direccional linealizado y el campo direccional de (11.54) cerca del equilibrio $(0, \frac{4}{5})$ son muy similares.

Caso (iii): El equilibrio es el punto $(\frac{1}{2}, 0)$. La matriz de Jacobi en ese punto es

$$D\mathbf{f}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 0 & 4-\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

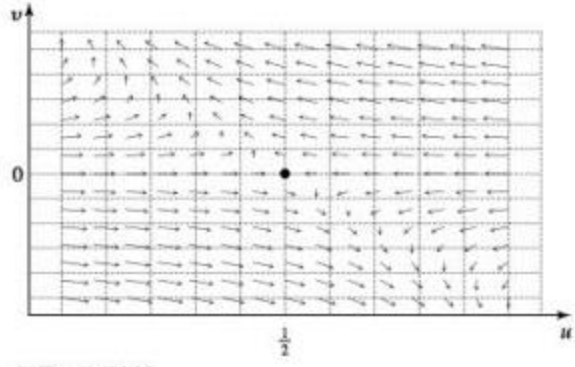
Como esta matriz es triangular superior, los autovalores son simplemente los elementos de la diagonal, por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Como un autovalor es positivo y el otro es negativo, $(\frac{1}{2}, 0)$ es inestable. Utilizando la misma clasificación que en el caso lineal, diremos $(\frac{1}{2}, 0)$ que es un punto de ensilladura.

La Figura 11.39 muestra la linealización del campo direccional alrededor de $(\frac{1}{2}, 0)$. Esta figura confirma que $(\frac{1}{2}, 0)$ es un punto de ensilladura. Es interesante comparar la Figura 11.39 con el campo direccional de (11.54) que se muestra en la Figura 11.36. Se observa que el campo direccional linealizado y el campo direccional de (11.54) cerca del equilibrio $(\frac{1}{2}, 0)$ son muy similares.

Caso (iv): La matriz de Jacobi en el equilibrio $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ es

$$D\mathbf{f}\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1-3+\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} & 4+\frac{10}{4}-\frac{21}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.39**
Linealización del campo direccional alrededor de $(\frac{1}{2}, 0)$

Para calcular los autovalores, hay que resolver

$$\det\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} & \frac{5}{4}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Calculando el determinante del miembro izquierdo y simplificando resulta

$$\left(-\frac{3}{2}-\lambda\right)\left(\frac{5}{4}-\lambda\right)+\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{4}\right)=0$$

$$\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda-\frac{5}{4}\lambda-\frac{15}{8}+\frac{21}{8}=0$$

$$\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda+\frac{3}{4}=0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtiene

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-3}}{2}$$

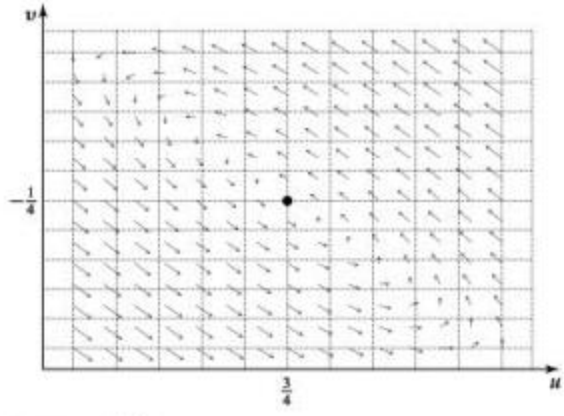
$$=-\frac{1}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{-47}=-\frac{1}{8}\pm\frac{1}{8}i\sqrt{47}$$

es decir,

$$\lambda_1=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\sqrt{47} \quad \text{y} \quad \lambda_2=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i\sqrt{47}$$

Los autovalores son complejos conjugados con partes reales negativas. Por tanto, $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ es localmente estable, y las soluciones se moverán en espiral hacia el equilibrio cuando se empieza cerca de dicho equilibrio.

La Figura 11.40 muestra la linealización del campo direccional alrededor de $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$. Esta figura confirma que $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ es un punto espiral estable. Es interesante comparar la Figura 11.40 con el campo direccional de (11.54) que se muestra en la Figura 11.36. Se observa que el campo direccional linealizado y el campo direccional de (11.54) cerca del equilibrio $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ son muy similares. ◀



▲ **Figura 11.40**
Linealización del campo direccional alrededor de $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$

11.3.2 Método gráfico para sistemas 2 × 2

En esta subsección presentaremos un método gráfico para sistemas de dos ecuaciones diferenciales autónomas. Sea el sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

que en forma vectorial es

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Las curvas

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

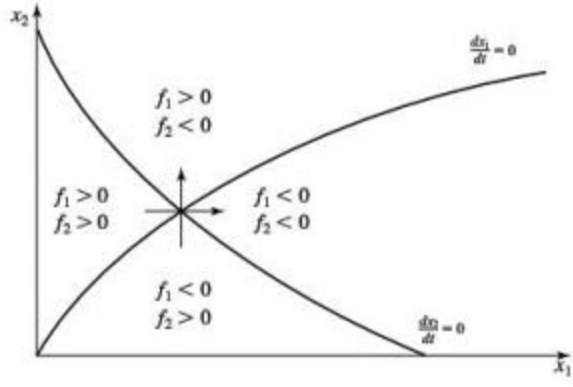
$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

se denominan **isoclinas cero**, y representan los puntos del plano $x_1 - x_2$ donde las velocidades de crecimiento de sus respectivas cantidades son iguales a cero. Esto se ilustra en la Figura 11.41 para una elección particular de las funciones f_1 y f_2. Supongamos que x_1 y x_2 son no negativos. Esto limita el estudio al primer cuadrante del plano $x_1 - x_2$. Las dos curvas de la Figura 11.41 dividen el primer cuadrante en cuatro regiones, y cada región se señala de acuerdo con el signo de dx_i/dt. Por supuesto, esto depende de las funciones $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ El etiquetado de las regiones de la Figura 11.41 debe considerarse un caso concreto para centrar la exposición que sigue.

El punto donde se cruzan las dos isoclinas cero de la Figura 11.41 es un punto de equilibrio o punto crítico, que denominaremos $\hat{\mathbf{x}}$. Se puede utilizar la gráfica para determinar el signo de los elementos de la matriz de Jacobi

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

siendo $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}})$. Concretamente, el elemento $a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ es el efecto de la variación de f_1 en la dirección de x_1 cuando se mantiene fija x_2. Para determinar el



▲ **Figura 11.41**
Método gráfico: isoclinas cero

signo de a_{11}, se sigue la flecha horizontal de la Figura 11.41. La flecha va desde la región donde f_1 es positiva hasta la región donde f_1 es negativa, lo que implica que f_1 es decreciente y por tanto $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{\mathbf{x}}) = a_{11} < 0$. Por tanto, se concluye que el signo de a_{11} en $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ es negativo, lo que se indica en la matriz de Jacobi colocando un signo menos en el lugar de a_{11}:

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} - & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Seguidamente determinaremos el signo de $a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{\mathbf{x}})$. Esta vez deseamos saber cómo cambia f_1 en el equilibrio $\hat{\mathbf{x}}$ cuando nos movemos en la dirección de x_2 cuando se mantiene fija x_1. Es la dirección de la flecha vertical que pasa por el punto de equilibrio. Como la flecha va desde la región donde f_1 es negativa hasta la región donde f_1 es positiva, entonces f_1 crece en la dirección de x_2 y por tanto $a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{\mathbf{x}}) > 0$. Los signos de los otros dos elementos se calculan de forma similar, y se obtiene

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

Por tanto, la traza de $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ es negativa y su determinante es positivo. Utilizando el criterio establecido en la Sección 9.3.2, se concluye que ambos autovalores deben tener partes reales negativas y por tanto que el equilibrio es localmente estable.

Ejemplo 3 Utilice el método gráfico para analizar el equilibrio (3, 2) de

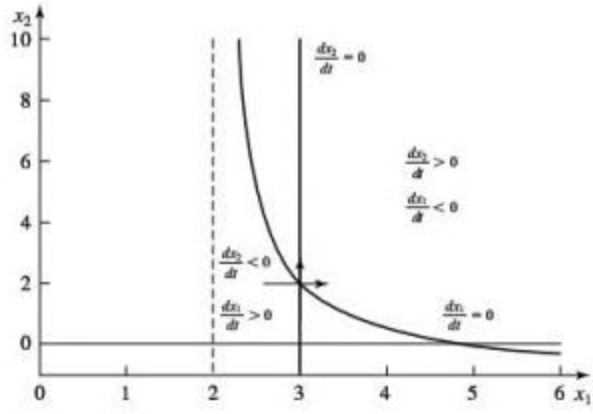
$$\frac{dx_1}{dt} = 5 - x_1 - x_1x_2 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 - 3x_2$$

Solución

En primer lugar, nótese que (3, 2) es de hecho un equilibrio de este sistema. Las isoclinas cero satisfacen

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \text{que se cumple para } x_2 = \frac{5 - x_1}{x_1 - 2}$$



▲ **Figura 11.42**
Las isoclinas cero en el plano $x_1 - x_2$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \text{que se cumple para } x_2 = 0 \text{ o } x_1 = 3$$

Las isoclinas cero en el plano $x_1 - x_2$ se muestran en la Figura 11.42. El equilibrio (3, 2) es el punto de intersección de las isoclinas cero $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{5 - x_1}{x_1 - 2}$. Los signos de $\frac{dx_1}{dt}$ y $\frac{dx_2}{dt}$ y se indican en la Figura 11.42. Planteamos que

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} - & - \\ + & 0 \end{bmatrix}$$

He aquí el motivo: para calcular el signo de $a_{11} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ es necesario determinar cómo varía dx_1/dt cuando se cruza la isoclina cero de x_1 en la dirección de x_1. Puede verse en la gráfica que dx_1/dt cambia de positiva a negativa cuando se sigue la dirección de la flecha horizontal que cruza la isoclina cero de x_1. Por tanto, a_{11} es negativo. Para ver por qué $a_{22} = 0$, se sigue la flecha vertical en la dirección de x_2. Como esa flecha está en la isoclina cero de x_2, el signo de dx_2/dt no cambia cuando se cruza el equilibrio en la dirección de x_2. Por tanto, $a_{22} = 0$. Los signos de a_{12} y a_{21} salen de observar que si se cruza la isoclina cero de x_1 en la dirección de x_2 (la flecha vertical), entonces dx_1/dt cambia de positiva a negativa, lo que implica que $a_{12} < 0$. Si se cruza la isoclina cero de x_2 en la dirección de x_1 (la flecha horizontal) podemos ver que dx_2/dt cambia de negativa a positiva, lo que implica que $a_{21} > 0$.

Para determinar la estabilidad de $\hat{\mathbf{x}}$, hay que observar la traza y el determinante. Como la traza es negativa y el determinante es positivo, se concluye que el equilibrio es localmente estable. ◀

Este método gráfico simple no siempre proporciona los signos de las partes reales de los autovalores, como se ilustra en el siguiente ejemplo. Supongamos que se obtiene una matriz de Jacobi cuyos elementos tienen los siguientes signos

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

La traza puede ser positiva o negativa, y el determinante será negativo. Por tanto, no se puede concluir nada sobre los autovalores. En este caso habría que calcular los autovalores, o bien la traza y el determinante.

11.3.3. Problemas

(11.3.1)

En los Problemas 1-4, el punto (0, 0) es siempre un equilibrio. Estudie su estabilidad utilizando el método analítico.

1.
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + x_1x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2$$

2.
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 + x_1^2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1^2$$

3.
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

4.
$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1x_2 - x_1 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2^2 - x_1$$

En los Problemas 5-10, calcule los equilibrios de cada sistema de ecuaciones diferenciales, y utilice el método analítico para determinar la estabilidad de cada equilibrio.

5.
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_1(1 - x_1)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 5x_2(1 - x_1 - x_2)$$

6.
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_1(1 - x_1 - x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 5x_2(1 - x_1 - x_2)$$

7.
$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1(1 - x_1) - 2x_1x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(2 - x_2) - x_2$$

8.
$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1(5 - x_1 - x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_2(7 - 3x_1 - x_2)$$

9.
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 - x_2$$

10.
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1x_2 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

(11.3.2)

11. Suponga que
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(10 - 2x_1 - x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(10 - x_1 - 2x_2)$$

(a) Dibuje las isoclinas cero.

(b) Demuestre que $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ es un equilibrio y determine su estabilidad utilizando el método analítico.

12. Suponga que
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(10 - x_1 - 2x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(10 - 2x_1 - x_2)$$

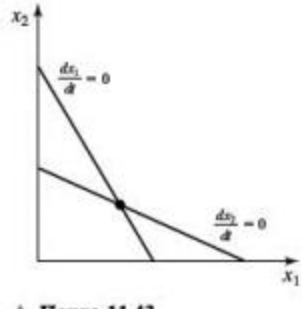
(a) Dibuje las isoclinas cero.

(b) Demuestre que $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ es un equilibrio y determine su estabilidad utilizando el método analítico.

En los Problemas 13-18, utilice el método gráfico para sistemas 2 × 2 para calcular los signos de los elementos de la matriz de Jacobi en el equilibrio indicado. Si es posible, determine su estabilidad. Suponga que el sistema de ecuaciones diferenciales es
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

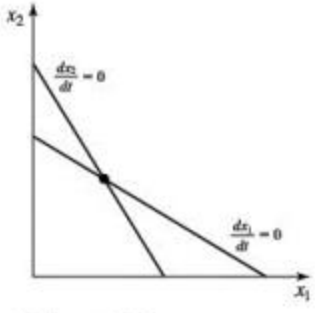
Además, suponga que x_1 y x_2 son no negativos. En cada problema se dibujan las isoclinas cero y el equilibrio que se desea estudiar se señala con un punto. Suponga que x_1 y x_2 crecen cerca del origen y que f_1 y f_2 cambian de signo cuando se cruzan las isoclinas cero.

13. *Véase* la Figura 11.43.



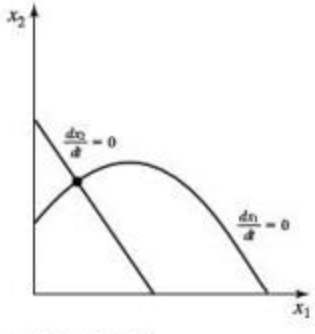
▲ **Figura 11.43**

14. *Véase* la Figura 11.44.



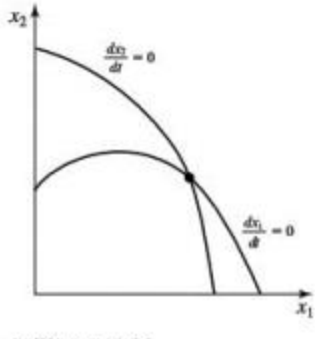
▲ **Figura 11.44**

15. *Véase* la Figura 11.45.



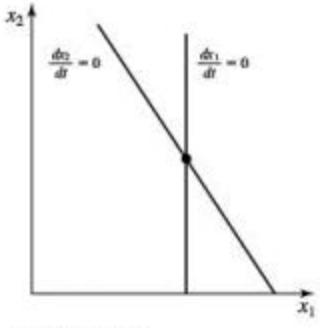
▲ **Figura 11.45**

16. *Véase* la Figura 11.46.



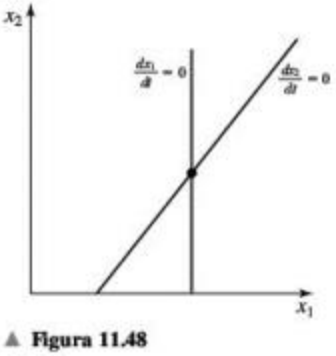
▲ **Figura 11.46**

17. *Véase* la Figura 11.47.



▲ **Figura 11.47**

18. *Véase* la Figura 11.48.



▲ **Figura 11.48**

19. Sea

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(2 - x_1) - x_1x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 - x_2$$

(a) Dibuje las isoclinas cero.

(b) Demuestre que (1, 1) es un equilibrio. Utilice el método gráfico para determinar su estabilidad.

20. Sea

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(2 - x_1^2) - x_1x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 - x_2$$

(a) Dibuje las isoclinas cero.

(b) Demuestre que (1, 1) es un equilibrio. Utilice el método gráfico para determinar su estabilidad.

11.4 SISTEMAS NO LINEALES: APLICACIONES

11.4.1 El modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra

Imaginemos dos especies de plantas que crecen juntas en la misma parcela, utilizando recursos similares (concretamente, luz, agua y nutrientes). El uso de esos

recursos por un individuo reduce su disponibilidad para los otros individuos. Este tipo de interacción entre individuos se denomina **competencia**. La **competencia intraespecífica** se produce entre individuos de la misma especie, y la **competencia interespecífica**, entre individuos de distintas especies. La competencia puede producir una reducción de la fecundidad o de la posibilidad de supervivencia. Los efectos de la competencia son más acusados cuando el número de competidores es grande.

En esta sección estudiaremos del modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra, que incorpora efectos de la competencia dependientes de la densidad en la forma que se ha comentado anteriormente. Es una extensión de la ecuación logística al caso de dos especies. Para describir el modelo, denominaremos $N_1(t)$ al tamaño de la población de la especie 1 en el instante t, y $N_2(t)$ al tamaño de la población de la especie 2 en el instante t. Cuando una de las especies está ausente, la otra crece de acuerdo a la ecuación logística. Las capacidades de alojamiento se denominan respectivamente K_1 y K_2 y las velocidades intrínsecas de crecimiento, r_1 y r_2. Supondremos que K_1, K_2, r_1 y r_2 son positivas. Además, las dos especies pueden tener efectos inhibitorios entre sí. El efecto de la especie 1 sobre la especie 2 se mide mediante el **coeficiente de competencia** α_{21}, y el efecto de la especie 2 sobre la especie 1 mediante el coeficiente de competencia α_{12}. El modelo de Lotka-Volterra de competencia interespecífica se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12}\frac{N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21}\frac{N_1}{K_2}\right) \end{aligned} \tag{11.57}$$

Veamos primero la primera ecuación. Si $N_2 = 0$, la primera ecuación se reduce a la ecuación logística $dN_1/dt = r_1K_1(1 - N_1/K_1)$, como ya se ha mencionado. Para entender el significado preciso del coeficiente de competencia α_{12}, obsérvese que N_2 individuos de la especie 2 tienen el mismo efecto sobre la especie 1 que $\alpha_{12}N_2$ individuos de la especie 1. Por tanto, el término $\alpha_{12}N_2$ convierte los N_2 individuos de la especie 2 en « N_1 equivalentes». Por ejemplo, sea y $\alpha_{12} = 0.2$ y $N_2 = 20$. Entonces, el efecto de 20 individuos de la especie 2 sobre la especie 1 es equivalente al efecto de $(0.2)(20) = 4$ individuos de la especie 1 sobre la especie 1, ya que en ambos casos se reduce la velocidad de crecimiento en la misma cantidad. El coeficiente α_{21} de la segunda ecuación tiene una interpretación similar.

Este modelo utiliza una formulación de la competencia muy simplista. Las interacciones de competencia reales son mucho más complejas. No obstante, sirve para un importante propósito. Debido a su forma simple, nos permite estudiar las consecuencias de la competencia, lo que nos puede dar un valioso conocimiento para situaciones más complejas.

Analizaremos el modelo utilizando isoclinas cero y autovalores.

Isoclinas cero El primer paso es obtener las ecuaciones de las isoclinas cero. Para calcular las isoclinas cero de la especie 1 se hace

$$r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12}\frac{N_2}{K_1}\right) = 0$$

Las soluciones son $N_1 = 0$ o

$$N_2 = \frac{K_1}{\alpha_{12}} - \frac{1}{\alpha_{12}} N_1 \tag{11.58}$$

Para calcular las isoclinas cero de la especie 2 se hace

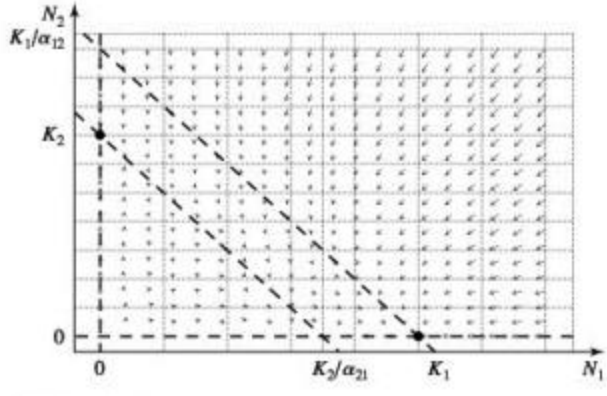
$$r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2}\right) = 0$$

Las soluciones son $N_2 = 0$ o

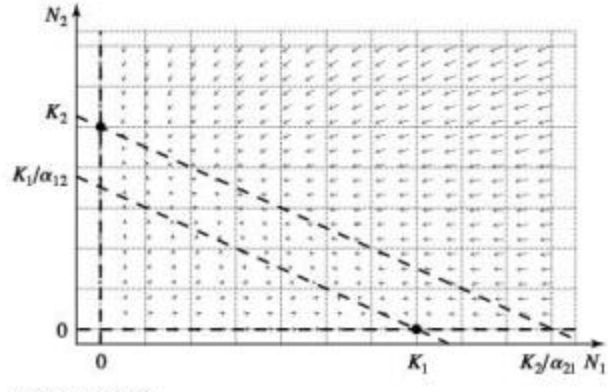
$$N_2 = K_2 - \alpha_{21} N_1 \tag{11.59}$$

La isoclina $N_i = 0$, $i = 1, 2$ corresponde al caso en que la especie i está ausente. Esto es biológicamente razonable, ya que los individuos de las especies no se crean espontáneamente. Una vez que una especie está ausente, permanecerá ausente.

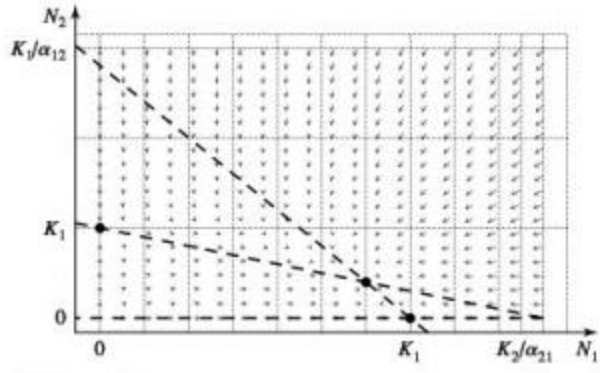
Las otras dos isoclinas, dadas por (11.58) y (11.59) son de particular interés porque nos dicen cuándo pueden coexistir de forma estable las dos especies. Ambas isoclinas son rectas en el plano $N_1 - N_2$, y se pueden disponer de cuatro formas, como se ilustra en las Figuras 11.49 a 11.52, junto con los correspondientes campos direccionales. Los puntos grandes que se muestran en cada figura son los equilibrios. Vemos que siempre existen los equilibrios y $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$, que son los equilibrios cuando sólo hay presente una especie. Se denominan equilibrios **monoculturales**. Además, hay dos casos donde existe un equilibrio con las dos especies presentes, que se denomina equilibrio no trivial. Estudiaremos ahora cada caso de forma separada.



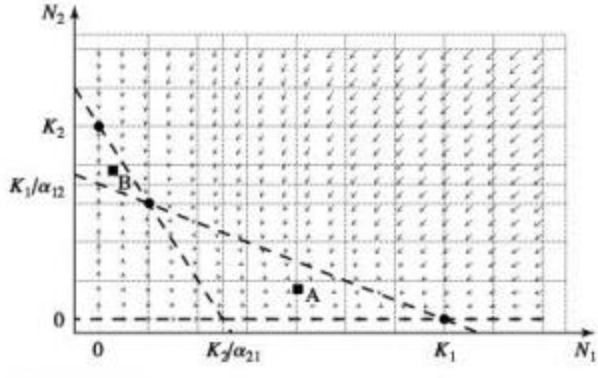
▲ **Figura 11.49**
Caso 1: La especie 1 desplaza a la especie 2



▲ **Figura 11.50**
Caso 2: La especie 2 desplaza a la especie 1



▲ **Figura 11.51**
Caso 3: Las especies 1 y 2 pueden coexistir



▲ **Figura 11.52**
Caso 4: Una de las especies desplaza a la otra, dependiendo de la condición inicial

Caso 1: $K_1 > \alpha_{12}K_2$ ***y*** $K_2 < \alpha_{21}K_1$. Observando el campo direccional de la Figura 11.49, se puede ver que la especie 1 conduce a la especie 2 a la extinción. Si ambas especies están inicialmente presentes, la abundancia de la especie 2 disminuye con el tiempo, hasta llegar finalmente a su extinción, mientras que la especie 1 alcanzará su capacidad de alojamiento K_1. La especie 1 desplaza a la especie 2, y este caso se denomina **competencia exclusiva**.

Observando las inecuaciones $K_1 > \alpha_{12}K_2$ y $K_2 < \alpha_{21}K_1$ se puede entender por qué la especie 1 es un competidor mejor que la especie 2. La capacidad de alojamiento K_1 es la abundancia de especie 1 que produce una velocidad de crecimiento per cápita de cero en dicha especie en ausencia de la especie 2. Concretamente, si $N_1 = K_1$ y $N_2 = 0$, entonces $\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = 0$. La capacidad de alojamiento K_2 tiene una interpretación similar. Para ver los efectos de la especie 2 sobre la especie 1, veamos el caso en el que la especie 2 está en su capacidad de alojamiento y la abundancia de la especie 1 es despreciable. En este caso, la velocidad de crecimiento per cápita de la especie 1 es aproximadamente igual a $r_1(1 - \alpha_{12}K_2/K_1)$, que es positiva ya que $\alpha_{12}K_2/K_2$ es menor que 1. Esto implica que la especie 2 no puede evitar que la especie 1 aumente su abundancia aunque inicialmente sea escasa. Se dice que la especie 1 invade a la especie 2. Por otra parte, como $K_2 < \alpha_{21}K_1$, la especie 2 no puede invadir a la especie 1. Concretamente, si se hace $N_1 = K_1$ y se supone que la abundancia de la especie 2 es despreciable, entonces la velocidad de crecimiento per cápi-

ta de la especie 2 es aproximadamente $r_2(1 - \alpha_{21}K_1/K_2)$, que es negativa. Se dice que la especie 1 es el competidor interespecífico fuerte y la especie 2 el débil.

Caso 2: $K_1 < \alpha_{12}K_2$ **y** $K_2 > \alpha_{21}K_1$**.** Este caso es semejante al caso 1 intercambiando los papeles de las especies 1 y 2. Es decir, la especie 2 es ahora el competidor interespecífico fuerte y la especie 1 el débil. Observando el campo direccional de la Figura 11.50 se puede ver que desplaza a la especie 1 llevándola a la extinción. El equilibrio $(K_1, 0)$ es por tanto inestable y el equilibrio $(0, K_2)$ es localmente estable.

Caso 3: $K_1 > \alpha_{12}K_2$ **y** $K_2 > \alpha_{21}K_1$**.** Las dos inecuaciones indican que cada especie puede invadir a la otra. Observando el campo direccional de la Figura 11.51, se ve que el equilibrio interior donde ambas especies están presentes es localmente estable. Se dice que la **coexistencia** es posible. Los dos equilibrios monoculturales $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ son inestables.

Caso 4: $K_1 < \alpha_{12}K_2$ **y** $K_2 < \alpha_{21}K_1$**.** En este caso, ninguna de las especies puede invadir a la otra. Observando el campo direccional de la Figura 11.52, se ve que el equilibrio interior es una ensilladura y por tanto inestable. El resultado de la competencia depende de las densidades iniciales. Por ejemplo, si las densidades iniciales N_1 y N_2 corresponden al punto A de la Figura 11.52, la especie 1 ganará y la especie 2 se extinguirá. Como otro ejemplo, si las densidades iniciales N_1 y N_2 corresponden al punto B de la Figura 11.52, la especie 2 ganará y la especie 1 se extinguirá. Como el resultado final depende de la abundancia inicial, este caso se denomina **control por fundadores**. Ambos equilibrios monoculturales $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ son localmente estables.

El análisis precedente indica que el modelo de Lotka-Volterra permite tres posibles resultados en la interacción de dos especies. Los casos 1 y 2 muestran la posibilidad de exclusión competitiva. El caso 3 muestra que la coexistencia es posible. El caso 4 muestra que en función de las abundancias iniciales, puede ganar una u otra especie, que es el caso de control por fundadores.

Aunque hemos dicho que el modelo (11.57) representa una situación altamente idealizada de la competencia, existe un famoso ejemplo que se ajusta muy bien a las ecuaciones. El ecólogo ruso G. F. Gause (1934) estudió la competencia entre especies del protozoo *Paramecium*. Cuando se hacían crecer juntos *Paramecium aurelia* y *P. caudatum*, *P. aurelia* excluía competitivamente a *P. caudatum*. Cuando se hacían crecer juntos *P. caudatum* y *P. bursaria*, coexistían de forma estable. Las curvas de solución de (11.57) se ajustaron a los dos conjuntos de datos estimando los parámetros relevantes de (11.57), y se obtuvo un ajuste excelente.

A continuación analizaremos (11.57) utilizando autovalores.

Autovalores Determinaremos primero todos los posibles equilibrios. Haciendo $dN_1/dt = 0$ se obtiene

$$N_1 = 0 \quad \text{o} \quad N_1 + \alpha_{12}N_2 = K_1$$

Haciendo $dN_2/dt = 0$ se obtiene

$$N_2 = 0 \quad \text{o} \quad \alpha_{21}N_1 + N_2 = K_2$$

Existen cuatro posibles combinaciones:

1. El equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (0, 0)$ corresponde al caso en el que ambas especies están ausentes, y se denomina equilibrio trivial.
2. El equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (K_1, 0)$ corresponde al caso en el que la especie 2 está ausente y la especie 1 alcanza su capacidad de alojamiento K_1.

3. El equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (0, K_2)$ corresponde al caso en el que la especie 1 está ausente y la especie 2 alcanza su capacidad de alojamiento K_2.
4. El cuarto equilibrio se obtiene resolviendo simultáneamente

$$N_1 + \alpha_{12}N_2 = K_1$$
$$\alpha_{21}N_1 + N_2 = K_2$$

e imponiendo que las dos soluciones sean positivas.

Para analizar la estabilidad de esos equilibrios, hay que calcular la matriz de Jacobi asociada a (11.57). Se obtiene

$$D\mathbf{f}(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} r_1 - 2\dfrac{r_1}{K_1}N_1 - \dfrac{r_1\alpha_{12}}{K_1} & -\dfrac{r_1\alpha_{12}}{K_1}N_1 \\ -\dfrac{r_2\alpha_{21}}{K_2}N_2 & r_2 - 2\dfrac{r_2}{K_2}N_2 - \dfrac{r_2\alpha_{21}}{K_2}N_1 \end{bmatrix}$$

Consideraremos separadamente cada equilibrio.

1. Evaluando la matriz de Jacobi en el equilibrio trivial $(\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (0, 0)$, se obtiene

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

Que es una matriz diagonal. Los autovalores son por tanto

$$\lambda_1 = r_1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = r_2$$

Como $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, el equilibrio $(0, 0)$ es inestable.

2. Evaluando la matriz de Jacobi en el equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (K_1, 0)$, se obtiene

$$D\mathbf{f}(K_1, 0) = \begin{bmatrix} -r_1 & -r_1\alpha_{12} \\ 0 & r_2\left(1 - \alpha_{21}\dfrac{K_1}{K_2}\right) \end{bmatrix}$$

Como $D\mathbf{f}(K_1, 0)$ es una matriz triangular superior, se obtienen inmediatamente sus autovalores, que son

$$\lambda_1 = -r_1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = r_2\left(1 - \alpha_{21}\frac{K_1}{K_2}\right)$$

Como $r_1 > 0$, entonces $\lambda_1 < 0$. El autovalor $\lambda_2 < 0$ es menor que cero cuando $K_2 < \alpha_{21}K_1$. Por tanto, el equilibrio

$$(K_1, 0) \text{ es } \begin{cases} \text{localmente estable} & \text{para } K_2 < \alpha_{21}K_1 \\ \text{inestable} & \text{para } K_2 > \alpha_{21}K_1 \end{cases}$$

3. Evaluando la matriz de Jacobi en el equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2) = (0, K_2)$, se obtiene

$$D\mathbf{f}(0, K_2) = \begin{bmatrix} r_1\left(1 - \alpha_{12}\dfrac{K_2}{K_1}\right) & 0 \\ -r_2\alpha_{21} & -r_2 \end{bmatrix}$$

Como $D\mathbf{f}(0, K_2)$ es una matriz triangular inferior, se obtienen inmediatamente sus autovalores, que son

$$\lambda_1 = r_1\left(1 - \alpha_{12}\frac{K_2}{K_1}\right) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -r_2$$

Como $r_2 > 0$, entonces $\lambda_2 < 0$. El autovalor λ_1 es menor que cero cuando $K_1 < \alpha_{12}K_2$. Por tanto, el equilibrio

$$(0, K_2 \text{ es } \begin{cases} \text{localmente estable} & \text{para } K_1 < \alpha_{12}K_2 \\ \text{inestable} & \text{para } K_1 > \alpha_{12}K_2 \end{cases}$$

4. Hemos dicho que el cuarto equilibrio se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones

$$N_1 + \alpha_{12}N_2 = K_1$$
$$\alpha_{21}N_1 + N_2 = K_2$$

Utilizando el método de eliminación estándar, se obtiene

$$N_1 + \alpha_{12}N_2 = K_1$$
$$(\alpha_{21}\alpha_{12} - 1)N_2 = \alpha_{21}K_1 - K_2$$

y por tanto,

$$\hat{N}_2 = \frac{\alpha_{21}K_1 - K_2}{\alpha_{21}\alpha_{12} - 1}$$

y

$$\hat{N}_1 = K_1 - \alpha_{12}\frac{\alpha_{21}K_1 - K_2}{\alpha_{21}\alpha_{12} - 1} = \frac{\alpha_{12}K_2 - K_1}{\alpha_{21}\alpha_{12} - 1}$$

Se requiere que $\hat{N}_1$ y $\hat{N}_2$ sean positivos (ya que representan densidades de población). Es decir, se requiere que

$$\frac{\alpha_{21}K_1 - K_2}{\alpha_{21}\alpha_{12} - 1} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\alpha_{12}K_2 - K_1}{\alpha_{21}\alpha_{12} - 1} > 0 \tag{11.60}$$

Si $\alpha_{21}\alpha_{12} > 1$, entonces (11.60) se reduce a

$$K_2 < \alpha_{21}K_1 \quad \text{y} \quad K_1 < \alpha_{12}K_2 \tag{11.61}$$

Si $\alpha_{21}\alpha_{12} < 1$, entonces (11.60) se reduce a

$$K_2 > \alpha_{21}K_1 \quad \text{y} \quad K_1 > \alpha_{12}K_2 \tag{11.62}$$

El cálculo de los autovalores asociados con este equilibrio no trivial es algebraicamente más complicado que si se usa la matriz de Jacobi asociada con el sistema de ecuaciones diferenciales original (11.57). Sin embargo, si se estudia directamente el efecto de las perturbaciones, al análisis se hace manejable. Para ver lo que queremos decir con esto, sean

$$z_1 = N_1 - \hat{N}_1 \quad \text{y} \quad z_2 = N_2 - \hat{N}_2$$

Entonces (z_1, z_2) representa la desviación del equilibrio. En primer lugar, obsérvese que

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dN_1}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{dN_2}{dt}$$

Sustituyendo N_1 por $z_1 + \hat{N}_1$ y N_2 por $z_2 + \hat{N}_2$ en (11.57) resulta

$$\frac{dz_1}{dt} = r_1(z_1 + \hat{N}_1)\left(1 - \frac{z_1 + \hat{N}_1}{K_1} - \alpha_{12}\frac{z_2 + \hat{N}_2}{K_1}\right)$$

$$= r_1(z_1 + \hat{N}_1)\left(\underbrace{1 - \frac{\hat{N}_1}{K_1} - \alpha_{12}\frac{\hat{N}_2}{K_1}}_{=0} - \frac{z_1}{K_1} - \alpha_{12}\frac{z_2}{K_1}\right)$$

y

$$\frac{dz_2}{dt} = r_2(z_2 + \hat{N}_2)\left(1 - \frac{z_2 + \hat{N}_2}{K_2} - \alpha_{21}\frac{z_1 + \hat{N}_1}{K_2}\right)$$

$$= r_2(z_2 + \hat{N}_2)\left(\underbrace{1 - \frac{\hat{N}_2}{K_2} - \alpha_{21}\frac{\hat{N}_1}{K_2}}_{=0} - \frac{z_2}{K_2} - \alpha_{21}\frac{z_1}{K_2}\right)$$

En vez de analizar la matriz de Jacobi asociada con (11.57) evaluada en el equilibrio no trivial $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ se estudia el equilibrio $(z_1, z_2) = (0, 0)$ en el nuevo sistema

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{r_1}{K_1}(z_1 + \hat{N}_1)(z_1 + \alpha_{12}z_2)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{r_2}{K_2}(z_2 + \hat{N}_2)(z_2 + \alpha_{21}z_1)$$

La matriz de Jacobi $J(z_1, z_2)$ es igual a

$$\begin{bmatrix} -\frac{r_1}{K_1}(z_1 + \alpha_{12}z_2) - \frac{r_1}{K_1}(z_1 + \hat{N}_1) & -\frac{r_1\alpha_{12}}{K_1}(z_1 + \hat{N}_1) \\ -\frac{r_2\alpha_{21}}{K_2}(z_2 + \hat{N}_2) & -\frac{r_2}{K_2}(z_2 + \alpha_{21}z_2) - \frac{r_2}{K_2}(z_2 + \hat{N}_2) \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz $J(z_1, z_2)$ en el punto $(z_1, z_2) = (0, 0)$ se obtiene

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{K_1}\hat{N}_1 & -\frac{r_1\alpha_{12}}{K_1}\hat{N}_1 \\ -\frac{r_2\alpha_{21}}{K_2}\hat{N}_2 & -\frac{r_2}{K_2}\hat{N}_2 \end{bmatrix}$$

Como

$$\operatorname{tr}(J(0, 0)) = -\frac{r_1\hat{N}_1}{K_1} - \frac{r_2N_2}{K_2}$$

$$\det(J(0, 0)) = \frac{r_1r_2}{K_1K_2}\hat{N}_1\hat{N}_2(1 - \alpha_{12}\alpha_{21})$$

El equilibrio no trivial $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ cumple que $\hat{N}_1 > 0$ y $\hat{N}_2 > 0$, lo que implica que $\operatorname{tr}(J(0, 0)) < 0$. Como

$$\det(J(0, 0)) > 0 \quad \text{cuando} \quad 1 - \alpha_{12}\alpha_{21} > 0$$

se obtiene que $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ es inestable si se cumple (11.61), y es localmente estable si se cumple (11.62).

Cuando se comparan las condiciones del caso 4 con las de los casos 2 y 3 se puede ver que equilibrio interior es localmente estable cuando los dos equilibrios límite (monoculturales) $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ son inestables, y que el equilibrio interior es inestable cuando los dos equilibrios frontera son localmente estables. Se puede demostrar también que los dos autovalores son siempre reales, por lo que no se producirán oscilaciones.

Comparando los dos métodos, vemos que se obtienen los mismos resultados. El método gráfico sólo da respuestas cualitativas, aunque bastante útiles, y es más sencillo. El método de los autovalores permite obtener resultados cuantitativos en función de dichos autovalores, y tener por tanto información sobre la rapidez con la que el sistema vuelve a un estado de equilibrio tras una pequeña perturbación. Los resultados cuantitativos son importantes cuando se desea saber el comportamiento del sistema frente a pequeñas perturbaciones.

11.4.2 Un modelo depredador-presa

En esta subsección estudiaremos un modelo simple de depredación, definida como el consumo de una presa por un depredador. Se supone que la presa está viva cuando el depredador la ataca, y que el depredador mata a su presa y por tanto la elimina de la población.

Existen muchos patrones de abundancia resultantes de las interacciones entre depredadores y presas. En particular, estas situaciones surgen en la naturaleza cuando las abundancias de depredadores y presas están fuertemente relacionadas y muestran fluctuaciones periódicas. Un ejemplo citado frecuentemente es sistema formado por el lince de Canadá (*Lynx canadensis*) y la liebre de las nieves (*Lepus americanus*). Las abundancias de las poblaciones muestran fluctuaciones periódicas. Un ejemplo de laboratorio de oscilaciones acopladas depredador-presa es el formado por el *Callosbruchus chinensis* y su avispa parasitoide *Heterospilus prosopidis*.

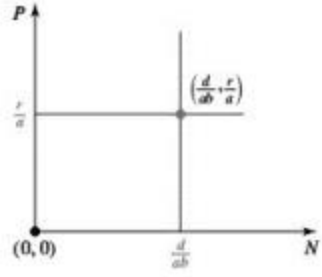
El modelo más simple depredador-presa que presenta oscilaciones acopladas es el modelo de Lotka-Volterra (Lotka, 1932; Volterra, 1926). Describiremos el sistema en las propias palabras de Volterra:

> El primer caso que he considerado es el de dos especies asociadas de las cuales una, encontrando alimento suficiente en su entorno, se multiplicaría indefinidamente si se dejara sola, mientras que la otra desaparecería por falta de alimento si se dejara sola. Pero la segunda se alimenta de la primera, por lo que las dos especies pueden coexistir juntas.
> La velocidad proporcional de aumento de la especie presa se reduce a medida que la especie depredadora aumenta, y el crecimiento de la especie depredadora crece con el aumento del número de individuos de la especie presa.

Trasladaremos ahora esta formulación verbal del modelo a un sistema de ecuaciones diferenciales. Si se denomina $N(t)$ a la abundancia de la presa y $P(t)$ a la abundancia del depredador, el modelo se formula mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN(t) - aP(t)N(t) \\ \frac{dP}{dt} &= baP(t)N(t) - dP(t) \end{aligned} \tag{11.63}$$

siendo r, b, a y d constantes positivas. Nótese que las presas crecen exponencialmente en ausencia de depredadores ($P = 0$). La velocidad intrínseca de incremento de presas en ausencia de depredadores es r. La constante a indica la tasa de ataque y el término aPN es la velocidad de consumo de presas. Los depredadores disminuyen exponencialmente en ausencia de presas, y la velocidad de disminución está dada por la constante d. El consumo de presas produce un aumento de la abundancia de depredadores. La constante b expresa con qué eficiencia los depredadores transforman las presas en crías propias.



▲ **Figura 11.53**
Isoclinas cero

Para calcular los equilibrios de (11.63) se hace

$$N(r - aP) = 0$$

$$P(abN - d) = 0$$

con lo que resultan las isoclinas cero $N = 0$ y $P = r/a$ para $dN/dt = 0$, y $P = 0$ y $N = d/ab$ para $dP/dt = 0$. La Figura 11.53 muestra las isoclinas cero. Los puntos de intersección de las isoclinas cero para N y P son los equilibrios. Se obtiene

$$(\hat{N}, \hat{P}) = (0, 0) \quad \text{y} \quad (\hat{N}, \hat{P}) = \left(\frac{d}{ab}, \frac{r}{a}\right)$$

Para analizar la estabilidad de estos dos equilibrios, se linealiza (11.63). La matriz de Jacobi es

$$D\mathbf{f}(N, P) = \begin{bmatrix} r - aP & -aN \\ baP & baN - d \end{bmatrix}$$

Cuando $(\hat{N}, \hat{P}) = (0, 0)$, entonces

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

que es una matriz diagonal, y por tanto los autovalores son los elementos de su diagonal

$$\lambda_1 = r > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -d < 0$$

Se concluye entonces que (0, 0) es inestable.

Cuando $(\hat{N}, \hat{P}) = (\frac{d}{ab}, \frac{r}{a})$, entonces

$$D\mathbf{f}\left(\frac{d}{ab}, \frac{r}{a}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{b} \\ rb & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar los autovalores de $D\mathbf{f}(\frac{d}{ab}, \frac{r}{a})$ hay que resolver

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{d}{b} \\ rb & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + rd = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene

$$\lambda_1 = i\sqrt{rd} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{rd}$$

Es decir, ambos autovalores son imaginarios puros. Esto no permite determinar la estabilidad del equilibrio linealizando alrededor de dicho equilibrio, como se indicó en la Sección 11.3. Afortunadamente, se puede resolver (11.63) de forma exacta.

Para resolver (11.63) de forma exacta, se divide dP/dt por dN/dt. Se obtiene

$$\frac{dP/dt}{dN/dt} = \frac{dP}{dN} = \frac{P(abN - d)}{N(r - aP)}$$

Separando variables e integrando resulta

$$\int \frac{r - aP}{P}\, dP = \int \frac{abN - d}{N}\, dN$$

Realizando la integración se obtiene

$$r \ln P - aP = abN - d \ln N + C$$

siendo C la constante de integración. Ordenando términos y aplicando la función exponencial resulta

$$(N^d e^{-abN})(P^r e^{-aP}) = K$$

donde $K = e^C$ depende de la condición inicial. Se define la función

$$f(N, P) = (N^d e^{-abN})(P^r e^{-aP})$$

y se hace

$$g(N) = N^d e^{-abN} \quad \text{y} \quad h(P) = P^r e^{-aP}$$

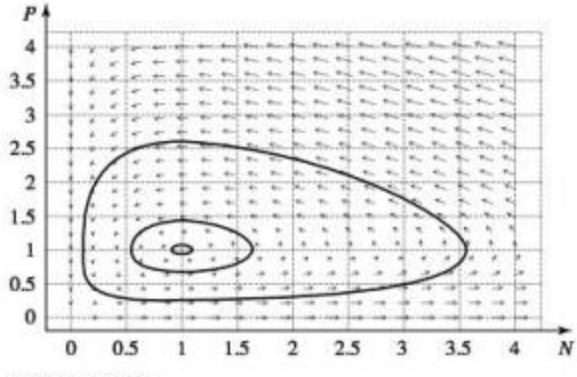
Se puede demostrar que $g(N)$ alcanza su máximo absoluto cuando $N = d/ab$ y que $h(P)$ alcanza su máximo absoluto cuando $P = r/a$. La función $f(N, P)$ alcanza por tanto su máximo absoluto en el punto de equilibrio $(d/ab, r/a)$. Podemos definir por tanto las curvas de nivel

$$f(N, P) = K$$

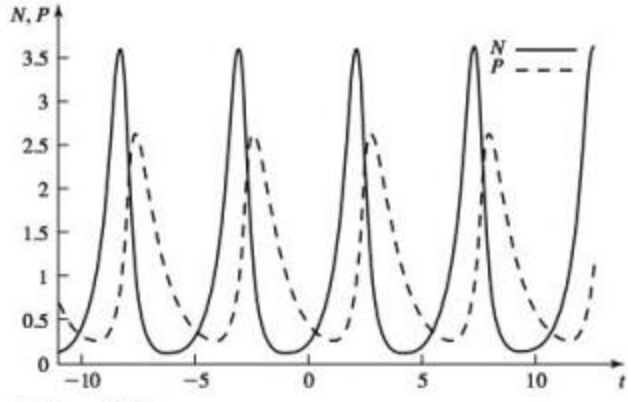
para $K \leqslant K_{\max}$, siendo $K_{\max}$ el valor de f en el equilibrio $(d/ab, r/a)$. Aunque no se puede demostrar aquí, esas curvas de nivel son cerradas (en la Figura 11.54 se muestran las curvas de nivel para convencernos de que en realidad son cerradas). Estas curvas de nivel son las curvas de solución.

Las soluciones de $N(t)$ y $P(t)$ como funciones del tiempo correspondientes a las curvas cerradas de la Figura 11.54 se muestran en las Figuras 11.55 y 11.56. Al dibujar $N(t)$ y $P(t)$ en función de t se puede ver que las trayectorias cerradas en el plano corresponden a soluciones periódicas para los depredadores y las presas. Las amplitudes de las oscilaciones dependen de la condición inicial. Nótese que las amplitudes de las dos figuras son diferentes.

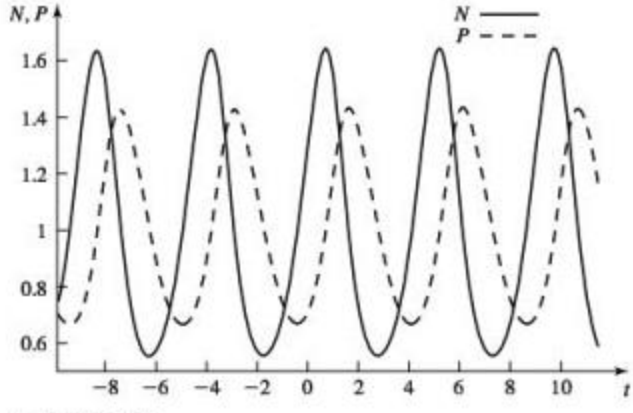
Estas trayectorias cerradas no son estables frente a perturbaciones. Es decir, si una pequeña perturbación cambia los valores de N o P, la solución seguirá una trayectoria cerrada *diferente*. Esta propiedad es el principal inconveniente del modelo, ya que implica que si una población natural se comportara de acuerdo con este modelo simple, su abundancia no presentaría ciclos regulares, porque los factores externos desplazarían constantemente la población a nuevas trayectorias. Si una población natural presenta ciclos regulares, es razonable esperar que dichos ciclos sean estables, es decir, que la población vuelva al mismo ciclo tras una pequeña perturbación. Estos ciclos se denominan **ciclos límite estables**. Se puede obtener un equilibrio localmente estable con oscilaciones modificando el modelo original de Lotka-Volterra mediante la introducción de una respuesta no lineal de los depredadores a la abundancia de presas. Esto se estudia en los Problemas 19 a 21.



▲ **Figura 11.54**
Soluciones de (11.63) en el plano $N - P$



▲ **Figura 11.55**
Soluciones de (11.63) en función del tiempo



▲ **Figura 11.56**
Soluciones de (11.63) en función del tiempo

11.4.3 La matriz comunitaria

En esta sección estudiaremos un modelo de población multiespecie bastante general, que fue introducido por Levins (1970) y desarrollado posteriormente por May (1975). El objetivo es determinar cuántas interacciones entre parejas de especies influyen en la estabilidad de los equilibrios de una comunidad de especies.

Supongamos una comunidad formada por dos especies en la que la abundancia de la especie i en el instante t se denomina $N_i(t)$ (al final de esta subsección generalizaremos las ideas a una comunidad de m especies). Supongamos que la dinámica de esta comunidad de dos especies se puede representar mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= f_1(N_1(t), N_2(t)) \\ \frac{dN_2}{dt} &= f_2(N_1(t), N_2(t)) \end{aligned} \tag{11.64}$$

o, en notación vectorial,

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{N}(t)) \tag{11.65}$$

Para determinar los equilibrios, hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(N_1, N_2) &= 0 \\ f_2(N_1, N_2) &= 0 \end{aligned} \tag{11.66}$$

Suponemos que (11.66) tiene una solución no trivial $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ con $\hat{N}_1 > 0$ y $\hat{N}_2 > 0$. Se puede proceder ahora a determinar la estabilidad. Para ello, hay que evaluar la matriz de Jacobi asociada al sistema (11.64) en el equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$. La matriz de Jacobi en dicho equilibrio es

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{N}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\hat{N}_1, \hat{N}_2)}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_1(\hat{N}_1, \hat{N}_2)}{\partial N_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\hat{N}_1, \hat{N}_2)}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_2(\hat{N}_1, \hat{N}_2)}{\partial N_2} \end{bmatrix}$$

Esta matriz 2×2 se denomina **matriz comunitaria**. Sus elementos

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(\hat{N}_1, \hat{N}_2)}{\partial N_j}$$

describen el efecto de la especie j en el equilibrio de la especie i, ya que la derivada $\frac{\partial f_i}{\partial N_j}$ parcial indica cómo cambia la función f_i, que expresa el crecimiento de la especie i, cuando varía la abundancia de la especie j.

Los elementos de la diagonal $a_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial N_i}$ miden el efecto que la especie i produce sobre sí misma, mientras que los elementos que no están en la diagonal, $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial N_j}$, $i \neq j$, miden el efecto que la especie j produce sobre la especie i. Los signos de los elementos proporcionan por tanto información sobre los efectos mutuos entre parejas de especies de la comunidad en el equilibrio.

La cantidad a_{ij} puede ser negativa, 0 o positiva. Si $a_{ij} < 0$ entonces la velocidad de crecimiento de la especie i disminuye si la abundancia de la especie j aumenta. Se dice en este caso que la especie j tiene un efecto negativo o inhibitorio sobre la especie i. Si $a_{ij} = 0$, el cambio en la abundancia de la especie j no tiene ningún efecto en la velocidad de crecimiento de la especie i. Si $a_{ij} > 0$ entonces la velocidad de crecimiento de la especie i aumenta si la abundancia de la especie j aumenta. En este caso se dice que la especie j tiene un efecto positivo o favorecedor sobre la especie j.

Veamos las posibles combinaciones del par (a_{21}, a_{12}). Este par describe las interacciones *entre* las dos especies de la colección. En la tabla que sigue se indican todas las posibles combinaciones.

		a_{12}		
		+	0	−
a_{21}	+	++	+0	+−
	0	0+	00	0−
	−	−+	−0	−−

Para interpretar esta tabla, tomemos por ejemplo el par (00). Este par representa el caso en que ninguna especie tiene efecto sobre la otra en el equilibrio. Veamos otro par, por ejemplo, (0+). En este caso, $a_{21} = 0$ y la especie 1 no tiene efecto sobre la especie 2, pero $a_{12} > 0$ y la especie 2 tiene un efecto positivo sobre la especie 1.

El caso (00) es el más simple y lo estudiaremos en primer lugar. La matriz comunitaria en este caso es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a & a_{22} \end{bmatrix}$$

Como la matriz comunitaria es diagonal, sus autovalores coinciden con los elementos de su diagonal a_{11} y a_{22}. Por tanto el equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ es estable, suponiendo que a_{11} y a_{22} son negativos. Es decir, si ninguna especie tiene efecto sobre la otra, solo existe un equilibrio no trivial localmente estable si cada una de ellas tiene un efecto negativo sobre sí misma. Esto significa que cada especie tiene que regular su propio tamaño de población.

Siguiendo a May (1975), las ocho combinaciones restantes de la tabla se pueden clasificar en cinco tipos de interacciones biológicamente diferentes.

Mutualismo o simbiosis $(++)$**:** Cada especie tiene un efecto positivo sobre la otra.

Competencia $(--)$**:** Cada especie tiene un efecto negativo sobre la otra.

Comensalismo $(+0)$**:** Una especie se beneficia con la interacción, y la otra no resulta afectada.

Amensalismo (-0)**:** Una especie resulta negativamente afectada con la interacción, y la otra no resulta afectada.

Depredación $(+-)$**:** Una especie resulta beneficiada con la interacción, y la otra negativamente afectada.

Estudiaremos ahora la estabilidad del equilibrio no trivial $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ en los cinco casos. Recuérdese que se supone que este equilibrio existe, y que $\hat{N}_1 > 0$ y $\hat{N}_2 > 0$. La matriz comunitaria (la matriz de Jacobi de (11.64) en el equilibrio) es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Los dos autovalores de A tienen partes reales negativas si y sólo si

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{y} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

En lo que sigue se supone que

$$a_{11} < 0 \quad \text{y} \quad a_{22} < 0 \tag{11.67}$$

de forma que la primera condición $\operatorname{tr} A < 0$ se cumple automáticamente. Esto tiene la misma interpretación que la estudiada en el caso (00), concretamente que ambas especies tienen un efecto negativo sobre sí mismas o que regulan sus propias densidades de población.

Recorreremos ahora los cinco casos, y determinaremos bajo qué condiciones el equilibrio no trivial es estable.

Mutualismo Supondremos que se cumple (11.67). La estructura de signos de la matriz comunitaria en el equilibrio en este caso es

$$A = \begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix}$$

Como

$$\det A = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{>0} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{>0}$$

el determinante de A puede ser positivo o negativo. Si $a_{12}a_{21}$ es suficientemente pequeño comparado con $a_{11}a_{22}$, entonces $\det A > 0$ y el equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ es localmente estable. En otras palabras, si los efectos positivos mutuos de las especies son contrarrestados suficientemente por el propio control de la población (representado por a_{11} y a_{22}), el equilibrio es localmente estable.

Competencia Supondremos que se cumple (11.67). La estructura de signos de la matriz comunitaria en el equilibrio en este caso es

$$A = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

Como

$$\det A = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{>0} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{>0}$$

el determinante de A puede ser positivo o negativo. Ahora el equilibrio $(\hat{N}_1, \hat{N}_2)$ es localmente estable si el efecto negativo que cada especie tiene sobre la otra es menor que el efecto que cada especie tiene sobre sí misma (en este caso $\det A > 0$ y el equilibrio es localmente estable).

Comensalismo y amensalismo Supondremos que se cumple (11.67). La estructura de signos de la matriz comunitaria en el equilibrio en este caso es

$$A = \begin{bmatrix} - & 0 \\ + & - \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & - \end{bmatrix}$$

En cualquier caso, el determinante es positivo. Por tanto el equilibrio es localmente estable.

Depredación Supondremos que se cumple (11.67). La estructura de signos de la matriz comunitaria en el equilibrio en este caso es

$$A = \begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

y el determinante de A es siempre positivo. Es decir, suponiendo que exista un equilibrio no trivial, es localmente estable.

El caso multiespecie Consideraremos ahora brevemente el caso en el que hay más de dos especies en la comunidad. Supongamos que hay m especies. Se denomina $N_i(t)$ a la densidad de la especie i en el instante t. La dinámica del sistema se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= f_1(N_1(t), N_2(t), \ldots, N_m(t)) \\ \frac{dN_2}{dt} &= f_2(N_1(t), N_2(t), \ldots, N_m(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dN_m}{dt} &= f_m(N_1(t), N_2(t), \ldots, N_m(t)) \end{aligned}$$

Los equilibrios se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1(\hat{N}_1, \hat{N}_2, \ldots, \hat{N}_m) &= 0 \\ f_2(\hat{N}_1, \hat{N}_2, \ldots, \hat{N}_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(\hat{N}_1, \hat{N}_2, \ldots, \hat{N}_m) &= 0 \end{aligned}$$

Si se supone que $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{N}_1, \hat{N}_2, \ldots, \hat{N}_m)$ es un equilibrio, entonces la matriz comunitaria en el equilibrio es la matriz de Jacobi en el equilibrio, es decir

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{N}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial N_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial N_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial N_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial N_m} \end{bmatrix}$$

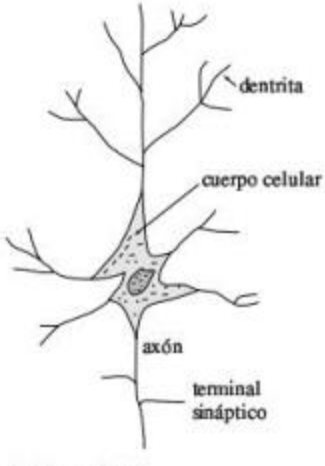
Como en el caso de dos especies, el elemento

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(\hat{\mathbf{N}})}{\partial N_j}$$

describe el efecto de la especie j sobre la especie i en el equilibrio.

11.4.4 Un modelo matemático de la actividad neuronal

El sistema nervioso de un organismo es una red de comunicación para la transmisión rápida de información entre células. Está formado por células nerviosas denominadas **neuronas**. Una neurona típica tiene un cuerpo celular que contiene el núcleo de la célula y las fibras nerviosas. Las fibras nerviosas que reciben información se denominan **dentritas**, y las que transportan información se denominan **axones**, que proporcionan los enlaces con otras neuronas mediante las **sinapsis**. La Figura 11.57 muestra una neurona típica de un vertebrado.



▲ **Figura 11.57**
Neurona típica de un vertebrado

Las neuronas responden a estímulos eléctricos. Esta respuesta es explotada en el estudio de las neuronas. Cuando el cuerpo celular de una neurona aislada se estimula con un pulso eléctrico muy débil, la neurona no presenta respuesta. Al aumentar la intensidad del pulso eléctrico por encima de un cierto umbral se dispara la respuesta, concretamente un pulso eléctrico que viaja por el axón. Si se aumenta más la intensidad del pulso eléctrico la respuesta no se altera. Este impulso es por tanto una respuesta del tipo todo o nada.

A. L. Hodgkin y A. F. Huxley estudiaron experimentalmente el axón gigante de un calamar y desarrollaron un modelo matemático de la actividad neuronal. Sus trabajos se publicaron en una serie de artículos en 1952. Este es un ejemplo excelente de cómo la investigación teórica y la experimental se pueden combinar para conseguir un conocimiento profundo de un sistema natural. En 1963, Hodgkin y Huxley recibieron el Premio Nóbel en fisiología y medicina por sus trabajos sobre las neuronas.

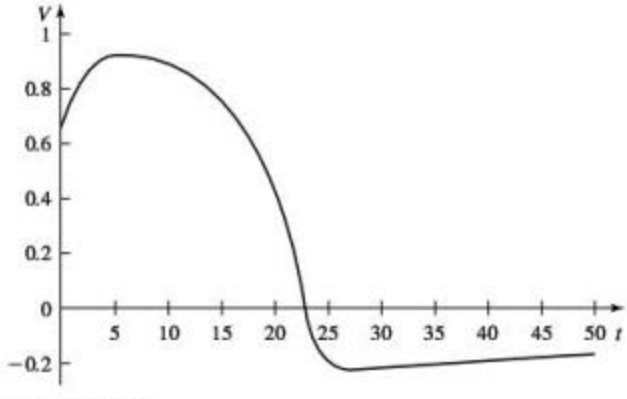
Empezaremos con una breve explicación de cómo funciona una neurona. Los actores principales del funcionamiento de una neurona son los iones de sodio (Na^+) y de potasio (K^+). La membrana celular de la neurona es impermeable a los iones de sodio y potasio cuando la célula está en estado de reposo. En una neurona típica en estado de reposo, la concentración de Na^+ en el interior es

aproximadamente la décima parte de la concentración de Na^+ extracelular. La concentración de K^+ en el interior de la célula es unas treinta veces la concentración de K^+ extracelular. Cuando la neurona está en estado de reposo, su interior está cargado negativamente (a -70 mV) con respecto al exterior.

Cuando se estimula la célula nerviosa, su superficie se hace permeable a los iones Na^+, que se precipitan al interior de la célula a través de canales de sodio en la superficie. Esto produce una inversión de la polaridad en los puntos en los que los iones Na^+ entran en la célula. La superficie del interior de la célula está ahora cargada positivamente con respecto al exterior y se hace permeable a los iones K^+ que se precipitan al exterior a través de canales de potasio. Como los iones de potasio (K^+) están cargados positivamente y se mueven del interior de la célula al exterior, la polarización de la superficie de la célula se invierte de nuevo y queda por debajo de la polarización de la célula en reposo. Para recuperar la concentración original de Na^+ y de K^+ (y por tanto la polarización original) hay que emplear energía para poner a funcionar las denominadas bombas de sodio y potasio en la superficie de la célula para bombear el exceso de Na^+ del interior al exterior y el exceso de K^+ del exterior al interior.

Para disparar esta reacción la intensidad del estímulo debe estar por encima de un cierto umbral. La reacción descrita ocurre localmente en la superficie de la célula. Este gran cambio local de polarización dispara la misma reacción en la vecindad, lo que permite que la reacción se propague por la célula nerviosa, creando así el impulso observado que viaja por la célula. Este gran cambio localizado de la polaridad, que después se invierte para recuperar la polaridad original se denomina **potencial de acción**. La Figura 11.58 muestra un ejemplo de potencial de acción.

Hodgkin y Huxley midieron las conductancias del sodio y el potasio y ajustaron curvas a los datos. La curva del sodio se ajusta mediante una función cúbica y la del potasio mediante una función de cuarto grado. Después desarrollaron un modelo para el potencial de acción. El modelo consiste en un sistema formado por cuatro ecuaciones diferenciales autónomas. Se trata de un modelo fenomenológico, es decir, las ecuaciones se basan en ajustar curvas a los datos experimentales para los diversos componentes del modelo. Hay una ecuación que describe el cambio del voltaje en la superficie de la célula, dos ecuaciones que describen el canal del sodio y una ecuación que describe el canal del potasio. No daremos los detalles de este sistema, que es muy complicado de analizar (generalmente, se resuelve de forma numérica). En su lugar, presentaremos una versión simplificada de este modelo, desarrollada por Fitzhugh (1961) y Nagumo *et al.* (1962).



▲ **Figura 11.58**
El potencial de acción

El modelo de Fitzhugh-Nagumo se basa en el hecho de que las escalas temporales de los dos canales son muy diferentes. El canal de sodio trabaja en una escala temporal mucho más rápida que el canal de potasio. Este hecho condujo a Fitzhugh y Nagumo a suponer que el canal de sodio está siempre en estado estacionario, lo que les permitió reducir las cuatro ecuaciones del modelo de Hodgkin y Huxley a dos ecuaciones. El modelo de Fitzhugh-Nagumo es por tanto una aproximación al modelo de Hodgkin y Huxley. Retiene las características esenciales del potencial de acción, pero es mucho más fácil de analizar.

El modelo de Fitzhugh-Nagumo utiliza dos variables. Una variable, denominada V, describe el potencial de la superficie de la célula. La otra variable, denominada w, modela los canales de sodio y de potasio. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -V(V-a)(V-1) - w \\ \frac{dw}{dt} &= b(V - cw) \end{aligned} \tag{11.68}$$

siendo a, b y c constantes que cumplen $0 < a < 1$, $b > 0$ y $c > 0$.

Analizaremos el sistema gráficamente. Las isoclinas cero de (11.68) son

$$w = -V(V-a)(V-1) \quad \text{y} \quad w = \frac{1}{c}V$$

La característica importante de este modelo es que la isoclina cero $dV/dt = 0$ es la gráfica de una función cúbica en el plano $V - w$. La Figura 11.59 ilustra las isoclinas cero.

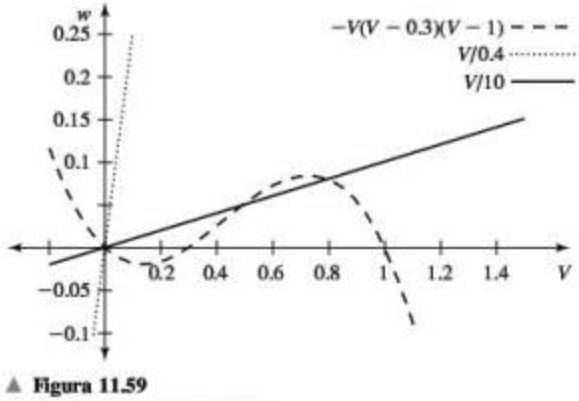
Podemos ver que si c es pequeño, hay sólo un equilibrio, concretamente (0, 0), mientras que si c es suficientemente grande, la recta $w = V/c$ corta a la gráfica de $dV/dt = 0$ tres veces. El fenómeno del umbral y el potencial de acción se observan cuando c es pequeño. En este caso, sólo hay un equilibrio, concretamente (0, 0), que corresponde al estado de reposo.

Podemos analizar la estabilidad del (0, 0) linealizando el sistema alrededor de su equilibrio. Se obtiene

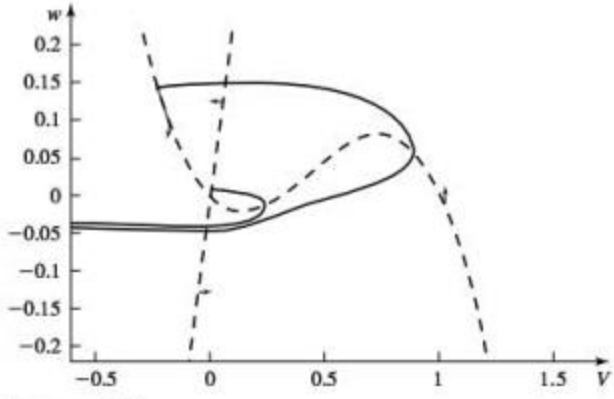
$$D\mathbf{f}(V, w) = \begin{bmatrix} -3V^2 + 2V + 2aV - a & -1 \\ b & -bc \end{bmatrix}$$

Por tanto,

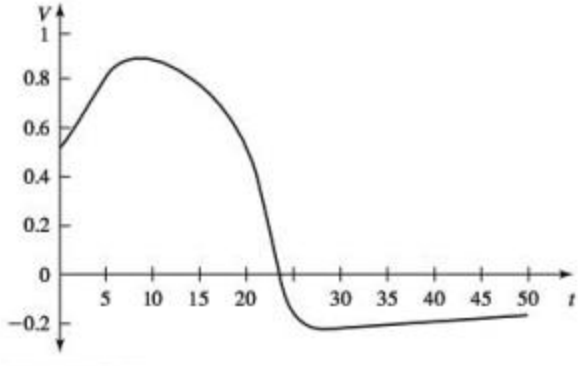
$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ b & -bc \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 11.59**
Las isoclinas cero de (11.68)



▲ **Figura 11.60**
Curvas de solución del modelo de Fitzhugh-Nagumo



▲ **Figura 11.61**
El potencial de acción cuando $V(0) > a$

Para obtener los autovalores, se calcula

$$\det\begin{bmatrix} -a-\lambda & -1 \\ b & -bc-\lambda \end{bmatrix} = (-a-\lambda)(-bc-\lambda) + b = 0$$

Es decir, hay que resolver

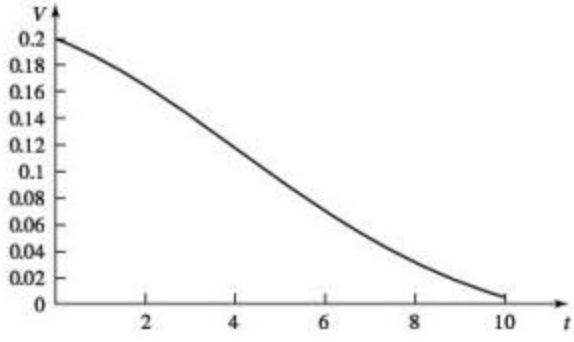
$$\lambda^2 + (a+bc)\lambda + b(ac+1) = 0$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a+bc) \pm \sqrt{(a+bc)^2 - 4b(ac+1)}}{2}$$

$$= \frac{-(a+bc) \pm \sqrt{(a-bc)^2 - 4b}}{2}$$

Como a, b y c son constantes positivas, se deduce que la expresión bajo la raíz cuadrada (concretamente, $(a+bc)^2 - 4b(ac+1)$ es menor que $(a+bc)^2$). Por tanto, λ_1 y λ_2 tienen partes reales negativas, lo que implica que (0, 0) es localmente estable. Mientras se cumpla que $(a-bc)^2 > 4b$, el equilibrio es un sumidero estable. Cuando $(a-bc)^2 < 4b$, los autovalores son complejos conjugados y (0, 0) se convierte en una espiral estable.



▲ **Figura 11.62**
El estímulo inicial se desvanece rápidamente cuando $V(0) < a$

El sistema imita al potencial de acción cuando ambos autovalores son reales y negativos. Si se aplica un estímulo débil (es decir, V se incrementa a un valor menor que a), entonces V volverá rápidamente a 0. Sin embargo, si se aplica un estímulo lo suficientemente fuerte (es decir, $V \in (a, 1)$), la trayectoria se alejará del punto de equilibrio, como muestra la Figura 11.60. La gráfica del voltaje en función del tiempo revela que si el estímulo es demasiado débil, $V(t)$ volverá rápidamente al punto de equilibrio, pero si el estímulo es lo suficientemente grande, la curva de solución de $V(t)$ se asemejará al potencial de acción. En las Figuras 11.61 y 11.62 se muestran dos curvas de solución $V(t)$. En ambos casos, $w(0) = 0$. En la Figura 11.61, $V(0) = 0.5 > a$, y se observa un potencial de acción. En la Figura 11.62, $V(0) = 0.2 < a$, y el estímulo inicial es demasiado pequeño, desvaneciéndose rápidamente.

11.4.5 Un modelo matemático de las reacciones enzimáticas

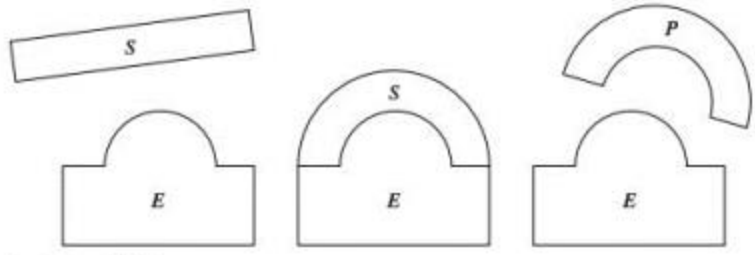
El objetivo de esta subsección es triple. Primero, aprenderemos a modelar reacciones bioquímicas. Segundo veremos cómo se pueden utilizar los modelos matemáticos para interpretar observaciones empíricas. Tercero, presentaremos un método importante. Concretamente, veremos que haciendo las suposiciones apropiadas, el número de variables de un modelo se puede reducir algunas veces, lo que en general facilita su análisis.

La clase de reacciones bioquímicas que vamos a estudiar son las reacciones enzimáticas, omnipresentes en el mundo viviente. Las enzimas son proteínas que actúan como catalizadores de las reacciones químicas reduciendo la energía de activación de la reacción. Las enzimas no se alteran en la reacción. Sirven de ayuda en sus pasos iniciales y controlan su velocidad uniendo los reactivos (denominados sustratos) a un lugar activo de la encima, con lo que se forma un complejo enzima-sustrato que permite que los sustratos reaccionen y formen el producto. La Figura 11.63 ilustra este proceso.

Si se denomina S al sustrato, E a la enzima y P al producto de la reacción, una reacción enzimática se puede expresar de la siguiente forma

$$E + S \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftarrows}} ES \xrightarrow{k_2} E + P \tag{11.69}$$

siendo k_+, k_- y k_2 las velocidades de reacción en los pasos correspondientes.



▲ **Figura 11.63**
Descripción esquemática de una reacción enzimática

Se puede transformar la descripción esquemática de la reacción (11.69) en un sistema de ecuaciones diferenciales. Utilizaremos la siguiente notación

$e(t) = [E]$ = concentración de enzima en el instante t
$s(t) = [S]$ = concentración de sustrato en el instante t
$c(t) = [ES]$ = concentración de complejo enzima-sustrato en el instante t
$p(t) = [P]$ = concentración de producto en el instante t

Utilizando la ley de acción de masas,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= k_- c - k_+ se \\ \frac{de}{dt} &= (k_- + k_2)c - k_+ se \\ \frac{dc}{dt} &= k_+ se - (k_- + k_2)c \\ \frac{dp}{dt} &= k_2 c \end{aligned} \tag{11.70}$$

Michaelis y Menten (1913) tuvieron un papel decisivo en la descripción de la cinética enzimática mediante trabajos teóricos y experimentales. En la parte experimental, desarrollaron técnicas que les permitieron medir las velocidades de reacción bajo condiciones controladas. Sus experimentos mostraron una relación hiperbólica entre la velocidad de la reacción enzimática dp/dt y la concentración de sustrato s, que formularon de la siguiente forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_m(s)}{K_m + s} \tag{11.71}$$

siendo v_m la constante de saturación y K_m la constante de semisaturación (es decir, si $s = K_m$, entonces $dp/dt = v_m/2$).

En la parte teórica, desarrollaron un modelo matemático de la cinética enzimática que predecía la relación hiperbólica observada entre la concentración de sustrato y la velocidad inicial a la que se forma el producto.

A continuación analizaremos (11.70), que es un sistema de cuatro ecuaciones. No es fácil de analizar, por lo que lo simplificaremos y al final obtendremos (11.71). Utilizaremos también (11.70) para ilustrar que algunas veces es posible reducir el número de ecuaciones de un sistema.

Planteamos que el sistema conserva una cantidad, es decir, hay una cantidad que no depende del tiempo y por tanto se mantiene constante durante toda la reacción. Para calcular esta cantidad, nótese que

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt}(e + c) = 0$$

lo que implica que

$$e(t) + c(t) = e_0 \tag{11.72}$$

siendo e_0 una constante. Como $e(t) + c(t)$ es constante, se dice que la suma $e(t) + c(t)$ es una cantidad conservada. La ventaja de esto es que si sabemos la concentración inicial $e(0)$ y $c(0)$ y una de las dos cantidades $e(t)$ o $c(t)$, se conoce inmediatamente la otra, ya que $e(0) + c(0) = e(t) + c(t)$. Esto reduce el número de ecuaciones de cuatro a tres.

Para reducir aún más el número de ecuaciones, se hace otra suposición. Mientras que la existencia de una cantidad conservada se deduce del sistema de ecuaciones y podríamos haberla obtenido sin conocer el significado de esas ecuaciones, la siguiente suposición requiere un conocimiento profundo de la propia reacción enzimática, y no se puede deducir del sistema de ecuaciones (11.70). Briggs y Haldane (1925), que tenían este conocimiento, propusieron que la velocidad de formación equilibra a la velocidad de descomposición del complejo. Es decir, supusieron que

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

Esta suposición lleva a la ecuación

$$0 = k_+ se - (k_- + k_2)c$$

que se puede expresar en la forma

$$\frac{se}{c} = \frac{k_- + k_2}{k_+}$$

Denominaremos a esta relación K_m. Es decir,

$$K_m = \frac{k_- + k_2}{k_+}$$

y por tanto

$$\frac{se}{c} = K_m \tag{11.73}$$

Despejando e en (11.72) (es decir, $e = e_0 - c$ y sustituyendo en (11.73) se obtiene

$$\frac{s(e_0 - c)}{c} = K_m$$

de donde se puede despejar c. Resulta

$$c = \frac{e_0 s}{K_m + s} \tag{11.74}$$

lo que permite reformular la ecuación de la velocidad de formación del producto. Como $dp/dt = k_2 c$ se deduce de (11.74) que

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k_2 e_0 s}{K_m + s} \tag{11.75}$$

Se puede interpretar el valor del factor k_2e_0. Concretamente, si toda la enzima forma complejo con el sustrato, entonces $e = 0$ y por tanto $c = e_0$ (ya que $e + c = e_0$ es la cantidad conservada). Esto implica que la velocidad a la que se forma el producto, $dp/dt = k_2c$, es máxima cuando $c = e_0$, en cuyo caso $dp/dt = k_2e_0$. Por tanto, k_2e_0 se puede interpretar como la máxima velocidad a la que puede proceder la reacción. Utilizaremos la notación

$$v_m = k_2e_0$$

con la que (11.75) se puede escribir en la forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_m s}{K_m + s} \tag{11.76}$$

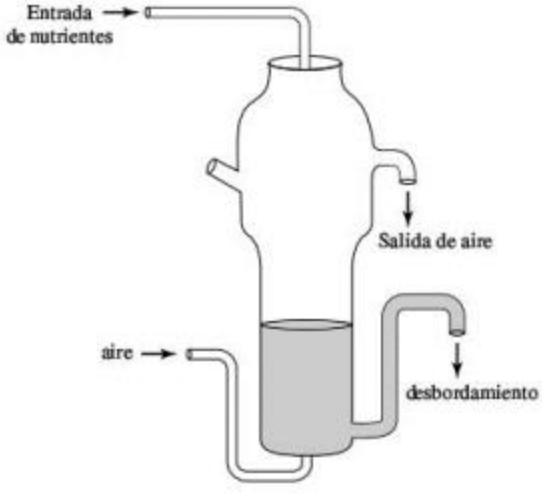
La Ecuación (11.76) se conoce como ley de Michaelis-Menten y describe la velocidad de una reacción enzimática. Podemos ver en la Ecuación (11.76) que la velocidad de reacción dp/dt está limitada por la disponibilidad del sustrato S.

Las Ecuaciones (11.76) y (11.71) son la misma. La Ecuación (11.71) se obtuvo ajustando una curva a un conjunto de puntos de datos que relacionaban la concentración medida de sustrato s con la velocidad de reacción dp/dt. La Ecuación (11.76) se tuvo a partir de un modelo matemático. El modelo matemático nos permite interpretar las constantes v_m y K_m en términos de la reacción enzimática, y los experimentos nos permiten medir v_m y K_m.

Crecimiento microbiano en un quimiostato: una aplicación del crecimiento en sustrato limitado Una visión simplista del crecimiento microbiano establece que los microbios convierten el sustrato mediante reacciones enzimáticas en productos que después se convierten en biomasa microbiana.

En lo que sigue, estudiaremos un modelo matemático del crecimiento microbiano en un quimiostato. El crecimiento de los microbios estará limitado por la disponibilidad del sustrato.

Un quimiostato es una cámara de crecimiento en la que un medio estéril con concentración de sustrato s_0 entra en dicha cámara con una velocidad constante D. Se bombea aire en la cámara de crecimiento para mezclar y airear a los microorganismos. Para mantener constante el volumen de la cámara de crecimiento, su contenido se elimina con la misma velocidad D con la que entra nuevo medio. La Figura 11.64 muestra un diagrama de un quimiostato.



◀ **Figura 11.64**
Un quimiostato

Denominaremos $x(t)$ a la biomasa microbiana en el instante t, y $s(t)$ a la concentración de sustrato en el instante t. Jacques Lucient Monod tuvo una importancia decisiva en el desarrollo de la microbiología cuantitativa. En 1950 obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que describe el crecimiento de los microbios en un quimiostato:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= D(s_0 - s) - q(s)x \\ \frac{dx}{dt} &= Yq(s)x - Dx \end{aligned} \tag{11.77}$$

siendo $s_0 > 0$ la concentración de sustrato del medio entrante, $D > 0$ la velocidad con la que el medio entra o sale del quimiostato e $Y > 0$ la constante de rendimiento. La función $q(s)$ es la velocidad con la que los microbios consumen el substrato. Esta velocidad depende de la concentración de substrato. El factor de rendimiento Y se puede interpretar por tanto como un factor de conversión de substrato en biomasa.

Monod (1942) demostró empíricamente que la velocidad de asimilación $q(s)$ se ajusta a la relación hiperbólica

$$q(s) = \frac{v_m s}{K_m + s} \tag{11.78}$$

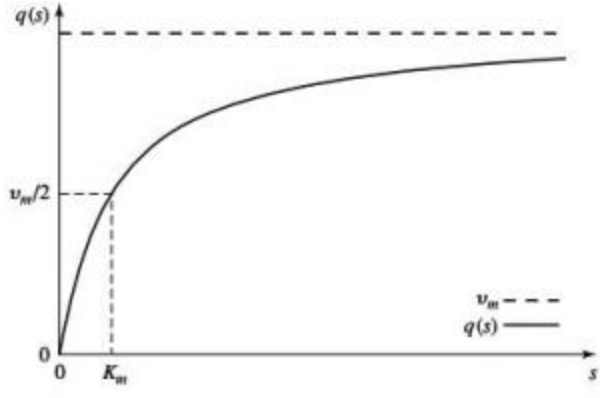
siendo v_m el nivel de saturación y K_m la constante de semisaturación (es decir, $q(K_m) = v_m/2$). La Figura 11.65 muestra una gráfica de $q(s)$. Más tarde Monod advirtió que (11.78) es idéntica a la ley de Michaelis-Menten, lo que podría sugerir el crecimiento microbiano está gobernado por reacciones enzimáticas.

En lo que sigue, determinaremos posibles equilibrios de (11.77) y analizaremos su estabilidad. Por supuesto, siempre existe el equilibrio trivial, que se tiene cuando entra substrato a una cámara de crecimiento sin microbios [es decir, cuando $x(0) = 0$]. En ese caso, no aparecerán microbios en instantes posteriores y por tanto, $\frac{ds}{dt} = 0$ para todos los instantes $t \geqslant 0$. El equilibrio del sustrato se obtiene entonces haciendo con $\frac{dx}{dt} = 0$ con $x = 0$:

$$0 = D(s_0 - s)$$

cuya solución es $s = s_0$. Por tanto, un equilibrio es

$$(\hat{s}_1, \hat{x}_1) = (s_0, 0) \tag{11.79}$$



▲ **Figura 11.65**
Una gráfica de $q(s)$

Para obtener un equilibrio no trivial $(\hat{s}_2, \hat{x}_2)$, buscaremos un equilibrio con $\hat{x}_2 > 0$. Para obtenerlo, se resuelven las ecuaciones simultáneas

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

De $dx/dt = 0$ se deduce que

$$q(\hat{s}_2) = \frac{D}{Y} \tag{11.80}$$

Observando la Figura 11.65 se ve inmediatamente que (11.80) tiene una solución $\hat{s}_2 > 0$ si $0 < D/Y < v_m$. Utilizando (11.78) en (11.80) se puede calcular $\hat{x}_2$, concretamente,

$$\frac{v_m \hat{s}_2}{K_m + \hat{s}_2} = \frac{D}{Y}$$

con lo que se obtiene

$$\hat{s}_2 = \frac{DK_m}{Yv_m - D} \tag{11.81}$$

que es de hecho positivo, suponiendo que $0 < D/Y < v_m$. Utilizando (11.80) en $ds/dt = 0$, se obtiene

$$D(s_0 - \hat{s}_2) = \frac{D}{Y}\hat{x}_2$$

o

$$\hat{x}_2 = Y(s_0 - \hat{s}_2) \tag{11.82}$$

de donde se puede ver que $\hat{x}_2 > 0$, suponiendo que $\hat{s}_2 < s_0$. Bajo los supuestos de que $0 < D/Y < v_m$ y $\hat{s}_2 < s_0$, tenemos por tanto un equilibrio no trivial

$$(\hat{s}_2, \hat{x}_2) = \left(\frac{DK_m}{Yv_m - D}, Y(s_0 - \hat{s}_2)\right) \tag{11.83}$$

No hay más equilibrios.

Para analizar la estabilidad de los dos equilibrios (11.79) y (11.83), se obtiene la matriz de Jacobi $D\mathbf{f}$ asociada al Sistema (11.77),

$$D\mathbf{f}(s, x) = \begin{bmatrix} -D - q'(s)x & -q(s) \\ Yq'(s)x & Yq(s) - D \end{bmatrix}$$

Primero analizamos la estabilidad del equilibrio trivial (11.79):

$$D\mathbf{f}(s_0, 0) = \begin{bmatrix} -D & -q(s_0) \\ 0 & Yq(s_0) - D \end{bmatrix}$$

Como la matriz de Jacobi es de forma triangular superior, los autovalores son los elementos de la diagonal, y se obtiene

$$\lambda_1 = -D < 0$$

$$\lambda_2 = Yq(s_0) - D < 0 \quad \text{disponiendo que } \frac{D}{Y} > q(s_0)$$

Por tanto, el equilibrio

$$(s_0, 0) \quad \text{es} \begin{cases} \text{localmente estable} & \text{si } \frac{D}{Y} > q(s_0) \\ \text{inestable} & \text{si } \frac{D}{Y} < q(s_0) \end{cases}$$

Para el equilibrio no trivial (11.83) se obtiene

$$A = D\mathbf{f}(\hat{s}_2, \hat{x}_2) = \begin{bmatrix} -D - q'(\hat{s}_2)\hat{x}_2 & -q(\hat{s}_2) \\ Yq'(\hat{s}_2)\hat{x}_2 & Yq(\hat{s}_2) - D \end{bmatrix}$$

Utilizando (11.80) se puede simplificar a

$$A = \begin{bmatrix} -D - q'(\hat{s}_2)\hat{x}_2 & -\frac{D}{Y} \\ Yq'(\hat{s}_2)\hat{x}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$\operatorname{tr} A = -D - q'(\hat{s}_2)\hat{x}_2 < 0$$

y

$$\det A = Dq'(\hat{s}_2)\hat{x}_2 > 0$$

para $\hat{x}_2 > 0$, ya que $q(s)$ es una función decreciente. Por tanto, si existe el equilibrio no trivial (es decir, si $\hat{s}_2 > 0$ y $\hat{x}_2 > 0$), entonces es localmente estable.

Hemos visto que el equilibrio no trivial existe siempre que $0 < D/Y < v_m$ y $\hat{s}_2 < s_0$. Estas dos condiciones se pueden resumir en

$$0 < \frac{D}{Y} < v_m \quad \text{y} \quad \frac{DK_m}{Yv_m - D} < s_0$$

Si la primera inecuación se cumple, entonces el denominador de la segunda inecuación es positivo. Despejando D de la segunda inecuación se obtiene

$$D < \frac{Ys_0v_m}{s_0 + K_m} = Yq(s_0) \tag{11.84}$$

Ahora podemos resumir nuestros resultados. El quimiostato tiene dos equilibrios, un equilibrio trivial en el que los microbios están ausentes y un equilibrio no trivial que permite crecimiento microbiano estable. Si $D > Yq(s_0)$, entonces el equilibrio trivial es el único equilibrio biológicamente razonable y es localmente estable. Si $D < Yq(s_0)$, ambos equilibrios son biológicamente razonables. El equilibrio trivial es ahora inestable y el no trivial es localmente estable. Por tanto, el crecimiento microbiano estable es posible, supuesto que la velocidad con la que el medio entra y sale de la cámara de crecimiento está comprendida entre 0 y $Yq(s_0)$.

11.4.6. Problemas

(11.4.1)

1. Suponga que las densidades de dos especies evolucionan de acuerdo con el modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra. Asuma que la especie 1 tiene una velocidad de crecimiento intrínseca $r_1 = 2$ y una capacidad de alojamiento $K_1 = 20$, y que la especie 2 tiene una velocidad de crecimiento intrínseca $r_2 = 3$ y una capacidad de alojamiento $K_2 = 15$. Suponga además que 20 individuos de la especie 2 tienen el mismo efecto sobre la especie 1 que 4 individuos de la especie 1 tienen sobre su propia especie, y que 30 individuos de la especie 1 tienen el mismo efecto sobre la especie 2 que 6 individuos de la especie 2 tienen sobre su propia especie. Obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales que describa esta situación.

2. Suponga que las densidades de dos especies evolucionan de acuerdo con el modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra. Asuma que la especie 1 tiene una velocidad de crecimiento intrínseca $r_1 = 4$ y una capacidad de alojamiento $K_1 = 17$, y que la especie 2 tiene una velocidad de crecimiento intrínseca $r_2 = 1.5$ y una capacidad de alojamiento $K_2 = 32$. Suponga además que 15 individuos de la especie 2 tienen el mismo efecto sobre la especie 1 que 7 individuos de la especie 1 tienen sobre su propia especie, y que 5 individuos de la especie 1 tienen el mismo efecto sobre la especie 2 que 7 individuos de la especie 2 tienen sobre su propia especie. Obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales que describa esta situación.

En los Problemas 3-6, utilice el método gráfico para clasificar los siguientes modelos de competencia interespecífica de Lotka-Volterra en «coexistencia», «control por fundadores», «la especie 2 desplaza a la especie 1» o «la especie 1 desplaza a la especie 2».

3.
$$\frac{dN_1}{dt} = 2N_1\left(1 - \frac{N_1}{10} - 0.7\,\frac{N_2}{10}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 5N_2\left(1 - \frac{N_2}{15} - 0.3\,\frac{N_1}{15}\right)$$

4.
$$\frac{dN_1}{dt} = 3N_1\left(1 - \frac{N_1}{50} - 0.3\,\frac{N_2}{50}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 4N_2\left(1 - \frac{N_2}{30} - 0.8\,\frac{N_1}{30}\right)$$

5.
$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left(1 - \frac{N_1}{20} - \frac{N_2}{5}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 2N_2\left(1 - \frac{N_2}{15} - \frac{N_1}{3}\right)$$

6.
$$\frac{dN_1}{dt} = 3N_1\left(1 - \frac{N_1}{25} - 1.2\frac{N_2}{25}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = N_2\left(1 - \frac{N_2}{30} - 0.8\frac{N_1}{30}\right)$$

En los Problemas 7-10, utilice el método de los autovalores para analizar todos los equilibrios de los modelos de competición interespecífica de Lotka-Volterra dados.

7.
$$\frac{dN_1}{dt} = 3N_1\left(1 - \frac{N_1}{18} - 1.3\frac{N_2}{18}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 2N_2\left(1 - \frac{N_2}{20} - 0.6\frac{N_1}{20}\right)$$

8.
$$\frac{dN_1}{dt} = 4N_1\left(1 - \frac{N_1}{12} - 0.3\frac{N_2}{12}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 5N_2\left(1 - \frac{N_2}{15} - 0.2\frac{N_1}{15}\right)$$

9.
$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left(1 - \frac{N_1}{35} - 3\frac{N_2}{35}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 3N_2\left(1 - \frac{N_2}{40} - 4\frac{N_1}{40}\right)$$

10.
$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left(1 - \frac{N_1}{25} - 0.1\frac{N_2}{25}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 2N_2\left(1 - \frac{N_2}{28} - 1.2\frac{N_1}{28}\right)$$

11. Suponga que dos especies de escarabajos se crían juntas y de forma separada. Cuando la especie 1 se cría sola, alcanza un equilibrio sobre unos 200. Cuando la especie 2 se cría sola, alcanza un equilibrio sobre 150. Cuando las dos especies se crían juntas, parecen ser capaces de coexistir. La especie 1 alcanza un equilibrio sobre 180 y la especie 2 alcanza un equilibrio sobre 80. Si sus densidades siguen el modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra, calcule α_{12} y α_{21}.

12. Suponga que dos especies de escarabajos se crían juntas. La especie 1 gana si hay inicialmente 100 individuos de dicha especie y 20 individuos de la especie 2. Pero la especie 2 gana si hay inicialmente 20 individuos de la especie 1 y 100 individuos de la especie 2. Cuando los escarabajos de crían separadamente, ambas especies parecen alcanzar un equilibrio sobre 120. Basándose en esta información y suponiendo que las densidades siguen el modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra, ¿puede dar cotas inferiores para α_{12} y α_{21}?

(11.4.2)

En los Problemas 13-14, utilice una calculadora gráfica para dibujar curvas de solución del modelo depredador-presa de Lotka-Volterra en el plano $N - P$. Dibuje también $N(t)$ y $P(t)$ en función de t.

13.
$$\frac{dN}{dt} = 2N - PN$$
$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}PN - P$$

con condiciones iniciales

(a) $(N(0), P(0)) = (2, 2)$
(b) $(N(0), P(0)) = (3, 3)$
(c) $(N(0), P(0)) = (4, 4)$

14.
$$\frac{dN}{dt} = 3N - 2PN$$
$$\frac{dP}{dt} = PN - P$$

con condiciones iniciales

(a) $(N(0), P(0)) = (1, 3/2)$
(b) $(N(0), P(0)) = (2, 2)$
(c) $(N(0), P(0)) = (3, 1)$

En los Problemas 15-16, se estudia el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra.

15. Suponga que
$$\frac{dN}{dt} = N - 4PN$$
$$\frac{dP}{dt} = 2PN - 3P$$

(a) Demuestre que este sistema tiene dos equilibrios, el equilibrio trivial (0, 0) y un equilibrio no trivial en el que ambas especies tienen densidades positivas.

(b) Utilice el método de los autovalores para demostrar que el equilibrio trivial es inestable.

(c) Determine los autovalores correspondientes al equilibrio no trivial ¿Permite este análisis inferir algo sobre la estabilidad?

(d) Utilice una calculadora gráfica para dibujar curvas en el plano $N - P$. Dibuje también curvas de solución de las densidades de depredadores y presas en función del tiempo.

16. Suponga que
$$\frac{dN}{dt} = 5N - PN$$
$$\frac{dP}{dt} = PN - P$$

(a) Demuestre que este sistema tiene dos equilibrios, el equilibrio trivial (0, 0) y un equilibrio no trivial en el que ambas especies tienen densidades positivas.

(b) Utilice el método de los autovalores para demostrar que el equilibrio trivial es inestable.

(c) Determine los autovalores correspondientes al equilibrio no trivial ¿Permite este análisis inferir algo sobre la estabilidad?

(d) Utilice una calculadora gráfica para dibujar curvas en el plano $N - P$. Dibuje también curvas de solución de las densidades de depredadores y presas en función del tiempo.

17. Suponga que $N(t)$ indica la densidad de una especie de insecto en el instante t y que $P(t)$ indica la densidad de su depredador en el instante t. La especie de insecto es una plaga agrícola y su depredador se utiliza como agente de control biológico. Su dinámica está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales
$$\frac{dN}{dt} = 5N - 3PN$$
$$\frac{dP}{dt} = 2PN - P$$

(a) Explique por qué

$$\frac{dN}{dt} = 5N \tag{11.85}$$

describe la dinámica del insecto en ausencia del depredador. Resuelva (11.85). Describa lo que le sucede a la población de insectos en ausencia del depredador.

(b) Explique por qué introducir un insecto depredador en el sistema puede ayudar a controlar la densidad de población del insecto.

(c) Suponga que al principio de la estación de crecimiento la densidad del insecto es de 0.5 y la densidad del depredador es 2. Se decide controlar a los insectos utilizando un insecticida además del depredador. Siendo cuidadosos, se escoge un insecticida que no daña al depredador. Tras la aplicación del insecticida, la densidad de insectos desciende a 0.01 y la densidad del depredador permanece en 2. Utilice una calculadora gráfica para estudiar las implicaciones a largo plazo de la decisión de aplicar el insecticida. En particular, investigue qué habría sucedido con las densidades del insecto si se hubiera decidido no aplicar el insecticida y compare este resultado con la densidad resultante en el caso de aplicación del insecticida.

18. Suponga que $N(t)$ indica la densidad de presas en el instante t y $P(t)$ la densidad de depredadores en el instante t. Su dinámica se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{dN}{dt} = 4N - 2PN$$

$$\frac{dP}{dt} = PN - 3P$$

Suponga que inicialmente $N(0) = 3$ y $P(0) = 2$.

(a) Si se realiza un seguimiento en el tiempo de la comunidad depredador-presa, ¿qué se observa?

(b) Suponga que el mal tiempo mata al 90% de la población de presas y al 67% de la población de depredadores. Si se continúa observando la comunidad depredador-presa, ¿qué se esperará ver?

19. Una característica no realista del modelo de Lotka-Volterra es que las presas tienen un crecimiento ilimitado en ausencia del depredador. El modelo descrito por el sistema siguiente remedia este problema (concretamente, se supone que las presas evolucionan de acuerdo con el crecimiento logístico en ausencia del depredador. Las otras características del modelo se mantienen)

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= 3N\left(1 - \frac{N}{10}\right) - 2PN \\ \frac{dP}{dt} &= PN - 4P\end{aligned} \tag{11.86}$$

(a) Explique por qué las presas evolucionan de acuerdo a

$$\frac{dN}{dt} = 3N\left(1 - \frac{N}{10}\right) \tag{11.87}$$

en ausencia del depredador. Estudie el comportamiento a largo plazo de las soluciones de (11.87).

(b) Calcule todos los equilibrios de (11.86) y determine su estabilidad utilizando el método de los autovalores.

(c) Utilice una calculadora gráfica para dibujar la curva de solución de (11.86) en el plano $N - P$ cuando $N(0) = 2$ y $P(0) = 2$. Dibuje también $N(t)$ y $P(t)$ en función del tiempo, empezando en $N(0) = 2$ y $P(0) = 2$.

20. Una característica no realista del modelo de Lotka-Volterra es que las presas tienen un crecimiento ilimitado en ausencia del depredador. El modelo descrito por el sistema siguiente remedia este problema (concretamente, se supone que las presas evolucionan de acuerdo con el crecimiento logístico en ausencia del depredador. Las otras características del modelo se mantienen)

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - 4PN \\ \frac{dP}{dt} &= PN - 5P\end{aligned} \tag{11.88}$$

siendo $K > 0$ la capacidad de alojamiento de la presa en ausencia del depredador. A continuación estudiaremos cómo afecta la capacidad de alojamiento al resultado de esta interacción depredador-presa.

(a) Dibuje las isoclinas cero de (11.88) para (i) $K = 10$ y (ii) $K = 3$.

(b) Cuando $K = 10$, las isoclinas cero se cortan, indicando la existencia de un equilibrio no trivial. Analice la estabilidad de dicho equilibrio.

(c) ¿Existe una capacidad de alojamiento mínima para que exista un equilibrio no trivial? Si es así, calcúlela y explique lo que sucede cuando la capacidad de alojamiento está por debajo de ese mínimo, y lo que sucede cuando está por encima.

21. Una característica no realista del modelo de Lotka-Volterra es que las presas tienen un crecimiento ilimitado en ausencia del depredador. El modelo descrito por el sistema siguiente remedia este problema (concretamente, se supone que las presas evolucionan de acuerdo con el crecimiento logístico en ausencia del depredador. Las otras características del modelo se mantienen)

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N\left(1 - \frac{N}{20}\right) - 5PN \\ \frac{dP}{dt} &= 2PN - 8P\end{aligned} \tag{11.89}$$

(a) Dibuje las isoclinas cero de (11.89).

(b) Utilice el método gráfico de la Subsección 11.3.2 para determinar si el equilibrio no trivial es localmente estable.

En los Problemas 22-26, analizaremos cómo afecta a las interacciones depredador-presa un cambio en los parámetros del modelo de Lotka-Volterra modificado

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - bPN \\ \frac{dP}{dt} &= cPN - dP\end{aligned} \tag{11.90}$$

22. (a) Calcule las isoclinas cero de (11.90) y determine las condiciones bajo las que existe un equilibrio no trivial (es decir, un equilibrio en el que tanto el depredador como la presa tienen densidades positivas).

(b) Utilice el método gráfico de la Subsección 11.3.2 para demostrar que si existe un equilibrio no trivial, es localmente estable.

En los Problemas 23-26, se utilizan los resultados del Problema 22. Suponga que los parámetros se eligen de forma que existe un equilibrio no trivial

23. Utilice los resultados del Problema 22 para demostrar que un incremento en a (la velocidad de crecimiento intrínseca de la

presa) produce un incremento de la densidad del depredador pero deja inalterada la densidad de la presa.

24. Utilice los resultados del Problema 22 para demostrar que un incremento de b (la eficiencia de búsqueda) reduce la densidad del depredador pero no afecta a la abundancia de la presa en el equilibrio.

25. Utilice los resultados del Problema 22 para demostrar que un incremento de c (la eficiencia de crecimiento del depredador) reduce la abundancia de la presa en el equilibrio y aumenta la abundancia del depredador en el equilibrio.

26. Utilice los resultados del Problema 22 para demostrar que un incremento de K (la capacidad de alojamiento de la presa en ausencia del depredador) aumenta la abundancia del depredador en el equilibrio pero no tiene efecto en la abundancia de la presa en el equilibrio.

(11.4.3)

En los Problemas 27-34, clasifique las matrices comunitarias en equilibrio de acuerdo con los cinco casos considerados en la Subsección 11.4.3, y determine si el equilibrio es estable (suponga en todos los casos que el equilibrio existe).

27. $\begin{bmatrix} -1 & -1.3 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -3 & -1.2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} -1.5 & 1.6 \\ 2.3 & -5.1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0.4 & -0.7 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} -1 & 1.3 \\ 2 & -1.5 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -2.7 & 0 \\ -1.3 & -0.6 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -5 & -1.7 \\ -2.3 & -0.2 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} -2.3 & -4.7 \\ 1.2 & -3.2 \end{bmatrix}$

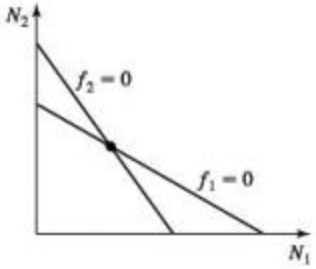
En los Problemas 35-40, se consideran comunidades formadas por dos especies. La abundancia de la especie 1 en el instante t se denomina $N_1(t)$ y la de la especie 2, $N_2(t)$. Su dinámica se describe mediante las ecuaciones,

$$\frac{dN_1}{dt} = f_1(N_1, N_2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = f_2(N_1, N_2)$$

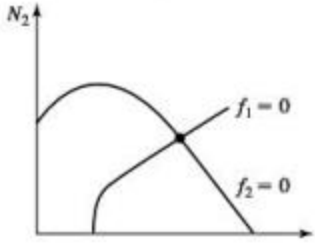
Suponga que cuando la abundancia de ambas especies es baja, su abundancia aumenta y que f_1 y f_2 cambian de signo cuando cruzan sus isoclinas cero. En cada problema, determine la estructura de signos de la matriz comunitaria en el equilibrio no trivial (que se indica con un punto), basándose en la gráfica de las isoclinas cero. Determine la estabilidad de los equilibrios si es posible.

35. *Véase* la Figura 11.66.



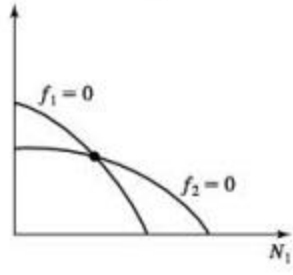
◀ **Figura 11.66**

35. *Véase* la Figura 11.67.



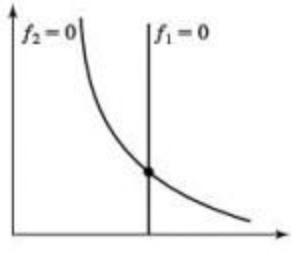
◀ **Figura 11.67**

37. *Véase* la Figura 11.68.



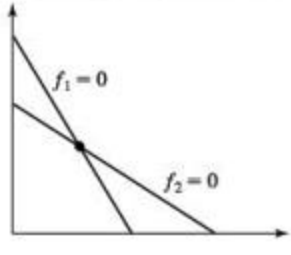
◀ **Figura 11.68**

38. *Véase* la Figura 11.69.



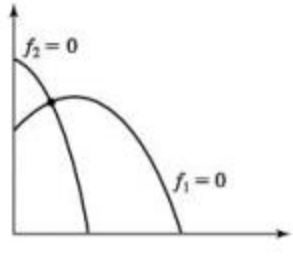
◀ **Figura 11.69**

39. *Véase* la Figura 11.70.



◀ **Figura 11.70**

40. *Véase* la Figura 11.71.



◀ **Figura 11.71**

41. Suponga que los elementos a_{ii} de la diagonal de la matriz comunitaria de una colección de especies en equilibrio son negativos. Explique por qué esto implica que la especie i se autorregula.

42. Considere una comunidad compuesta por dos especies. Suponga que las dos especies se inhiben a sí mismas. Explique por qué las interacciones mutualista y de competencia conducen a predicciones cualitativamente similares sobre la estabilidad de los correspondientes equilibrios. Es decir, demuestre que si $A = [a_{ij}]$ es la matriz comunitaria en equilibrio para el caso del mutualismo, y si $B = [b_{ij}]$ es la matriz comunitaria en equilibrio para el caso de la competencia entonces se cumple lo siguiente: si $|a_{ij}| = |b_{ij}|$ para $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, entonces o ambos equilibrios son localmente estables o ambos inestables.

43. El modelo clásico de Lotka-Volterra de la depredación es

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP$$

$$\frac{dP}{dt} = cNP - dP$$

donde $N = N(t)$ es la densidad de presas en el instante t y $P = P(t)$ es la densidad de depredadores en el instante t. Las constantes a, b, c y d son positivas.

(a) Calcule el equilibrio no trivial $(\hat{N}, \hat{P})$ con $\hat{N} > 0$ y $\hat{P} > 0$.

(b) Calcule la matriz comunitaria correspondiente al equilibrio no trivial.

(c) Explique los elementos de la matriz comunitaria obtenidos en (b) en términos de cómo los individuos de esta comunidad se influyen entre sí.

44. El modelo modificado de Lotka-Volterra de la depredación es

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - bNP$$

$$\frac{dP}{dt} = cNP - dP$$

donde $N = N(t)$ es la densidad de presas en el instante t y $P = P(t)$ es la densidad de depredadores en el instante t. Las constantes a, b, c, d y K son positivas. Suponga además que $d/c < K$.

(a) Calcule el equilibrio no trivial $(\hat{N}, \hat{P})$ con $\hat{N} > 0$ y $\hat{P} > 0$.

(b) Calcule la matriz comunitaria correspondiente al equilibrio no trivial.

(c) Explique los elementos de la matriz comunitaria obtenidos en (b) en términos de cómo los individuos de esta comunidad se influyen entre sí.

(11.4.4)

45. Utilice una calculadora gráfica para estudiar el siguiente ejemplo del modelo de Fitzhugh-Nagumo.

$$\frac{dV}{dt} = -V(V - 0.3)(V - 1) - w$$

$$\frac{dw}{dt} = 0.01(V - 0.4w)$$

Dibuje la gráfica de la curva de solución en el plano $V - w$ cuando (i) $(V(0), w(0)) = (0.4, 0)$ y (ii) $(V(0), w(0)) = (0.2, 0)$.

46. Utilice una calculadora gráfica para estudiar el siguiente ejemplo del modelo de Fitzhugh-Nagumo.

$$\frac{dV}{dt} = -V(V - 0.6)(V - 1) - w$$

$$\frac{dw}{dt} = 0.03(V - 0.6w)$$

Dibuje la gráfica de la curva de solución en el plano $V - w$ cuando (i) $(V(0), w(0)) = (0.8, 0)$ y (ii) $(V(0), w(0)) = (0.4, 0)$.

47. Suponga el siguiente ejemplo del modelo de Fitzhugh-Nagumo.

$$\frac{dV}{dt} = -V(V - 0.3)(V - 1) - w$$

$$\frac{dw}{dt} = 0.01(V - 0.4w)$$

Asuma que $w(0) = 0$. ¿Para qué valores iniciales de $V(0)$ se puede observar potencial de acción?

48. Suponga el siguiente ejemplo del modelo de Fitzhugh-Nagumo.

$$\frac{dV}{dt} = -V(V - 0.6)(V - 1) - w$$

$$\frac{dw}{dt} = 0.03(V - 0.6w)$$

Asuma que $w(0) = 0$. ¿Para qué valores iniciales de $V(0)$ se puede observar potencial de acción?

(11.4.5)

En los Problemas 49-52, utilice la ley de acción de masas para transformar las reacciones químicas en sistemas de ecuaciones diferenciales.

49. $A + B \xrightarrow{k} C$

50. $A + B \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftarrows}} C$

51. $E + S \xrightarrow{k_1} ES \xrightarrow{k_2} E + P$

52. $A + B \xrightarrow{k} A + C$

53. Demuestre que el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales tiene una cantidad conservada, y calcúlela.

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y - 2x$$

54. Demuestre que el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales tiene una cantidad conservada, y calcúlela.

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + 2x$$

55. Demuestre que el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales tiene una cantidad conservada, y calcúlela.

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2xy + z$$
$$\frac{dy}{dt} = -2xy$$
$$\frac{dz}{dt} = x - z$$

56. Suponga que $x(t) + y(t)$ es una cantidad conservada. Si

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2xy$$

calcule la ecuación diferencial de $y(t)$.

57. La ley de Michaelis-Menten (Ecuación (11.76)) establece que

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_m s}{K_m + s}$$

siendo $p = p(t)$ la concentración del producto de la reacción enzimática en el instante t, $s = s(t)$ la concentración del substrato en el instante t, y v_m y K_m son constantes positivas. Sea

$$f(s) = \frac{v_m s}{K_m + s}$$

siendo v_m y K_m constantes positivas.

(a) Demuestre que

$$\lim_{s \to \infty} f(s) = v_m$$

(b) Demuestre que

$$f(K_m) = \frac{v_m}{2}$$

(c) Demuestre que para $s \geqslant 0$, $f(s)$ es (i) no negativa, (ii) creciente y (iii) cóncava. Dibuje una gráfica de $f(s)$. Señale v_m y K_m en la gráfica.

(d) Explique por qué se ha dicho que la velocidad de reacción dp/dt está limitada por la disponibilidad del sustrato.

58. El crecimiento de microbios en un quimiostato se ha modelado mediante la Ecuación (11.77). Utilizando la notación de dicha ecuación con

$$q(s) = \frac{v_m s}{K_m + s}$$

siendo v_m y K_m constantes positivas, estudiaremos cómo depende de la concentración de sustrato en equilibrio $\hat{s}$ de la constante de rendimiento Y.

(a) Suponga que los microbios tienen una densidad de equilibrio positiva. Calcule algebraicamente la concentración de equilibrio $\hat{s}$ y estudie cómo afecta a $\hat{s}$ la constante de rendimiento Y.

(b) Suponga que los microbios tienen una densidad en equilibrio positiva. Dibuje una gráfica de $q(s)$ y explique cómo se determinaría $\hat{s}$ gráficamente. Utilice la gráfica para explicar cómo afecta a $\hat{s}$ la constante de rendimiento Y.

59. El crecimiento de microbios en un quimiostato se ha modelado mediante la Ecuación (11.77). Utilizando la notación de dicha ecuación con

$$q(s) = \frac{v_m s}{K_m + s}$$

siendo v_m y K_m constantes positivas, estudiaremos cómo depende de la concentración de sustrato en equilibrio $\hat{s}$ de D, la velocidad con la que el medio entra al quimiostato.

(a) Suponga que los microbios tienen una densidad de equilibrio positiva. Calcule algebraicamente la concentración de equilibrio $\hat{s}$ y estudie cómo afecta a $\hat{s}$ la velocidad D.

(b) Suponga que los microbios tienen una densidad de equilibrio positiva. Dibuje una gráfica de $q(s)$ y explique cómo se determinaría $\hat{s}$ gráficamente. Utilice la gráfica para explicar cómo afecta a $\hat{s}$ la velocidad D.

En los Problemas 60-61, se estudian ejemplos específicos de crecimiento microbiano descrito por la Ecuación (11.77). Se utilizará la notación de la Sección 11.4.5. Determine en cada caso los equilibrios y su estabilidad.

60.
$$\frac{ds}{dt} = 2(4 - s) - \frac{3s}{2 + s}x$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{sx}{2 + s} - 2x$$

61.
$$\frac{ds}{dt} = 2(4 - s) - \frac{3s}{1 + s}x$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3sx}{1 + s} - 2x$$

11.5. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 11: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Ecuación lineal de primer orden
2. Homogénea
3. Campo direccional, campo de pendientes, vector direccional
4. Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales
5. Autovector, autovalor
6. Principio de superposición
7. Solución general
8. Estabilidad
9. Sumidero o nodo estable
10. Ensilladura
11. Fuente o nodo inestable
12. Espiral
13. Fórmula de Euler
14. Modelo de compartimientos
15. Cantidad conservada
16. Oscilador armónico
17. Sistema de ecuaciones diferenciales autónomo y no lineal
18. Punto crítico
19. Isoclinas cero
20. Método gráfico para la estabilidad
21. Modelo de Lotka-Volterra de competencia interespecífica
22. Competencia interespecífica, competencia intraespecífica
23. Exclusión competitiva, control por fundadores, coexistencia
24. Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra
25. Matriz comunitaria
26. Modelo de Fitzhugh-Nagumo
27. Potencial de acción
28. Ley de Michaelis-Menten

11.6. PROBLEMAS DE REPASO

1. Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ los respectivos tamaños de dos poblaciones en el instante t, y suponga que su dinámica está dada por

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2$$

siendo r_1 y r_2 constantes positivas que indican la velocidad de crecimiento intrínseca de las dos poblaciones. Sea $Z(t) = N_1(t)/N_2(t)$; demuestre que $Z(t)$ cumple

$$\frac{d}{dt}\ln Z(t) = r_1 - r_2 \tag{11.91}$$

Resuelva (11.91) y demuestre que $\lim_{t\to\infty} Z(t) = \infty$ si $r_1 > r_2$. A partir de esto, concluya que la población 1 se hace numéricamente dominante cuando $r_1 > r_2$.

2. Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ los respectivos tamaños de dos poblaciones en el instante t, y suponga que su dinámica está dada por

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2$$

siendo r_1 y r_2 constantes positivas que indican la velocidad de crecimiento intrínseca de las dos poblaciones. Denomine $N(t)$ al tamaño combinado de la población en el instante t. Es decir, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Defina las proporciones relativas

$$p_1 = \frac{N_1}{N} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{N_2}{N}$$

Utilice el hecho de que $p_1/p_2 = N_1/N_2$ para demostrar que

$$\frac{dp_1}{dt} = p_1(1 - p_1)(r_1 - r_2)$$

Demuestre que si $r_1 > r_2$ y $0 < p_1(0) < 1$, $p_1(t)$ crecerá para $t > 0$ y la población 1 se hará numéricamente dominante.

3. Una característica no realista del modelo de Lotka-Volterra es que las presas tienen un crecimiento ilimitado en ausencia del depredador. El modelo descrito por el sistema siguiente remedia este problema (concretamente, se supone que las presas evolucionan de acuerdo con el crecimiento logístico en ausencia del depredador. Las otras características del modelo se mantienen)

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right) - 3PN \\ \frac{dP}{dt} &= PN - 3P \end{aligned} \tag{11.92}$$

(a) Dibuje las isoclinas cero de (11.92).

(b) Utilice el método gráfico de la Subsección 11.3.2 para determinar si el equilibrio no trivial es localmente estable.

4. Tilman (1982) desarrolló un marco teórico para analizar la competencia de las plantas por recursos. En su forma más simple, una especie compite por un único recurso, por ejemplo, nitrógeno. Si $B(t)$ indica la biomasa total en el instante t y $R(t)$ la cantidad de recurso disponible en el instante t, la dinámica se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dB}{dt} = B[f(R) - m]$$

$$\frac{dR}{dt} = a(S - R) - cBf(R)$$

La primera ecuación describe la velocidad de crecimiento de biomasa, la función $f(R)$ describe cómo depende del recurso la velocidad de crecimiento de la especie y m es la velocidad de pérdida específica. La segunda ecuación describe la dinámica del recurso: la constante S es la máxima cantidad de recurso en un determinado hábitat. La velocidad de suministro del recurso (dR/dt) se supone proporcional a la diferencia entre el nivel actual de recurso y la máxima cantidad de recurso. La constante a es la constante de proporcionalidad. El término $cBf(R)$ describe la toma de recurso por las plantas. La constante c se puede considerar un factor de conversión.

En lo que sigue se supone que $f(R)$ se ajusta a la función de crecimiento de Monod:

$$f(R) = \frac{dR}{k + R}$$

siendo d y k constantes positivas.

(a) Calcule todos los equilibrios. Demuestre que si $d > m$ y $S > mk/(d - m)$, entonces existe un equilibrio no trivial.

(b) Dibuje las isoclinas cero para el caso en el que el sistema admita un equilibrio no trivial. Utilice el método gráfico para analizar la estabilidad de dicho equilibrio.

5. A continuación se describe un modelo simple de competencia en el que dos especies de plantas compiten por espacio libre. Suponga que el hábitat completo se divide en un gran número de zonas. Cada zona puede ser ocupada como mucho por una especie. Sea $p_i(t)$ la fracción de zonas ocupadas por la especie i. Nótese que $0 \leqslant p_1(t) + p_2(t) \leqslant 1$. La dinámica se describe mediante las ecuaciones

$$\frac{dp_1}{dt} = c_1 p_1(1 - p_1 - p_2) - m_1 p_1$$

$$\frac{dp_1}{dt} = c_2 p_2(1 - p_1 - p_2) - m_2 p_2$$

siendo c_1, c_2, m_1 y m_2 constantes positivas. El primer término de los miembros derechos de las ecuaciones describe la colonización de las zonas vacantes y el segundo término describe cómo las zonas ocupadas quedan vacantes.

(a) Demuestre que la dinámica de la especie 1 en ausencia de la especie 2 está dada por

$$\frac{dp_1}{dt} = c_1 p_1(1 - p_1) - m_1 p_1 \tag{11.93}$$

y calcule condiciones para c_1 y m_1 de forma que (11.93) admita un equilibrio no trivial en el que $0 < p_1 \leqslant 1$.

(b) Suponga ahora que $c_1 > m_1$ y $c_2 > m_2$. Demuestre que si

$$\frac{c_1}{m_1} > \frac{c_2}{m_2}$$

entonces la especie 1 desplazará a la especie 2 si inicialmente ocupa una fracción positiva de las zonas.

6. (*Paradoja del enriquecimiento*) Rosenzweig (1971) analizó diversos modelos depredador-presa y concluyó que el enriquecimiento del sistema aumentando el suministro de nutrientes desestabiliza el equilibrio no trivial. Supongamos que el sistema depredador-presa es un sistema de herbívoros-plantas en el que las plantas representan las presas y los herbívoros a los depredadores. Los modelos analizados eran de la forma

$$\frac{dN}{dt} = f(N, P) \tag{11.94}$$

$$\frac{dP}{dt} = g(N, P) \tag{11.95}$$

siendo $N = N(t)$ la abundancia de plantas en el instante t y $P = P(t)$ la abundancia de herbívoros en el instante t. Todos los modelos comparten la propiedad de que la isoclina cero de los herbívoros es una recta vertical y que la isoclina cero de las plantas es una curva con forma de joroba. Estudiaremos uno de los modelos, concretamente,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - bP(1 - e^{-rN}) \\ \frac{dP}{dt} &= cP(1 - e^{-rN}) - dP \end{aligned} \tag{11.96}$$

(a) Calcule las isoclinas cero de (11.96) y demuestre que (i) la isoclina cero de los herbívoros ($dP/dt = 0$) es una recta vertical en el plano $N - P$, y (ii) la isoclina cero de las plantas ($dN/dt = 0$) corta al eje N en $N = K$.

(b) Dibuje las isoclinas cero en el plano $N - P$ para $a = b = c = r = 1$ y $d = 0.9$ y para tres niveles de la capacidad de alojamiento: (i) $K = 1$, (ii) $K = 4$ y (iii) $K = 10$.

(c) Para cada una de las tres capacidades de alojamiento, determine si existe un equilibrio no trivial.

(d) Utilice el método gráfico de la Subsección 11.3.2 para determinar la estabilidad de los equilibrios no triviales de (c).

(e) Enriquecer la comunidad podría suponer aumentar la capacidad de alojamiento de las plantas. Por ejemplo, añadir nitrógeno o fósforo a las comunidades de plantas suele producir un aumento de la biomasa, que se puede interpretar como un aumento de la capacidad de alojamiento de las plantas (el valor de K). Basándose en las respuestas de (d), explique por qué al enriquecer la comunidad (es decir, al aumentar la capacidad de alojamiento de las plantas), se puede producir una desestabilización del equilibrio no trivial ¿Cuáles son las consecuencias?

7. El crecimiento de los microbios en un quimiostato se ha descrito con la Ecuación (11.77). Estudiaremos cómo depende la abundancia microbiana en el equilibrio de las características del sistema.

(a) Suponga que $q(s)$ es una función no negativa. Demuestre que la abundancia de microbios en equilibrio, $\hat{x}$, está dada por

$$\hat{x} = Y(s_0 - \hat{s})$$

siendo $\hat{s}$ la abundancia de sustrato en equilibrio. ¿Cuándo es $\hat{x} > 0$?

(b) Suponga ahora que

$$q(s) = \frac{v_m s}{K_m + s}$$

Estudie cómo afectan a la abundancia de microbios en el equilibrio la velocidad de asimilación Y, y la velocidad D con la que entra nuevo medio al quimiostato.

8. (*Nicho sucesorio*) Pacala y Rees (1998) estudiaron un modelo matemático simple de competencia para explicar la diversidad sucesoria por medio de un mecanismo de nichos sucesorios. En este modelo dos especies, una sucesoria temprana y otra sucesoria tardía ocupan zonas discretas. Cada zona experimenta perturbaciones (como incendios) con una tasa D. Después de la perturbación de una zona, ambas especies están presentes. Sin embargo, con el transcurso del tiempo, la especie sucesoria tardía desplaza a la especie sucesoria temprana, con lo que esta última se extingue. Este cambio de una zona ocupada por ambas especies a una zona ocupada sólo por la especie sucesoria tardía ocurre con una tasa a. Se denomina $x(t)$ al número de zonas ocupadas por ambas especies en el instante t e $y(t)$ al número de zonas ocupadas por la especie sucesoria tardía. La dinámica se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + Dy \\ \frac{dy}{dt} &= ax - Dy \end{aligned} \tag{11.97}$$

siendo a y D constantes positivas.

(a) Demuestre que todos los equilibrios son de la forma $(x, ax/D)$.

(b) Calcule los autovalores y autovectores correspondientes a cada equilibrio.

(c) Demuestre que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

es una solución de (11.97), siendo $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ el autovector correspondiente al autovalor cero y $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ el autovector correspondiente al autovalor distinto de cero λ_2.

(d) Demuestre que $x(t) + y(t)$ no depende de t [*sugerencia*: demuestre que $\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = 0$]. Demuestre que la recta $x + y = A$ (siendo A una constante) es paralela a la recta en la dirección del autovector correspondiente al autovalor distinto de cero.

(e) Demuestre que las isoclinas cero de (11.97) son

$$y = \frac{a}{D}x$$

y que esta recta está en la dirección del autovector correspondiente al autovalor cero.

(f) Suponga ahora que $x(t) + y(t) = c$, siendo c una constante positiva. Demuestre que (11.97) se puede reducir sólo a una ecuación, concretamente,

$$\frac{dx}{dt} = -(a + D)x + Dc$$

Demuestre que $\hat{x} = c\frac{D}{D+a}$ es el único equilibrio, y determine su estabilidad.

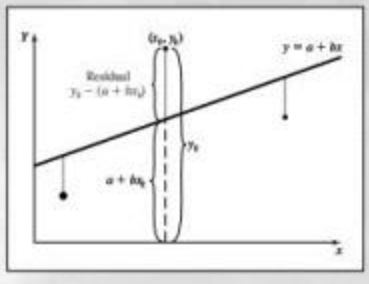
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

CAPÍTULO 12

Concluiremos este libro con un capítulo sobre probabilidad y estadística. Aunque ninguna de las dos disciplinas es parte del cálculo, se basan en el cálculo. Ambas proporcionan herramientas indispensables para las ciencias de la vida.

Muchos fenómenos de la naturaleza no son deterministas. Por nombrar algunos ejemplos, el numero de huevos en la puesta de un ave, la duración de la vida de un organismo, la herencia de los genes, o el número de personas infectadas durante un brote epidémico. Para tratar la aleatoriedad inherente a los fenómenos naturales, hay que desarrollar herramientas especiales, que son las suministradas por las disciplinas de la probabilidad y la estadística.

Una breve descripción del papel de la probabilidad y la estadística en las ciencias de la vida puede ser ésta: la teoría de la probabilidad proporciona herramientas para modelar la aleatoriedad y constituye la base de la estadística. La estadística proporciona herramientas para analizar los datos de los experimentos científicos.



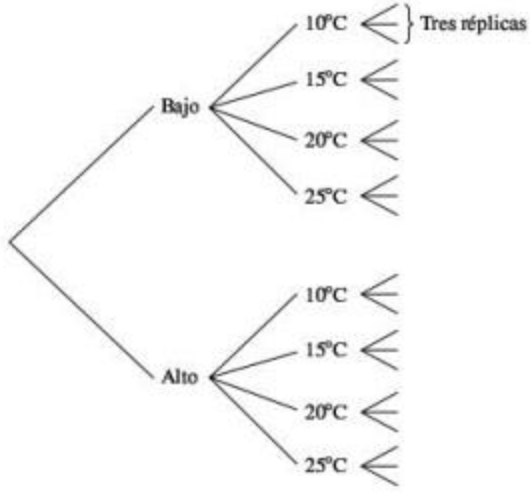
12.1 CONTEO

A menudo es necesario contar las formas en las que se puede realizar una determinada tarea. La rama matemática de la **combinatoria** trata de estos problemas de enumeración. Frecuentemente, el número total de formas posibles es muy grande, lo que hace impracticable contar una a una todas las combinaciones posibles. Existen tres principios básicos de conteo que nos permitirán contar de una forma más sistemática: el primero de ellos es el principio de multiplicación y los otros dos se desprenden de éste.

12.1.1 El principio de multiplicación

Para ilustrar el principio, utilizaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 Imagine que se desea controlar experimentalmente las condiciones de crecimiento de plantas, por ejemplo de la especie de hierba *Andropogon gerardi*. Se desea que las plantas crezcan en recipientes en un invernadero con dos diferentes niveles de fertilizante (bajo y alto) y a cuatro temperaturas diferentes (10°C, 15°C, 20°C y 25°C). Si se desea disponer de tres réplicas de cada posible combinación de tratamiento de fertilizante y temperatura. ¿Cuántos recipientes serán necesarios?



▲ **Figura 12.1**
Diagrama de árbol que ilustra cuántos recipientes son necesarios para el experimento descrito en el Ejemplo 1

Solución

Se puede responder a la pregunta utilizando un diagrama de árbol, como se muestra en la Figura 12.1. Observando el diagrama, vemos que se necesitan

$$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

recipientes para nuestro experimento. ◀

El principio de conteo que acabamos de utilizar se denomina principio de multiplicación, que se puede resumir como sigue.

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Sea un experimento consistente en m tareas ordenadas. La tarea 1 tiene n_1 posibles resultados, la tarea 2 tiene n_2 posibles resultados, ..., y la tarea m tiene n_m posibles resultados. El número total de posibles resultados del experimento es

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_m$$

Volviendo de nuevo al Ejemplo 1 de crecimiento de plantas en recipientes, vemos que el experimento consta de tres tareas: primero, seleccionar el nivel de fertilizante, segundo, seleccionar la temperatura y tercero, replicar tres veces cada combinación de temperatura y fertilizante. Las tareas sucesivas se ilustran en el diagrama de árbol, y el número total de recipientes necesarias para el experimento se puede obtener contando el número de ramas finales del árbol.

Presentaremos un ejemplo más para ilustrar el principio de multiplicación.

▶ Ejemplo 2 Suponga que tras un largo día en un invernadero decidimos encargar pizza. Llamamos a una casa local de pizzas y allí nos dicen que hay tres tipos de masa y cinco tipos de ingredientes, y que además se puede encargar la pizza con queso o sin queso. Si sólo deseamos un ingrediente, ¿cuántas opciones diferentes de pizza tenemos?

Solución

Nuestro «experimento» consiste en encargar una pizza, y conlleva tres tareas. La primera tarea es escoger el tipo de masa, la segunda, elegir el ingrediente, y la tercera, decidir si la queremos con queso o no. Utilizando el principio de multiplicación, se obtiene que hay

$$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

tipos diferentes de pizza que podemos encargar. ◀

12.1.2 Permutaciones

Ejemplo 3 Supongamos que se cultivan plantas en un invernadero. Para controlar las condiciones de variación espacial del entorno, se reordenan los recipientes todos los días. Si hay seis recipientes sobre un banco ¿de cuántas formas se pueden ordenar los recipientes?

Solución

Para responder a esta pregunta, imaginemos que los recipientes se ordenan en el banco de izquierda a derecha. Hay seis posibilidades para el recipiente que está más a la izquierda. Para la posición siguiente, se puede escoger cualquiera de los cinco recipientes restantes, para la tercera posición, cualquiera de los cuatro recipientes restantes, y así sucesivamente, hasta que sólo queda un recipiente para colocar en la posición más a la derecha. Utilizando el principio de multiplicación, se obtiene que hay

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

formas de ordenar los seis recipientes en el banco. ◀

Como notación abreviada para el tipo de productos descendentes de enteros positivos que aparece en el Ejemplo 3, se define

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y se lee «n factorial». Entonces, se puede escribir 6! en vez de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Se define

$$0! = 1$$

Entonces, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

La cantidad $n!$ crece muy rápidamente. Supongamos que en vez de seis vasijas hubiera 7. Habría entonces $7! = 5040$ formas de ordenar los siete recipientes. Con doce recipientes habría $12! = 479\,001\,600$ formas posibles de ordenarlos.

Presentaremos otro ejemplo y después, el principio general.

Ejemplo 4 Suponga que un equipo de atletismo tiene 10 velocistas, y cuatro cualesquiera de ellos pueden formar un equipo de relevos. Suponga que cada atleta puede correr en cualquier posición del equipo. ¿Cuántos equipos se pueden formar si los equipos formados por las mismas personas corriendo en posiciones diferentes se consideran equipos distintos?

Solución

Seleccionaremos los miembros del equipo en el orden en el que corren. Hay diez velocistas disponibles para la primera posición. Tras haber escogido a una persona para la primera posición, quedan nueve a escoger para la segunda posición. Para la tercera posición, tenemos que escoger una de las ocho personas restantes y final-

mente, para la cuarta posición, se puede seccionar una de las siete personas que quedan. Utilizando el principio de multiplicación, se obtiene que hay

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

equipos de relevos diferentes. ◀

En el Ejemplo 3 hemos seleccionado $k = 6$ objetos de un conjunto de $n = 6$ y el orden de selección era importante. En el Ejemplo 4 hemos seleccionado $k = 4$ objetos de un conjunto de $n = 10$, y de nuevo el orden de selección era importante. Este tipo de selecciones se denominan **permutaciones**. Utilizando el principio de multiplicación, se puede obtener el número de permutaciones posibles.

PERMUTACIONES

Una **permutación** de n diferentes objetos tomados de k en k es un subconjunto *ordenado* de k objetos de los n. El número de formas en las que se puede escoger ese subconjunto se denomina $P(n, k)$ y es

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Nótese que el último término del producto que define a $P(n, k)$ es de la forma $(n - k + 1)$, ya que hay k factores descendentes y el primer término es n.

Volviendo al Ejemplo 3, donde se deseaban seleccionar seis objetos de seis en una disposición ordenada, podemos utilizar ahora la regla de las permutaciones para calcular el número de formas en las que se puede realizar la selección. Haciendo $n = 6$ y $k = 6$ se obtiene

$$P(6, 6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

como número de ordenaciones de los recipientes. Como el producto consta de seis términos en orden descendente, empezando en 6, el último término es $n - k + 1 = 6 - 6 + 1 = 1$.

Volviendo al Ejemplo 4, donde se deseaban seleccionar cuatro de diez velocistas en una disposición ordenada, podemos utilizar ahora la regla de las permutaciones para calcular el número de formas en las que se puede realizar la selección. Haciendo $n = 10$ y $k = 4$ se obtiene

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

como número de equipos de relevos diferentes. Como el producto consta de cuatro términos en orden descendente, empezando en 10, el último término es $n - k + 1 = 10 - 4 + 1 = 7$.

Otra forma de obtener $P(n, k)$ es realizando el cálculo

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2)\cdot(n-k+1)\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

cuyo resultado es simplemente

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{12.1}$$

Presentamos ahora otro ejemplo antes de introducir el tercer principio de conteo.

▶ Ejemplo 5 ¿Cuántas palabras de cinco letras sin letras repetidas se pueden formar utilizando las 26 letras del alfabeto? (Nótese que una «palabra» en el sentido de este ejercicio no tiene que estar en el diccionario.)

Solución

Hay que escoger 5 letras de 26, y el orden es importante. Por tanto hay

$$P(26, 5) = \frac{26!}{21!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$$

palabras diferentes. ◀

12.1.3 Combinaciones

Cuando se escoge una permutación, el orden de los objetos es importante. Si el orden no fuera importante, ¿cómo se podría calcular el número de selecciones?

Volvamos al Ejemplo 4, donde se formaba un equipo de relevos. El orden de los componentes del equipo es importante cuando van a correr realmente. Pero si sólo deseáramos saber qué personas componen el equipo, el orden no sería importante. Vimos que había $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ equipos de relevos diferentes. Pero como cuatro personas se pueden disponer de $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas diferentes, cada selección de 4 personas forma 24 equipos diferentes si se tiene en cuenta el orden. Si se divide $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ por $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ se obtiene el número de formas de las que se pueden escoger cuatro personas para formar un equipo si el orden no es importante. Se obtiene que este número es

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Estas selecciones no ordenadas se conocen como **combinaciones**. El método que hemos utilizado nos sirve para dar una fórmula general del número de combinaciones, que se resume en el siguiente recuadro.

COMBINACIONES

Una **combinación** de n diferentes objetos tomados de k en k es subconjunto *no ordenado* de k objetos de los n. En número de formas en que se puede escoger ese subconjunto se denomina $C(n, k)$ y es

$$C(n, k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

En vez de $C(n, k)$ a veces se escribe $\binom{n}{k}$ que se lee «n sobre k». El símbolo $\binom{n}{k}$ se denomina **coeficiente binomial**. Utilizando (12.1) se obtiene

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{12.2}$$

Observando el miembro derecho de la ecuación, vemos que es igual a $\binom{n}{n-k}$. Por tanto, se cumple la igualdad

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{12.3}$$

El siguiente argumento de conteo explica también la anterior igualdad. La expresión $\binom{n}{k}$ indica el número de formas en que se puede seleccionar un subconjunto no ordenado de tamaño k de un conjunto de tamaño n. En lugar de escoger los elementos que van en cada subconjunto, podrían escogerse en cada selección los que no van en cada subconjunto. De éstos, hay $n - k$, y se pueden seleccionar de $\binom{n}{n-k}$ formas diferentes.

Se puede deducir otra igualdad haciendo $k = 0$ en (12.2) y teniendo en cuenta que $0! = 1$. Entonces,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

Esta igualdad se puede explicar también utilizando el siguiente argumento de conteo. La expresión $\binom{n}{0}$ significa que se selecciona un subconjunto de tamaño 0 de un conjunto de tamaño n, y el orden no es importante. Sólo existe un subconjunto que se puede escoger, y es el conjunto vacío. Análogamente, $\binom{n}{n}$ significa que se escoge un subconjunto de n objetos de un conjunto de tamaño n, y el orden no es importante. Sólo hay una forma de hacer esto, que es escoger el conjunto completo de n objetos.

Se puede utilizar un razonamiento similar para argumentar que $\binom{n}{1} = n$. Esto representa el número de formas en que se puede escoger un subconjunto de tamaño 1 de un conjunto de tamaño n, y el orden no es importante. Hay n subconjuntos de ese tipo, concretamente, los subconjuntos con un solo elemento [realmente, el orden no juega ningún papel cuando se consideran subconjuntos de un solo elemento, como refleja el hecho de que también se cumple que $P(n, 1) = n$].

Veamos otro ejemplo en que se usa la regla de conteo de combinaciones.

Ejemplo 6 Suponga que se desea plantar cinco especies diferentes de hierba en una parcela. Se puede escoger entre doce especies diferentes. ¿Cuántas posibilidades hay?

Solución

Como el orden no es importante en la selección, hay

$$C(12, 5) = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$$

posibilidades de selección diferentes. Alternativamente, podríamos haber escrito

$$C(12, 5) = \binom{12}{5} = \frac{P(12, 5)}{5!}$$

Ambas expresiones son equivalentes. ◀

Como último ejemplo de esta subsección, demostraremos el binomio de Newton, que apareció en el Capítulo 4 cuando se utilizó la definición formal de derivada para demostrar la regla de derivación de la función $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo.

Ejemplo 7 Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{12.4}$$

Solución

El término $(x + y)^n$ consta de n factores $(x + y)$. Cuando se realiza la multiplicación, cada factor contribuye a x o a y. Por tanto, el producto consta de términos de la forma $x^k y^{n-k}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Cada término $x^k y^{n-k}$ aparece $\binom{n}{k}$ veces ya que hay $\binom{n}{k}$ formas de seleccionar k veces el factor x de los n factores $(x + y)$. Por tanto, se obtiene (12.4). ◀

12.1.4 Combinación de los principios de conteo

Frecuentemente, la parte difícil del conteo es decidir qué regla utilizar. Para ganar algo de experiencia, presentaremos varios ejemplos en los que se combinan los tres principios de conteo.

Ejemplo 8 ¿Cuántas palabras diferentes de once letras se pueden formar utilizando las letras de la palabra MISSISSIPPI?

Solución

Hay cuatro S, cuatro I, dos P y una M. Hay 11! formas de disponer estas letras, pero algunas de las palabras serán indistinguibles, ya que las letras repetidas en la palabra se pueden intercambiar sin crear una palabra nueva. Por tanto, tenemos que dividir por el orden de las letras repetidas. Obtenemos entonces que hay

$$\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34\,650$$

palabras diferentes. ◀

Ejemplo 9 Volviendo al Ejemplo 2, supongamos que deseamos dos ingredientes diferentes en nuestra pizza. ¿Cómo afecta esto al resultado?

Solución

Como hay cinco ingredientes y el orden en que se escogen no es importante, hay $\binom{5}{2}$ posibilidades para los ingredientes. Todo lo demás es lo mismo, por lo que se obtiene que hay

$$3 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 = 60$$

pizzas diferentes a escoger. ◀

Ejemplo 10 Suponga que una placa de licencia consta de tres letras seguidas de tres números. ¿Cuántas placas de licencia puede haber, si se permite la repetición de letras pero no de números?

Solución

En este caso el orden es importante. Para cada letra hay 26 posibilidades, ya que se permite la repetición. Hay diez posibilidades para el primer número, nueve para el segundo y ocho para el tercero, ya que no se permite la repetición de números. Por tanto hay

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 12\,654\,720$$

placas de licencia diferentes con la restricción anterior. ◀

Ejemplo 11 Una urna contiene seis bolas verdes y cuatro bolas azules. Se extraen aleatoriamente tres bolas sin reposición. ¿Cuántas extracciones diferentes contienen exactamente dos bolas verdes y una bola azul?

Solución

El orden de la extracción no es importante. Para obtener dos bolas verdes y una bola azul, se seleccionan dos de las seis verdes y una de las cuatro azules y después se combinan las selecciones. Es decir, hay

$$\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 60$$

extracciones diferentes. ◀

En el ejemplo anterior, se ha dicho explícitamente que todas las bolas son distinguibles, y a partir de ahora supondremos que los objetos que seleccionamos son distinguibles, sin indicarlo explícitamente. Nuestro principio de conteo se aplica sólo a objetos distinguibles, como se ha supuesto en la definición («n objetos diferentes»). Hay casos en física donde los objetos (por ejemplo, electrones) no son distinguibles, pero no los consideraremos aquí.

Ejemplo 12 Se dispone de semillas de cinco plantas anuales diferentes. Dos producen flores amarillas y las otras tres producen flores azules. Se desea componer un parterre de jardín con tres plantas anuales diferentes, pero no se desea que estén las dos variedades de flor amarilla. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?

Solución

Las posibles selecciones contienen o bien sólo plantas con flores azules, o una planta con flor amarilla y dos con flores azules. Hay que escoger tres plantas de las cinco disponibles. Existen $\binom{3}{3}\binom{2}{0}$ posibles opciones para un parterre sólo con flores azules, y $\binom{3}{2}\binom{2}{1}$ posibilidades para un parterre con sólo una planta de flores amarillas. Por tanto, sumando los dos casos, hay

$$\binom{3}{3}\binom{2}{0} + \binom{3}{2}\binom{2}{1} = (1)(1) + (3)(2) = 7$$

posibilidades diferentes.

Alternativamente, se podría haber resuelto este problema de la siguiente forma. Hay un total de $\binom{5}{3}$ formas de seleccionar tres plantas de las cinco disponibles. Las selecciones que contienen las dos plantas de flores amarillas y una planta de flores azules no son aceptables. De éstas, hay $\binom{3}{1}\binom{2}{2}$. No hay selecciones con las tres plantas de flores amarillas y ninguna de flores azules ya que sólo se dispone de dos plantas con flores amarillas. Todas las otras opciones son aceptables. Por tanto, hay

$$\binom{5}{3} - \binom{3}{1}\binom{2}{2} = 10 - (3)(1) = 7$$

selecciones diferentes. ◀

Ejemplo 13 Una baraja francesa de cartas contiene 52 cartas, con cuatro palos, y cada palo tiene 13 valores diferentes. En el juego del póquer, una mano tiene cinco cartas, que se escogen aleatoriamente de la baraja sin reposición.

(a) ¿Cuántas manos posibles hay?

(b) ¿Cuántas manos constan de una sola pareja (es decir, dos cartas del mismo valor y las otras tres de valores distintos?

Solución

(a) Hay

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

cinco formas diferentes de escoger cinco cartas de una baraja de 52 cartas.

(b) Para escoger sólo una pareja, se asigna primero el valor de la pareja (13 valores) y después se escogen sus palos [$\binom{4}{2}$ formas]. Las tres cartas restantes deben tener todas valores diferentes a los de la pareja y diferentes entre sí [$\binom{12}{3}$ formas]. Hay 4 maneras de asignar un palo a cada carta, y por tanto un total de 4^3 formas. Combinando los diferentes pasos, se obtiene que hay

$$13 \cdot \binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3 = 1\,098\,240$$

formas de obtener solamente una pareja. ◀

12.1.5. Problemas

(12.1.1)

1. Suponga que se desea investigar la influencia de la luz y de los niveles de fertilizante en el desarrollo de las plantas. Se planea utilizar cinco fertilizantes y dos niveles de luz. Para cada combinación de fertilizante y de nivel de luz, se harán cuatro réplicas. ¿Cuál es el número total de réplicas?

2. Suponga que se desea investigar el efecto del daño en las hojas en el desarrollo de plantas sometidas a sequía. Se planea utilizar tres niveles de daño en las hojas y cuatro protocolos de riego diferentes. Para cada combinación de nivel de daño en las hojas y protocolo de riego se realizarán tres réplicas. ¿Cuál es el número total de réplicas?

3. *Coleomegilla maculata*, un escarabajo hembra, es un depredador importante de las masas de huevos de *Ostrinia nubialis*, el barrenador del trigo europeo. *C. maculata* se alimenta también de áfidos y de polen de maíz. Para estudiar sus preferencias alimentarias, se escogen dos niveles de saciedad de *C. maculata* y dos de las tres fuentes de alimento (es decir, o bien masas de huevos y áfidos, o masas de huevos y polen, o áfidos y polen). Para cada protocolo experimental se utilizarán veinte réplicas. ¿Cuál es el número total de réplicas?

4. Para comprobar los efectos de un nuevo medicamento, se planea el siguiente ensayo clínico. Cada paciente recibe un nuevo medicamento, o un medicamento en uso, o un placebo. Se utilizan 50 pacientes. ¿De cuántas formas se pueden asignar los tres tratamientos?

5. El Muesli-Mix es un local de desayunos muy popular y frecuentado cerca de un campus. Un desayuno típico consiste en una bebida, un cuenco de cereales, y una pieza de fruta. Si se puede escoger entre tres bebidas diferentes, siete cereales diferentes, y cuatro tipos diferentes de fruta, ¿cuántas opciones de desayuno existen?

6. Para estudiar las diferencias de sexo en las preferencias alimentarias de las ratas se da a cada rata tres posibilidades de alimento. Se planea utilizar 12 ratas para cada combinación de alimento y sexo. ¿Cuántas ratas son necesarias?

(12.1.2)

7. Se planea realizar un viaje a Europa, durante el que se visitarán Londres, París, Amsterdam, Roma, y Heidelberg. Como se desea comprar un billete de tren antes de salir, hay que decidir el orden en el que se visitarán estas cinco ciudades. ¿Cuántas rutas diferentes hay?

8. Cinco personas se alinean para una fotografía. ¿Cuántas alineaciones diferentes hay?

9. Se acaban de comprar siete libros diferentes. ¿De cuántas formas se pueden colocar en una estantería?

10. Cuatro coches llegan simultáneamente a una intersección. Sólo puede pasar un coche cada vez. ¿De cuántas formas diferentes pueden salir los coches de la intersección?

11. ¿Cuántas palabras de cuatro letras sin letras repetidas se pueden formar con las 26 letras del alfabeto?

12. Un comité de tres personas, formado por un presidente, un vicepresidente y un tesorero se deben escoger de un grupo de diez. ¿Cuántos comités se pueden formar?

13. Se van a conceder tres premios diferentes a una clase de 15 estudiantes. Cada estudiante puede recibir como mucho un premio. Cuente el número de formas en que se pueden conceder los tres premios.

14. Sólo se dispone de tiempo para escuchar cuatro canciones de las diez que tiene nuestro CD favorito. ¿De cuántas formas se puede programar nuestro reproductor de CD para escuchar cuatro canciones?

(12.1.3)

15. Una bolsa contiene 10 barras de golosinas diferentes. Se pueden escoger tres. ¿Cuántas opciones hay?

16. Durante la Semana Internacional del Cine se proyectan 60 películas. Hay tiempo para ver cinco. ¿Cuántos planes diferentes se pueden hacer?

17. Se va a formar un comité de tres personas escogidas de un grupo de 10. ¿Cuántos comités se pueden formar, si no se asignan tareas específicas a sus miembros?

18. Una baraja francesa contiene 52 cartas diferentes. ¿De cuántas formas se pueden escoger cinco cartas de la baraja?

19. Una urna contiene 15 bolas diferentes. ¿De cuántas formas se pueden escoger cuatro bolas sin reposición?

20. Doce personas esperan un ascensor que sólo tiene espacio para cinco. Cuente el número de formas en que se puede escoger el primer grupo de gente que tomará el ascensor.

21. Cuatro A y cinco B se juntan para formar una palabra de nueve letras. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?

22. Suponga que se desea plantar un parterre de flores con cinco plantas diferentes. Se puede escoger de un conjunto de ocho plantas. ¿Cuántas opciones diferentes hay?

(12.1.4)

23. Una caja contiene cinco bolas verdes y cuatro azules. Se extraen dos bolas.
(a) ¿Cuántas extracciones pueden contener exactamente dos bolas rojas, cuántas exactamente dos bolas azules y cuántas exactamente una de cada color?
(b) Demuestre que la suma del número de opciones para los tres casos de (a) es igual al número de formas en que se pueden extraer dos bolas entre las nueve bolas de la caja.

24. Doce niños se dividen en tres grupos de cinco, cuatro y tres niños. ¿De cuántas formas se puede hacer esto si el orden dentro de cada grupo no es importante?

25. Cinco A, tres B y seis C se juntan para formar una palabra de 14 letras. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?

26. Una bolsa contiene 45 judías de tres variedades diferentes. Hay 15 judías de cada variedad en la bolsa. Se extraen nueve judías de la bolsa.
(a) Cuente el número de formas en que cada variedad puede aparecer exactamente tres veces en la muestra.
(b) Cuente el número de veces en las que sólo aparece una variedad en la muestra.

27. Sea $S = \{a, b, c\}$. Escriba todos los posibles subconjuntos, y argumente que número total de subconjuntos es $2^3 = 8$.

28. Suponga que un conjunto contiene n elementos. Argumente que el número total de subconjuntos de este conjunto es 2^n.

29. ¿De cuántas formas se pueden sentar en un banco Brian, Hilary, Peter y Melissa si Peter y Melissa quieren estar juntos?

30. Paula, Cindy, Gloria y Jenny cenan en una mesa redonda. ¿De cuántas formas se pueden sentar en la mesa si Cindy quiere sentarse a la izquierda de Paula?

31. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de tres personas escogidas de un grupo de siete si dos de las personas no quieren estar juntas en el comité?

32. ¿De cuántas maneras se pueden formar dos comités de tres personas cada uno escogidas de un grupo de nueve si

(a) Ninguna persona puede pertenecer a más de un comité.

(b) Las personas pueden pertenecer simultáneamente a los dos comités.

33. Se dispone de semillas de cuatro plantas anuales diferentes y tres plantas perennes diferentes. Se quiere diseñar un parterre con tres plantas diferentes, y se desea incluir al menos una planta perenne. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?

34. En los organismos diploides, los cromosomas aparecen en parejas en los núcleos de todas las células excepto en los gametos (espermatozoides u óvulos). Los gametos se forman durante la meiosis, donde se divide el número de cromosomas del núcleo. Es decir, sólo un miembro de cada pareja de cromosomas va a parar a un gameto. Los seres humanos tienen 23 parejas de cromosomas. ¿Cuántas clases de gametos puede producir un ser humano?

35. Desarrolle $(x + y)^4$.

36. Desarrolle $(2x - 3y)^5$.

37. ¿De cuántas formas se pueden extraer cuatro cartas rojas y cinco cartas negras de una baraja francesa estándar si las cartas se extraen sin reposición?

38. ¿De cuántas formas se pueden extraer dos ases y tres reyes de una baraja francesa estándar si las cartas se extraen sin reposición?

39. En el juego del póquer, determine el número de formas de tener exactamente dobles parejas en la primera mano.

40. En el juego del póquer, determine el número de formas de tener *color* (las cinco cartas del mismo palo) en la primera mano.

41. En el juego del póquer, determine el número de formas de tener *póquer* (cuatro cartas del mismo valor) en la primera mano.

42. En el juego del póquer, determine el número de formas de tener una *escalera* (cinco cartas de valores consecutivos, como A 2 3 4 5 ó 7 8 9 10 J ó 10 J Q K A, pero no todas del mismo palo), en la primera mano.

43. (*Contrapunto*) El contrapunto es un término musical que significa la combinación de voces simultáneas. Es sinónimo de polifonía. En el *contrapunto triple* se combinan tres voces de forma que cada una puede tener lugar en tres posibles posiciones: alta, intermedia o baja. ¿De cuántas formas se pueden combinar las tres voces?

44. (*Contrapunto*) El contrapunto es un término musical que significa la combinación de voces simultáneas. Es sinónimo de polifonía. En el *contrapunto quíntuple* se combinan cinco voces de forma que cada una puede tener lugar en cinco posibles posiciones: de la más alta a la más baja. ¿De cuántas formas se pueden combinar las cinco voces?

12.2 ¿QUÉ ES LA PROBABILIDAD?

12.2.1 Definiciones básicas

Un **experimento aleatorio** es un experimento cuyo resultado es incierto, pero que se puede repetir. Lanzar una moneda o un dado son ejemplos de experimentos aleatorios. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**, y se denomina a menudo Ω. Veamos algunos ejemplos que describen experimentos aleatorios y definen el espacio muestral asociado.

Ejemplo 1 Suponga que se lanza una moneda con cara (C) y cruz (X). Si se lanza la moneda una vez, los posibles resultados son C y X, y el espacio muestral es por tanto

$$\Omega = \{C, X\}$$

Si se lanza la moneda dos veces seguidas, cada resultado es un par ordenado con el resultado de la primera tirada seguido del resultado de la segunda tirada. Por tanto, el espacio muestral es

$$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$$ ◀

Ejemplo 2 Considere una población de la que se sigue el genotipo en un locus. Se supone que los genes de este locus aparecen en tres formas diferentes, denominadas ale-

los, que se denominan A_1, A_2 y A_3. Se supone además que los individuos de la población son diploides, es decir, que sus cromosomas aparecen en parejas. Esto significa que un genotipo está descrito por una pareja de genes, como A_1A_1. Como el orden de los cromosomas no es importante, el genotipo A_1A_2 es el mismo que el A_2A_1. Si nuestro experimento aleatorio consiste en seleccionar un individuo de la población y anotar su genotipo, el espacio muestral es

$$\Omega = \{A_1A_1, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_2, A_2A_3, A_3A_3\}$$ ◀

Ejemplo 3 Una urna contiene cinco bolas, numeradas 1-5. Se extraen dos bolas sin reposición y se anotan los números.

Existe alguna ambigüedad en la formulación de este experimento. Se pueden extraer las dos bolas una tras otra (sin devolver la primera de ellas a la urna tras anotar su número) o se pueden extraer las bolas simultáneamente. En el primer caso, el espacio muestral está formado por pares (i, j), donde el primer elemento es el número de la primera bola y el segundo elemento es el número de la segunda bola. Como la extracción se hace sin reposición, los dos números son diferentes. El espacio muestral se puede expresar

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),\\ &(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5),\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5),\\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5),\\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}\end{aligned}$$

o, más brevemente,

$$\Omega = \{(i, j): 1 \leqslant i \leqslant 5,\ 1 \leqslant j \leqslant 5,\ i \neq j\}$$

En el segundo caso, no hay primera o segunda bola, ya que las dos bolas se extraen simultáneamente. El espacio muestral es

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),\\ &(2, 3), (2, 4), (2, 5),\\ &(3, 4), (3, 5),\\ &(4, 5)\}\end{aligned}$$

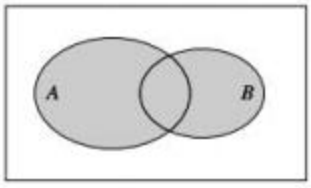
o, más brevemente,

$$\Omega = \{(i, j): 1 \leqslant i < j \leqslant 5\}$$

donde el primer elemento del par (i, j) representa el menor de los dos números de las bolas extraídas.

La especificación del experimento aleatorio determina qué descripción del espacio muestral se requiere. ◀

Cuando se realizan experimentos aleatorios, se considera a menudo un resultado particular o, de forma más general, un subconjunto particular del espacio muestral. Estos subconjuntos se denominan **sucesos**. Como un resultado es un elemento del espacio muestral, los resultados son también sucesos, concretamente un subconjunto formado por un solo elemento. Para tratar sucesos se utilizan las operaciones básicas con conjuntos.



▲ **Figura 12.2**
La unión de A y B, $A \cup B$, ilustrada en un diagrama de Venn. El rectángulo representa el conjunto Ω

Operaciones básicas con conjuntos Sean A y B dos sucesos del espacio muestral Ω. La **unión** de A y B, que se escribe $A \cup B$ (y se lee «A unión B»), es el conjunto de todos los resultados que pertenecen a A o a B (o a ambos). La **intersección** de A y B, que se escribe $A \cap B$ (y se lee «A intersección B»), es el conjunto de todos los resultados que pertenecen a A y a B simultáneamente. Las Figuras 12.2 y 12.3 muestran estas dos primeras operaciones con conjuntos. Estas figuras, donde los conjuntos se visualizan como «burbujas» se denominan **diagramas de Venn**.

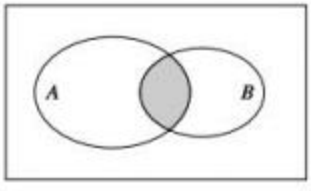
La unión y la intersección de dos sucesos se pueden generalizar a un número finito de sucesos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un número finito de sucesos. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

$$= \begin{bmatrix} \text{conjunto de todos los resultados que} \\ \text{pertenecen al menos a un conjunto } A_i \end{bmatrix}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n$$

$$= \begin{bmatrix} \text{conjunto de todos los resultados que} \\ \text{pertenecen a todos los conjuntos } A_i \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 12.3**
La intersección de A y B, $A \cap B$, ilustrada en un diagrama de Venn

El **complementario** de A, que se denomina A^c, es el conjunto de todos los resultados de Ω que no están en A (*véase* la Figura 12.4). Se deduce que

$$\Omega^c = \varnothing \quad \text{y} \quad \varnothing^c = \Omega$$

siendo $\varnothing$ el conjunto vacío. Además

$$(A^c)^c = A$$

Cuando se toman complementarios de uniones e intersecciones, son de utilidad las dos igualdades siguientes (Figura 12.5).

LEYES DE MORGAN

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ejemplo 4

Consideremos el experimento de lanzar la moneda del Ejemplo 1, en el que se lanza la moneda dos veces. El espacio muestral es entonces

$$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$$

Sea A el suceso de que al menos aparezca una cara:

$$A = \{CC, CX, XC\}$$

Sea B el suceso de que el primer lanzamiento sea una cruz:

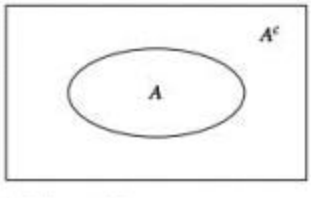
$$B = \{XC, XX\}$$

Se puede ver que

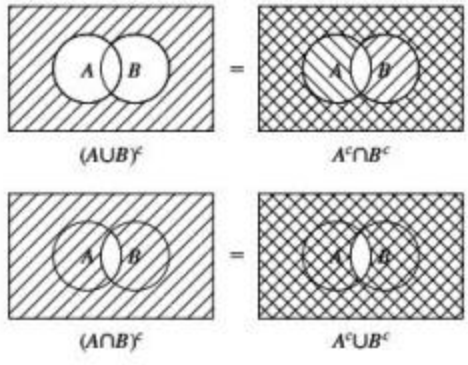
$$A \cup B = \{CC, CX, XC, XX\} \quad \text{y} \quad A \cap B = \{XC\}$$

Además,

$$A^c = \{XX\} \quad \text{y} \quad B^c = \{CC, CX\}$$



▲ **Figura 12.4**
El complementario de A es A^c



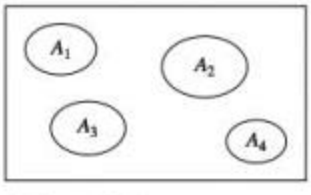
◀ **Figura 12.5**
Leyes de Morgan

Para ver cómo funcionan las leyes de Morgan, calcularemos $(A \cup B)^c$ y $A^c \cap B^c$. Se obtiene

$$(A \cup B)^c = \varnothing \quad \text{y} \quad A^c \cap B^c = \varnothing$$

que es consistente con la primera ley de Morgan. La segunda ley de Morgan dice que $(A \cap B)^c$ es equivalente a $A^c \cup B^c$. Se obtiene de hecho que

$$(A \cap B)^c = \{CC, CX, XX\} = A^c \cup B^c \quad \blacktriangleleft$$



▲ **Figura 12.6**
Los cuatro conjuntos A_1, A_2, A_3 y A_4 son disjuntos

Se dice que $A_1, A_2, ..., A_n$ son **disjuntos por parejas** (o simplemente disjuntos) si

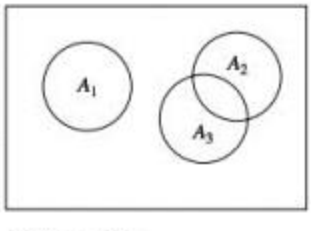
$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{siempre que} \quad i \neq j$$

La Figura 12.6 ilustra esta idea con cuatro conjuntos.

Ejemplo 5 ¿Es cierto que si $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$ entonces A_1, A_2 y A_3 son disjuntos?

Solución

No. La Figura 12.7 muestra un contraejemplo. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$ pero $A_2 \cap A_3 \neq \varnothing$, lo que implica que A_1, A_2 y A_3 no son disjuntos. ◀



▲ **Figura 12.7**
Un contraejemplo para el Ejemplo 5

Definición de probabilidad En la siguiente definición, se supone que el espacio muestral Ω es finito.

Definición Definición Sea Ω un espacio muestral finito y A y B sucesos de Ω. Una **probabilidad** es una función que asigna valores entre 0 y 1 a sucesos. La probabilidad de un suceso A, denominada $P(A)$, cumple las siguientes propiedades:

1. Para cualquier suceso A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega) = 1$.
3. Para dos sucesos disjuntos A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Nótese que la probabilidad es un número que *siempre* está entre 0 y 1. Si se calcula una probabilidad y se obtiene un número negativo o un número mayor que 1, se sabe inmediatamente que la respuesta es incorrecta.

Ejemplo 6 Suponga que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y que

$$P(1) = P(2) = 0.2 \qquad P(3) = P(4) = 0.1 \qquad \text{y} \qquad P(5) = 0.4$$

donde se ha escrito $P(i)$ para indicar $P(\{i\})$. Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 5\}$. Calcule $P(A \cup B)$ y demuestre que $P(\Omega) = 1$.

Solución

Como A y B son disjuntos ($A \cap B = \varnothing$)), se obtiene

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(\{1, 2\}) + P(\{4, 5\})$$

Como $\{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ y $\{4, 5\} = \{4\} \cup \{5\}$, y ambos son uniones de conjuntos disjuntos,

$$P(\{1, 2\}) = P(1) + P(2)$$

$$P(\{3, 4\}) = P(3) + P(4)$$

Por tanto,

$$P(A \cup B) = P(1) + P(2) + P(4) + P(5)$$

$$= 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.4 = 0.9$$

Para demostrar que $P(\Omega) = 1$ se observa que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}$$

Como se trata de una unión de conjuntos disjuntos,

$$P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.4 = 1$$ ◀

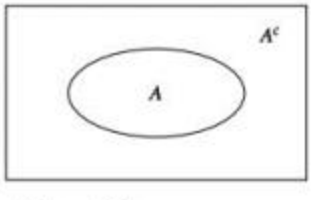
A continuación obtendremos dos propiedades básicas adicionales de las probabilidades. La primera es

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Para ver que esto es cierto, observemos la Figura 12.8. Se puede ver que $\Omega = A \cup A^c$, y que A y A^c son disjuntos. Por tanto,

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

y ordenando términos se obtiene la propiedad enunciada.



▲ **Figura 12.8**
El conjunto Ω, representado por el rectángulo, se puede expresar como la unión disjunta de A y A^c

Nótese que en la propiedad 2 de la definición escribimos $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega) = 1$. Habría sido suficiente con una sola de las igualdades. Por ejemplo, como $\Omega^c = \varnothing$, se puede escribir $\Omega = \Omega \cup \varnothing$. Como Ω y $\varnothing$ son disjuntos, y $P(\Omega) = 1$, se deduce que

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$$

y por tanto,

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$$

La siguiente propiedad permite calcular probabilidades de uniones de dos conjuntos (que no son necesariamente disjuntos, como en la propiedad 3 de la definición).

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

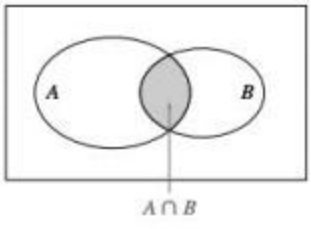
Esto se ilustra en la Figura 12.9 y se deduce del hecho de que al calcular $P((A) + P(B)$ se cuenta $A \cap B$ dos veces. La demostración de esta propiedad se considera en el Problema 15. Aquí daremos un ejemplo donde se usan estas dos propiedades adicionales.

Ejemplo 7

Suponga que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y que

$$P(1) = P(2) = 0.2, \qquad P(3) = P(4) = 0.1 \qquad \text{y} \qquad P(5) = 0.4$$

Sea $A = \{1, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5\}$. Calcule $P(A \cup B)$.



▲ **Figura 12.9**
Para calcular $P(A \cup B)$ se suman $P(A)$ y $P(B)$, pero como $A \cap B$ se cuenta dos veces, hay que restar $P(A \cap B)$

Solución

Obsérvese que A y B no son disjuntos. Se obtiene

$$A \cap B = \{4\}$$

Utilizando la segunda propiedad adicional, resulta

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(\{1, 3, 4\}) + P(\{4, 5\}) - P(\{4\}) \\ &= (0.2 + 0.1 + 0.1) + (0.1 + 0.4) - (0.1) = 0.8 \end{aligned}$$

Se podría haber obtenido el mismo resultado observando que

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\} \qquad \text{y por tanto} \qquad A \cup B = \{2\}^c$$

con lo que resulta

$$P(A \cup B) = P(\{2\}^c) = 1 - P(\{2\}) = 1 - 0.2 = 0.8$$ ◀

12.2.2 Resultados equiprobables

Una clase importante de experimentos aleatorios de espacios maestrales finitos son aquellos en los que los resultados son equiprobables. Es decir, si $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $P(1) = P(2) = \cdots = P(n)$, donde se ha utilizado $P(i)$ para expresar $P(\{i\})$. Entonces

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(i) = nP(1)$$

lo que implica que

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(n) = \frac{1}{n}$$

Si se denomina $|A|$ al número de elementos en A, y si $A \subset \Omega$ con $|A| = k$, entonces

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$$

En los dos ejemplos siguientes, se presentarán experimentos aleatorios en los que los resultados son equiprobables. Hay que poner particular atención al espacio muestral, para asegurarse de entender que todos los elementos son en verdad equiprobables.

Ejemplo 8 Se lanza una moneda buena tres veces. Calcule la probabilidad del suceso $A = \{$al menos dos caras$\}$.

Solución

El espacio muestral en este caso es

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Todos los resultados son equiprobables, ya que se supone que la moneda es buena. Como $|\Omega| = 8$, se deduce que cada posible resultado tiene una probabilidad de 1/8. Entonces,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(CCC, CCX, CXC, XCC) \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀

Ejemplo 9 Una urna contiene cinco bolas azules y seis verdes. Se extraen dos bolas de la urna sin reposición.

(a) Determine el espacio muestral Ω y calcule $|\Omega|$.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean de diferente color?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las bolas sea verde?

Solución

(a) Como objetos físicos, las bolas son distinguibles y podemos imaginarlas numeradas de 1 a 11, asignando los primeros cinco números a las cinco bolas azules y los seis restantes a las bolas verdes. El espacio muestral de este experimento aleatorio consta de subconjuntos de tamaño 2 que se pueden extraer del conjunto de 11 bolas. Cada subconjunto de tamaño 2 es equiprobable. El tamaño del espacio muestral es

$$|\Omega| = \binom{11}{2}$$

ya que el orden en el que las bolas se extraen de la urna no es importante, y la extracción se realiza sin reposición.

(b) Sea A el suceso de que las dos bolas son de diferente color. Para obtener un resultado donde una de las bolas es azul y la otra es verde, hay que seleccionar una de las cinco bolas azules, lo que se puede hacer de $\binom{5}{1}$ formas diferentes, y una de las seis bolas verdes, lo que se puede hacer de $\binom{6}{1}$ formas diferentes. Utilizando la regla de multiplicación de la Sección 12.1 se obtiene

$$|A| = \binom{5}{1}\binom{6}{1}$$

Por tanto

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{5 \cdot 6}{\frac{11 \cdot 10}{2}} = \frac{6}{11}$$

(c) Sea B el suceso de que al menos una de las bolas es verde. Este suceso se puede expresar como la unión de dos conjuntos disjuntos

$$B_1 = \{\text{exactamente una bola es verde}\}$$

$$B_2 = \{\text{ambas bolas son verdes}\}$$

Como $B = B_1 \cup B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, se deduce que

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2)$$

Utilizando un argumento similar al empleado en (a), se obtiene

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} + \frac{\binom{5}{0}\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{5 \cdot 6}{55} + \frac{15}{55} = \frac{9}{11}$$ ◀

Ejemplo 10 Se extraen aleatoriamente y sin reposición cuatro cartas de una baraja francesa de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos dos reyes?

Solución

Se obtiene

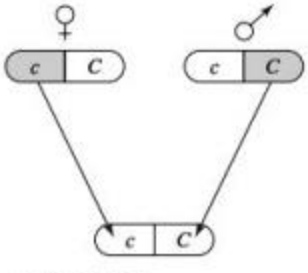
$$P(\text{como mínimo dos reyes}) = 1 - [P(\text{no reyes}) + P(\text{un rey})]$$

Hay $\binom{52}{4}$ formas de escoger cuatro cartas, y en la baraja francesa hay cuatro reyes. Hay $\binom{48}{4}$ formas de escoger una mano de cuatro cartas que no contenga reyes y $\binom{4}{1}\binom{48}{3}$ formas de escoger una mano de cuatro cartas que contenga exactamente un rey. Por tanto,

$$P(\text{al menos dos reyes}) = 1 - \frac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{3}}{\binom{52}{4}}$$

$$= 1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} - \frac{16 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.0257$$ ◀

Una aplicación en genética Gregor Mendel, un monje austriaco, experimentó con guisantes para estudiar las leyes de la herencia. Comenzó sus experimentos en 1856. Su trabajo fue fundamental en la comprensión de las leyes de la herencia. Pasaron 35 años hasta que el trabajo original de Mendel fue publicado y sus conclusiones fueron confirmadas con experimentos adicionales.



▲ **Figura 12.10**
El cruce $Cc \times Cc$ produce una descendencia de tipo Cc

Utilizaremos el conocimiento actual sobre la herencia para determinar la verosimilitud de los resultados de ciertos cruces. Describiremos uno de los experimentos de Mendel que estudió la herencia del color de la flor en los guisantes. Mendel tenía semillas que producían plantas con flores rojas o blancas. El color de la flor en los guisantes de Mendel está determinado por un solo locus en el cromosoma. Los genes de este locus aparecen de dos formas, denominadas alelos, que denominaremos C y c. Como las plantas del guisante son organismos diploides, cada planta posee dos genes que determinan el color de la flor, cada uno de ellos procedente de una de las plantas progenitoras. Por tanto, son posibles los siguientes genotipos: CC, Cc y cc. Los genotipos CC y Cc tienen flores rojas y el genotipo cc tiene flores blancas.

Ejemplo 11 Suponga que se cruzan dos plantas de guisantes, ambas del tipo Cc. Determine las probabilidades de cada genotipo en la generación siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que una semilla escogida aleatoriamente del resultado de este cruce produzca flores rojas?

Solución

Denotaremos la descendencia de este cruce mediante una pareja cuyo primer elemento es la contribución materna y cuyo segundo elemento es la contribución paterna. Por ejemplo, una descendencia del tipo (c, C) hereda c de la madre y C del padre (*véase* la Figura 12.10). La lista de los posibles resultados de este cruce es el espacio muestral

$$\Omega = \{(C, C), (C, c), (c, C), (c, c)\}$$

Las leyes de la herencia implican que los gametos se forman aleatoriamente y que, por tanto, todos los resultados de Ω son igualmente probables (esta es la primera ley de Mendel). Como $|\Omega| = 4$, resulta que cada resultado tiene una probabilidad de 1/4.

Aunque el espacio muestral tiene cuatro resultados diferentes, sólo hay tres genotipos diferentes, ya que (C, c) y (c, C) son el mismo genotipo Cc. En lo que sigue denominaremos frecuentemente al evento $\{(C, c), (c, C)\}$ simplemente Cc, como es habitual en genética. Por tanto se obtiene

$$P(CC) = \frac{1}{4} \qquad P(Cc) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(cc) = \frac{1}{4}$$

Como los dos genotipos CC y Cc producen flores rojas, resulta que

$$P(\text{rojo}) = P(\{(C, C), (C, c), (c, C)\}) = \frac{3}{4}$$ ◀

El método de marca-recaptura. El método de marca-recaptura se utiliza comúnmente para estimar tamaños de poblaciones. Ilustraremos este método utilizando como ejemplo una población de peces. Supongamos que hay N peces en un lago, siendo N desconocido. Para tener una idea del valor de N, se capturan K peces, se marcan y posteriormente se liberan. Se espera hasta que los peces marcados hayan tenido tiempo suficiente de mezclarse con los otros peces del lago. Se capturan ahora n peces. Supongamos que k de los n peces están marcados (supongamos que $k > 0$). Entonces, si los peces se han mezclado bien en el lago, la proporción de peces marcados y no marcados en la muestra de tamaño n debería ser aproximadamente igual a la proporción de peces marcados y no marcados en el lago,

$$\frac{k}{n} \approx \frac{K}{N}$$

Por tanto, se concluye que hay aproximadamente

$$N \approx K\frac{n}{k}$$

peces en el lago. En los dos ejemplos siguientes explicaremos por qué este método tiene sentido.

Ejemplo 12 Dado un experimento de marca-recaptura, calcule la probabilidad de obtener k peces marcados en una muestra de tamaño n.

Solución

Hay N peces en el lago, K de los cuales están marcados. Se toma una muestra de tamaño n. Cada resultado es por tanto un subconjunto de tamaño n, y todos los resultados son igualmente probables. Utilizando las técnicas de conteo de la Sección 12.1 se obtiene

$$|\Omega| = \binom{N}{n}$$

ya que el orden en la muestra no es importante.

Sea A el suceso de que la muestra de tamaño n contiene exactamente k peces marcados. Para determinar cuántos resultados contienen exactamente k peces marcados, argumentaremos como sigue: es necesario seleccionar k peces de los K marcados y $n - k$ peces de los $N - K$ no marcados. Hay $\binom{K}{k}$ forma de seleccionar k peces marcados y $\binom{N-K}{n-k}$ forma de seleccionar $n - k$ peces no marcados. Como cada selección de k peces marcados se puede combinar con cada selección de $n - k$ peces no marcados, se puede utilizar el principio de multiplicación para cal-

cular el número total de formas de obtener una muestra de tamaño n con exactamente k peces marcados, concretamente,

$$|A| = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}$$

Por tanto,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(Este ejemplo es del mismo tipo básico que el problema de la urna en el Ejemplo 9). ◀

Daremos a continuación un argumento que explica por qué el número total de peces en el lago se puede estimar utilizando la fórmula $N \approx Kn/k$.

Ejemplo 13 Suponga que hay K peces marcados en el lago. Se toma una muestra de tamaño n y se observan k peces marcados. Demuestre que el valor de N que maximiza la probabilidad de obtener k peces marcados en una muestra de tamaño n es el mayor entero menor o igual que Kn/k. Utilizaremos este valor para estimar el tamaño de la población N. Como este estimador de N maximiza la probabilidad de lo que se ha observado, se denomina **estimador de máxima verosimilitud**.

Solución

Sea A el evento de que la muestra de tamaño n contiene exactamente k peces marcados. En el Ejemplo 12 encontramos que

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Consideremos ahora $P(A)$ como una función de N que denominaremos p_N. Para calcular el valor de N que maximiza p_N, calcularemos el cociente p_N/p_{N-1} (la función p_N no es continua, ya que sólo está definida para valores enteros de N. Por tanto, no se puede derivar p_N para calcular su máximo). El cociente está dado por

$$\frac{p_N}{p_{N-1}} = \frac{\dfrac{\binom{K}{n}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}}{\dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-1-K}{n-k}}{\binom{N-1}{n}}} = \frac{\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N-1-K}{n-k}}\frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{(N-K)!(n-k)!(N-1-K-n+k)!}{(n-k)!(N-K-n+k)!(N-1-K)!}\frac{(N-1)!n!(N-n)!}{n!(N-1-n)!N!}$$

Simplificando términos se obtiene

$$\frac{p_N}{p_{N-1}} = \frac{N-K}{N-K-n+k}\frac{N-n}{N}$$

Estudiaremos ahora cuándo este cociente es mayor que 1, ya que esto nos permitirá saber los valores de N para los que p_N supera a p_{N-1}. Los valores de N para los que p_N supera a p_{N-1} y a p_{N+1} son los máximos locales. El cociente p_N/p_{N-1} es mayor o igual que 1 si

$$(N-K)(N-n) \geqslant N(N-K-n+k)$$

Realizando los productos, se obtiene

$$N^2 - Nn - KN + Kn \geqslant N^2 - NK - Nn + Nk$$

Simplificando resulta

$$Kn \geqslant kN$$

o

$$N \leqslant K\frac{n}{k}$$

Por tanto, $p_N \geqslant p_{N-1}$ mientras $N \leqslant Kn/k$. Si Kn/k es un entero, entonces $p_N = p_{N-1}$ para $N = Kn/k$ y tanto kn/k como $Kn/k - 1$ maximizan la probabilidad de observar k peces en la muestra de tamaño n y por tanto ambos valores se pueden tomar como estimadores del número de peces en el lago. Si Kn/k no es un entero, entonces el máximo entero menor que Kn/k maximiza la probabilidad p_N. Para obtener sólo un valor, usaremos siempre el máximo entero menor o igual que Kn/k como estimador del número total de peces en el lago. ◀

Ejemplo 14 Suponga ahora que hay 15 peces marcados en el lago. Se toma una muestra de tamaño 10 y se observan 4 peces marcados. Calcule un estimador del número de peces en el lago basándose en el Ejemplo 13.

Solución

Del Ejemplo 13 se concluye que el estimador del número de peces en el lago, denominado N, es el máximo entero menor o igual que Kn/k. En este ejemplo, $K = 15$, $n = 10$ y $k = 4$. Como

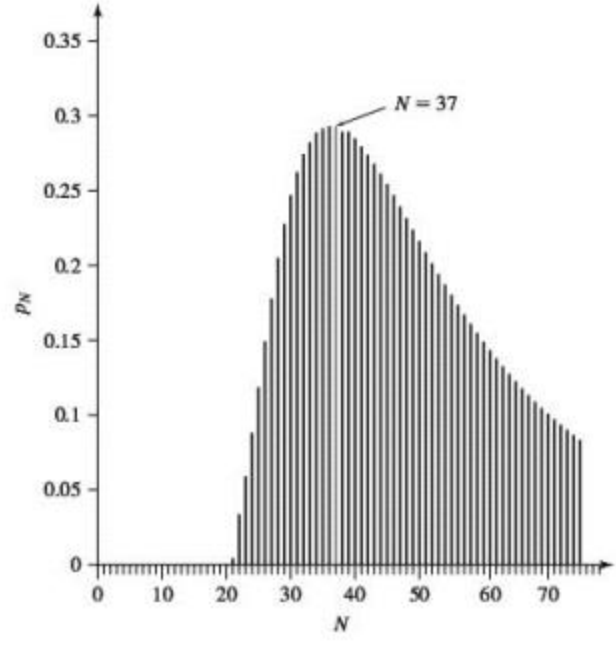
$$K\frac{n}{k} = 15 \cdot \frac{10}{4} = 37.5$$

se estima que hay 37 peces en el lago.

Para ver que este valor maximiza realmente

$$p_N = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(definido en el Ejemplo 13), se dibuja en función de N para $K = 15$, $n = 10$ y $k = 4$ (Figura 12.11). Como la muestra contiene $n = 10$ peces, el número de peces en el lago debe ser como mínimo de 10. Por tanto, $p_N = 0$ para $N < 10$. ◀



◀ **Figura 12.11**
La función p_N para diferentes valores de N cuando $K = 15$, $n = 10$ y $k = 4$. La gráfica muestra que p_N es máxima para $N = 37$

12.2.3. Problemas

(12.2.1)

En los Problemas 1-4, determine los espacios maestrales de cada experimento aleatorio.

1. El experimento aleatorio consiste en lanzar tres veces una moneda.

2. El experimento aleatorio consiste en lanzar dos veces un dado de seis caras.

3. Una urna contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. El experimento aleatorio consiste en extraer dos bolas sin reposición.

4. Una urna contiene seis bolas numeradas del 1 al 6. El experimento aleatorio consiste en extraer cinco bolas sin reposición.

En los Problemas 5-8, suponga que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

5. Calcule $A \cup B$ y $A \cap B$.

6. Calcule A^c y verifique que $(A^c)^c = A$.

7. Calcule $(A \cup B)^c$.

8. ¿Son disjuntos A y B?

En los Problemas 9-12, suponga que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$P(1) = 0.1$, $P(2) = 0.2$ y $P(3) = P(4) = 0.05$. *Además, suponga que* $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$.

9. Calcule $P(5)$.

10. Calcule $P(A)$ y $P(B)$.

11. Calcule $P(A^c)$.

12. Calcule $P(A \cup B)$.

13. Suponga que $P(A \cap B) = 0.1$, $P(A) = 0.4$ y $P(A^c \cap B^c) = 0.2$. Calcule $P(B)$.

14. Suponga que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.7$. Calcule $P(A \cap B)$ y $P(A^c \cap B^c)$.

15. En este problema se demuestra la segunda propiedad adicional, concretamente,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (12.5)$$

(a) Utilice un diagrama para demostrar que B se puede expresar como la unión disjunta de los conjuntos $A \cap B$ y $B \cap A^c$.

(b) Utilice un diagrama para demostrar que $A \cup B$ se puede expresar como la unión disjunta de los conjuntos A y $B \cap A^c$.

(c) Utilice los resultados de (a) y (b) para demostrar que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

y

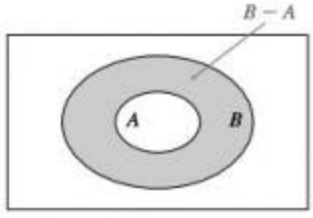
$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$$

Concluya de lo anterior que (12.5) se cumple.

16. Si $A \subset B$, se puede definir la diferencia entre los conjuntos A y B, denominada $B - A$ (que se lee «B menos A»). Concretamente,

$$B - A = B \cap A^c$$

como se ilustra en la Figura 12.12.



▲ **Figura 12.12**
El conjunto A está incluido en B. El área sombreada es la diferencia de A y B, $B - A$

Se cumple la siguiente regla de la diferencia:

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \qquad (12.6)$$

Para demostrar (12.6), seguiremos estos pasos.

(a) Utilice el diagrama de la Figura 12.12 para demostrar que B se puede expresar como la unión de A y $B - A$.

(b) Utilice el resultado de A para concluir que

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

y a partir de esto, demuestre (12.6).

(c) Una consecuencia inmediata de (12.6) es el siguiente resultado. Si $A \subset B$, entonces

$$P(A) \leqslant P(B)$$

Utilice (12.6) para demostrar la inecuación anterior.

(12.2.2)

17. Si se lanzan dos monedas buenas, calcule la probabilidad de obtener al menos una cara.

18. Si se lanzan tres monedas buenas, calcule la probabilidad de no obtener caras.

19. Si se lanza dos veces un dado bueno, calcule la probabilidad de obtener al menos un 4.

20. Si se lanza dos veces un dado bueno, calcule la probabilidad de que la suma de los dos números sea par.

21. Si se lanzan dos dados buenos, uno detrás de otro, calcule la probabilidad de que el primer número sea mayor que el segundo.

22. Si se lanzan dos dados buenos, calcule la probabilidad de que el mínimo de los dos números sea mayor que 4.

23. En el Ejemplo 11, consideramos el cruce entre dos plantas de guisantes, cada una de ellas con genotipo *Cc*. Calcule la probabilidad de que una semilla de este cruce escogida aleatoriamente produzca flores blancas.

24. En el Ejemplo 11, consideramos el cruce entre dos plantas de guisantes, cada una de ellas con genotipo *Cc*. Ahora se cruza una planta de guisantes con genotipo *cc* con otra de genotipo *Cc*.

(a) ¿Cuáles son los posibles resultados de este cruce?

(b) Calcule la probabilidad de que una semilla de este cruce escogida aleatoriamente produzca flores rojas.

25. Suponga que dos padres son de genotipo *Aa*. ¿Cuál es la probabilidad de que su descendencia sea de genotipo *Aa*? (Asuma la primera ley de Mendel).

26. Suponga que un padre es de genotipo *AA* y el otro es de genotipo *Aa*. ¿Cuál es la probabilidad de que su descendencia sea de genotipo *AA*? (Asuma la primera ley de Mendel.)

27. Una familia tiene tres hijos. Suponiendo que la relación de sexos es 1 : 1, ¿cuál es la probabilidad de que todos sean chicas?

28. La ceguera al color es una enfermedad hereditaria ligada al cromosoma *X*. Una mujer portadora del gen de la ceguera al color en uno de sus cromosomas *X* pero no en el otro tiene una visión normal. Si una mujer con visión normal que lleva en uno de sus cromosomas *X* el gen de la ceguera al color tiene un hijo con un hombre de visión normal, ¿cuál es la probabilidad de que el hijo tenga ceguera al color?

29. Un lago contiene un número desconocido de peces, denominado *N*. Se capturan 100 peces, se marcan y después se liberan. Posteriormente se vuelve al lago y se capturan diez peces, tres de los cuales están marcados.

(a) Calcule la probabilidad de que estén marcados exactamente tres de los diez peces de la muestra. Esta probabilidad será función de *N*, el número desconocido de peces en el lago.
(b) Calcule el valor de *N* que maximiza la probabilidad calculada en (a), y compruebe que este valor concuerda con el calculado en el Ejemplo 13.

30. Una urna contiene cinco bolas azules y tres verdes. Se extraen sin reposición tres bolas de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de las tres bolas sean verdes?

31. Se extraen sin reposición dos cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean picas?

32. Se extraen sin reposición cinco cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan cuatro ases?

33. Una urna contiene cuatro bolas verdes, seis azules y dos rojas. Se extraen sin reposición tres bolas de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean de colores diferentes?

34. Una urna contiene cuatro bolas verdes, seis azules y dos rojas. Se extraen sin reposición tres bolas de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean del mismo color?

35. Se extraen aleatoriamente sin reposición cuatro cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar como mínimo un as?

36. Se extraen aleatoriamente sin reposición cuatro cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente una pareja?

37. Se extraen aleatoriamente sin reposición trece cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas ellas sean rojas?

38. Se extraen aleatoriamente sin reposición cuatro cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas ellas sean de palos diferentes?

39. Se extraen aleatoriamente sin reposición cinco cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos parejas?

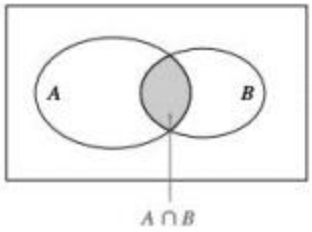
40. Se extraen aleatoriamente sin reposición cinco cartas de una baraja francesa estándar con 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un trío y una pareja (por ejemplo Q Q Q 3 3)? (En el póquer, esta jugada se denomina *full*.)

12.3 PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Antes de definir la *probabilidad condicional* y la *independencia*, ilustraremos estos conceptos utilizando los experimentos de Mendel de cruce de guisantes considerados en la sección anterior para estudiar la herencia del color de las flores.

Suponga que dos plantas padres de guisantes son de genotipo *Cc*. Asuma que sabe que la descendencia de los cruces $Cc \times Cc$ tiene flores rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que su genotipo sea *CC*? Esta probabilidad se puede calcular teniendo en cuenta que uno de los tres resultados equiprobables que producen flores rojas [concretamente, (C, C), (C, c) y (c, C) si se denominan los tipos de acuerdo con las contribuciones materna y paterna como en el Ejemplo 11 de la sección anterior] es de tipo *CC*. Por tanto la probabilidad de que la descendencia sea de genotipo *CC* es 1/3. Esta probabilidad, donde se condiciona a algún conocimiento previo (como el color de las flores de la descendencia) se denomina **probabilidad condicional**.

Suponga ahora que el gen transmitido por el padre en la descendencia del cruce $Cc \times Cc$ es de tipo *C*. ¿Cuál es la probabilidad de que el gen transmitido por la madre a esa descendencia sea de tipo *c*? Para responder a esta pregunta, hay que tener en cuenta que en este caso el gen paterno no influye para nada en la selección del gen materno. Por tanto, la probabilidad de que el gen materno sea de tipo *c* es 1/2. Se dice que el gen materno es **independiente** del gen paterno. El conocimiento del gen paterno elegido no cambia la probabilidad del gen materno.



▲ **Figura 12.13**
La probabilidad condicional de A dado B es la proporción de A en el conjunto B, $A \cap B$, relativa al conjunto B

12.3.1 Probabilidad condicional

Como se ha ilustrado en la introducción de esta sección, las probabilidades condicionadas están relacionadas con el conocimiento previo. Suponga que se sabe que el suceso B se ha producido y que $P(B) > 0$. Entonces la probabilidad condicional del suceso A dado B, que se denomina $P(A \mid B)$ es la probabilidad de que ocurra A dado el hecho de que B ha ocurrido. Se define como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{12.7}$$

Para explicar esta definición, obsérvese la Figura 12.13. La probabilidad de A dado B es la proporción de A en el conjunto B relativa a B.

En el ejemplo siguiente, utilizaremos la definición (12.7) para repetir el ejemplo introductorio y calcular la probabilidad de que la descendencia sea de tipo CC sabiendo que el color de la flor es rojo.

Ejemplo 1 Calcule la probabilidad de que la descendencia de un cruce $Cc \times Cc$ de plantas de guisante sea de tipo CC, sabiendo que las flores son rojas.

Solución

Sea A el suceso de que la descendencia es de genotipo CC y B el suceso de que el color de las flores de la descendencia es rojo. Se desea calcular $P(A \mid B)$. Utilizando (12.7) tenemos

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Las probabilidades *no condicionales* $P(B)$ y $P(A \cap B)$ se calculan utilizando el mismo espacio muestral $\Omega = \{(C, C), (C, c), (c, C), (c, c)\}$, cuyos resultados tienen todos la misma probabilidad. La probabilidad $P(B)$ es la probabilidad de que el genotipo de la descendencia pertenezca al conjunto $\{(C, C), (C, c), (c, C)\}$. Como los resultados del espacio muestral son equiprobables, $P(B) = 3/4$. Para calcular $P(A \cap B)$, basta notar que $A \cap B$ es el suceso de que la descendencia sea de genotipo CC. Utilizando el espacio muestral Ω, se obtiene que $P(A \cap B) = 1/4$. Por tanto,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

que es la misma respuesta obtenida antes. ◀

La Ecuación (12.7) se puede utilizar para calcular probabilidades condicionales, como se ha visto en el Ejemplo 1. Sin embargo, reordenando términos, se puede utilizar también para calcular probabilidades de intersecciones de sucesos. Concretamente, multiplicando los dos miembros de (12.7) por $P(B)$, se obtiene

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \tag{12.8}$$

En la Ecuación (12.7) se ha condicionado al suceso B. Si se condiciona al suceso A, tenemos la siguiente igualdad:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Reordenando términos como en (12.8) se obtiene

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) \tag{12.9}$$

Las fórmulas (12.8) y (12.9) son particularmente útiles para calcular probabilidades en experimentos de dos etapas. En el siguiente ejemplo ilustraremos el uso de

las dos fórmulas. Veremos también que hay una forma natural de escoger los sucesos respecto a los que se condiciona.

Ejemplo 2 Suponga que se extraen aleatoriamente sin reposición dos cartas de baraja francesa estándar con 52 cartas. Calcule la probabilidad de que ambas cartas sean diamantes.

Solución

Se puede plantear como un experimento en dos etapas. Se extrae primero una carta y después, sin reponer la primera, se extrae una segunda carta. Se definen los dos eventos

$$A = \{\text{la primera carta es un diamante}\}$$
$$B = \{\text{la segunda carta es un diamante}\}$$

Entonces

$$A \cap B = \{\text{ambas cartas son diamantes}\}$$

¿Hay que utilizar (12.8) o (12.9)? Como la primera carta se extrae primero, será más sencillo condicionar sobre el resultado del primer experimento que sobre el resultado del segundo. Es decir, calcularemos $P(B\,|\,A)$ en vez de $P(A\,|\,B)$ y utilizaremos por tanto (12.9). Entonces,

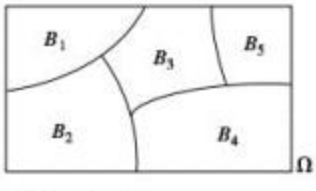
$$P(A) = \frac{13}{52}$$

ya que 13 de las 52 cartas son diamantes, y cada carta tiene la misma probabilidad de ser extraída. Para calcular $P(B\,|\,A)$ hay que tener en cuenta que si la primera carta es un diamante, entonces quedan 12 diamantes en las restantes 51 cartas de la baraja. Por tanto,

$$P(B\,|\,A) = \frac{12}{51}$$

Utilizando (12.9), se obtiene

$$P(A \cap B) = P(B\,|\,A)P(A) = \frac{12}{51}\cdot\frac{13}{52} = \frac{1}{7}$$ ◀



▲ **Figura 12.14**
Los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_5$ forman una partición de Ω

12.3.2 La ley de la probabilidad total

Empezaremos esta subsección definiendo la partición de un espacio muestral. Suponga que el espacio muestral Ω se expresa como la unión de sucesos disjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Es decir,

(i) $B_i \cap B_j = \varnothing$ siempre que $i \neq j$

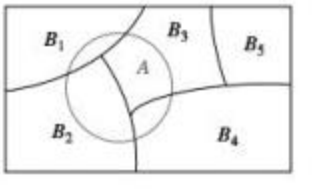
(ii) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

Se dice entonces que los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forman una **partición** del espacio muestral (*véase* la Figura 12.14).

Sea A un suceso. Se puede expresar A como unión de conjuntos disjuntos utilizando la partición de Ω:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

como se ilustra en la Figura 12.15.



▲ **Figura 12.15**
El conjunto A es una unión disjunta de conjuntos de la forma $A \cap B_i$

Como los conjuntos $A \cap B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son disjuntos, se obtiene

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

Para evaluar $P(A \cap B_i)$ podría ser útil condicionar a B_i. Es decir, $P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)P(B_i)$. Entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i) \tag{12.10}$$

La Ecuación 12.10 se conoce como **ley de la probabilidad total**.

Ejemplo 3 Un test para el virus HIV da un resultado positivo en el 99% de los casos en los que el virus está presente y en un 5% de los casos en los que el virus no está presente (resultado *falso positivo*). Si se administra el test a individuos escogidos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que el test resulte positivo? Suponga que la preponderancia del virus en la población es de 1/200.

Solución

Se hace

$$A = \{\text{el resultado del test es positivo}\}$$

Los individuos de la población se dividen en dos grupos: aquellos que están infectados con el virus HIV y aquellos que no lo están. Estos dos grupos forman una partición de la población. Si se escoge aleatoriamente un individuo de la población, pertenecerá a uno de los dos grupos. Se define

$$B_1 = \{\text{la persona está infectada}\}$$

$$B_2 = \{\text{la persona no está infectada}\}$$

Utilizando (12.10) se puede escribir

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)$$

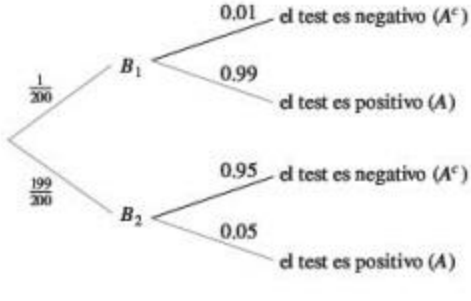
Tenemos que $P(B_1) = 1/200$ y $P(B_2) = 199/200$. Además, $P(A \mid B_1) = 0.99$ y $P(A \mid B_2) = 0.05$. Por tanto,

$$P(A) = (0.99)\frac{1}{200} + (0.05)\frac{199}{200} = 0.0547$$ ◀

El último ejemplo se puede ilustrar utilizando un **diagrama de árbol**, como se muestra en la Figura 12.16.

Los números sobre las ramas representan las probabilidades respectivas. Para calcular la probabilidad de un resultado positivo del test, se multiplican las probabilidades de los caminos que conducen a los extremos «test positivo» (los dos caminos se encuentran marcados en el árbol). Sumando los resultados de los diferentes caminos se obtiene la probabilidad deseada. Es decir,

$$P(\text{test positivo}) = \frac{1}{200}(0.99) + \frac{199}{200}(0.05) = 0.0547$$



◀ **Figura 12.16**
Las vías en discontinuo en este diagrama de árbol conducen al suceso A. Los números en las ramas representan las probabilidades respectivas

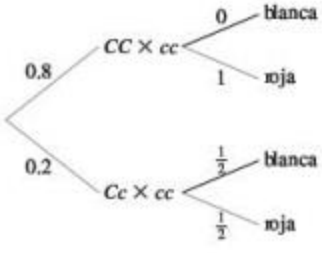
como en el Ejemplo 3. Los diagramas de árbol son muy útiles cuando se utiliza la ley de la probabilidad total.

En el siguiente ejemplo volveremos a las plantas de guisantes. Recuérdese que las plantas de guisantes de flores rojas tienen genotipos CC o Cc y que las de flores blancas tienen genotipo cc.

Ejemplo 4 Suponga que se tiene un conjunto de plantas de guisantes de flor roja. El 20% son de genotipo Cc y el 80% de genotipo CC. Se selecciona aleatoriamente una de las plantas de flor roja y se cruza con una planta de flor blanca. Calcule la probabilidad de que la descendencia produzca flores rojas.

Solución

El genotipo de una planta de flores blancas es cc. Si el genotipo de la planta paterna de flores rojas es CC (probabilidad 0.8) se cruza con una planta de flores blancas, toda la descendencia será de genotipo Cc y producirá flores rojas. Si el genotipo de la planta paterna de flores rojas es Cc (probabilidad 0.2) se cruza con una planta de flores blancas, entonces con probabilidad 0.5 su descendencia tendrá genotipo Cc (y por tanto con flores rojas) y con probabilidad 0.5 su descendencia tendrá genotipo cc (y por tanto flores blancas). La Figura 12.17 muestra un diagrama de árbol que ilustra el cálculo de probabilidades de descendencia con flores rojas.



▲ **Figura 12.17**
Diagrama de árbol del Ejemplo 4. Las vías en discontinuo conducen a descendencia con flores rojas

En la figura se marcan los caminos que conducen a descendencia con flores rojas. Utilizando el diagrama de árbol (o la ley de la probabilidad total) se obtiene

$$P(\text{descendencia de flor roja}) = (0.8)(1) + (0.2)(0.5) = 0.9$$ ◀

12.3.3 Independencia

Supongamos que se lanza dos veces una moneda buena. Sea A el suceso de que en el primer lanzamiento salga cara y B el suceso de que en el segundo lanzamiento salga cara. Supongamos que A ocurre. ¿Cambia eso la probabilidad de que B ocurra? La respuesta es obviamente que no. El resultado del lanzamiento de la primera moneda no influye en el resultado del segundo lanzamiento. Esta idea se puede expresar matemáticamente utilizando probabilidades condicionales. Concretamente,

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{12.11}$$

y se dice que A y B son independientes. No utilizaremos directamente (12.11) como definición de independencia, sino que usaremos la definición de probabilidades condicionales para modificar (12.11). Como $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$, la Ecuación (12.11) se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

Multiplicando los dos miembros por $P(A)$, se obtiene $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, que será la condición que usaremos en la definición.

Dos sucesos A y B son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo 5 Se extrae una carta de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Sean

$$A = \{\text{la carta es una pica}\}$$
$$B = \{\text{la carta es un rey}\}$$

Demuestre que A y B son independientes.

Solución

Para demostrar que A y B son independientes, se calcula

$$P(A) = \frac{13}{52} \qquad P(B) = \frac{4}{52}$$

y

$$P(A \cap B) = P(\text{la carta es el rey de picas}) = \frac{1}{52}$$

Como

$$P(A)P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{52} = P(A \cap B)$$

se deduce que A y B son independientes. ◀

Volvamos a nuestro ejemplo de las plantas de guisantes para ilustrar cómo se pueden calcular las probabilidades de intersección de sucesos cuando se sabe que dichos sucesos son independientes.

Ejemplo 6 ¿Cuál es la probabilidad de que la descendencia de un cruce $Cc \times Cc$ tenga genotipo cc?

Solución

Ya hemos calculado anteriormente la respuesta utilizando un espacio muestral con resultados equiprobables. Pero también podemos calcular esta probabilidad utilizando independencia.

Para que el genotipo de la descendencia sea de tipo cc, ambos padres tienen que contribuir con un gen c. Sean

$$A = \{\text{el gen paterno es } c\}$$

$$B = \{\text{el gen materno es } c\}$$

Ahora, se deduce de las leyes de la herencia que A y B son independientes y $P(A) = P(B) = 1/2$. Por tanto,

$$P(cc) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente cuando consideramos el espacio muestral $\Omega = \{(C, C), (C, c), (c, C), (c, c)\}$ y observamos que los cuatro tipos posibles son equiprobables. ◀

La idea de la independencia se puede extender a más de dos sucesos. Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si para cualquier $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) \tag{12.12}$$

Para ver lo que esto significa cuando tenemos tres eventos A, B y C, escribiremos las condiciones explícitamente. Tres sucesos A, B y C son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C) \tag{12.13}$$

y

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \tag{12.14}$$

Es decir, se deben cumplir (12.13) y (12.14).

El número de condiciones que se deben verificar crece rápidamente con el número de sucesos. Cuando sólo hay dos sucesos, sólo hay que verificar una condi-

ción (concretamente, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$). Cuando hay tres sucesos, hemos visto que hay cuatro condiciones (concretamente, hay $\binom{3}{2}$ condiciones que involucran parejas de sucesos $\binom{3}{3}$ y condiciones que involucran a los tres sucesos). Con cuatro sucesos, habría un total de $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 11$ condiciones. Con cinco sucesos, 26 condiciones y con diez sucesos, 1013 condiciones.

Conviene recalcar que *no* es suficiente comprobar la independencia entre pares de sucesos para ver si una colección de sucesos son independientes. Sin embargo, la independencia entre parejas de sucesos es una propiedad importante por sí misma, que definiremos. Concretamente, los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **independientes dos a dos** si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \qquad \text{siempre que } i \neq j$$

Veremos a continuación un ejemplo en el que los sucesos son independientes dos a dos pero no son independientes.

Ejemplo 7 Se tiran dos dados. Sean

A = {el número del primer dado es par}

B = {el número del segundo dado es par}

C = {la suma es impar}

Demuestre que los sucesos A, B y C son independientes dos a dos pero no son independientes.

Solución

Para demostrar la independencia por parejas, se calcula

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

Sin embargo, el suceso $A \cap B \cap C = \varnothing$, ya que si ambos dados han sacado un número par, su suma no puede ser impar. Por tanto,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\varnothing) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$$

lo que demuestra que A, B y C no son independientes. ◀

Cuando los sucesos son independientes, se puede utilizar (12.12) para calcular la probabilidad de la intersección de sucesos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8 Suponga una proporción de sexos 1 : 1. Una familia tiene cinco hijos. Calcule la probabilidad de que al menos uno de los hijos sea una chica.

Solución

En vez de calcular la probabilidad de que al menos uno de los hijos sea una chica, usaremos el suceso complementario a éste. Esto es algo particularmente útil cuando se consideran sucesos donde se pide la probabilidad de «al menos uno». Se denomina

A_i = {el i-ésimo hijo es un chico}

Entonces los sucesos $A_1, A_2, ..., A_5$ son independientes. Sea

$$B = \{\text{al menos uno de los hijos es una chica}\}$$

En vez de calcular la probabilidad de B directamente, utilizaremos el suceso complementario de B. B^c es el suceso de que todos los hijos son chicos, que se expresa como

$$B^c = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(B^c) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5) \\ &= 1 - P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_5) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32} \end{aligned}$$

Si hubiéramos intentado calcular $P(B)$ directamente, habríamos tenido que calcular la probabilidad de tener exactamente una chica, exactamente dos chicas, y así sucesivamente, y después sumar esas probabilidades. En esta situación, es más rápido y sencillo calcular la probabilidad del suceso complementario. ◀

12.3.4 Fórmula de Bayes

En el Ejemplo 3 de esta sección calculamos la probabilidad de que el resultado de un test de HIV realizado sobre un individuo escogido aleatoriamente sea positivo. Para el individuo, sin embargo, es mucho más importante saber si el resultado positivo del test significa realmente que está infectado. Recuérdese que definimos

$$A = \{\text{el resultado del test es positivo}\}$$

$$B_1 = \{\text{la persona está infectada}\}$$

$$B_2 = \{\text{la persona no está infectada}\}$$

Estamos interesados en $P(B_1 \mid A)$, es decir, la probabilidad de que una persona esté infectada sabiendo que el resultado es positivo. En el Ejemplo 3 vimos que $P(A \mid B_1)$ y $P(A \mid B_2)$ se deducían inmediatamente de las características del test. Ahora deseamos calcular las probabilidades condicionales cuando los papeles de A y B_1 se invierten.

Antes de calcular la probabilidad en este ejemplo específico, consideraremos el caso general. Supongamos que los conjuntos $B_1, B_2, ..., B_n$ forman una partición del espacio muestral Ω, A es un suceso y las probabilidades $P(A|B_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ son conocidas. Estamos interesados en calcular las probabilidades $P(B_i|A)$. Esto se puede realizar como sigue. Utilizando la definición de probabilidades condicionales, se tiene que

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \tag{12.15}$$

Para calcular $P(A \cap B_i)$, ahora se condiciona sobre B_i, es decir,

$$P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)P(B_i) \tag{12.16}$$

Para evaluar el denominador $P(A)$ se utiliza la ley de la probabilidad total, es decir,

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j) \tag{12.17}$$

Combinando (12.15), (12.16) y (12.17) se llega a la siguiente fórmula, conocida como fórmula de Bayes.

FÓRMULA DE BAYES

Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω y A un suceso. Entonces

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

Volvamos ahora a nuestro ejemplo. Se desea calcular $P(B_1 \mid A)$, es decir, la probabilidad de que una persona esté infectada dado un resultado del test positivo. Se divide la población en una partición de dos conjuntos B_1 y B_2. Entonces, utilizando la fórmula de Bayes,

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)}$$

$$= \frac{(0.99)\ \frac{1}{200}}{(0.99)\ \frac{1}{200} + (0.05)\ \frac{199}{200}} \approx 0.090$$

El denominador es igual a $P(A)$, que ya calculamos en el Ejemplo 3.

Merece la pena discutir este ejemplo con más detalle. La probabilidad de que una persona esté infectada dado un resultado positivo es muy pequeña. Pero habría que compararla con la probabilidad incondicional de que una persona esté infectada, concretamente $P(B_1)$. Si se calcula el cociente entre la probabilidad condicional y la incondicional se obtiene

$$\frac{P(B_1 \mid A)}{P(B_1)} \approx 18.1$$

Es decir, si el resultado del test es positivo, la posibilidad de estar realmente infectado se incrementa en un factor de 18 cuando se compara con un individuo escogido aleatoriamente en la población que no ha pasado el test (en la práctica, si un test resulta positivo, se realizan tests adicionales para ver si una persona está realmente infectada o se trata de un falso positivo).

Si el resultado del test es negativo, se puede calcular también la probabilidad de que el individuo no esté realmente infectado utilizando la fórmula de Bayes. Se obtiene

$$P(B_2 \mid A^c) = \frac{P(B_2 \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c \mid B_2)P(B_2)}{P(A^c)}$$

$$= \frac{(0.95)\ \frac{199}{200}}{1 - 0.0547} \approx 0.999947$$

donde se ha utilizado $P(A) = 0.0547$, calculada en el Ejemplo 3. Este resultado es bastante tranquilizador.

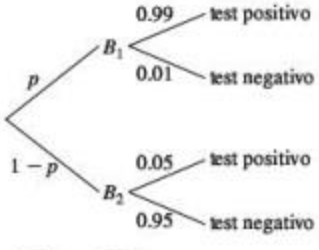
La razón de que la probabilidad de estar infectado cuando el resultado es positivo sea tan baja es que la preponderancia de la enfermedad es relativamente baja (1 en 200). Para ilustrar esto, consideremos variable la preponderancia de la enfermedad y calculemos $P(B_1 \mid A)$ en función de esa variable. Es decir, se hace

$$p = P(\text{un individuo escogido aleatoriamente está infectado})$$

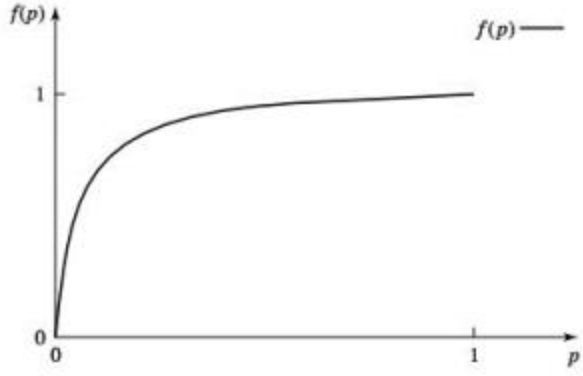
Utilizando las mismas características del test de antes, se obtiene (*véase* la Figura 12.18),

$$f(p) = P(B_1 \mid A) = \frac{p(0.99)}{p(0.99) + (1-p)(0.05)} = \frac{0.99p}{0.05 + 0.94p}$$

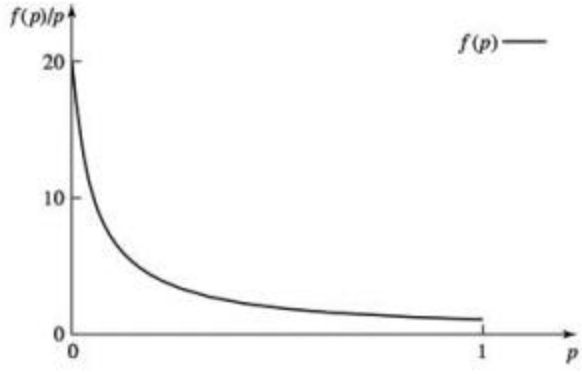
La Figura 12.19 muestra una gráfica de $f(p)$. Se puede ver que para valores pequeños de p, $f(p)$ (la probabilidad de estar infectado dado un resultado positivo)



▲ **Figura 12.18**
Diagrama de árbol para calcular la probabilidad de que una persona esté infectada dado que el test ha salido positivo cuando la preponderancia de la enfermedad es p



▲ **Figura 12.19**
Probabilidad de estar infectado cuando el test es positivo en función de la preponderancia de la enfermedad

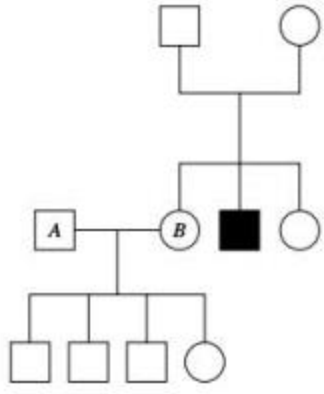


▲ **Figura 12.20**
El cociente $f(p)/p$ en función de p ilustra por qué factor crece la probabilidad de estar infectado cuando el resultado del test es positivo en función de la preponderancia de la enfermedad en la población

es muy pequeña. La Figura 12.20 muestra el cociente $f(p)/p$, de donde se puede concluir que aunque $f(p)$ es pequeña cuando p es pequeño, el cociente $f(p)/p$ es muy grande para valores pequeños de p.

La fórmula de Bayes es también importante en aplicaciones genéticas. La afección sanguínea de la hemofilia se caracteriza por una deficiencia en el factor de coagulación de la sangre. Las personas que sufren esta enfermedad sangran en exceso. La enfermedad está causada por un gen defectuoso que reside en el cromosoma X. Una mujer que lleve el gen defectuoso en uno de sus cromosomas X pero no en el otro es portadora de la enfermedad, pero no desarrollará los síntomas. Un varón que lleve el gen anormal en su (único) cromosoma X desarrollará los síntomas de la enfermedad. Casi todos los individuos sintomáticos son varones.

En lo que sigue supondremos que solo uno de los padres porta el gen defectuoso. Si el padre es el que lo lleva (y por tanto sufre hemofilia), todas sus hijas serán portadoras ya que heredan uno de los cromosomas X del padre, pero todos sus hijos estarán libres de la enfermedad, ya que lo que heredan del padre es el cromosoma Y. Si es la madre la portadora del gen defectuoso, entonces sus hijas tendrán un 50% de probabilidad de ser portadoras y los hijos tendrán un 50% de probabilidad de sufrir la enfermedad.



◀ **Figura 12.21**
Árbol genealógico de una familia en la que un miembro sufre la hemofilia. Los cuadrados indican varones, los círculos mujeres y el cuadrado negro indica el individuo afectado por la enfermedad

Los árboles genealógicos familiares muestran las relaciones entre los individuos, y son herramientas indispensables para realizar el seguimiento de enfermedades de origen genético. En un árbol genealógico los varones se representan con cuadrados y las mujeres con círculos. Los símbolos rellenos de negro indican individuos que sufren la enfermedad que se investiga en el árbol genealógico. La Figura 12.21 muestra un árbol genealógico de una familia en la que un varón (cuadrado negro) sufre hemofilia. Utilizaremos este árbol como ejemplo para determinar la probabilidad de que la persona B sea portadora de la enfermedad sabiendo que los tres hijos de A y B están libres de la enfermedad.

Podemos ver en el árbol genealógico que B tiene un hermano hemofílico. Por tanto, la madre de B debe ser portadora. Hay una probabilidad del 50% de que una hermana del varón afectado sea portadora. Sea E el suceso de que B es portadora. Entonces $P(E) = 1/2$. Supongamos ahora que nos dicen que B tiene tres hijos con un varón sin enfermedad (A). Si F indica el suceso de que los tres hijos están libres de la enfermedad, entonces

$$P(F \mid E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

que si B es portadora, cada hijo tiene una probabilidad de 1/2 de no heredar el gen de la enfermedad, y por tanto de no padecerla.

Podemos usar ahora la fórmula de Bayes para calcular la probabilidad de que B sea portadora dado que ninguno de sus tres hijos padece la enfermedad.

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F \mid E)P(E)}{P(F)}$$

Para calcular el denominador, hay que utilizar la ley de la probabilidad total, como se ilustra en el diagrama de árbol de la Figura 12.22.

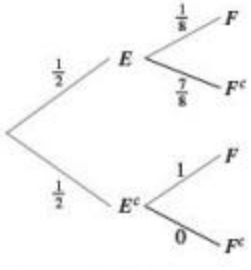
Se obtiene

$$P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{16}$$

Por tanto, utilizando la fórmula de Bayes,

$$P(E \mid F) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{9}$$

o, expresándolo con palabras, la probabilidad de que B sea portadora del gen causante de la hemofilia sabiendo que ninguno de sus tres hijos padece la enfermedad es de 1/9.



▲ **Figura 12.22**
El espacio muestral se divide mediante una partición en dos conjuntos, E y E^c, siendo E el suceso de que la persona B es portadora del gen de la hemofilia. Basándose en si B es o no portadora, se puede calcular como se muestra la probabilidad de que los tres hijos no padezcan la enfermedad (F)

12.3.5. Problemas

(12.3.1)

1. Se extraen dos cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que la segunda carta sea una pica sabiendo que la primera carta es un trébol.

2. Se extraen tres cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que la tercera carta sea una pica sabiendo que las dos primeras son tréboles.

3. Una urna contiene cinco bolas azules y seis verdes. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra, sin reposición. Calcule la probabilidad de que la segunda bola sea verde sabiendo que la primera es azul.

4. Una urna contiene cinco bolas verdes, seis azules y cuatro rojas. Se extraen sin reposición tres bolas de la urna, una tras otra. Calcule la probabilidad de que la tercera bola sea verde sabiendo que las dos primeras bolas son rojas.

5. Una familia tiene dos hijos. El más joven es una chica. Calcule la probabilidad de que el otro hijo sea también una chica.

6. Una familia tiene dos hijos. Uno de ellos es una chica. Calcule la probabilidad de los dos hijos sean chicas.

7. Se lanzan dos dados buenos. Calcule la probabilidad de que el primer dado haya sacado un 4 sabiendo que la suma de los dos valores es 7.

8. Se lanzan dos dados buenos. Calcule la probabilidad de que el primer dado haya sacado un 5 sabiendo que el mínimo de los dos valores es 3.

9. Se lanza tres veces una moneda buena. Calcule la probabilidad de que el primer lanzamiento haya sido cara sabiendo que al menos ha salido una cara.

10. Se lanza tres veces una moneda buena. Calcule la probabilidad de que al menos hayan salido dos caras sabiendo que el segundo lanzamiento fue cara.

(12.3.2)

11. Un test de detección precoz de una enfermedad da positivo un 90% de las veces en las que existe la enfermedad y en el 15% de los casos en los que no existe la enfermedad. Suponga que la preponderancia de la enfermedad es de 1 en 100. Si el test se aplica a individuos escogidos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea negativo?

12. Un test de detección precoz de una enfermedad da positivo un 95% de las veces en las que existe la enfermedad y en el 20% de los casos en los que no existe la enfermedad. Cuando el test se aplica a un gran número de personas, el 21.5% de los resultados son positivos. ¿Cuál es la preponderancia de la enfermedad?

13. Un cajón contiene tres bolsas numeradas 1-3. La bolsa 1 contiene dos bolas azules, la bolsa 2 contiene dos bolas verdes y la bolsa 3 contiene una bola verde. Se escoge aleatoriamente una bolsa y se saca una bola. Calcule la probabilidad de que la bola sea azul.

14. Un cajón contiene seis bolsas numeradas 1-6. La bolsa i contiene i bolas azules y dos bolas verdes. Se lanza un dado y se saca una bola de la bolsa cuyo número coincide con el resultado del dado. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea azul?

15. Se extraen dos cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que la segunda carta sea un as. Compárela con la probabilidad de que la primera carta sea un as.

16. Se extraen tres cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que la tercera carta sea un as. Compárela con la probabilidad de que la primera carta sea un as.

17. Suponga que tiene un conjunto de plantas de guisantes de flor roja de las cuales el 40% son de genotipo CC y el 60% son de genotipo Cc. Se escoge aleatoriamente una planta y se cruza con una planta de flor blanca. Calcule la probabilidad de que la descendencia de este cruce tenga flores blancas.

18. Suponga que tiene un conjunto de plantas de guisantes de flor roja y de flor blanca donde los tres genotipos CC, Cc y cc están igualmente representados. Se escoge aleatoriamente una planta y se cruza con una planta de flor blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la descendencia de este cruce tenga flores rojas?

19. Un saco contiene dos monedas: una de ellas es buena, y la otra tiene dos caras. Se escoge una moneda aleatoriamente y se lanza. Calcule la probabilidad de que el resultado sea cara.

20. Una compañía farmacéutica dice que un nuevo medicamento para el dolor de cabeza proporciona alivio instantáneo en el 90% de los casos. Si una persona es tratada con un placebo, hay una probabilidad del 10% de que sienta un alivio instantáneo. En una prueba clínica, la mitad de las personas fueron tratadas con el nuevo medicamento y la otra mitad recibió un placebo. Si se escoge aleatoriamente un individuo de esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sienta alivio instantáneo?

(12.3.3)

21. Se reparte una carta de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Si A indica el suceso de que la carta es una pica y B el suceso de que la carta es un as, determine si A y B son independientes.

22. Se reparten dos cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Si A indica el suceso de que la primera carta es un as y B el suceso de que la segunda carta es un as, determine si A y B son independientes.

23. Una urna contiene cinco bolas verdes y seis bolas azules. Se extraen sin reposición dos bolas de la urna, una tras otra. Si A es el suceso de que la primera bola es verde y B el suceso de que la segunda bola es verde, determine si A y B son independientes.

24. Una urna contiene cinco bolas verdes y seis bolas azules. Se extraen sin reposición dos bolas de la urna, una tras otra. Se extrae una bola de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna. Se extrae una segunda bola de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna. Si A es el suceso de que la primera bola es verde y B el suceso de que la segunda bola es verde, determine si A y B son independientes.

25. Suponga que la proporción de sexos es 1 : 1. Una familia tiene tres hijos. Calcule la probabilidad del suceso A siendo

(a) A = {todos los hijos son chicas}.
(b) A = {hay al menos un chico}.
(c) A = {hay al menos dos niñas}.
(d) A = {hay al menos dos niños}.

26. Suponga que el 20% de una especie muy común de insecto en nuestra área de estudio es parasitada. Suponga que los insec-

tos son parasitados de forma independiente. Si se recogen diez especímenes de esta especie, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un espécimen de la muestra esté parasitado?

27. Una pregunta de respuesta múltiple tiene cuatro opciones, y el test tiene un total de diez preguntas como esa. Los estudiantes sólo aprueban el test si contestan correctamente a todas las preguntas. Si un estudiante contesta a las preguntas aleatoriamente, calcule su probabilidad de aprobar.

28. Suponga que A y B son disjuntos y que la probabilidad de ambos sucesos es positiva. ¿Son independientes?

29. Suponga que la probabilidad de que una especie de insecto viva más de cinco días es 0.1. Calcule la probabilidad de que en una muestra de tamaño 10 de esta especie de insecto al menos haya un insecto vivo después de cinco días.

30. **(a)** Utilice un diagrama de Venn para demostrar que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

(b) Utilice el resultado de (a) para demostrar que si A y B son independientes, entonces A^c y B^c son independientes.
(c) Utilice el resultado de (b) para demostrar que si A y B son independientes, entonces

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c)P(B^c) \tag{12.3.4}$$

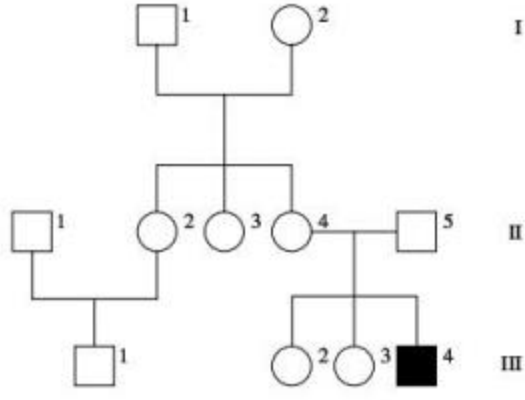
31. Un test de detección precoz de una enfermedad da positivo un 95% de las veces en las que existe la enfermedad y en el 10% de los casos en los que no existe la enfermedad. Suponga que la preponderancia de la enfermedad es de 1 en 50, y se aplica el test a un individuo resultando positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo padezca realmente la enfermedad?

32. Un test de detección precoz de una enfermedad da positivo un 95% de las veces en las que existe la enfermedad y en el 10% de los casos en los que no existe la enfermedad. Si el test da un resultado positivo, se repite. Asuma que el segundo test es independiente del primero. Si la preponderancia de la enfermedad es de 1 en 50, y se aplica el test dos veces a un individuo resultando las dos veces positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo padezca realmente la enfermedad?

33. Una bolsa contiene dos monedas: una buena y la otra con dos caras. Se escoge aleatoriamente una moneda y se lanza. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido la moneda buena sabiendo que el resultado del lanzamiento ha sido cara?

34. Se extraen dos cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que la primera carta sea una pica sabiendo que la segunda ha sido una pica.

35. Suponga que una mujer tiene un hermano hemofílico y un hijo sano. Suponga además que ni su padre ni su madre eran hemofílicos, pero su madre era portadora. Calcule la probabilidad de que la mujer sea portadora del gen de la hemofilia.



▲ **Figura 12.23**
Árbol genealógico para los Problemas 36 y 37. El cuadrado relleno en negro (individuo III-4) representa un varón afectado

El árbol genealógico de la Figura 12.23 muestra una familia en la que un miembro (III-4) es hemofílico. En los Problemas 36-37, utilice este árbol.

36. **(a)** Dado el árbol genealógico, calcule la probabilidad de que el individuo I-2 sea portador del gen de la hemofilia.
(b) Dado el árbol genealógico, calcule la probabilidad de que el individuo II-3 sea portador del gen de la hemofilia.

37. **(a)** Dado el árbol genealógico, calcule la probabilidad de que el individuo II-3 sea portador del gen de la hemofilia.
(b) Dado el árbol genealógico, calcule la probabilidad de que el individuo III-2 sea portador del gen de la hemofilia.
(c) Dado el árbol genealógico, calcule la probabilidad de que el individuo II-2 sea portador del gen de la hemofilia.

12.4 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS Y DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Los resultados de un experimento aleatorio son frecuentemente números reales, como el número de caras en un experimento de lanzamiento de moneda, o el número de semillas producidas en un cruce entre dos plantas, o el tiempo de vida de un insecto. Estos resultados numéricos se denominan **variables aleatorias**. Una variable aleatoria es una función del espacio muestral Ω en el conjunto de los números reales. Las variables aleatorias se denominan generalmente X, Y, Z o con otra letra mayúscula escogida del final del alfabeto. Por ejemplo,

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

define la variable aleatoria X como una función del espacio muestral en el conjunto de los números reales.

Las variables aleatorias se clasifican de acuerdo a su recorrido. Si el número de valores que puede tomar es finito o infinito numerable[1], X se denomina **variable aleatoria discreta**. Si el recorrido de X es en un continuo de valores (por ejemplo, los valores de un intervalo de números reales), se denomina **variable aleatoria continua**. En esta sección estudiaremos las variable aleatorias discretas, y en la siguiente sección, las variables aleatorias continuas.

12.4.1 Distribuciones discretas

En el primer ejemplo consideraremos una variable aleatoria discreta que toma un número finito de valores.

Ejemplo 1 Se lanza tres veces una moneda buena. Sea Y la variable aleatoria que indica el número de caras que han salido en cada resultado. El espacio muestral es

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

y la variable aleatoria

$$Y: \Omega \to \mathbf{R}$$

toma los valores 0, 1, 2 y 3. Por ejemplo,

$$Y(CCC) = 3 \quad \text{o} \quad Y(XXC) = 1 \quad \text{o} \quad Y(XXX) = 0$$ ◀

En el siguiente ejemplo consideraremos una variable aleatoria que puede tomar un número infinito numerable de valores.

Ejemplo 2 Se lanza una moneda buena repetidamente hasta que aparece la primera cara. Sea Y la variable aleatoria que indica el número de lanzamientos producidos hasta que sale la primera cara. El espacio muestral es

$$\Omega = \{C, XC, XXC, XXXC, \ldots\}$$

y la variable aleatoria

$$Y: \Omega \to \mathbf{R}$$

toma los valores 1, 2, 3, ... Por ejemplo,

$$Y(C) = 1 \qquad Y(XC) = 2 \qquad Y(XXC) = 3 \qquad \ldots$$ ◀

Vamos a considerar ahora el problema de asignar probabilidades a los diferentes valores de una variable aleatoria X. Por el momento, nos limitaremos al caso en el que el recorrido de X es finito.

Volvamos al Ejemplo 1. La moneda del Ejemplo 1 es buena. Esto significa que cada resultado de Ω tiene la misma probabilidad, concretamente 1/8. Con esto en cuenta, podemos asignar probabilidades a los valores de X. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{CXX, XCX, XXC\}) \\ &= P(CXX) + P(XCX) + P(XXC) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

[1] Un conjunto infinito numerable tiene infinitos elementos que pueden ser enumerados, como el conjunto de los números enteros (el conjunto de los números racionales es también infinito numerable, pero el conjunto de los números reales es infinito no numerable.)

x	$P(X = x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Para los otros valores de X se pueden realizar cálculos similares. La tabla que sigue contiene los resultados.

La función $p(x) = P(X = x)$ se denomina **función de masa de probabilidad**. Nótese que $p(x) \geqslant 0$ y que $\sum_x p(x) = 1$. Éstas son las propiedades que definen una función de masa de probabilidad.

Definición Una variable aleatoria se denomina variable aleatoria discreta si puede tomar un conjunto finito o infinito numerable de valores. La distribución de probabilidad de X se puede describir mediante la función de masa de probabilidad $p(x) = P(X = x)$, que tiene las siguientes propiedades:

1. $p(x) \geqslant 0$
2. $\sum_x p(x) = 1$, donde la suma se realiza sobre todos los valores de X con $P(X = x) > 0$.

La función de masa de probabilidad es una forma de describir la distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta. Otra función importante que también describe la distribución de probabilidades es la función de distribución (acumulativa) $F(x) = P(X \leqslant x)$. Esta función está definida para *cualquier* variable aleatoria, no sólo las discretas.

Definición La **función de distribución (acumulativa)** $F(x)$ de una variable aleatoria se define como

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

En vez de «función de distribución acumulativa» diremos simplemente «función de distribución».

La función de masa de probabilidad y la función de distribución son formas equivalentes de describir la distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta, y cada una de ellas se puede obtener a partir de la otra, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 3 Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta está dada por la tabla que sigue. Calcule y dibuje la correspondiente función de distribución $F(x)$.

x	$P(X = x)$
−1	0.1
0	0.2
1.5	0.05
3	0.15
5	0.5

Solución

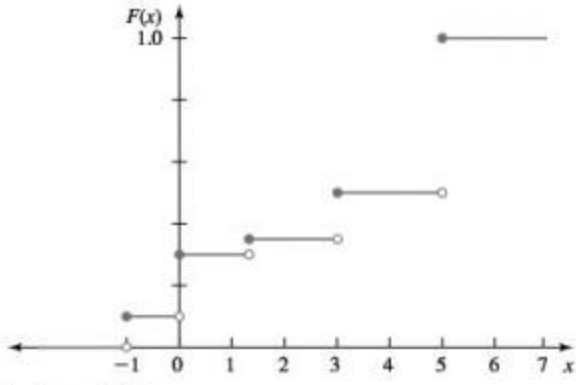
La función $F(x)$ está definida para todos los valores de $x \in \mathbf{R}$. Por ejemplo $F(-2.3) = P(X \leqslant -2.3) = P(\varnothing) = 0$ o $F(1) = P(X \leqslant 1) = P(X = -1$ ó $0) = 0.3$. Como $F(x) = P(X \leqslant x)$, hay que ser particularmente cuidadoso cuando x está en el recorrido de X. Para ilustrar esto, calcularemos $F(1.4)$ y $F(1.5)$. Se obtiene

$$F(1.4) = P(X \leqslant 1.4) = P(X = -1 \text{ o } 0) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

$$F(1.5) = P(X \leqslant 1.5) = P(X = -1, 0, \text{ o } 1.5) = 0.1 + 0.2 + 0.05 = 0.35$$

La función de distribución es una función definida por tramos. Se obtiene

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < -1 \\ 0.1 & \text{para} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 0.3 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 1.5 \\ 0.35 & \text{para} \quad 1.5 \leqslant x < 3 \\ 0.5 & \text{para} \quad 3 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{para} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$$



▲ **Figura 12.24**
La función de distribución $F(x)$ del Ejemplo 3. Los círculos rellenos de los extremos izquierdos de los segmentos indican que la función de distribución toma ese valor en los puntos donde la función tiene un salto

La Figura 12.24 muestra la gráfica de $F(x)$. ◀

Observando la Figura 12.24, se puede ver que la gráfica de $F(x)$ es una función no decreciente y constante por tramos que presenta saltos en aquellos valores de x donde $P(X = x) > 0$. La función $F(x)$ es continua por la derecha. Es decir, para todo $c \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{x \to c^+} F(x) = F(c)$$

No es continua por la izquierda ya que en los valores $c \in \mathbf{R}$ donde $P(X = c) > 0$,

$$\lim_{x \to c^-} F(x) \neq F(c)$$

Por ejemplo, cuando $c = 3$,

$$\lim_{x \to 3^-} F(x) = 0.35 \neq F(3) = 0.5$$

Además,

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Estas propiedades son características de la función de distribución de una variable aleatoria discreta.

Es posible obtener la función de masa de probabilidad a partir de la función de distribución. Veamos la función de distribución del Ejemplo 3. La función tiene un salto en $x = 3$ y la amplitud del salto es 0.15. Como $F(x) = P(X \leqslant x)$, se deduce que

$$\begin{aligned} p(3) &= P(X = 3) = P(X \leqslant 3) - P(X < 3) \\ &= F(3) - \lim_{x \to 3^-} F(x) = 0.5 - 0.35 = 0.15 \end{aligned}$$

Vemos entonces que la función de distribución tiene saltos en los valores de X para los que $P(X = x) > 0$. La altura del salto es igual a la probabilidad de que X tome ese valor.

Ejemplo 4 Suponga que la función de distribución de una variable aleatoria discreta X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < -5 \\ 0.2 & \text{para} \quad -5 \leqslant x < 2 \\ 0.6 & \text{para} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 0.7 & \text{para} \quad 3 \leqslant x < 6.5 \\ 1.0 & \text{para} \quad x \geqslant 6.5 \end{cases}$$

Calcule la correspondiente función de masa de probabilidad.

Solución

Hay que fijarse en los puntos $x \in \mathbf{R}$ donde $F(x)$ tiene saltos. Son los puntos donde $p(x) = P(X = x) > 0$. La altura del salto es igual a la probabilidad de que X tome ese valor. Entonces,

$$\begin{aligned} p(-5) &= P(X = -5) = P(X \leqslant -5) - P(X < -5) \\ &= F(-5) - \lim_{x \to 5^-} F(x) = 0.2 - 0.0 = 0.2 \end{aligned}$$

Asimismo

$$\begin{aligned} p(2) &= P(X = 2) = 0.6 - 0.2 = 0.4 \\ p(3) &= P(X = 3) = 0.7 - 0.6 = 0.1 \\ p(6.5) &= P(X = 6.5) = 1.0 - 0.7 = 0.3 \end{aligned}$$

No hay más valores en los que $P(X = x) > 0$. ◀

12.4.2 Media y varianza

Al saber la distribución de una variable aleatoria tenemos un conocimiento total sobre dicha variable aleatoria. Sin embargo, en la práctica a menudo es imposible o innecesario conocer la distribución completa de probabilidad de la variable aleatoria que describe un experimento aleatorio particular. En lugar de eso, puede ser suficiente determinar unas pocas cantidades características, como el valor medio y una medida que describa la dispersión alrededor del valor medio.

El valor medio o media de una variable aleatoria discreta

Ejemplo 5

El tamaño de nidada se puede ver como una variable aleatoria. Sea X el número de huevos por nidada puestos por una cierta especie de pájaro, y supongamos que la distribución de X está definida por la función de masa de probabilidad de la tabla que sigue. El número medio de huevos por nidada se calcula mediante la suma ponderada

$$\begin{aligned} \text{valor promedio} &= \sum_x xP(X = x) \\ &= (1)(0.05) + (2)(0.1) + (3)(0.2) \\ &\quad + (4)(0.3) + (5)(0.25) + (6)(0.1) = 3.9 \end{aligned}$$

y se obtiene que el tamaño medio de la nidada es de 3.9. ◀

x	$P(X = x)$
1	0.05
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.25
6	0.1

El valor medio de X se denomina **valor esperado**, **media** o **esperanza** de X, y se denota EX. Es una cantidad muy importante. He aquí su definición.

Definición Sea X una variable aleatoria discreta. Su valor esperado o media es

$$EX = \sum_x xP(X = x)$$

donde la suma se realiza sobre todos los valores de X para los que $P(X = x) > 0$.

Cuando el recorrido de X es finito, la suma de la definición está siempre definida. Cuando el recorrido de X es infinito numerable, hay que sumar un número infinito de términos. La suma puede ser infinita, dependiendo de la distribución de X. El

valor esperado de X sólo está definido si tanto $\sum_{x<0} xP(X=x)$ como $\sum_{x>0} xP(X=x)$ son finitos. Determinar si esas sumas infinitas tienen un valor finito está fuera del alcance de este capítulo, por lo que nos limitaremos a estudiar casos en los que esas sumas son finitas.

Para ver que la definición de media de una variable aleatoria discreta coincide con nuestra noción de sentido común de valores promedio, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 En un día de invierno del sur de Minnesota, se toman los siguientes valores de temperatura T_k (en grados Fahrenheit) a la hora k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_k	6	6	6	5	5	5	5	5	8	10	12	12	12

k	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
T_k	12	12	12	10	8	8	8	5	5	3	3

La temperatura media en ese día, basada en las observaciones cada hora, denominada $\bar{T}$ es

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{1}{24}(6+6+6+5+5+5+5+5+8+10+12\\ &\quad +12+12+12+12+12+10+8+8+8+5+5+3+3)\\ &= \frac{183}{24} = 7.625\end{aligned}$$

Reordenando estos valores de acuerdo con su tamaño se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{1}{24}[(3+3)+(5+5+5+5+5+5+5)+(6+6+6)\\ &\quad +(8+8+8+8)+(10+10)+(12+12+12+12+12+12)]\\ &= \frac{1}{24}[(3)(2)+(5)(7)+(6)(3)+(8)(4)+(10)(2)+(12)(6)]\\ &= 3\cdot\frac{2}{24}+5\cdot\frac{7}{24}+6\cdot\frac{3}{24}+8\cdot\frac{4}{24}+10\cdot\frac{2}{24}+12\cdot\frac{6}{24}\\ &= \sum[\text{temperatura}]\times[\text{frecuencia relativa de esa temperatura}]\\ &= \frac{183}{24} = 7.625\end{aligned}$$

◀

En el Ejemplo 6 se ha presentado la noción de **frecuencia relativa**, que indica cuan frecuentemente aparece un valor en una muestra, en relación al tamaño total de la muestra. Por ejemplo, 3 °F aparece dos veces en la muestra de 24 medidas, por lo que su frecuencia relativa es 2/24.

Si se interpretan las frecuencias relativas como probabilidades, se puede ver que $\bar{T}$ en el Ejemplo 6 es de hecho el valor esperado de la temperatura ese día.

Ejemplo 7 La tabla siguiente contiene el número de hojas por planta en una muestra de 25 plantas de albahaca.

16	15	13	16	16
14	16	15	18	17
16	18	16	13	16
16	16	15	15	16
15	18	16	16	15

Para calcular la distribución de frecuencias relativas, hay que contar el número de veces que aparece cada valor y después dividir por el tamaño de la muestra, que en este caso es 25. Esto se resume en la tabla siguiente.

Número de hojas	13	14	15	16	17	18
Frecuencia relativa	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$

Interpretaremos las frecuencias relativas como probabilidades. Si la variable aleatoria X indica el número de hojas por planta con una distribución de probabilidad dada por la distribución de frecuencias relativas, entonces el valor esperado del número de hojas por planta es

$$EX = 13 \cdot \frac{2}{25} + 14 \cdot \frac{1}{25} + 15 \cdot \frac{6}{25} + 16 \cdot \frac{12}{25} + 17 \cdot \frac{1}{25} + 18 \cdot \frac{3}{25}$$

$$= 393 \cdot \frac{1}{25} = 15.72$$

Nótese que aunque el número de hojas por planta es un valor entero, el número medio de hojas por planta no lo es. Se perdería información valiosa si se redondeara el valor medio al entero más cercano. ◀

Es importante advertir que el valor esperado de una variable aleatoria entera no tiene que ser entero. Para resaltar este punto, consideremos por ejemplo el número de nacimientos esperados durante su vida en una mujer entre 18 y 32 años en 1992 [los datos que siguen están extraídos de la U. S. Bureau of the Census (Oficina del Censo de EEUU), en 1994]. El número de nacimientos esperados en una mujer sin educación superior es 2.393, mientras que el número correspondiente a una mujer con educación superior es de 1.990. Si se redondean esos números al entero más cercano, en ambos casos se obtendría un valor de 2, con lo que se perderían las diferencias entre estos grupos.

La definición de valor esperado de X se puede extender al valor esperado de una función de X. Sea $g(x)$ una función de x. Entonces

$$Eg(X) = \sum_x g(x)P(X = x) \tag{12.18}$$

Ejemplo 8 Calcule EX^2 para la variable aleatoria del Ejemplo 5.

Solución

Utilizando la función de masa de probabilidad dada en el Ejemplo 5 se obtiene

$$EX^2 = \sum_x x^2 P(X = x)$$

$$= (1)^2(0.05) + (2)^2(0.1) + (3)^2(0.2) + (4)^2(0.3) + (5)^2(0.25) + (6)^2(0.1)$$

$$= 16.9$$ ◀

Varianza de una variable aleatoria discreta La **varianza** es otra cantidad importante que caracteriza la distribución de una variable aleatoria. Describe la amplitud del recorrido de la variable aleatoria. Para motivar la definición, consideremos dos variables aleatorias X e Y, cuyas funciones de masa de probabilidad se dan en la siguiente tabla.

k	$P(X = k)$	$P(Y = k)$
-10	0	0.2
-1	0.2	0
0	0.6	0.6
1	0.2	0
10	0	0.2

La Figura 12.25 ilustra estas dos distribuciones. Ambas variables aleatorias tienen media 0, pero el recorrido de Y es mucho más amplio que el recorrido de X. Para captar esta propiedad en una sola cantidad, se calcula la media ponderada de las distancias al cuadrado a la media, que se denomina varianza.

Definición Para cualquier variable aleatoria X de media μ, la varianza se define como

$$\text{var}(X) = E(X - \mu)^2$$

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces

$$\text{var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 P(X = x)$$

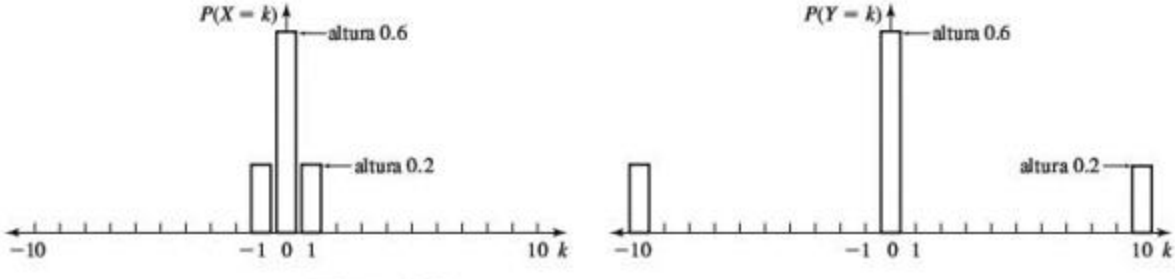
Como la varianza es un promedio de valores al cuadrado, nunca será negativa.

Volvamos a las variables aleatorias X e Y: como sus medias son iguales a cero, sus varianzas son

$$\text{var}(X) = (-1 - 0)^2(0.2) + (0 - 0)^2(0.6) + (1 - 0)^2(0.2) = 0.4$$

$$\text{var}(Y) = (-10 - 0)^2(0.2) + (0 - 0)^2(0.6) + (10 - 0)^2(0.2) = 40$$

Vemos que la varianza de Y es mayor que la varianza de X, reflejando el hecho de que el recorrido de Y es más amplio que el de X.



▲ **Figura 12.25**
Las funciones de masa de probabilidad de X y de Y. La distribución de Y está más dispersa que la distribución de X

La varianza de X se denomina frecuentemente σ^2 (que se lee «sigma cuadrado»). Una cantidad estrechamente relacionada con la varianza es la **desviación típica**, denominada σ. Se define como la raíz cuadrada de la varianza.

$$\text{d.t.} = \sigma = \sqrt{\text{var}(X)}$$

La desviación típica tiene la ventaja de tener las mismas unidades que la media, por lo que se puede interpretar más fácilmente que la varianza.

Ejemplo 9 Calcule la varianza y la desviación típica del número de hojas por planta del Ejemplo 7.

Solución

Sea X la variable aleatoria correspondiente al número de hojas por planta cuya distribución de probabilidad está dada en la tabla del Ejemplo 7. En el Ejemplo 7 obtuvimos que $EX = 15.72$. Por tanto, la varianza de X es

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= (13 - 15.72)^2 \frac{2}{25} + (14 - 15.72)^2 \frac{1}{25} + (15 - 15.72)^2 \frac{6}{25} \\ &\quad + (16 - 15.72)^2 \frac{12}{25} + (17 - 15.72)^2 \frac{1}{25} + (18 - 15.72)^2 \frac{3}{25} \\ &= 1.5616\end{aligned}$$

y su desviación estándar es

$$\text{d.t.}(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{1.5616} \approx 1.2496$$ ◀

Presentaremos a continuación algunas reglas importantes sobre valores esperados y varianzas. La primera regla indica cómo calcular el valor esperado y la varianza de una transformación lineal de X. Esta regla se aplica a cualquier variable aleatoria, no sólo a las discretas.

Sean a y b constantes. Entonces

$$E(aX + b) = a(EX) + b$$
$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

La primera propiedad dice que el valor esperado de una función lineal de X es la función lineal evaluada en el valor esperado de X. La segunda propiedad dice lo que le sucede a la varianza cuando se multiplica una variable aleatoria por un factor constante. Es importante tener en cuenta que el factor constante se eleva al cuadrado al calcular la varianza. Además, se puede ver que si se desplaza una variable aleatoria una cantidad constante la varianza no se modifica. En los Problemas 21 y 22 se demostrarán estas dos propiedades para el caso de que X sea una variable aleatoria discreta.

Ejemplo 10 Suponga que la mínima temperatura media medida en grados Fahrenheit en Minneapolis (Minnesota) es de 2 °F. Calcule la temperatura media mínima en grados Celsius.

Solución

La transformación lineal

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}$$

convierte la temperatura medida en grados Fahrenheit (F) en temperatura medida en grados Celsius (C). Por tanto,

$$EC = E\left[\frac{5(F-32)}{9}\right] = 5\,\frac{EF-32}{9}$$

$$= 5\,\frac{2-32}{9} = -\frac{150}{9} \approx -16.67$$

y resulta una temperatura media mínima en enero en Minneapolis de $-16.67\,^{\circ}\mathrm{C}$. ◀

Ejemplo 11 Calcule una fórmula para transformar la varianza de una temperatura medida en grados Celsius en la varianza de una temperatura medida en grados Fahrenheit.

Solución

Utilizaremos la transformación lineal obtenida en el Ejemplo 10 que relaciona la temperatura medida en grados Fahrenheit (F) con la temperatura medida en grados Celsius (C)

$$C = \frac{5(F-32)}{9}$$

Despejando F se obtiene

$$F = \frac{9}{5}\,C + 32$$

Por tanto,

$$\operatorname{var}(F) = \operatorname{var}\left(\frac{9}{5}\,C + 32\right) = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \operatorname{var}(C)$$

$$= \frac{81}{25}\operatorname{var}(C) = (3.24)\operatorname{var}(C)$$ ◀

A menudo es necesario considerar una suma de variables aleatorias. Presentaremos algunas reglas sin demostración. Sean X e Y dos variables aleatorias. Entonces, $X + Y$ es también una variable aleatoria, y se cumple que

$$E(X+Y) = EX + EY$$

Esta fórmula se cumple para cualquier variable aleatoria, no sólo las discretas.

Ejemplo 12 Suponga que el número medio de mujeres que entran a un café durante la hora del almuerzo es de de 52.2 y el número medio de hombres es 47.3. Calcule el número medio total de personas que entran al café durante la hora de comer.

Solución

Si X indica el número de mujeres e Y el número de hombres, entonces hay que calcular $E(X + Y)$. Como $EX = 52.2$ y $EY = 47.3$, tenemos que

$$E(X+Y) = EX + EY = 52.2 + 47.3 = 99.5$$ ◀

Podemos utilizar estas reglas para calcular una fórmula alternativa de la varianza. Empezaremos con

$$(X - \mu)^2 = X^2 - 2X\mu + \mu^2$$

Tomando esperanzas en los dos miembros, se obtiene

$$E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

Como la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas, el miembro derecho se puede simplificar

$$EX^2 - E(2\mu X) + E\mu^2 = EX^2 - 2\mu EX + \mu^2 = EX^2 - (EX)^2$$

como $\mu = EX$, $E\mu^2 = \mu^2 = (EX)^2$, y $E(2\mu X) = 2\mu EX = 2(EX)^2$. Con $E(X - \mu)^2 = \text{var}(X)$, tenemos

$$\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$$

A menudo esta fórmula es más conveniente de utilizar, ya que produce expresiones algebraicas más simples. Nótese que $EX^2 \neq (EX)^2$ a menos que $\text{var}(X) = 0$, y que $EX^2 \geqslant (EX)^2$ ya que $\text{var}(X) \geqslant 0$. Aplicaremos esta fórmula a la variable aleatoria del Ejemplo 5.

Ejemplo 13 Utilice la variable aleatoria del Ejemplo 5, el resultado del Ejemplo 8 y el resultado de la fórmula anterior para calcular la varianza de X.

Solución

En el Ejemplo 5 obtuvimos que $EX = 3.9$. En el Ejemplo 8, calculamos EX^2 y obtuvimos

$$EX^2 = 16.9$$

Por tanto,

$$\text{var}(X) = 16.9 - (3.9)^2 = 1.69$$ ◀

Distribuciones conjuntas Frecuentemente es importante estudiar la relación entre variables aleatorias.

Ejemplo 14 La gota es un tipo de artritis en la que el ácido úrico se deposita en forma cristalina dentro de las articulaciones. Un estudio medico podría centrarse en averiguar si la preponderancia de la enfermedad es dependiente del sexo. Un estudio de 1986 reveló que aproximadamente el 13.6 por 1000 de los hombres y el 6.4 por 1000 de las mujeres resultan afectados. Se puede tratar el sexo como una variable aleatoria y la presencia de gota como otra definiendo

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si varón} \\ 0 & \text{si mujer} \end{cases}$$

y

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si hay gota} \\ 0 & \text{si no hay gota} \end{cases}$$

La tabla que sigue muestra el número de individuos en cada una de las cuatro combinaciones en un estudio realizado sobre 10 000 hombres y 10 000 mujeres.

	$X = 0$	$X = 1$	Total
$Y = 0$	9936	9864	19 800
$Y = 1$	64	136	200
Total	10 000	10 000	20 000

Podemos ver que la fracción de individuos de este estudio que son varones y están afectados de gota es 136/20 000 = 0.0068. Si interpretamos esto como una probabilidad, podemos escribir

$$P(X = 1, Y = 1) = 0.0068$$

Al convertir todos los números de la tabla en frecuencias relativas se genera la **distribución de probabilidad conjunta** de X e Y

	$X = 0$	$X = 1$	Total
$Y = 0$	0.4968	0.4932	0.99
$Y = 1$	0.0032	0.0068	0.01
Total	0.5	0.5	1.0

◀

En general, cuando X e Y son variables aleatorias discretas, se define la distribución de probabilidad conjunta de X e Y como

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

para todos los valores de x en el recorrido de X y para todos los valores de y en el recorrido de Y. Se pueden obtener las distribuciones de X e Y, denominadas **distribuciones marginales**, de la siguiente forma:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

Ejemplo 15 Utilice los datos del Ejemplo 14 para determinar la probabilidad de que una persona escogida aleatoriamente en este estudio tenga gota.

Solución

Se desea calcular la probabilidad de que $Y = 1$:

$$P(Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1)$$
$$= 0.0032 + 0.0068 = 0.01$$

◀

Se puede definir probabilidades condicionales como en la Sección 12.3:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \tag{12.19}$$

suponiendo que $P(Y = y) > 0$.

Ejemplo 16 Utilice los datos del Ejemplo 14 para determinar la probabilidad de que un hombre escogido aleatoriamente en este estudio tenga gota.

Solución

Se desea calcular $P(Y = 1 \mid X = 1)$. Utilizando (12.19) se obtiene

$$P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{P(X = 1,\ Y = 1)}{P(X = 1)} = \frac{0.0068}{0.5} = 0.0136$$

o el 13.6 por mil de hombres. ◀

La influencia del sexo de la persona en la preponderancia de la gota nos conduce al concepto de **independencia** de variables aleatorias. La definición de independencia de variables aleatorias se sigue de la de independencia de sucesos. Concretamente, X e Y son **independientes** si para dos sucesos cualesquiera A y B,

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Cuando X e Y son variables aleatorias discretas, esto se simplifica:

$$P(X = x,\ Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \tag{12.20}$$

para todos los valores x en el recorrido de X y para todos los valores y en el recorrido de Y.

Ejemplo 17 Utilice los datos del Ejemplo 14 para determinar si X e Y son independientes.

Solución

Comprobaremos si $P(X = 1,\ Y = 1)$ es igual a $P(X = 1)P(Y = 1)$. Calculamos $P(X = 1,\ Y = 1) = 0.0068$, $P(X = 1) = 0.5$ y $P(Y = 1) = 0.01$. En consecuencia, $P(X = 1)P(Y = 1) = (0.5)(0.01) = 0.05$, que es diferente de $P(X = 1,\ Y = 1)$. Por tanto, concluimos que X e Y no son independientes, y se dice que son dependientes. ◀

Ejemplo 18 Suponga que X e Y son dos variables aleatorias discretas independientes cuyas funciones de masa de probabilidad se indican en la tabla siguiente:

k	$P(X = k)$	$P(Y = k)$
-1	0.1	0.3
0	0.0	0.2
1	0.7	0.1
2	0.2	0.4

(a) Calcule la probabilidad de que X tome el valor -1 e Y tome el valor 2.

(b) Calcule la probabilidad de que X sea negativa e Y positiva.

Solución

(a) Se desea calcular $P(X = -1,\ Y = 2)$. Utilizando que X e Y son independientes, tenemos

$$P(X = -1,\ Y = 2) = P(X = -1)P(Y = 2) = (0.1)(0.4) = 0.04$$

(b) Se desea calcular la probabilidad del suceso de que X sea negativo e Y positivo. Se trata del suceso $\{X = -1 \text{ e } Y = 1 \text{ ó } 2\}$. Como X e Y son independientes, tenemos

$$P(X = -1 \text{ y } Y = 1 \text{ o } 2) = P(X = -1)P(Y = 1 \text{ o } 2)$$
$$= (0.1)(0.1 + 0.4) = (0.1)(0.5) = 0.05$$ ◀

La definición de independencia de (12.20) permite calcular el valor esperado de un producto de variables aleatorias discretas independientes. El cálculo que sigue muestra el resultado cuando X e Y tienen recorridos finitos. Concretamente, en este caso tenemos

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyP(X = x, Y = y) = \sum_{x,y} xyP(X = x)P(Y = y)$$
$$= \sum_{x} xP(X = x) \sum_{y} yP(Y = y) = (EX)(EY)$$

Esta propiedad se cumple de forma general.

> Si X e Y son dos variables aleatorias independientes, entonces
> $$E(XY) = (EX)(EY)$$

Ejemplo 19 Dadas las variables aleatorias X e Y del Ejemplo 18, calcule $E(XY)$.

Solución

Como X e Y son independientes, se cumple que $E(XY) = (EX)(EY)$. Entonces,

$$EX = (-1)(0.1) + (0)(0.0) + (1)(0.7) + (2)(0.2) = 1.0$$

y

$$EY = (-1)(0.3) + (0)(0.2) + (1)(0.1) + (2)(0.4) = 0.6$$

Por tanto,

$$E(XY) = (EX)(EY) = (1.0)(0.6) = 0.6$$ ◀

La regla del valor esperado de un producto de variables aleatorias independientes se puede utilizar para calcular la varianza de la suma de dos variables aleatorias independientes. Concretamente, supongamos que X e Y son independientes. Entonces

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= E(X + Y)^2 - [E(X + Y)]^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX + EY)^2 \\ &= EX^2 + 2E(XY) + EY^2 - (EX)^2 - 2(EX)(EY) - (EY)^2 \end{aligned}$$

Como X e Y son independientes, $E(XY) = (EX)(EY)$ y la suma se puede simplificar,

$$EX^2 - (EX)^2 + EY^2 - (EY)^2$$

donde se puede reconocer $\text{var}(X) + \text{var}(Y)$. Por tanto,

> Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces
> $$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

Ambas fórmulas, $E(XY) = (EX)(EY)$ y $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ se cumplen para variables aleatorias independientes X e Y, aunque no sean discretas. Sin embargo, sólo utilizaremos estas igualdades en el contexto de variables aleatorias discretas. Es importante tener en mente que las dos fórmulas sólo se cumplen cuando X e Y son independientes.

En las restantes subsecciones de esta sección, presentaremos algunas distribuciones discretas importantes.

12.4.3 La distribución binomial

En esta subsección estudiaremos una variable aleatoria discreta que modela el número de éxitos en una serie de pruebas. Supongamos que se realiza un experimento aleatorio de pruebas repetidas, donde cada prueba tiene dos posibles resultados: éxito o fallo. Cada prueba se denomina **prueba de Bernoulli**. Las pruebas son independientes y la probabilidad de éxito en cada prueba es p. Se definen las variables aleatorias X_k, $k = 1, 2, ..., n$:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la } k\text{-ésima prueba tiene éxito} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Entonces $P(X_k = 1) = p = 1 - P(X_k = 0)$ para $k = 1, 2, ..., n$.

Si se repite la prueba n veces, se desea saber el número total de éxitos. Se hace

$$S_n = \text{número de éxitos en } n \text{ pruebas}$$

S_n se puede definir en función de las variables aleatorias X_k, concretamente,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{12.21}$$

Como las pruebas son independientes, la expresión anterior demuestra que S_n se puede expresar como una suma de variables aleatorias independientes, todas ellas con la misma distribución. En lo que sigue utilizaremos esta representación.

La variable aleatoria S_n es discreta y toma los valores 0, 1, 2, ..., n. Para calcular su función de masa de probabilidad $p(k) = P(S_n = k)$, argumentaremos como sigue. El suceso $\{S_n = k\}$ se puede representar como una cadena de ceros y unos de longitud n. Por ejemplo, si $n = 5$ y $k = 3$, entonces 01101 se puede interpretar como el resultado de las cinco pruebas; la primera produjo un fallo, seguido de dos éxitos, después un fallo y finalmente un éxito. La probabilidad de este resultado particular es fácil de calcular, ya que las pruebas son independientes. Se obtiene

$$P(01101) = (1 - p)pp(1 - p)p = p^3(1 - p)^2$$

El resultado 01101 no es la única forma en la que pueden aparecer tres éxitos en cinco pruebas. Cualquier otra cadena de longitud 5 con tres unos tendría la misma probabilidad. Para determinar el número de cadenas diferentes con tres unos, nótese que hay $\binom{5}{3}$ formas diferentes de colocar tres unos en cinco posiciones, y una sola forma de colocar los dos ceros en las dos posiciones restantes. Por tanto, hay $\binom{5}{3} \cdot 1 = \binom{5}{3}$ cadenas diferentes de longitud 5 con tres unos. Hay otra forma de obtener este resultado. Concretamente, hay 5! formas de ordenar los tres unos y los dos ceros si los ceros y los unos son indistinguibles entre sí. Como los ceros y los unos se pueden reordenar entre ellos mismos sin cambiar el resultado, hay que dividir por las formas posibles de reordenarlos entre ellos mismos. Por tanto se obtiene que hay

$$\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{3}$$

resultados posibles. Como todos esos resultados son equiprobables, resulta

$$P(S_5 = 3) = \binom{5}{3} p^3(1 - p)^2$$

Se puede utilizar un razonamiento similar para obtener la fórmula general, que resumiremos a continuación.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea S_n la variable aleatoria que cuenta el número de éxitos en n pruebas independientes. Cada prueba tiene una probabilidad de éxito p. Entonces S_n tiene **distribución binomial**, de parámetros n y p, y

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

La variable aleatoria S_n se denomina **binomial**, y su distribución, **distribución binomial**.

Ejemplo 20 Se lanza cuatro veces una moneda buena. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente tres caras.

Solución

Sea S_4 la variable aleatoria que indica el número de caras. Si obtener cara equivale a éxito, entonces la probabilidad de éxito es $p = 1/2$. Por tanto S_4 tiene distribución binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 1/2$. Entonces

$$P(S_4 = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$ ◀

Ejemplo 21 En un pedido de diez cajas, cada caja tiene una probabilidad de 0.2 de resultar dañada. Calcule la probabilidad de que haya dos o más cajas dañadas en el pedido.

Solución

Sea S_{10} la variable aleatoria que indica el número de cajas dañadas en el pedido. S_{10} tiene distribución binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.2$. El suceso de que haya dos o más cajas dañadas se puede expresar como $S_{10} \geqslant 2$. Para calcular $P(S_{10} \geqslant 2)$ se usa que

$$\begin{aligned} P(S_{10} \geqslant 2) &= 1 - P(S_{10} < 2) = 1 - [P(S_{10} = 0) + P(S_{10} = 1)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10} + \binom{10}{1}(0.2)(0.8)^9\right] \\ &\approx 0.6242 \end{aligned}$$ ◀

Ejemplo 22 El síndrome de Down o trisomía 21 es una anomalía genética en la que hay presentes tres copias del cromosoma 21, en lugar de dos. En EEUU, la preponderancia es de 1 cada 700 embarazos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 de 100 embarazos resulte afectado?

Solución

Si S_{100} es el número de embarazos afectados y $p = 1/700$ es la probabilidad de que un embarazo resulte afectado, entonces tiene distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 1/700$. Entonces

$$\begin{aligned} P(S_{100} \geqslant 1) &= 1 - P(S_{100} = 0) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{700}\right)^{100} \approx 0.1332 \end{aligned}$$ ◀

Si se utiliza para la variable aleatoria binomial S_n la representación $\sum_{k=1}^{n} X_k$, es inmediato calcular su media y su varianza. Se obtiene

$$EX_1 = (1)p + (0)(1-p) = p$$

y, como $EX_1^2 = (1)^2 p + (0)^2(1-p) = p$,

$$\text{var}(X_1) = EX_1^2 - (EX_1)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Como todas las X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ tienen la misma distribución,

$$ES_n = E\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} EX_k = np \tag{12.22}$$

Además, como las X_k son independientes,

$$\text{var}(S_n) = \text{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{var}(X_k) = np(1-p) \tag{12.23}$$

Presentaremos a continuación dos aplicaciones más de la distribución binomial, para familiarizarnos con otras situaciones donde esta distribución juega un papel importante.

Ejemplo 23 Consideremos de nuevo las plantas de guisantes. Supongamos que se obtienen 20 resultados independientes de cruces $Cc \times Cc$. Calcule la probabilidad de que como mucho dos resultados presenten flores blancas, y calcule el valor esperado y la varianza del número de resultados con flores blancas.

Solución

En un cruce $Cc \times Cc$, la probabilidad de que el resultado sea de flor blanca (genotipo cc) es de 1/4 y la probabilidad de un resultado de flor roja (genotipo CC o Cc) es de 3/4. El color de las flores de resultados independientes es independiente. Por tanto, esto se puede modelar como un experimento de veinte pruebas, cada una de ellas con probabilidad de éxito de 1/4. Se desea calcular la probabilidad de que al menos haya dos éxitos. Con $n = 20$, y $p = 1/4$, se obtiene

$$\begin{aligned} P(S_{20} \leqslant 2) &= P(S_{20} = 0) + P(S_{20} = 1) + P(S_{20} = 2) \\ &= \binom{20}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{20} + \binom{20}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{19} + \binom{20}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{18} \\ &\approx 0.0913 \end{aligned}$$

El valor medio del número de resultados con flor blanca es

$$ES_{20} = (20)\left(\frac{1}{4}\right) = 5$$

y la varianza es

$$\text{var}(S_{20}) = (20)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{4} = 3.75$$ ◀

Ejemplo 24 Suponga que una mujer portadora de hemofilia tiene cuatro hijas con un hombre que no es hemofílico. Calcule la probabilidad de que al menos una hija sea portadora del gen de la hemofilia.

Solución

Cada hija tiene una probabilidad de 1/2 de ser portadora del gen de la hemofilia, independientemente de las otras. Esto se puede modelar como un experimento con

cuatro pruebas independientes y probabilidad de éxito 1/2 («éxito» en este caso significa ser portadora). Por tanto,

$$\begin{aligned} P(S_4 \geqslant 1) &= 1 - P(S_4 = 0) \\ &= 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375 \end{aligned}$$

◀

Muestreo con y sin reposición Consideremos una urna con 10 bolas verdes y 15 azules. La extracción de bolas de esta urna (muestreo) se puede realizar con reposición y sin reposición. En el muestreo con reposición se extrae una bola, se anota su color y se devuelve a la urna. En este caso el número de bolas extraídas de un color específico tiene distribución binomial.

Ejemplo 25 Si se extraen con reposición cinco bolas de esta urna, ¿cuál es la probabilidad de que haya tres bolas azules en la muestra?

Solución

Sea S_5 el número de bolas azules en la muestra. Entonces S_5 tiene distribución binomial con n, el número de extracciones, igual a 5 y probabilidad de éxito $p = 15/(15 + 10) = 3/5$. Se obtiene

$$P(S_5 = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456$$

◀

En la extracción (muestreo) sin reposición, se extraen las bolas una tras otra sin devolverlas a la urna, y se anotan sus colores. Si se extraen las bolas de esta manera, la composición de la urna cambia después de cada extracción y por tanto el número de bolas de un cierto color ya no tiene distribución binomial.

Ejemplo 26 Si se extraen sin reposición cinco bolas de esta urna, ¿cuál es la probabilidad de que haya tres bolas azules en la muestra?

Solución

(Ya encontramos un problema similar en el Ejemplo 9 de la Sección 12.2.). Hay $\binom{25}{5}$ formas de extraer 5 bolas de la urna. Este es el tamaño del espacio muestral. Para extraer 3 bolas azules, hay que seleccionar 3 de las 15 bolas azules, lo que se puede hacer de $\binom{15}{3}$ formas distintas. Como se extraen un total de 5 bolas, se necesitan también dos bolas verdes, que se pueden extraer de $\binom{10}{2}$ formas distintas. Combinando las bolas azules y las verdes, se obtiene que hay un total de $\binom{15}{3}\binom{10}{2}$ formas de extraer tres bolas azules y dos verdes de la urna. Por tanto, la probabilidad de que haya tres bolas azules en una muestra de tamaño 5 cuando la extracción se realiza sin reposición es

$$\frac{\binom{15}{3}\binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} = \frac{455 \cdot 45}{53\,130} \approx 0.3854$$

Nótese que la respuesta es diferente a la del Ejemplo 25. ◀

La distribución de probabilidad del Ejemplo 26 se denomina **distribución hipergeométrica**. Esta distribución modela el muestreo sin reposición cuando hay dos tipos de objetos en la urna. Supongamos que la urna tiene M bolas verdes y N

bolas azules, y se extrae sin reposición una muestra de tamaño n de la urna. Si X indica el número de bolas azules en la muestra, entonces

$$P(X = k) = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

12.4.4 La distribución multinomial

En la subsección anterior hemos considerado experimentos en los que cada prueba podía tener sólo dos resultados posibles. Extenderemos ahora esta idea a más de dos resultados posibles. La distribución resultante en este caso se denomina **distribución multinomial**.

Ejemplo 27 Para estudiar las preferencias alimentarias del escarabajo hembra *Coleomegilla maculata*, se le presentan a cada escarabajo tres posibles alimentos: polen de maíz, masas de huevos del taladrador del trigo europeo y áfidos. Se sospecha que el 20% del tiempo el escarabajo prefiere los áfidos, el 35% las masas de huevos y el 45% el polen. Se realiza un experimento con 30 escarabajos y se obtiene que 8 escarabajos prefieren áfidos, 10 masas de huevos y 12 polen. Calcule las probabilidades de este suceso, suponiendo que las pruebas son independientes.

Solución

Se definen las variables aleatorias

N_1 = número de escarabajos que prefieren áfidos

N_2 = número de escarabajos que prefieren huevos

N_3 = número de escarabajos que prefieren polen

y las probabilidades

$p_1 = P$(el escarabajo prefiere áfidos) = 0.2

$p_2 = P$(el escarabajo prefiere masas de huevos) = 0.35

$p_3 = P$(el escarabajo prefiere polen) = 0.45

Planteamos que

$$P(N_1 = 8, N_2 = 10, N_3 = 12) = \frac{30!}{8!10!12!}(0.2)^8(0.35)^{10}(0.45)^{12}$$

El término $\frac{30!}{8!10!12!}$ cuenta el número de formas en que se pueden disponer 30 objetos, 8 de los cuales son de un tipo, 10 de otro y 12 de un tercero, que representan los escarabajos que prefieren áfidos, masas de huevos y polen, respectivamente. El término $(0.2)^8(0.35)^{10}(0.45)^{12}$ representa la probabilidad de una disposición particular, como en el caso binomial. ◀

Un ejemplo más complejo de la distribución multinomial es otro de los experimentos de Mendel, que cruzó plantas de guisantes con semillas amarillas lisas con plantas que tenían semillas verdes arrugadas. La redondez y el color amarillo son caracteres dominantes, mientras que la textura arrugada y el color verde son caracteres recesivos. Sea R el alelo de semillas redondas, r el alelo de semillas arrugadas, Y el alelo de semillas amarillas e y el alelo de semillas verdes. Entonces, el cruce de plantas homocigóticas de semillas amarillas redondas (genotipo RR/YY) con plantas homocigóticas de semillas verdes arrugadas (genotipo rr/yy) se representa

$$RR/YY \times rr/yy$$

y produce una descendencia de tipo *Rr/Yy*. Es decir toda la descendencia es heterocigótica de semillas amarillas redondas. Al cruzar plantas de esta descendencia se pueden dar todas las combinaciones posibles, como muestra la siguiente tabla.

	RY	*Ry*	*rY*	*ry*
RY	*RR/YY* amarilla redonda	*RR/Yy* amarilla redonda	*Rr/YY* amarilla redonda	*Rr/Yy* amarilla redonda
Ry	*RR/Yy* amarilla redonda	*RR/yy* verde redonda	*Rr/yY* amarilla redonda	*Rr/yy* verde redonda
rY	*rR/YY* amarilla redonda	*rR/Yy* amarilla redonda	*rr/YY* amarilla arrugada	*rr/Yy* amarilla arrugada
ry	*rR/yY* amarilla redonda	*rR/yy* verde redonda	*rr/yY* amarilla arrugada	*rr/yy* verde arrugada

Las leyes de la herencia nos indican que cada resultado posible es equiprobable. Hay 16 genotipos posibles, algunos de los cuales dan lugar al mismo tipo morfológico de semilla (por ejemplo amarilla redonda). El tipo morfológico de semilla se denomina **fenotipo**. La siguiente tabla resume los fenotipos y su distribución de probabilidad.

	Amarillo	**Verde**
Redonda	9/16	3/16
Arrugada	3/16	1/16

Ejemplo 28 Suponga que se obtienen 50 ejemplares independientes de un cruce

$$Rr/Yy \times Rr/Yy$$

donde 25 semillas son amarillas redondas, 9 son verdes redondas, 12 son amarillas arrugadas y 4 son verdes arrugadas. Determine la probabilidad de este resultado.

Solución

Se trata de otra aplicación de la distribución multinomial. Argumentando como en el ejemplo anterior, se obtiene que la probabilidad de este resultado es

$$\frac{50!}{25!9!12!4!}\left(\frac{9}{16}\right)^{25}\left(\frac{3}{16}\right)^{9}\left(\frac{3}{16}\right)^{12}\left(\frac{1}{16}\right)^{4}$$

◀

12.4.5 Distribución geométrica

Consideremos de nuevo una secuencia de pruebas de Bernoulli, es decir, un experimento aleatorio de pruebas repetidas en el que cada prueba tiene dos resultados posibles, éxito o fallo, y las pruebas son independientes. Como en la Subsección 12.4.3, denominaremos p a la probabilidad de éxito. Sin embargo, esta vez definiremos la variable aleatoria X que cuenta el número de pruebas hasta que se produce el primer éxito. La variable aleatoria X toma los valores 1, 2, 3, ... y es por tanto una variable aleatoria discreta. Su distribución de probabilidad se denomina **distribución geométrica** y su expresión es

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p,\ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.24}$$

ya que el suceso $\{X = k\}$ significa que las $k - 1$ primeras pruebas han sido fallos (cada uno de ellos tiene probabilidad $1 - p$ y las pruebas son independientes), seguidas por una prueba cuyo resultado ha sido un éxito (con probabilidad p e independiente de las otras pruebas).

El recorrido de X es el conjunto de los enteros positivos, por lo que puede tomar valores en un conjunto infinito (aunque numerable). Esta es la primera vez que aparece una variable de esta clase. Debemos discutir algunos aspectos relacionados con este recorrido infinito. Por ejemplo, para demostrar que $P(X = x)$ en (12.24) es en realidad una función de masa de probabilidad, es necesario sumar las probabilidades desde $k = 1$ hasta $k = \infty$. Esto implica sumar un número infinito de términos, y hay que explicar lo que esto significa.

Para demostrar que (12.24) es una función de masa de probabilidad hay que comprobar que $P(X = k) \geqslant 0$ y que su suma es 1. La primera parte es inmediata. Como p es una probabilidad, $0 \leqslant p \leqslant 1$, lo que significa que $(1 - p)^{k-1}p \geqslant 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Para la segunda parte, es necesario demostrar que

$$\sum_{k} P(X = k) = 1$$

donde la suma es sobre todos los valores de k en el recorrido de X, concretamente $k = 1, 2, 3, \ldots$ Escribiremos esto como

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)$$

y definiremos esta **suma infinita** como

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(X = k)$$

Para calcular esta suma (y más tarde su media y su varianza) utilizaremos la **serie geométrica**. La serie geométrica es la suma infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

La suma finita

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

se puede calcular utilizando el siguiente truco. Se escribe

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$$

y se resta qS_n de S_n. La mayoría de los términos se cancelan y se obtiene

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

Sacando factor común y despejando S_n se obtiene

$$(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

suponiendo que $q \neq 1$.

Si $|q| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ y por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad \text{para } |q| < 1$$

En el recuadro que sigue incluimos estos importantes resultados.

Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{12.25}$$

Si $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \tag{12.26}$$

Estos resultados se pueden utilizar para comprobar si la función de masa de probabilidad de la distribución geométrica suma 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p$$

$$= p\sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = p\cdot\frac{1}{p} = 1$$

En la suma, se hace el cambio $l = k - 1$, con lo que el intervalo de la suma cambia de $k = 1, 2, 3, \ldots$ a $l = 0, 1, 2, \ldots$, lo que permite aplicar el resultado de la serie geométrica de (12.26).

Ejemplo 29 El experimento aleatorio consiste en lanzar un dado bueno hasta que aparece el primer seis. Calcule la probabilidad de que el primer seis aparezca en el sexto intento.

Solución

Denominemos X a la primera vez que aparece el seis y p a la probabilidad de que salga un seis en cada intento (el éxito en el experimento). Como el dado es bueno, los seis números son igualmente probables y por tanto $p = 1/6$. Entonces

$$P(X=5) = \left(1-\frac{1}{6}\right)^4 \frac{1}{6} \approx 0.0804$$ ◀

Ejemplo 30 Considere una secuencia de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito p. Calcule la probabilidad de que en las primeras k pruebas no se produzca ningún éxito.

Solución

Sea X el número de intentos hasta el primer éxito. Se desea calcular la probabilidad del suceso $\{X > k\}$. Este suceso se puede expresar en términos de la variable aleatoria binomial S_k que cuenta el número de éxitos en las primeras k pruebas. El suceso $\{X > k\}$ es equivalente al suceso $\{S_k = 0\}$. Por tanto,

$$P(X > k) = P(S_k = 0) = (1-p)^k$$ ◀

Ejemplo 31 Compare la probabilidad de que no se produzca ningún éxito en las primeras k pruebas independientes de un experimento de Bernoulli con la probabilidad de que no se produzca ningún éxito en k pruebas después de n pruebas sin éxito.

Solución

Sea X el número de pruebas hasta el primer éxito con probabilidad de éxito en cada prueba p. Se desea comparar $P(X > k)$ con $P(X > n + k | X > n)$. Del Ejemplo 30, se puede concluir que

$$P(X > k) = (1 - p)^k$$

Para calcular la probabilidad condicional $P(X > n + k | X > n)$ se utiliza

$$P(X > n + k | X > n) = \frac{P(X > n + k,\ X > n)}{P(X > n)}$$

Como el suceso $\{X > n + k\}$ está incluido en el suceso $\{X > n\}$,

$$P(X > n + k,\ X > n) = P(\{X > n + k\} \cap \{X > n\}) = P(X > n + k)$$

y

$$\frac{P(X > n + k,\ X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X > n + k)}{P(X > n)} = \frac{(1 - p)^{n+k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k$$

Se obtiene que

$$P(X > k) = P(X > n + k | X > n)$$

Es decir, el no haber tenido un éxito en las n primeras pruebas no altera la probabilidad de no tener éxito en las k pruebas siguientes, comparada con la probabilidad de no tener éxito en las k primeras pruebas. Esto es una consecuencia de la independencia de las pruebas. ◀

Ejemplo 32 Si los dos padres son portadores de una enfermedad genética recesiva, y no presentan síntomas de la enfermedad, hay un 25% de probabilidad de que un hijo suyo presente síntomas de la enfermedad. Suponga que los padres tienen tres hijos sin síntomas y planean tener un cuarto hijo. ¿Cuál es la probabilidad de que el cuarto hijo tampoco presente síntomas?

Solución

Sea X la variable aleatoria del número de hijos sin síntomas hasta el primer hijo con síntomas para esta pareja. Con probabilidad de «éxito» de 1/4 se obtiene, utilizando el Ejemplo 31,

$$P(X > 4 | X > 3) = P(X > 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

También se puede argumentar de la siguiente forma: el hecho de que los tres primeros hijos no presenten síntomas no cambia la probabilidad de que el siguiente hijo no presente los síntomas de la enfermedad, ya que los sucesos son independientes. ◀

Vamos a calcular ahora la media y la varianza de la distribución geométrica. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica tal que $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$. Entonces,

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1}$$

Para calcular esta suma infinita hay que utilizar (12.26) y un resultado que no podemos justificar aquí. Concretamente, si $|q| < 1$, entonces

$$\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dq}q^k$$

Dicho con palabras, la derivada de esta suma infinita se puede obtener derivando cada término por separado y después realizando la suma. El intercambio de la suma y la derivación cuando la suma es infinita no siempre se puede hacer, pero se puede justificar en este caso. Utilizando este resultado, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dq}q^k = \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

donde en el último paso se ha utilizado que el término con $k = 0$ es igual a 0. Como $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ cuando $|q| < 1$, se deduce que

$$\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

y por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Como $q = 1 - p$,

$$EX = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p\,\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Para calcular la varianza de x se emplea un argumento similar. Primero se obtiene un resultado que será necesario para realizar el cálculo de la varianza. Concretamente, si $|q| < 1$, entonces

$$\frac{d^2}{dq^2}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2}{dq^2}q^k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}$$

Como

$$\frac{d^2}{dq^2}\frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Tenemos que

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Para calcular la varianza es útil calcular primero

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1}p$$

$$= (1-p)p\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} = (1-p)\,p\,\frac{2}{(1-(1-p))^3}$$

$$= \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

Como $E\{X(X-1)\} = EX^2 - EX$, se obtiene

$$\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2$$
$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Resumiremos nuestros resultados.

Si X es una variable aleatoria con distribución geométrica tal que $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, entonces

$$EX = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad \text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Ejemplo 33 Se lanza un dado bueno hasta que aparece el primer seis. ¿Cuántas tiradas habrá que esperar en promedio?

Solución

Para responder a esta pregunta, es necesario calcular EX, siendo X una variable aleatoria con distribución geométrica de probabilidad de éxito $p = 1/6$. Por tanto,

$$EX = \frac{1}{p} = 6$$

Dicho con palabras, en promedio habrá que lanzar el dado seis veces hasta que aparezca el primer seis. ◀

12.4.6 La distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una de las distribuciones de probabilidad más importantes. Se utiliza para modelar, por ejemplo, la sustitución de aminoácidos en las proteínas, la probabilidad de que los huéspedes escapen al parasitismo. O la distribución espacial de plantas. Se usa a menudo para modelar «sucesos raros», como veremos.

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución de **Poisson** de parámetro $\lambda > 0$ si

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

La variable aleatoria X es discreta y su recorrido es el conjunto de todos los enteros no negativos. Por tanto, toma valores en un conjunto infinito numerable de valores.

Para demostrar que la distribución de probabilidad que hemos definido suma 1 y calcular la media y la varianza de X, son necesarios algunos resultados adicionales. Recuérdese que el desarrollo en serie de Taylor de orden n de la función $f(x) = e^x$ es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Se puede demostrar (aunque no lo haremos aquí) que en el límite cuando $n \to \infty$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. En el miembro derecho tenemos una suma infinita y utilizaremos la notación (como en la subsección anterior)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

para expresar esta suma infinita. Por tanto, para todo $x \in \mathbf{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{12.27}$$

Podemos utilizar (12.27) para demostrar que la función de masa de probabilidad de la distribución de Poisson suma 1. Concretamente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Además, como $\lambda > 0$, $P(X = k) \geqslant 0$. Por tanto, la función de masa de probabilidad de la distribución de Poisson cumple las condiciones que debe cumplir una función de masa de probabilidad.

Ejemplo 34 Suponga que el número de plantas por hectárea de una cierta especie sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3$ plantas por hectárea. Calcule la probabilidad de que (a) no haya plantas en una hectárea determinada y (b) haya al menos dos plantas en una hectárea determinada.

Solución

Sea X el número de plantas en una hectárea determinada. Entonces, la distribución de X es de Poisson de parámetro $\lambda = 3$.

(a) La probabilidad de que no haya plantas en una hectárea dada es

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} = e^{-3} \approx 0.0498$$

(b) La probabilidad de que haya al menos dos plantas en una hectárea dada es

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) = 1 - e^{-3}(1 + 3) \approx 0.8009 \end{aligned}$$

◀

Para calcular la media y la varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson hay que utilizar (12.27) repetidamente. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Entonces, formalmente,

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Para calcular la varianza de X, empezaremos calculando

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

Para resumir nuestros resultados,

> Si X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ entonces,
>
> $$EX = \lambda \quad \text{y} \quad \text{var}(X) = \lambda$$

Ejemplo 35 El número de sustituciones de una secuencia dada de aminoácidos durante un periodo de tiempo se modela mediante una distribución de Poisson. Suponga que el número de sustituciones de una secuencia de 100 aminoácidos durante un periodo de 1 000 000 de años tiene distribución de Poisson con un número medio de sustituciones de 1. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca al menos una sustitución?

Solución

Si X indica el número de sustituciones, entonces su distribución es de Poisson de media 1. Como la media de una distribución de Poisson es igual al parámetro, se obtiene que $\lambda = 1$. Por tanto,

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$ ◀

Hemos mencionado previamente que la distribución de Poisson modela eventos raros. El resultado que sigue precisa esta idea. Consideremos una secuencia de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito p. El número de éxitos en n pruebas sigue la distribución binomial. Sea S_n el número de éxitos en n pruebas. Consideremos el caso en el que el número de pruebas es muy grande pero la probabilidad p es muy pequeña, de forma que los sucesos son raros. Para precisar esto matemáticamente, es necesario tomar el límite cuando n tiende a infinito de forma que el producto np, que representa el número esperado de éxitos en n pruebas se aproxime a una constante. Para ello, p tiene que tender a 0 cuando n tiende a infinito. Para indicar que la probabilidad de éxito depende de n la denominaremos p_n. El siguiente resultado expresa que el número de éxitos en un número grande de pruebas se aproxima a la distribución de Poisson si la probabilidad de éxito es pequeña.

APROXIMACIÓN DE POISSON A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

> Sea S_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p_n. Si $p_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ de forma que $\lim_{n\to\infty} np = \lambda > 0$, entonces
>
> $$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

En todos los ejemplos de la distribución binomial, la probabilidad p era fija y no dependía de n. ¿Cómo debe interpretarse entonces este resultado? Es la formulación matemática precisa. Nos permite utilizar la distribución de Poisson como aproximación a la distribución binomial cuando el número de pruebas n es grande y la probabilidad de éxito p es pequeña. Demostraremos este resultado antes de presentar un ejemplo.

La clave para demostrar este resultado es el siguiente límite. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$$

Para demostrar este límite, probaremos que

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = x$$

Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right)$$

Este límite es de la forma $\infty\cdot 0$, por lo que se podría expresar en la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y utilizar la regla de l'Hôpital. Expresaremos el límite en la forma

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}}x_n$$

Para evaluar este límite se calcula

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$$

utilizando la regla de l'Hôpital. Se obtiene

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y}}{1} = 1$$

Este resultado, junto con $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 0$, conduce a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}}x_n = (1)(x) = x$$

Ahora ya se puede demostrar la aproximación de Poisson. Obsérvese que

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$$

Se define $\lambda_n = \lambda p_n$, y por tanto $p_n = \frac{\lambda_n}{\lambda}$. Entonces

$$\begin{aligned}P(S_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} np_n = \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-\lambda_n}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$$

se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}P(S_n=k)=(1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(1)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

lo que demuestra el resultado.

Utilizaremos ahora este resultado para comparar la aproximación de Poisson con el resultado de la distribución binomial. Esto servirá para ilustrar cómo se utiliza el resultado que acabamos de demostrar.

Ejemplo 36 Suponga que se lanza 100 veces una moneda trucada y de denomina el número de caras. Si la probabilidad de obtener cara es de 1/50, calcule $P(S_{100}=k)$ para $k=0$, 1 y 2 y compare los resultados con la aproximación de Poisson.

Solución

Como $n=100$ y $p=1/50$, compararemos la distribución de S_{100} con una distribución de Poisson de parámetro $\lambda=np=100/50=2$. Se obtiene

$$P(S_{100}=k)=\binom{100}{k}\left(\frac{1}{50}\right)^k\left(\frac{49}{50}\right)^{100-k}\approx e^{-2}\frac{2^k}{k!}$$

Para $k=0$,

$$P(S_{100}=0)=\left(\frac{49}{50}\right)^{100}\approx 0.1326$$

$$e^{-2}\approx 0.1353$$

Para $k=1$,

$$P(S_{100}=1)=100\cdot\frac{1}{50}\left(\frac{49}{50}\right)^{99}\approx 0.2707$$

$$2e^{-2}\approx 0.2707$$

Para $k=2$,

$$P(S_{100}=2)=\frac{100\cdot 99}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2\left(\frac{49}{50}\right)^{98}\approx 0.2734$$

$$e^{-2}\frac{2^2}{2}\approx 0.2707$$

En cada caso, podemos ver que el valor aproximado está muy cercano al valor real. La ventaja es que la distribución de Poisson es mucho más fácil de calcular que la distribución binomial ya que el cálculo de los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ requiere mucha carga computacional. ◀

En la Sección 10.7 se presentaron modelos huésped-parasitoide. Los parasitoides son insectos que depositan sus huevos sobre, en el interior, o cerca de otro artrópodo (generalmente inmaduro). Los huevos se desarrollan convirtiéndose en individuos adultos y consumiendo al huésped. Los parasitoides forman el 14% de todas las especies de insectos. Un componente clave en el modelado de las interacciones huésped-parasitoide es la probabilidad de que huésped pueda escapar al parasitismo. Los primeros modelos fueron desarrollados por Nicholson y Bailey (1935). Asumen que la probabilidad de que un huésped escape al parasitismo es de e^{-aP}, siendo P la densidad de parasitoides y a un parámetro positivo, denominado eficiencia de búsqueda. El siguiente ejemplo explica de dónde proviene esta forma funcional de la probabilidad de escapar.

Ejemplo 37 Los encuentros de parasitoides con huéspedes se modelan en ciertos casos con una distribución de Poisson. Supongamos un huésped rodeado por P parasitoides. Cada parasitoide, independientemente de los otros, tiene una probabilidad a de encontrar al huésped. Esto se puede considerar como una secuencia de P pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito a. Si ningún parasitoide encuentra al huésped, éste escapará al parasitismo. Si P es grande y a es pequeño, se puede utilizar la aproximación de Poisson. Entonces, el número de encuentros tiene aproximadamente una distribución de Poisson de parámetro aP y se obtiene

$$P(\text{húesped escapado del parasitismo}) = e^{-aP}$$

Esta es la probabilidad de escape utilizada en el modelo huésped-parasitoide de Nicholson-Bailey que presentamos en la Sección 10.7. Es el término 0 de una distribución de Poisson y proviene de la suposición de que los parasitoides buscan aleatoriamente. ◀

La aproximación de Poisson juega un papel crucial en la estimación del tiempo de divergencia de especies utilizando secuencias de datos de aminoácidos. Se comparan secuencias de la misma proteína en diferentes especies y el número de diferencias en parejas de aminoácidos da una indicación de la distancia evolutiva entra una pareja de especies. El modelo matemático más simple para estimar tiempos de divergencia basándose en secuencias de aminoácidos supone que la probabilidad de una sustitución en un punto dado de la secuencia de aminoácidos es la misma en todos los puntos y depende del tiempo desde la divergencia. Se supone además que todos los puntos son independientes. El número de sustituciones de aminoácidos en una secuencia de longitud n tiene entonces distribución binomial con probabilidad de éxito igual a la probabilidad de sustitución en cada punto, suponiendo que se puede ignorar la posibilidad de que en un punto se de una sustitución múltiple (lo que es razonable cuando el tiempo desde la divergencia no es muy grande). Si la secuencia es suficientemente larga y el tiempo desde la divergencia no es muy grande de forma que la probabilidad de sustitución sea pequeña, entonces el número de sustituciones es igual al número de diferencias entre las dos secuencias y se puede aproximar por una distribución de Poisson.

Ejemplo 38 Suponga que dos especies de vertebrados divergieron hace 10 millones de años. Basándose en otros datos, se espera que la probabilidad de que haya una diferencia de aminoácidos entre las cadenas de hemoglobinas α (longitud 140 aminoácidos) sea de aproximadamente 0.014.

(a) ¿Cuántas diferencias de aminoácidos se pueden esperar al comparar las dos secuencias?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al menos tres puntos con aminoácidos diferentes?

Solución

El número de diferencias en aminoácidos tiene aproximadamente distribución de Poisson de parámetro igual al producto de la longitud de la secuencia por la probabilidad de encontrar una diferencia en un punto dado. Se obtiene $\lambda = 140 \cdot 0.014 = 1.96$.

(a) El número esperado de diferencias en aminoácidos es igual al parámetro de la distribución, concretamente 1.96.

(b) La probabilidad de encontrar al menos tres diferencias es igual a

$$1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2) = 1 - e^{-1.96}(1 + 1.96 + 1.96^2/2) \approx 0.3125$$ ◀

12.4.7. Problemas

(12.4.1)

1. Se lanza una moneda dos veces. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras en cada realización del experimento. Obtenga la función de masa de probabilidad que describe la distribución de X.

2. Se lanza un dado dos veces. Sea X la variable aleatoria del máximo de los dos números. Obtenga la función de masa de probabilidad que describe la distribución de X.

3. Una urna contiene tres bolas verdes y dos azules. Se extraen aleatoriamente sin reposición dos bolas. Sea X el número de bolas verdes extraídas. Obtenga la función de masa de probabilidad que describe la distribución de X.

4. Se extraen sin reposición cinco cartas de una baraja francesa estándar de 52 cartas. Sea X el número de ases extraídos. Obtenga la función de masa de probabilidad que describe la distribución de X.

5. Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por la siguiente tabla

x	$P(X = x)$
-3	0.2
-1	0.3
1.5	0.4
2	0.1

Calcule y dibuje la correspondiente función de distribución.

6. Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por la siguiente tabla

x	$P(X = x)$
-1	0.1
-0.5	0.2
0.1	0.1
0.5	0.25
1	0.35

Calcule y dibuje la correspondiente función de distribución.

7. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \leqslant x < 0 \\ 0.3 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.7 & 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

Determine la función de masa de probabilidad de X.

8. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 & 0 \leqslant x < 1.3 \\ 0.3 & 1.3 \leqslant x < 1.7 \\ 0.8 & 1.7 \leqslant x < 1.9 \\ 0.9 & 1.9 \leqslant x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Determine la función de masa de probabilidad de X.

9. Sea $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, y suponga que

$$p(k) = \frac{k}{N}, k \in S$$

siendo N una constante.

(a) Determine N de forma que $p(k)$, $k \in S$ sea una función de masa de probabilidad.

(b) Sea X una variable aleatoria discreta con $P(X = k) = p(k)$. Calcule la probabilidad de que X sea menor que 8.

10. (*Distribución geométrica*) En el Ejemplo 2 se lanza una moneda repetidas veces hasta que aparece cara. Suponga que la probabilidad de que aparezca cara es p con $p \in (0, 1)$. Sea Y una variable aleatoria que contiene el número de intentos hasta que aparece la primera cara.

(a) Demuestre que $P(Y = 1) = p$, $P(Y = 2) = (1 - p)p$, y $P(Y = 3) = (1 - p)^2 p$.

(b) Explique por qué

$$P(Y = j) = (1 - p)^{j-1} p$$

para $j = 1, 2, ...$ Esta distribución se conoce como **distribución geométrica**.

(c) Demuestre que

$$\sum_{j \geqslant 1} P(Y = j) = 1$$

siguiendo los siguientes pasos.

(i) Para $0 \leqslant q < 1$, defina

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

Demuestre que

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

y a partir de eso, concluya que

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(ii) Demuestre que

$$P(Y \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} P(Y = j)$$
$$= p \sum_{j=1}^{k} (1 - p)^{j-1}$$

Utilice el resultado de (i) para demostrar que esto se puede simplificar a

$$1 - (1 - p)^k$$

y a partir de eso concluya que

$$\lim_{k \to \infty} P(Y \leqslant k) = 1$$

que es equivalente a

$$\sum_{j \geqslant 1} P(Y = j) = 1$$

(12.4.2)

11. La siguiente tabla contiene el número de hojas por planta de albahaca en una muestra de tamaño 25.

19	21	20	13	18
14	17	14	17	17
13	15	12	15	17
15	16	18	17	14
14	14	13	20	13

(a) Calcule la distribución de frecuencias relativas.

(b) Calcule el valor medio (i) promediando directamente los valores de la tabla y (ii) utilizando la distribución de frecuencias relativas obtenida en (a).

12. La siguiente tabla contiene el número de áfidos por planta en una muestra de tamaño 30.

15	27	13	2	0	16
26	0	2	1	17	15
21	13	5	0	19	25
12	11	0	16	22	1
28	9	0	0	1	17

(a) Calcule la distribución de frecuencias relativas.

(b) Calcule el valor medio (i) promediando directamente los valores de la tabla y (ii) utilizando la distribución de frecuencias relativas obtenida en (a).

13. La siguiente tabla contiene las puntuaciones de 25 estudiantes en un examen.

7	8	8	3	2
5	6	9	10	6
8	8	7	6	9
10	4	4	8	6
9	10	5	5	8

(a) Calcule la distribución de frecuencias relativas.

(b) Calcule el valor medio (i) promediando directamente los valores de la tabla y (ii) utilizando la distribución de frecuencias relativas obtenida en (a).

14. La siguiente tabla contiene el número de flores por planta en una muestra de tamaño 20.

15	17	19	18	15
17	18	15	14	19
17	15	15	18	19
20	17	14	17	18

(a) Calcule la distribución de frecuencias relativas.

(b) Calcule el valor medio (i) promediando directamente los valores de la tabla y (ii) utilizando la distribución de frecuencias relativas obtenida en (a).

15. Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria está dada por la siguiente tabla.

x	$P(X = x)$
−2	0.1
−1	0.4
0	0.3
1	0.2

(a) Calcule EX.

(b) Calcule EX^2.

(c) Calcule $E[X(X - 1)]$.

16. Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria está dada por la siguiente tabla.

x	$P(X = x)$
0	0.3
1	0.3
2	0.1
3	0.1
4	0.2

(a) Calcule EX.

(b) Calcule EX^2.

(c) Calcule $E(2X - 1)$.

17. Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria está dada por la siguiente tabla.

x	$P(X = x)$
−3	0.2
−1	0.3
1.5	0.4
2	0.1

Calcule la media, la varianza y la desviación típica.

18. Suponga que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria está dada por la siguiente tabla.

x	$P(X = x)$
−1	0.1
−0.5	0.2
0.1	0.1
0.5	0.25
1	0.35

Calcule la media, la varianza y la desviación típica.

19. Sea X una variable aleatoria **uniformemente distribuida** en el conjunto

$$S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$$

Es decir,

$$P(X = k) = \frac{1}{10}, \quad k \in S$$

(a) Calcule EX.

(b) Calcule $\text{var}(X)$.

20. Sea X una variable aleatoria **uniformemente distribuida** en el conjunto

$$S = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

siendo n un entero positivo, es decir,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k \in S$$

(a) Calcule EX.

(b) Calcule $\text{var}(X)$.

Sugerencia: recuerde que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

21. Suponga que X es una variable aleatoria discreta con recorrido finito, sea

$$p(x) = P(X = x)$$

(a) Demuestre que

$$E(aX + b) = \sum_{x} (ax + b)p(x)$$

(b) Utilice el resultado de (a) y las reglas para sumas finitas para concluir que

$$E(aX + b) = aEX + b$$

22. Suponga que X es una variable aleatoria discreta con recorrido finito, sea

$$p(x) = P(X = x)$$

(a) Demuestre que

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \sum_{x} (x - EX)^2 p(x)$$

(b) Utilice el resultado de (a) y las reglas para sumas finitas para concluir que

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \,\text{var}(X)$$

23. Sean X e Y dos variables aleatorias con distribución conjunta

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	0.3	0.1
$Y = 1$	0.2	0.4

(a) Calcule $P(X = 1, Y = 0)$.

(b) Calcule $P(X = 1)$.

(c) Calcule $P(Y = 0)$.

(d) Calcule $P(Y = 0 \mid X = 1)$.

24. Sean X e Y dos variables aleatorias con distribución conjunta

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	0.2	0.3
$Y = 1$	0.1	0.5

(a) Calcule $P(X = 0, Y = 1)$.

(b) Calcule $P(X = 0)$.

(c) Calcule $P(Y = 1)$.

(d) Calcule $P(Y = 1 \mid X = 0)$.

25. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes cuyas funciones de masas de probabilidad se muestran en la siguiente tabla

k	$P(X = k)$	$P(Y = k)$
−2	0.1	0.2
−1	0	0.2
0	0.3	0.1
1	0.4	0.3
2	0.05	0
3	0.15	0.2

(a) Calcule EX y EY.

(b) Calcule $E(X + Y)$.

(c) Calcule $\text{var}(X)$ y $\text{var}(Y)$.

(d) Calcule $\text{var}(X + Y)$

26. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes cuyas funciones de masas de probabilidad se muestran en la siguiente tabla

k	$P(X = k)$	$P(Y = k)$
−3	0.1	0.1
−1	0.1	0.2
0	0.2	0.1
0.5	0.3	0.3
2	0.15	0.1
2.5	0.15	0.2

(a) Calcule EX y EY.

(b) Calcule $E(X + Y)$.

(c) Calcule $\text{var}(X)$ y $\text{var}(Y)$.

(d) Calcule $\text{var}(X + Y)$

27. Hay dos fórmulas para calcular la varianza de X, concretamente,

$$\text{var}(X) = E(X - EX)^2$$

y

$$\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$$

(a) Explique por qué $\text{var}(X) \geqslant 0$.

(b) Utilice el resultado de (a) para explicar por qué

$$EX^2 \geqslant (EX)^2$$

28. Suponga que X es una variable aleatoria discreta de recorrido finito. Demuestre que si $\text{var}(X) = 0$, entonces $P(X = EX) = 1$.

(12.4.3)

29. Se lanza diez veces una moneda buena. Sea X el número de caras
(a) Calcule $P(X = 5)$.
(b) Calcule $P(X \geqslant 8)$.
(c) Calcule $P(X \leqslant 9)$.

30. Se lanza cinco veces una moneda con probabilidad de salir cara 0.3. Sea X el número de cruces.
(a) Calcule $P(X = 2)$.
(b) Calcule $P(X \geqslant 1)$.

31. Se lanza un dado seis veces. Sea X el número de veces que sale un 6. Calcule la función de masa de probabilidad.

32. Una urna contiene cuatro bolas verdes y seis azules. Se escoge aleatoriamente una bola, se anota su color y se devuelve a la urna. Se repite este experimento cuatro veces. Sea X el número total de bolas verdes que se obtiene. Calcule la función de masa de probabilidad de X.

33. Suponga que el 20% de las plantas de un campo están infectadas con áfidos. Se escogen aleatoriamente 20 plantas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas tenga áfidos?

34. Para realizar un test de una enfermedad que tiene una preponderancia en la población del 1 por 100, se extraen y se analizan muestras de sangre de diez personas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las muestras esté infectada?

35. Suponga que una caja contiene diez manzanas. La probabilidad de que una manzana esté estropeada es de 0.1 (asuma que las manzanas son independientes).
(a) Calcule el número esperado de manzanas estropeadas por caja.
(b) Un envío consta de diez cajas. Calcule el número esperado de cajas que no contienen manzanas estropeadas.

36. Se lanza diez veces una moneda buena. Sea X el número de caras. ¿Cuál es la probabilidad de que X esté dentro de un intervalo alrededor de la media de amplitud de una desviación típica?

37. Un examen de selección múltiple consta de cincuenta preguntas. Cada pregunta tiene cuatro opciones. Calcule el número esperado de respuestas correctas si un estudiante responde aleatoriamente.

38. Un examen VERDADERO-FALSO consta de 20 preguntas. Calcule el número esperado de de respuestas correctas si un estudiante responde aleatoriamente.

39. (*Muestreo con y sin reposición*) Una urna contiene 12 bolas verdes y 24 bolas azules.
(a) Se extraen 10 bolas de la urna. Calcule la probabilidad de que 6 de las 10 bolas sean azules.
(b) Se extrae una bola de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna. Se repite esto 10 veces. Calcule la probabilidad de que 6 de las 10 bolas sean azules.

40. (*Muestreo con y sin reposición*) Una urna contiene K bolas verdes y $N - K$ bolas azules.
(a) Se extraen n bolas de la urna. Calcule la probabilidad de que k de las n bolas sean azules.
(b) Se extrae una bola de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna. Se repite esto 10 veces. Calcule la probabilidad de que k de las n bolas sean azules.

(12.4.4)

41. Repita el Ejemplo 27 cuando $N_1 = 10$, $N_2 = 14$ y $N_3 = 6$.

42. Repita el Ejemplo 27 cuando $N_1 = 5$, $N_2 = 15$ y $N_3 = 10$.

43. Repita el Ejemplo 28 cuando 20 semillas son amarillas redondas, 10 semillas son verdes redondas, 8 semillas son amarillas arrugadas y 2 semillas son verdes arrugadas.

44. Repita el Ejemplo 28 cuando 17 semillas son amarillas redondas, 22 semillas son verdes redondas, 13 semillas son amarillas arrugadas y 8 semillas son verdes arrugadas.

45. Una urna contiene seis bolas verdes, ocho azules y diez rojas. Se extrae una bola de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna. Esto se repite seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas de cada color?

46. Una urna contiene ocho bolas verdes, cuatro azules y seis rojas. Se extrae una bola de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna. Esto se repite cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas verdes, una azul y una roja?

47. En un cruce de guisantes $Cc \times Cc$, cinco descendientes son de genotipo CC, doce son de genotipo Cc y seis son de genotipo cc. ¿Cuál es la probabilidad de este suceso?

48. Suponga que la proporción de sexos es 1 : 1. Una mujer portadora de la hemofilia tiene cuatro hijos con un hombre que no es hemofílico. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una hija que no sea portadora, una hija portadora, un hijo hemofílico y un hijo que no sea hemofílico?

(12.4.5)

49. Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda buena hasta la primera vez que aparece cara. Calcule la probabilidad de que la primera cara aparezca en el k-ésimo intento para $k = 1, 2$ y 3.

50. Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado hasta la primera vez que aparece un cinco o un seis. Calcule la probabilidad de que el primer cinco o seis aparezca en el k-ésimo intento para $k = 1, 2, \ldots, 5$.

51. Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda buena hasta la primera vez que aparece cara. Calcule la probabilidad de que la primera cara aparezca después del tercer intento.

52. Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado hasta la primera vez que aparece un seis. Calcule la probabilidad de que el primer seis aparezca después del séptimo intento.

53. Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda buena hasta la primera vez que aparece cara. Calcule la probabilidad de que la primera cara aparezca dentro de los primeros cuatro intentos.

54. Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado hasta la primera vez que aparece un 1 o un 2. Calcule la probabilidad de que el primer 1 ó 2 aparezca dentro de las cinco primeras tiradas.

55. Una urna contiene una bola negra y 14 bolas blancas. Las bolas se extraen aleatoriamente, de una en una, hasta que se saca la bola negra. Las extracciones son con reposición. Calcule la probabilidad de que se necesiten como mínimo 20 extracciones.

56. Una urna contiene una bola negra y $n - 1$ bolas blancas. Las bolas se extraen aleatoriamente, de una en una, hasta que se saca la bola negra. Las extracciones son con reposición. Calcule la probabilidad de que se necesiten como mínimo n extracciones. ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

57. Una urna contiene 5 bolas verdes y 25 bolas azules. Las bolas se extraen aleatoriamente, de una en una, hasta que se saca una bola verde. Las extracciones son con reposición. Sea T la variable que indica la primera vez que sale una bola verde. Calcule ET y var (T).

58. Una urna contiene 10 bolas verdes y 20 bolas azules. Las bolas se extraen aleatoriamente, de una en una, hasta que se saca una bola verde. Las extracciones son con reposición. Sea T la variable que indica la primera vez que sale una bola verde. Calcule ET y var (T).

59. Una urna contiene una bola negra y nueve bolas blancas. Las bolas se extraen aleatoriamente, de una en una, hasta que se saca la bola negra. Calcule la probabilidad de que se necesite extraer exactamente seis bolas si (a) la extracción es con reposición y (b) la extracción es sin reposición.

60. Una urna contiene una bola negra y $n-1$ bolas blancas. Las bolas se extraen aleatoriamente, de una en una, hasta que se saca la bola negra. Calcule la probabilidad de que se necesite extraer exactamente k bolas si (a) la extracción es con reposición y (b) la extracción es sin reposición.

61. Suponga que el número de veces que hay que esperar para que se produzca un suceso tiene una distribución geométrica de media $1/p$.
(a) Calcule la probabilidad de que el primer suceso ocurra en la prueba k-ésima.
(b) El experimento se repite tras el primer éxito. Suponga que el número de veces que hay que esperar hasta que se produce el segundo suceso tiene la misma distribución que para el primer suceso. Calcule la función de masa de probabilidad para la distribución correspondiente al segundo suceso.

62. Un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito p se repite hasta el éxito n-ésimo. Suponga que los experimentos son independientes. Calcule la función de masa de probabilidad de la distribución del n-ésimo suceso (esta distribución se denomina distribución binomial negativa).

(12.4.6)

63. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$. Calcule $P(X = k)$ para $k = 0, 1, 2$ y 3.

64. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.5$. Calcule $P(X = k)$ para $k = 0, 1, 2$ y 3.

65. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1$.
(a) Calcule $P(X \geqslant 2)$.
(b) Calcule $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

66. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.3$.
(a) Calcule $P(X \geqslant 3)$.
(b) Calcule $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$.

67. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1.5$. Calcule la probabilidad de que X sea mayor que 3.

68. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.8$. Calcule la probabilidad de que X sea menor o igual que 2.

69. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$. Calcule la probabilidad de que X sea mayor o igual que 2.

70. Suponga que X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.4$. Calcule la probabilidad de que X sea menor que 4.

71. Suponga que el número de llamadas que llegan a un conmutador por hora tiene distribución de Poisson de media 7 llamadas por hora. Calcule la probabilidad de que durante una cierta hora no lleguen llamadas.

72. Suponga que el número de llamadas que llegan a un conmutador por hora tiene distribución de Poisson de media 3 llamadas por hora.
(a) Calcule la probabilidad de que llegue al menos una llamada entre las 12 del mediodía y la 1 de la tarde.
(b) Suponga que las llamadas telefónicas en horas diferentes son independientes entre sí. Calcule la probabilidad de que no llegue ninguna llamada entre las 12 del mediodía y las 2 de la tarde.

73. Suponga que el número de erratas en la página de un libro tiene distribución de Poisson de media 0.5. Calcule la probabilidad de que haya al menos una errata en una página dada.

74. Suponga que el número de erratas en la página de un libro tiene distribución de Poisson de media 0.1.
(a) Calcule la probabilidad de que no haya erratas en una página.
(b) ¿Cuántas páginas con erratas esperaría encontrar en un libro de 200 páginas?

75. El número de sustituciones en una determinada secuencia de aminoácidos tiene distribución de Poisson de media 3. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos dos sustituciones?

76. El número de sustituciones en una determinada secuencia de aminoácidos tiene distribución de Poisson de media 2. Sabiendo que hay sustituciones en la secuencia, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos dos sustituciones?

77. Suponga que el número de clientes por hora que llega a una oficina de correos tiene distribución de Poisson de media 4 clientes por hora.
(a) Calcule la probabilidad de que no lleguen clientes entre las 2 y las 3 de la tarde.
(b) Calcule la probabilidad de que lleguen exactamente dos clientes entre las 3 y las 4 de la tarde.
(c) Suponga que el número de clientes que llegan entre las 2 y las 3 de la tarde es independiente del número de clientes que llegan entre las 3 y las 4 de la tarde. Calcule la probabilidad de que entre las 2 y las 4 de la tarde lleguen exactamente 2 clientes.
(d) Suponga que el número de clientes que llegan entre las 2 y las 3 de la tarde es independiente del número de clientes que llegan entre las 3 y las 4 de la tarde. Sabiendo que entre las 2 y las 4 de la tarde han llegado exactamente 2 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que ambos llegaran entre las 3 y las 4 de la tarde?

78. Suponga que el número de clientes por hora que llega a una oficina de correos tiene distribución de Poisson de media 5 clientes por hora.
(a) Calcule la probabilidad de que llegue exactamente un cliente entre las 2 y las 3 de la tarde.
(b) Calcule la probabilidad de que lleguen exactamente dos clientes entre las 3 y las 4 de la tarde.
(c) Suponga que el número de clientes que llegan entre las 2 y las 3 de la tarde es independiente del número de clientes que llegan entre las 3 y las 4 de la tarde. Calcule la probabilidad de que entre las 2 y las 4 de la tarde lleguen exactamente 3 clientes.
(d) Suponga que el número de clientes que llegan entre las 2 y las 3 de la tarde es independiente del número de clientes que llegan entre las 3 y las 4 de la tarde. Sabiendo que entre las 2 y

las 4 de la tarde han llegado exactamente 2 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que un cliente llegara entre las 2 y las 3 y dos clientes llegaran entre las 3 y las 4 de la tarde?

79. X e Y son variables de Poisson independientes de media 3.

(a) Calcule $P(X + Y = 2)$.

(b) Dado que $X + Y = 2$, calcule la probabilidad de que $X = k$ para $k = 0, 1$ y 2.

80. X e Y son variables de Poisson independientes de media λ.

(a) Calcule la distribución de $X + Y$. (*Sugerencia:* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$).

(b) Dado que $X + Y = n$, calcule la probabilidad de que $X = k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

En los Problemas 81-82, utilice la aproximación de Poisson.

81. Con una cierta vacuna, un 1 por 1000 de personas experimentan ciertos efectos secundarios. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 500 personas nadie experimente efectos secundarios.

82. Con una cierta vacuna, un 1 por 500 de personas experimentan ciertos efectos secundarios. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 500 personas al menos una experimente efectos secundarios.

83. Aproximadamente 1 de cada 700 nacimientos en Estados Unidos está afectado por el síndrome de Down, una alteración genética. Calcule la probabilidad de que en 1000 nacimientos haya como mucho un caso de síndrome de Down (a) calculando la probabilidad exacta y (b) utilizando la aproximación de Poisson.

84. Aproximadamente 1 de cada 1000 chicos está afectado por el síndrome de cromosoma X frágil, una alteración genética que produce dificultades de aprendizaje. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 500 chicos no haya ninguno afectado por este problema (a) calculando la probabilidad exacta y (b) utilizando la aproximación de Poisson.

85. (Referido al Ejemplo 37.) Suponga que un parasitoide tiene una probabilidad de 0.03 de detectar un determinado huésped. Si hay 50 parasitoides buscando un huésped concreto, ¿cuál es le probabilidad de que el huésped no sea detectado?

12.5 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

12.5.1 Funciones de densidad

En la sección anterior hemos considerado variables aleatorias que toman un número finito (o infinito numerable) de valores. En esta sección consideraremos variables aleatorias que toman un continuo de valores. Estas variables se denominan **variables aleatorias continuas**. Estas variables aparecen, por ejemplo, al considerar la distribución de longitudes de un organismo. Dentro de un intervalo apropiado (específico de la especie), la longitud puede tomar cualquier valor.

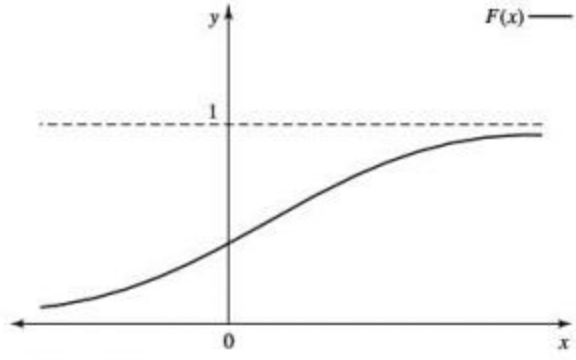
A efectos ilustrativos, consideremos el siguiente ejemplo adaptado de Ross (1996). La pulga de agua *Daphnia pulex* se alimenta del alga *Chlamydomonas rheinhardii*. Una componente importante del comportamiento alimentario de *Daphnia* es la fuerte dependencia entre la cantidad de alimento consumida y el tamaño de cada individuo. Para modelar el comportamiento alimentario de *Daphnia*, es necesario describir la estructura de tamaños de la población. El tamaño se puede ver como una variable aleatoria, denominada X, y se puede determinar la fracción de *Daphnia* cuyo tamaño es menor o igual que x para todos los posibles valores de x. Si el tamaño de la población es grande, esta fracción se puede aproximar adecuadamente por una función continua, que denominaremos $F(x)$. Esta función tiene el papel de función de distribución, de forma que $F(x) = P(X \leqslant x)$.

La función de distribución caracteriza completamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, como vimos en la sección anterior. Esto no es diferente para variables aleatorias continuas. Por tanto, para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua utilizaremos su función de distribución $F(x)$. La función de distribución de una variable aleatoria continua tiene la misma definición que para una variable aleatoria discreta:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Tiene las siguientes propiedades (*véase* la Figura 12.26), algunas de las cuales difieren de las de una variable aleatoria discreta:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
3. $F(x)$ es no decreciente y continua.



▲ **Figura 12.26**
Función de distribución de una variable aleatoria continua

Nótese que la función de distribución de una variable aleatoria continua es continua. Es conveniente compararla con la función de distribución de una variable aleatoria discreta, que es constante por tramos y presenta saltos en aquellos valores de x en los que $P(X = x) > 0$, aunque ambas son no decrecientes y toman valores entre 0 y 1.

Ejemplo 1 Demuestre que

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leqslant 0 \end{cases}$$

es una función de distribución de una variable aleatoria continua.

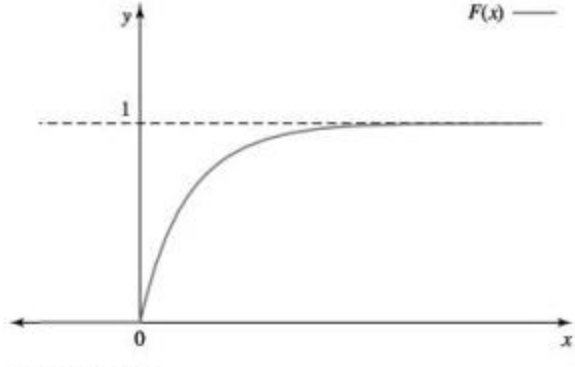
Solución

La Figura 12.27 muestra la gráfica de $F(x)$. Hay que comprobar las tres propiedades de las funciones de distribución de variables aleatorias continuas.

1. Como $0 \leqslant 1 - e^{-2x} \leqslant 1$ para $x > 0$ y $F(x) = 0$ para $x \leqslant 0$, se deduce que $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

2. Como $F(x) = 0$ para $x \leqslant 0$ y $\lim_{x \to \infty} e^{-2x} = 0$, se deduce que

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$



▲ **Figura 12.27**
La función de distribución del Ejemplo 1

3. Para demostrar que $F(x)$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$, nótese que $F(x)$ es continua para $x > 0$ y para $x < 0$. Para comprobar la continuidad en $x = 0$ se calcula

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - e^{-2x}) = 0 = \lim_{x \to 0^-} F(x)$$

que es igual a $F(0) = 0$. Por tanto, $F(0)$ es continua en $x = 0$.

Para demostrar que $F(x)$ es no decreciente, se calcula $F'(x)$ para $x > 0$.

$$F'(x) = 2e^{-2x} > 0 \quad \text{para } x > 0$$

lo que implica que $F()x)$ es creciente para $x > 0$. Como $F(x)$ es continua para todo $x \in \mathbf{R}$ e igual a 0 para $x \leqslant 0$, se deduce que $F(x)$ es no decreciente para todo $x \in \mathbf{R}$. ◀

Si existe una función no negativa $f(x)$ tal que la función de distribución de una variable aleatoria $F(x)$ admita la representación

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

se dice que X es una variable aleatoria continua con **función de densidad (de probabilidad)** $f(x)$ (*véase* la Figura 12.28).

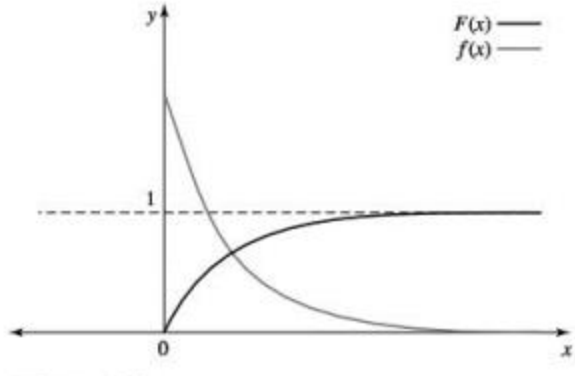
Como $F(x)$ es una función de distribución, se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \tag{12.28}$$

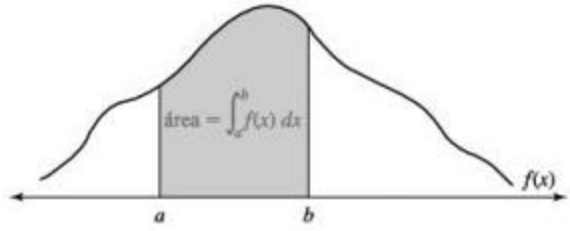
Cualquier función no negativa que cumpla (12.28) define una función de densidad. No es necesario que la función $f(x)$ sea continua. En todas nuestras aplicaciones, $f(x)$ será continua excepto posiblemente en un número finito de puntos. Frecuentemente se definirá como una función continua por tramos. Utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte I, se puede obtener la función de densidad de una variable aleatoria continua $f(x)$ derivando su función de distribución $F(x)$. Concretamente, $f(x) = F'(x)$ en todos los puntos x donde $F(x)$ sea derivable. En los puntos donde $F(x)$ no sea derivable, $f(x) = 0$. Esto asegura que la función de densidad está definida en cualquier punto.

Además, como

$$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a)$$



▲ **Figura 12.28**
La función de distribución $F(x)$ y la correspondiente función de densidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua



▲ **Figura 12.29**
El área encerrada entre la función densidad $f(x)$ y el eje x entre a y b representa la probabilidad de que la variable aleatoria X esté entre a y b

se obtiene

$$P(a < X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{12.29}$$

Es decir, el área encerrada bajo la curva de $y = f(x)$ entre a y b representa la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores entre a y b, como se muestra en la Figura 12.29. Es importante advertir que en (12.29), las probabilidades están representadas por el área. En particular, es la *integral* de $f(x)$, y no la propia $f(x)$ la que tiene significado físico. La función de densidad $f(x)$ no tiene un significado físico inmediato. Más adelante en este capítulo explicaremos cómo calcular $f(x)$ empíricamente.

A diferencia de las variables aleatorias discretas, en las que $P(X \leqslant b)$ y $P(X < b)$ podían tomar valores diferentes, para variables aleatorias continuas no hay diferencia, ya que

$$P(X = b) = \int_b^b f(x)\,dx = 0$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$$
$$= P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b)$$

Ejemplo 2 La función de distribución de una variable aleatoria continua X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{para } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{para } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Calcule la función de densidad correspondiente.
(b) Calcule $P(-1 \leqslant X \leqslant 1/2)$.

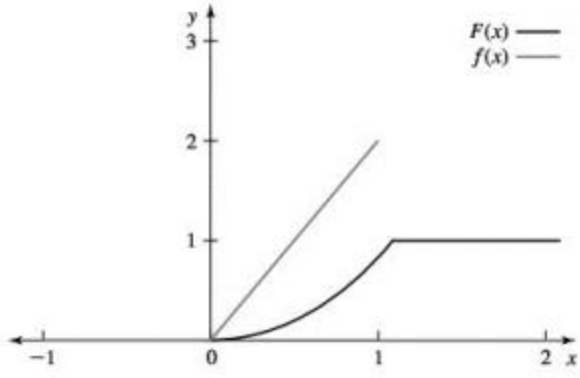
Solución

(a) Es necesario utilizar el teorema fundamental del cálculo, parte I, para calcular la función de densidad. Concretamente,

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du \qquad \text{implica que} \qquad F'(x) = f(x)$$

La función de densidad $f(x)$ se puede calcular derivando la función de distribución $F(x)$ en los respectivos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para } x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$



▲ **Figura 12.30**
La función de distribución $F(x)$ y la correspondiente función de densidad $f(x)$ del Ejemplo 2

Para definir la función de densidad en cualquier punto, se hace $f(0) = = f(1) = 0$. La función de distribución y la función de densidad se muestran en la Figura 12.30.

(b) Utilizando la función de distribución, se obtiene inmediatamente

$$P\left(-1 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

Si se utiliza alternativamente la función de densidad, hay que calcular

$$P\left(-1 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{0}^{1/2} 2x\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$$

◀

Las fórmulas de la media y la varianza de una variable aleatoria continua son análogas a las del caso discreto. La esperanza EX de una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ es

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

La esperanza de una función de una variable aleatoria, $g(X)$, siendo $f(x)$ la función de densidad de X es

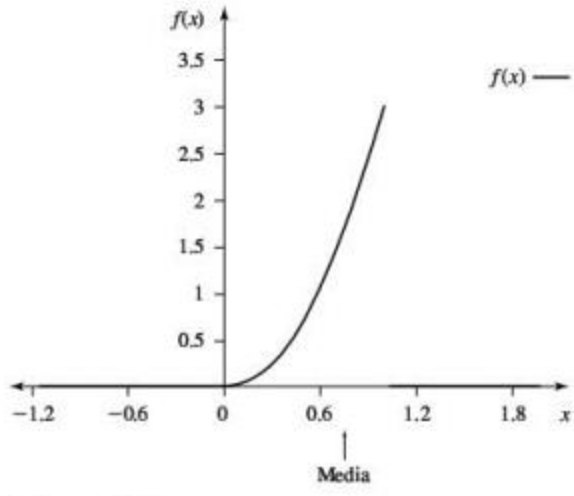
$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

La varianza de una variable aleatoria continua X de media μ se define como

$$\text{var}\,(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

La fórmula alternativa que presentamos en la sección anterior se cumple también. Concretamente,

$$\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right)^2$$



▲ **Figura 12.31**
La función de densidad $f(x)$ del Ejemplo 3 junto con la posición de la media de X

Conviene recordar que estas integrales están definidas en intervalos no acotados y $f(x)$ podría ser discontinua. Dichas integrales deben evaluarse utilizando los métodos desarrollados en la Sección 7.4.

Ejemplo 3 La función de densidad de una variable aleatoria continua X es (*véase* la Figura 12.31):

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule la media y la varianza de X.

Solución

Para calcular la media hay que calcular

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{3}{4}$$

La media se indica en la Figura 12.31. Para calcular la varianza, primero se calcula

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 3x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{3}{5}$$

Entonces, la varianza de X es

$$\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

Ejemplo 4 La función exponencial

$$f(r) = \begin{cases} ae^{-ar} & \text{para } r > 0 \\ 0 & \text{para } r \leqslant 0 \end{cases}$$

siendo $a > 0$ una constante, se utiliza frecuentemente para modelar la dispersión de semillas. La función $f(r)$ es una función de densidad, y $\int_a^b f(r)\,dr$ es la fracción de semillas dispersadas entre la distancias a y b de la fuente en 0. Calcule la distancia de dispersión media.

Solución

Se utiliza la fórmula anterior del valor medio

$$\text{distancia media de dispersión} = \int_{-\infty}^{\infty} rf(r)\,dr = \int_{-\infty}^{\infty} rae^{-ar}\,dr$$

ya que $f(r) = 0$ para $r \leqslant 0$. Para calcular la integral, hay que integrar por partes:

$$\text{distancia media de dispersión} = \int_{0}^{\infty} rae^{-ar}\,dr = \lim_{z\to\infty} \int_{0}^{z} rae^{-ar}\,dr$$

$$= \lim_{z\to\infty} [r(-e^{-ar})]_0^z + \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-ar}\,dr$$

La primera expresión es igual a

$$\lim_{z\to\infty} [-ze^{-az} + 0] = -\lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^{az}}$$

Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Utilizando la regla de l'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^{az}} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{ae^{az}} = 0$$

ya que $a > 0$. La segunda expresión es

$$\lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-ar}\,dr = \lim_{z\to\infty} \left[-\frac{1}{a}e^{-ar}\right]_0^z = \frac{1}{a}$$

Por tanto,

$$\text{distancia media de dispersión} = \frac{1}{a}$$ ◀

Veremos ahora cómo calcular empíricamente $f(x)$. Sea

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Entonces

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

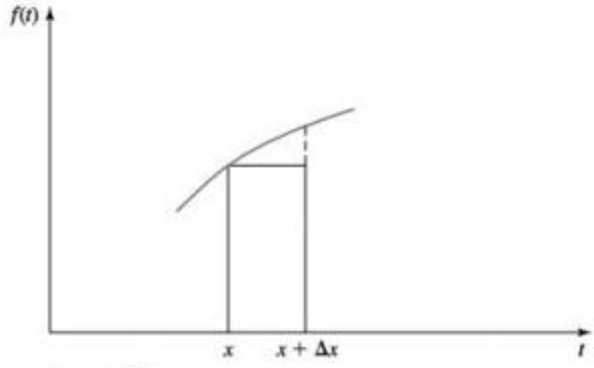
$$= \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Si Δx es suficientemente pequeño, $f(t)$ no variará mucho en el intervalo $[x, x+\Delta x)$, y entonces, $f(t)$ se puede aproximar por $f(x)$ en dicho intervalo. Por tanto,

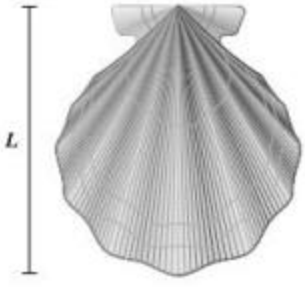
$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt \approx f(x)\Delta x \tag{12.30}$$

para Δx suficientemente pequeño y se puede pensar que $f(x)\Delta x$ representa aproximadamente la fracción que cae en el intervalo $[x, x + \Delta x)$. Esta interpretación es importante y nos ayudará a determinar empíricamente funciones de densidad. Este proceso debe recordarnos la aproximación de la suma de Riemann que estudiamos en la Sección 6.1. Para Δx pequeño, un solo rectángulo proporciona una buena aproximación, como se muestra en la Figura 12.32.

Para determinar empíricamente la función de densidad $f(x)$, se utiliza la aproximación (12.30). Se toma una muestra de la población suficientemente grande y se mide la magnitud de interés en cada individuo de la muestra. Se divide el intervalo



▲ **Figura 12.32**
El área del rectángulo es $f(x)\Delta x$. Es una buena aproximación a $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$, que es el área de la curva entre x y $x + \Delta x$



▲ **Figura 12.33**
Longitud sagital de una concha

en el que puede variar la magnitud de interés en subintervalos de longitud Δx_i. Se cuenta el número de datos de la muestra que caen dentro de cada subintervalo. Para mostrar los datos gráficamente, se utiliza un **histograma**, que consiste en rectángulos cuya anchura es igual a la longitud del correspondiente subintervalo y cuya *área* es igual al número de puntos de datos que han caído en el correspondiente subintervalo. Esto es análogo a aproximar áreas de curvas mediante rectángulos. Ilustraremos este procedimiento por medio de un ejemplo.

Los braquiópodos firman un tipo de invertebrados marinos cuyas partes blandas del cuerpo están encerradas en conchas. Fueron los animales con concha dominantes en el lecho marino en el Paleozoico, pero sufrieron grandemente durante la extinción masiva del Pérmico-Terciario[2]. Todavía están presentes (con aproximadamente 120 géneros) y ocupan diversos hábitat, pero ya no son los animales con concha dominantes en el lecho marino, ya que su lugar ha sido ocupado por los moluscos bivalvos (la historia de los braquiópodos se describe en Ward, 1992).

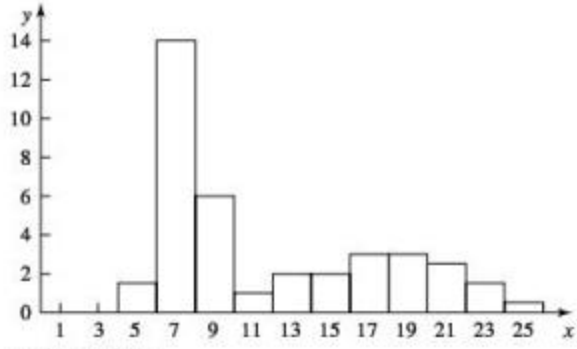
El braquiópodo *Dielasma* es común en los depósitos de arrecifes del Pérmico del norte de Inglaterra. La siguiente tabla (adaptada de Benton y Harper, 1997) contiene medidas de la longitud sagital de la concha medida en mm (*véase* la Figura 12.33).

Longitud	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Frecuencia	3	28	12	2	4	4	6	6	5	3	1

Las medidas de longitud se dividen en clases [0, 2), [2, 4), [4, 6), ..., [26, 28). El punto medio de cada intervalo representa el tamaño de la clase. Por ejemplo, la longitud 11 de la tabla corresponde al tamaño de la clase de longitudes entre 10 mm y 12 mm. El número debajo del tamaño de cada clase, la frecuencia, representa el número de braquiópodos de la muestra cuyas longitudes están dentro de la correspondiente clase de tamaño. Por ejemplo, hay dos braquiópodos en la muestra cuyas longitudes caen en la clase de tamaño [10, 12).

Para representar gráficamente este conjunto de datos se utiliza un histograma, como se muestra en la Figura 12.34. El eje horizontal muestra los puntos medios

[2] El periodo geológico Pérmico duró desde hace 286 millones de años hasta hace 248 millones de años. El periodo Triásico siguió el Pérmico y duró desde hace 248 millones de años hasta hace 213 millones de años. Se cree que la extinción masiva del Pérmico-Triásico ha sido la extinción de vida más severa que ha ocurrido nunca.



▲ **Figura 12.34**
Histograma de la distribución de frecuencias de la longitud sagital

de cada clase de tamaño. La gráfica está formada por rectángulos cuyas anchuras son iguales a la longitud de la correspondiente clase de tamaño y cuya *área* es proporcional al número de especímenes que pertenecen a la clase correspondiente. Es muy importante advertir que el histograma representa los números por el área de los rectángulos, no por su altura. Por ejemplo, el número de especímenes en la clase de tamaño [8, 10) es igual a 12. La clase de tamaño está representada por 9, que es el punto medio del intervalo [8, 10). Como la anchura de la clase de tamaño es 2, la altura del rectángulo debe ser igual a 6 unidades para que el área del correspondiente rectángulo sea igual a 12 unidades. En nuestro ejemplo, todas las clases de tamaño son de la misma longitud, pero este no tiene porqué ser el caso en general.

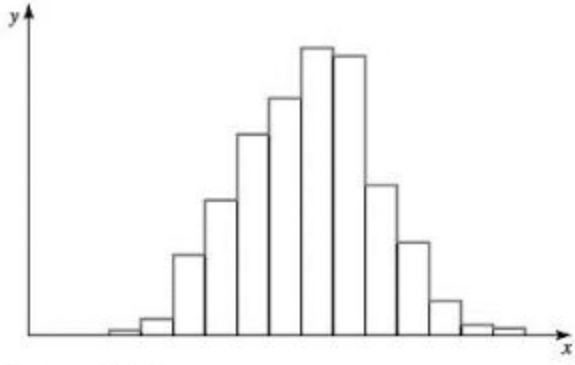
Representar gráficamente los datos tiene ciertas ventajas. Por ejemplo, se ve inmediatamente que la distribución de tamaños está sesgada hacia tamaños pequeños, ya que los rectángulos del histograma que corresponde a tamaños de concha pequeños tienen áreas mayores. El sesgo hacia tamaños pequeños podría indicar, por ejemplo, que los braquiópodos sufrieron una alta mortalidad juvenil.

A menudo es conveniente ajustar la escala del eje vertical del histograma para que su área total sea igual a 1. Una de las ventajas de esto es que entonces el histograma no refleja directamente el tamaño de la muestra, sino que sólo se representan proporciones. Esto facilita la comparación de histogramas de muestras diferentes. Por ejemplo, si alguien más hubiera obtenido una muestra diferente de este tipo de braquiópodo en la misma localización, y si ambas muestras fueran representativas de la distribución de longitudes, entonces los histogramas deberían parecer similares.

Si se cambia la escala del histograma para que el área total sea de 1, entonces el área de cada rectángulo del histograma representa la fracción de la muestra que pertenece a la clase correspondiente. Para obtener una fracción de los datos de la muestra en una cierta clase, se divide el número total de datos de la muestra por el tamaño total de la muestra. En nuestro ejemplo, el tamaño de la muestra es de 74. La fracción de la muestra que está en la clase de tamaño [8, 10), por ejemplo, es de $12/74 = 0.16$ o 16%.

La elección de las anchuras de las clases del histograma es algo arbitraria. El objetivo es obtener una representación que proporcione información. Generalmente, cuanto mayor es el tamaño de la muestra, más pequeña puede ser la anchura de las clases.

El perfil del histograma normalizado (es decir, en el que el área total es igual a 1) se puede usar como una aproximación a la función de densidad $f(x)$ (*véase* la Figura 12.35). Generalmente, cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor puede ser la anchura de los intervalos, y por tanto es mejor la aproximación de $f(x)$.



▲ **Figura 12.35**
El histograma como aproximación a la función de densidad

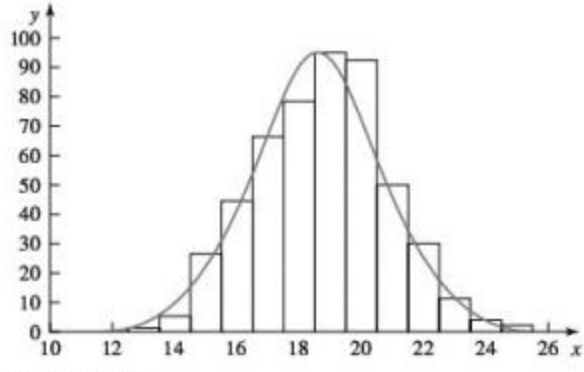
En las subsecciones siguientes, presentaremos algunas distribuciones continuas y sus aplicaciones.

12.5.2 La distribución normal

La distribución normal fue utilizada por primera vez por Abraham De Moivre (1667-1754) en el contexto del cálculo de probabilidades en experimentos binomiales cuando el número de pruebas es grande. Gauss demostró posteriormente que esta distribución es importante en el análisis de errores de medidas. Es la distribución continua más importante, y presentaremos primero una aplicación.

La genética cuantitativa se ocupa de la medida de caracteres como el peso de una planta, el tamaño de una camada, el peso del cuerpo, etc. Estos caracteres se denominan **caracteres cuantitativos**. Hay muchos caracteres cuantitativos cuya distribución de frecuencia sigue una curva con forma de campana. Por ejemplo, al contar las cerdas en una parte particular del abdomen (quinto segmento) de una variedad de *Drosophila melanogaster*, Mackay (1984) obtuvo que el número de cerdas variaba de acuerdo con una curva en forma de campana (esto se muestra en la Figura 12.36, adaptada de Hartl y Clark, 1989).

La curva suave de la Figura 12.36 que se ajusta al histograma es proporcional a la función de densidad de una **distribución normal** (la escala de la curva no está ajustada de forma que el área bajo la curva sea igual a 1). La función de den-



▲ **Figura 12.36**
El número de cerdas abdominales

sidad de una distribución normal depende de dos parámetros, denominados μ y σ, que se pueden estimar a partir de los datos. El parámetro μ puede ser cualquier número real, y el parámetro σ es un número real positivo. En el recuadro siguiente se define la función de densidad normal.

La función de densidad de variable aleatoria X con distribución normal de parámetros μ y σ es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

El parámetro μ es la media y el parámetro σ es la desviación típica. En el Problema 11 estudiaremos la forma de la función de densidad de la distribución normal (cuya gráfica se muestra en la Figura 12.37). Presentamos sus propiedades.

1. $f(x)$ es simétrica respecto a $x = \mu$.
2. El máximo de $f(x)$ está en $x = \mu$.
3. Los puntos de inflexión de $f(x)$ están en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

Como $f(x)$ es una función de densidad

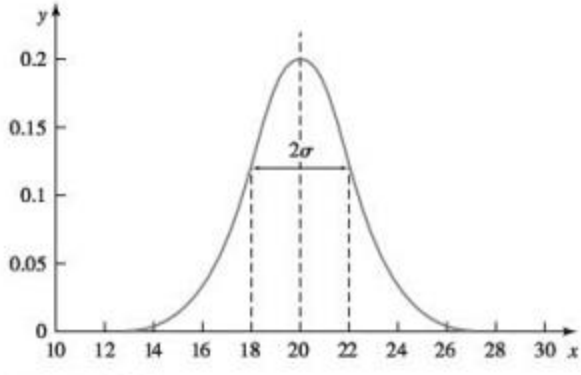
$$f(x) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Con las herramientas de que disponemos hasta ahora, no es posible demostrar que la función de densidad está normalizada para tener área de 1. En el Problema 12 demostraremos que la media μ es realmente el valor esperado de X, concretamente,

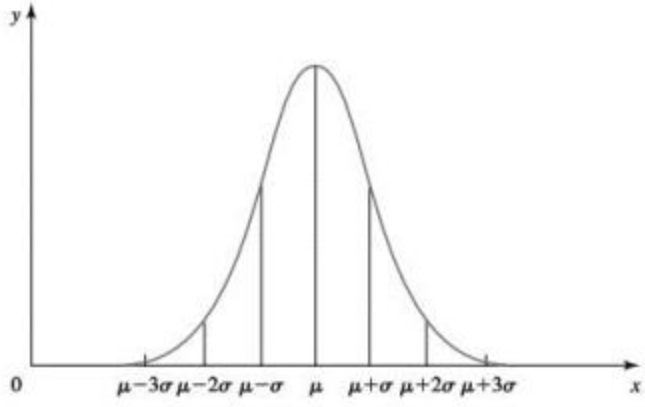
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Además, si una cantidad X está normalmente distribuida con parámetros μ y σ, entonces

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$



▲ **Figura 12.37**
Gráfica de la densidad normal con $\mu = 20$ y $\sigma = 2$. El máximo está en $\mu = 20$ y los dos puntos de inflexión están en 18 y 22, respectivamente



▲ **Figura 12.38**
La función de densidad de la distribución normal de media μ y desviación típica σ

No es posible calcular esta integral utilizando funciones elementales. Sólo se puede evaluar numéricamente. Hay tablas para la distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ que contienen valores de

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

El Apéndice B contiene una tabla de $F(x)$. Esta tabla se puede utilizar para obtener probabilidades para otros valores de μ y σ, como veremos posteriormente.

Por el momento, sólo necesitamos los siguientes valores. El área $A(k)$ bajo la función de densidad de la distribución normal de media μ y desviación típica σ entre $\mu - k\sigma$ y $\mu + k\sigma$ se muestra en la tabla que sigue (*véase* la Figura 12.38). Es decir, si una determinada medida X de una población tiene distribución normal de media μ y desviación típica σ, entonces el 68% de la población estará dentro de una desviación estándar alrededor de la media, el 95% dentro de dos desviaciones estándar y el 99% dentro de tres desviaciones estándar

k	$A(k)$
1	68%
2	95%
3	99%

Estos porcentajes se pueden interpretar también de la siguiente forma. Supongamos que una cantidad X de una población tiene distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si se toman muestras de la población (es decir, si se escoge de forma aleatoria un individuo de la población), hay una probabilidad del 68% de que la observación esté a menos de una desviación estándar de la media. Por tanto, podemos decir que la probabilidad de que X esté en el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ es igual a 0.68, lo que se puede expresar como

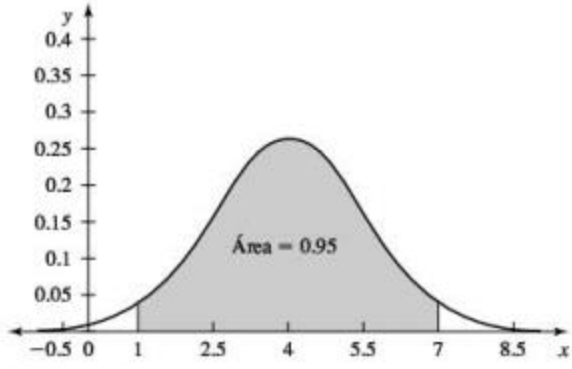
$$P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) = 0.68$$

Asimismo,

$$P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) = 0.95 \quad \text{y} \quad P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) = 0.99$$

Cálculo de probabilidades utilizando la media y la desviación estándar

Ejemplo 5 Suponga que un cierto carácter cuantitativo X tiene distribución normal de media $\mu = 4$ y desviación estándar $\sigma = 1.5$. Calcule un intervalo centrado en la media de forma que haya una probabilidad del 95% (99%) de que la observación esté dentro de este intervalo.



▲ **Figura 12.39**
La densidad normal de media 4 y desviación típica 1.5 del Ejemplo 5. El 95% de las observaciones están en el intervalo [1, 7].

Solución

Como el 95% corresponde a un intervalo de dos desviaciones típicas desde la media (*véase* la Figura 12.39), el intervalo resultante es

$$[4 - (2)(1.5),\ 4 + (2)(1.5)] = [1,\ 7]$$

Por tanto, podemos escribir

$$P(X \in [1,\ 7]) = 0.95$$

De forma similar, el 99% corresponde a un intervalo de tres desviaciones típicas alrededor de la media, resultando un intervalo de la forma

$$[4 - (3)(1.5),\ 4 + (3)(1.5)] = [-0.5,\ 8.5]$$

Por tanto, podemos escribir

$$P(X \in [-0.5,\ 8.5]) = 0.99$$ ◀

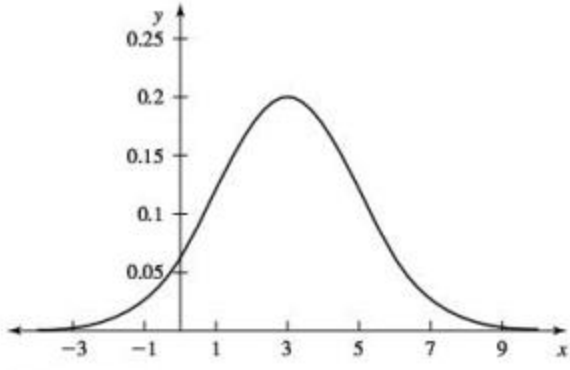
Ejemplo 6 Suponga que un cierto carácter cuantitativo X tiene distribución normal de media $\mu = 3$ y desviación estándar $\sigma = 2$. Se toma una muestra de tamaño 1. ¿Cuál es la probabilidad de que se observe un valor mayor que 9?

Solución

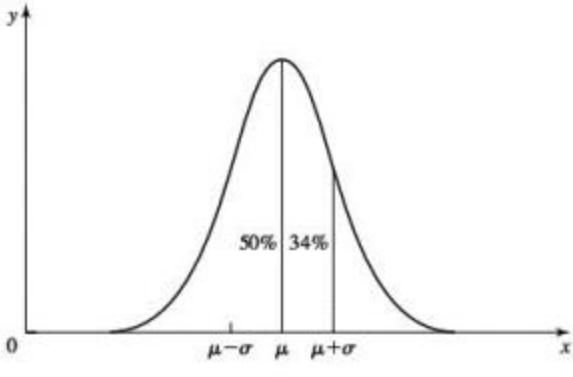
Como $9 = 3 + (3)(2)$, se desea saber la probabilidad de que la observación esté más allá de tres desviaciones típicas por encima de la media (*véase* la Figura 12.40). El 99% de la población está dentro de tres desviaciones típicas alrededor de la media. Por tanto, el 1% está fuera del intervalo $[\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma]$. Como la función de densidad de la distribución normal es simétrica alrededor de la media, se deduce que el área a la izquierda de $\mu - 3\sigma$ y el área a la derecha de $\mu + 3\sigma$ son iguales. Por tanto, hay una probabilidad de $(1\%)/2 = 0.5\%$ de que la observación esté por encima de 9. Es decir, podemos escribir

$$P(X > 9) = 0.005$$ ◀

Ejemplo 7 Suponga que un cierto carácter cuantitativo X tiene distribución normal de parámetros μ y σ. ¿Cuál es la probabilidad de que una observación esté por debajo de $\mu + \sigma$?



▲ **Figura 12.40**
La densidad normal de media 3 y desviación típica del Ejemplo 6. El 0.5% de las observaciones son mayores que 9



◀ **Figura 12.41**
El área del Ejemplo 7

Solución

Como el 68% de la población está a una distancia menor que de la media, y como la curva de la densidad es simétrica alrededor de la media, se deduce que el 34% de la población está en el intervalo $[\mu, \mu + \sigma]$. Además, debido a la simetría de la función de densidad, el 50% de la población está por debajo de la media. Por tanto, el $50\% + 34\% = 84\%$ de la población está por debajo de $\mu + \sigma$, como se muestra en la Figura 12.41. Por tanto, podemos escribir

$$P(X < \mu + \sigma) = 0.84$$

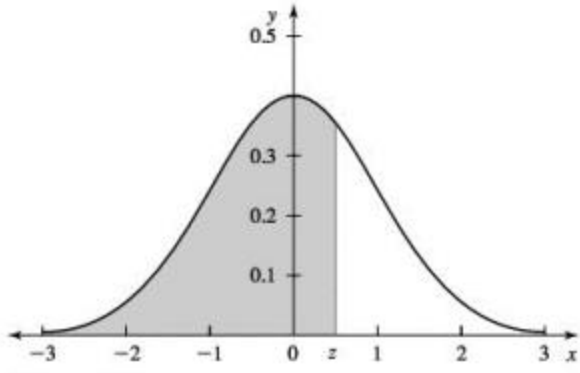
Cálculo de probabilidades utilizando la tabla La tabla de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1 (*véase* el Apéndice B) se puede utilizar para calcular probabilidades cuando la distribución es normal de media y desviación típica .

Empezaremos explicando cómo utilizar la tabla para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1, denominada **distribución normal estándar**, cuya función de densidad es

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \quad \text{para } -\infty < u < \infty$$

La tabla contiene los valores de

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



▲ **Figura 12.42**
El área a la izquierda de $x = z$ por debajo de la gráfica de la densidad normal $f(x)$ es $F(z)$, cuyos valores están en la tabla de la distribución normal

Geométricamente, es el área a la izquierda de la recta $x = z$ por debajo de la gráfica de la función de densidad, como se muestra en la Figura 12.42.

$F(z)$ se interpreta como la probabilidad de que una observación esté a la izquierda de z. Por ejemplo, cuando $z = 1$, $F(1) = 0.8413$, y por tanto, la probabilidad de que una observación tenga un valor menor o igual que 1 es igual a 0.8413, o el 84.13% de la población tiene un valor menor o igual que 1.

Como se puede ver, la tabla no contiene probabilidades para valores negativos de z. Para calcular esos valores se aprovecha la simetría de la función de densidad. Por ejemplo, si se desea calcular $F(-1)$, se puede ver en la gráfica de la función de densidad que el área a la izquierda de -1 es igual al área a la derecha de 1 (*véase* la Figura 12.43). Por tanto

$$F(-1) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du - \int_{-\infty}^{-} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$

$$= 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Donde se ha utilizado que el área total es igual a 1.

La tabla se puede utilizar para calcular áreas por debajo de la densidad normal de media y desviación estándar μ y σ arbitrarias. Concretamente, para calcular el valor de

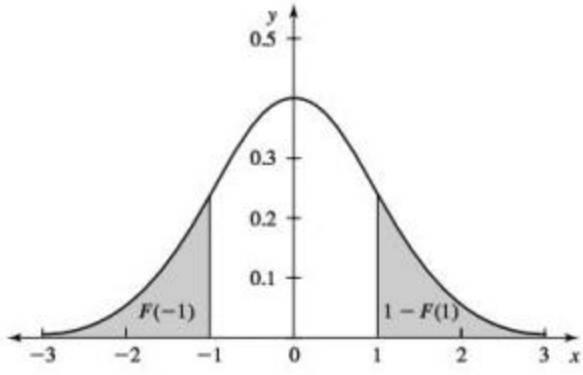
$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

donde $-\infty < a < b < \infty$, se utiliza el cambio

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

con lo que se obtiene

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$



▲ **Figura 12.43**
El área de la región sombreada $F(-1)$ coincide con la región sombreada $1 - F(1)$

El miembro derecho corresponde al área bajo la *densidad normal estándar* entre $(a - \mu)/\sigma$ y $(b - \mu)/\sigma$. Por tanto, el área bajo la densidad normal de media y desviación típica σ entre a y b es la misma que el área bajo la densidad normal estándar entre $(a - \mu)/\sigma$ y $(b - \mu)/\sigma$ (*véase* la Figura 12.44). En el siguiente ejemplo se ilustra esta idea.

Ejemplo 8 Suponga que una cantidad X tiene distribución normal de media 3 y desviación típica 2. Calcule la fracción de la población que está en el intervalo [2, 5], es decir, calcule $P(X \in [2, 5])$.

Solución

Para resolver este problema hay que calcular

$$\int_2^5 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{(x-3)^2/8}\,dx \tag{12.31}$$

Utilizando la transformación $u = (x - 3)/2$, se obtiene que cuando

$$x = 2 \quad \text{entonces } u = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

y cuando

$$x = 5 \quad \text{entonces } u = \frac{5-3}{2} = 1$$

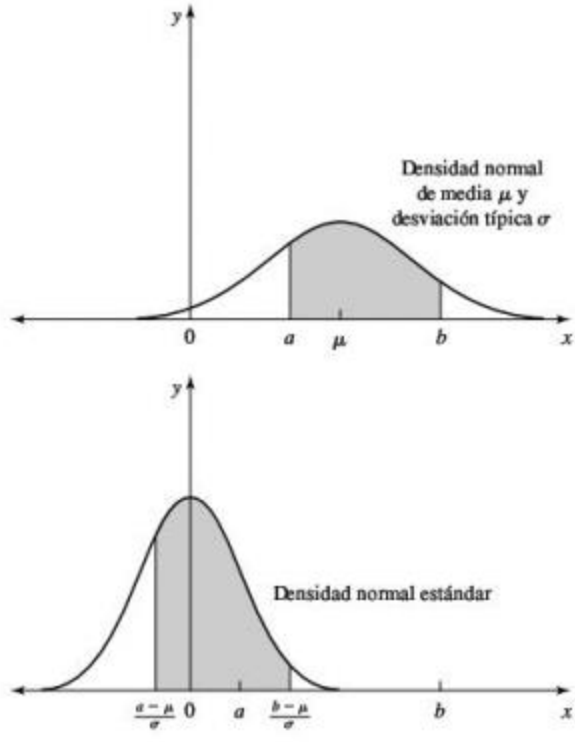
Por tanto, el área bajo la densidad normal de media 3 y desviación típica 2 entre 2 y 5 coincide con el área bajo la distribución normal estándar entre $-1/2$ y 1. Entonces, la integral de (12.31) es igual a

$$\int_{-1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du - \int_{-\infty}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$

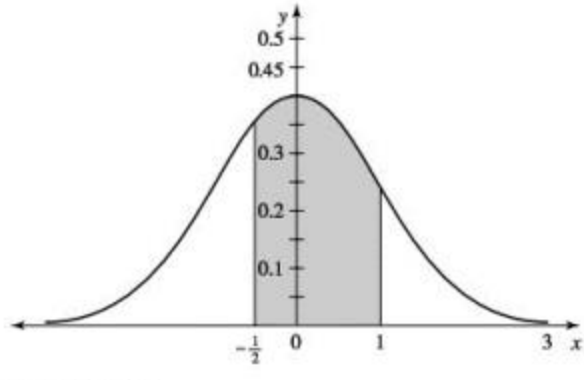
$$= F(1) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = F(1) - \left(1 - F\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= F(1) + F\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.8413 + 0.6915 - 1 = 0.5328$$

y $P(X \in [2, 5]) = 0.5328$.



▲ **Figura 12.44**
El área bajo la densidad normal de media μ y desviación típica σ entre a y b es la misma que el área bajo la densidad normal estándar entre $(a - \mu)/\sigma$ y $(b - \mu)/\sigma$



▲ **Figura 12.45**
El área del Ejemplo 8

En vez de escribir las integrales, resulta más fácil determinar lo que hay que calcular dibujando el área relevante bajo la curva normal estándar. En la Figura 12.45 podemos ver que hay que calcular $F(1) - F(-\frac{1}{2})$. Como $F(-\frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2})$, se deduce que hay que calcular $F(1) - 1 + F(\frac{1}{2})$, que es lo calculado anteriormente. ◀

Ejemplo 9 Suponga X normalmente distribuida de media 3 y varianza 4. Calcule $P(1 \leqslant X \leqslant 6)$.

Solución

Se aplica la transformación $z = (x - \mu)/\sigma$ con $\mu = 3$ y $\sigma = 2$. Denominemos Z a la variable aleatoria con distribución normal estándar.

$$P(1 \leqslant X \leqslant 6) = P\left(\frac{1-3}{2} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{6-3}{2}\right)$$

$$= P\left(-1 \leqslant Z \leqslant \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F(-1)$$

$$= F(1.5) - (1 - F(1)) = 0.9332 - 1 + 0.8413 = 0.7745 \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 10 Suponga que un carácter cuantitativo X tiene distribución normal de media 2 y desviación típica 1/2. Calcule x tal que el 30% de la población esté por debajo de x.

Solución

Es necesario calcular x tal que $P(X > x) = 0.3$. Utilizando la transformación $z = (x - \mu)/\sigma$, y denominando Z a una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y desviación típica 1, se obtiene que

$$P(X > x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{x-2}{1/2}\right)$$

$$= P(Z > 2(x-2)) = 0.3$$

Ahora, $P(Z > z) = 1 - F(z) = 0.3$. Por tanto, $F(z) = 0.7$. Se obtiene que $F(0.52) = = 0.6985 \approx 0.7$. Por tanto,

$$2(x-2) = 0.52 \qquad \text{o} \qquad x = 2.26$$

Es decir, $P(X > 2.26) = 0.3$. Por tanto, el valor de x que estamos buscando es 2.26. $\blacktriangleleft$

Unas ideas de muestreo Para obtener información sobre una cantidad, como un tamaño o un número de cerdas, no se puede medir a toda la población. Lo que se hace es tomar una muestra de la población y calcular la distribución de la cantidad de interés en la muestra. La muestra debe escogerse de forma que sea representativa de la población. Esto es un problema difícil, que no se puede estudiar aquí. Incluso aunque se suponga que las muestras son representativas de la población, todavía se dará el caso de que las muestras variarán.

Ejemplo 11 Los números de la siguiente tabla representan dos muestras, las dos de la misma población. Representan valores de una cantidad normalmente distribuida, de media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$.

Muestra 1				
−1.633	0.542	0.250	−0.166	0.032
1.114	0.882	1.265	−0.202	0.151
1.151	−1.210	−0.927	0.425	0.290
−1.939	0.891	−0.227	0.602	0.873
0.385	−0.649	−0.577	0.237	−0.289
Muestra 2				
−0.157	0.693	1.710	0.800	−0.265
1.492	−0.713	0.821	−0.031	−0.780
−0.042	1.615	−1.440	−0.989	−0.580
0.289	−0.904	0.259	−0.600	−1.635
0.721	−1.117	0.635	0.592	−1.362

Ambas muestras se han obtenido de una tabla de números aleatorios con distribución normal de media 0 y desviación típica 1 (Beyer, 1991).

(a) Cuente el número de observaciones de cada muestra que están por debajo de la media $\mu = 0$, y compare el número con el que cabría esperar basándose en las propiedades de la distribución normal.

(b) Cuente el número de observaciones en cada muestra que están a una distancia menor de una desviación típica de la media, y compare el número con el que cabría esperar basándose en las propiedades de la distribución normal estándar.

Solución

(a) Como la media es igual a 0, para calcular el número de observaciones que están por debajo de la media, simplemente se cuenta el número de observaciones que son negativas. En la primera muestra, 10 observaciones están por debajo de la media y en la segunda muestra 14 observaciones están por debajo de la media. Se esperaría que la mitad de las muestras estuvieran por debajo de la media. Como la muestra es de tamaño 25, se esperaría que 12 o 13 muestras estuvieran por debajo de la media.

(b) Como la desviación estándar es 1, se cuenta el número de observaciones que están en el intervalo $[-1, 1]$. En la primera muestra, hay 19 observaciones y en la segunda muestra, 18 observaciones. Para comparar con el valor teórico, nótese que el 68% de la población debe estar en ese intervalo. Como el tamaño de la muestra es 25 y $(0.68)(25) = 17$, entonces 17 observaciones deben estar en media en el intervalo $[-1, 1]$. ◀

El ejemplo anterior ilustra un punto importante. Incluso aunque las muestras aleatorias se tomen de la misma población, no son iguales. Por ejemplo, en el ejemplo anterior se espera que la mitad de las observaciones estén en promedio por debajo de la media. En la primera muestra, menos de la mitad de las observaciones está por debajo de la media y en la segunda muestra, más de la mitad de las observaciones están por encima de la media.

Sin embargo, a medida que el tamaño de la muestra crece, reflejará cada vez mejor las características de la población. Es decir, para determinar la distribución de un carácter cuantitativo, como el número de cerdas de *D. Melanogaster*, se tomaría la muestra y se calcularía, por ejemplo, el histograma asociado a la cantidad de interés. Si la muestra es lo suficientemente grande, el histograma reflejará la distribución de la población bastante bien. Pero si se repite el experimento, no debe esperarse que los dos histogramas coincidan exactamente. Sin embargo, si la muestra es lo suficientemente grande, se parecerán bastante.

La importancia de la distribución normal es muy grande. Una gran parte de los estadísticos se basan en que las cantidades observadas tienen distribución normal. Probablemente nos preguntaremos por qué suponer de entrada distribución normal. Las razones son profundas, y estudiaremos alguna en la sección siguiente. Ahora comentaremos sólo lo fundamental.

Muchas cantidades de pueden representar como la suma de una gran cantidad de pequeñas contribuciones. Se puede demostrar que la distribución de la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la misma media y la misma varianza converge a una variable aleatoria con distribución normal a medida que crece el número de términos de la suma. Este resultado se conoce como **teorema central del límite** (*véase* la Sección 12.6).

El teorema central del límite se suscita, por ejemplo, en genética cuantitativa. Concretamente, muchos rasgos cuantitativos (como la altura o el peso de naci-

miento de un organismo) son el resultado de la acción de numerosos factores genéticos y ambientales que actúan en una forma aditiva o multiplicativa. Si los factores actúan en forma aditiva y son independientes, se puede aplicar directamente el teorema central del límite y la distribución del valor del rasgo se asemejará a la distribución normal. Si los factores actúan de forma multiplicativa, la transformación logarítmica los reduce al caso aditivo.

Se utiliza el mismo razonamiento cuando se consideran los errores de medida. Un error de medida se puede considerar como la suma de un gran número de contribuciones independientes de fuentes diferentes que actúan aditivamente. Por tanto, muchas veces se supone que los errores de medida tienen distribución normal.

12.5.3 La distribución uniforme

La distribución uniforme es de alguna forma la distribución continua más simple. Se dice que una variable aleatoria U tiene **distribución uniforme** en el intervalo (a, b) si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } x \in (a, b) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

como se ilustra en la Figura 12.46.

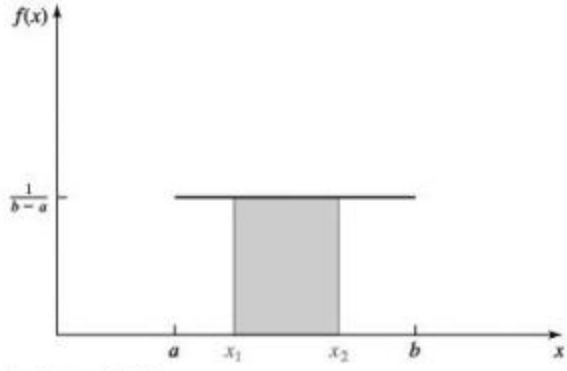
La razón del término *uniforme* se puede ver al calcular la probabilidad de que la variable aleatoria U esté en el intervalo $(x_1, x_2) \subset (a, b)$. Para calcular probabilidades de sucesos con una variable aleatoria de distribución uniforme, se calcula el área de un rectángulo. Se utiliza por tanto la fórmula geométrica simple «área es igual al producto de la base por la altura», en vez de integrar formalmente la función de densidad (*véase* la Figura 12.47). Se obtiene

$$P(U \in (x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} \text{área bajo } f(x) = \frac{1}{b-a} \\ \text{entre } x_1 \text{ y } x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

Se puede ver que esta probabilidad depende sólo de la longitud del intervalo (x_1, x_2) con respecto a la longitud del intervalo (a, b) y *no* de la posición del intervalo (x_1, x_2), siempre que (x_1, x_2) sea un subconjunto de (a, b). Por tanto, los intervalos de igual longitud contenidos en (a, b) tendrán la misma probabilidad de contener a U.

▲ **Figura 12.46**
Función de densidad de una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (a, b)



▲ **Figura 12.47**
La probabilidad $P(U \in (x_1, x_2))$ es igual al área de la región uniforme en el intervalo (a, b)

Para obtener la media de una variable aleatoria con distribución uniforme se calcula

$$EU = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_a^b x\,\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

que es el punto medio del intervalo (a, b). Para obtener la varianza, primero se calcula

$$EU^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2\,\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Entonces,

$$\text{var}(U) = EU^2 - (EU)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$
$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12}$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

La distribución uniforme se utiliza frecuentemente en simulaciones por ordenador de experimentos aleatorios, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12 Suponga que se desea simular un experimento aleatorio que consiste en lanzar cinco veces una moneda en la que la probabilidad de salir cara es 0.3. El software que se va a utilizar puede generar variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo (0, 1). ¿Cómo procedería?

Solución

Cada prueba consiste en lanzar la moneda y almacenar el resultado. Para simular el lanzamiento de una moneda con una probabilidad de obtener cara de 0.3, se

genera mediante el ordenador una variable aleatoria U con distribución uniforme en el intervalo (0, 1). El ordenador devuelve un número u en dicho intervalo. Como $P(U \leqslant 0.3) = 0.3$, si

$$u = \begin{cases} \leqslant 0.3 & \text{se almacena cruz} \\ > 0.3 & \text{se almacena cara} \end{cases}$$

Y se repite el procedimiento cinco veces.

Para concretar, supongamos que los sucesivos valores de la variable aleatoria uniforme han sido 0.2859, 0.9233, 0.5187, 0.8124 y 0.0913. Estos números se traducen en la secuencia $CXXXC$, donde C indica cara y X indica cruz. ◀

En el siguiente ejemplo, veremos cómo es la función de distribución de una variable aleatoria con distribución uniforme.

Ejemplo 13

(a) Calcule la función de densidad y la función de distribución de una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (1, 5), y dibuje las dos funciones en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Suponga que se genera una variable aleatoria uniforme en el intervalo (1, 5). Calcule la probabilidad de que el primer dígito tras el punto decimal sea 2.

Solución

(a) Como la longitud del intervalo (1, 5) es 4, la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{para } 1 < x < 5 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

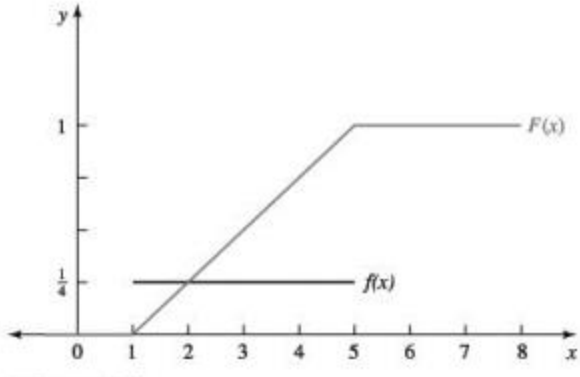
La función de distribución $F(x) = P(X \leqslant x)$ es

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 1 \\ \int_1^x \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & \text{para } 1 < x < 5 \\ 1 & \text{para } x \geqslant 5 \end{cases}$$

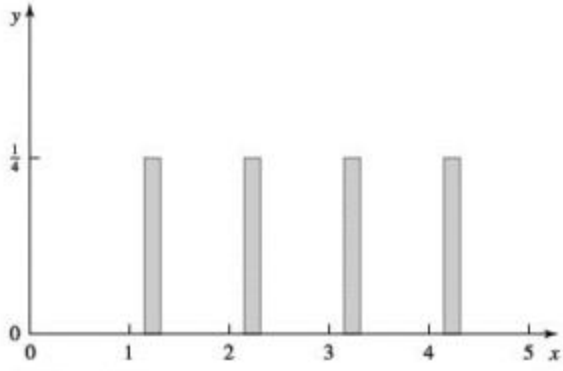
La Figura 12.48 muestra las gráficas de $f(x)$ y $F(x)$.

(b) El suceso de que el primer dígito tras el punto decimal sea 2 es equivalente a que la variable aleatoria U pertenezca al conjunto

$$A = [1.2,\ 1.3) \cup [2.2,\ 2.3) \cup [3.2,\ 3.3) \cup [4.2,\ 4.3)$$



▲ **Figura 12.48**
Función de densidad $f(x)$ y de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (1, 5) (*véase* el Ejemplo 13).



▲ **Figura 12.49**
La probabilidad $P(U \in A)$ en el Ejemplo 13 es igual a la suma de las áreas de las regiones sombreadas

Por tanto,

$$P(U \in A) = (4)(0.1)\left(\frac{1}{4}\right) = 0.1$$

como se ilustra en la Figura 12.49. ◀

12.5.4 La distribución exponencial

Presentaremos primero la función de densidad de la función exponencial y explicaremos después dónde resulta de utilidad. Se dice que una variable aleatoria X tiene **distribución exponencial** de parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Como

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\, du = -e^{-\lambda u}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

su función de distribución $F(x) = P(X \leqslant x)$ es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leqslant 0 \end{cases}$$

El valor esperado de X es

$$EX = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

y la varianza de X es

$$\text{var}\,(X) = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

La media y la varianza se calcularán en los Problemas 47 y 48.

La distribución exponencial se utiliza frecuentemente para modelar tiempos de espera o de vida.

Ejemplo 14 Suponga que el tiempo entre llegadas de insectos polinizadores de una planta de flor tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.3$/hora.

(a) Calcule la media y la desviación típica del tiempo de espera entre llegadas sucesivas de polinizadores.

(b) Un polinizador acaba de dejar la planta. ¿Cuál es la probabilidad de que haya que esperar más de tres horas antes de que llegue el siguiente polinizador?

Solución

(a) Como $\lambda = 0.3$/hora, la media es igual a $1/\lambda = 10/3$ horas y la desviación típica, que es la raíz cuadrada de la varianza, es igual a $1/\lambda = 10/3$ horas.

(b) Si se denomina T al tiempo de espera, entonces

$$P(T > 3) = 1 - F(3) = e^{-(0.3)(3)} \approx 0.4066$$ ◀

Ejemplo 15 Suponga que el tiempo de vida de un organismo tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = (1/200)$ años^{-1}.

(a) Calcule la probabilidad de que el organismo viva más de 50 años.

(b) Sabiendo que el organismo tiene 100 años, calcule la probabilidad de que viva al menos otros 50 años.

Solución

Sea T el tiempo de vida del organismo, medido en años. Entonces la distribución de T es exponencial de parámetro $\lambda = (1/200)$ años^{-1}.

(a) Se desea calcular la probabilidad de que T sea mayor que 50 años. Se calcula

$$P(T > 50) = 1 - P(T \leqslant 50) = 1 - (1 - e^{50/200})$$
$$= e^{-50/200} = e^{-1/4} \approx 0.7788$$

Nótese que las unidades del exponente se simplifican.

(b) Se desea calcular $P(T > 150 \,|\, T > 100)$. Se trata de una probabilidad condicional. La calcularemos de la siguiente forma:

$$P(T > 150 \,|\, T > 100) = \frac{P(T > 150 \text{ y } T > 100}{P(T > 100)}$$

Como $\{T > 150\} \subset \{T > 100\}$, se deduce que

$$\{T > 150\} \cap \{T > 100\} = \{T > 150\}$$

Por tanto,

$$P(T > 150 \text{ y } T > 100) = P(T > 150)$$

Ahora se puede continuar el cálculo

$$\frac{P(T > 150 \text{ y } T > 100)}{P(T > 100)} = \frac{P(T > 150)}{P(T > 100)} = \frac{e^{-150/200}}{e^{-100/200}}$$
$$= e^{-3/4+1/2} = e^{-1/4} \approx 0.7788$$

Es la misma respuesta que en (a). El hecho de que el organismo haya vivido 100 años no cambia su probabilidad de vivir otros 50. Se dice que el organismo no envejece. Esta propiedad de no envejecimiento es un rasgo característico de la distribución exponencial. Por supuesto, la mayoría de los organismos envejecen. No obstante, la distribución exponencial se utiliza frecuentemente

para modelar tiempos de vida incluso aunque el organismo envejezca, en cuyo caso se debe considerar como una aproximación a la situación real. ◀

Vamos a comentar con mayor detalle la propiedad de no envejecimiento. Si T es un tiempo de vida con distribución exponencial, entonces cumple la propiedad

$$P(T > t + h \,|\, T > t) = P(T > h)$$

Dicho con palabras, si el organismo está vivo tras t unidades de tiempo, entonces la probabilidad de vivir al menos otras h unidades de tiempo es igual que la probabilidad de que el organismo sobreviva las primeras h unidades de tiempo. Esto significa que la muerte no se hace más (o menos) probable con la edad.

Esta propiedad se deduce inmediatamente del siguiente cálculo, que es el mismo que se realizó en el Ejemplo 15.

$$\begin{aligned} P(T > t + h \,|\, T > t) &= \frac{P(T > t + h \text{ y } T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(T > t + h)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} = P(T > h) \end{aligned}$$

Para la mayor parte de organismos u objetos, la distribución exponencial es un modelo pobre del tiempo de vida. Sin embargo, en la distribución correcta para modelar la desintegración radioactiva.

Ejemplo 16 Suponga que el tiempo de vida de un átomo radioactivo tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda = 3$/día.

(a) Calcule el tiempo medio de vida de este átomo.

(b) Calcule el tiempo T_h tal que la probabilidad de que un átomo no se haya desintegrado en ese tiempo sea de 1/2 (este tiempo se denomina vida media).

Solución

(a) El tiempo medio de vida es de $1/\lambda = (1/3)$ días.

(b) Si la variable aleatoria T indica el tiempo de vida del átomo, entonces T_h cumple

$$P(T > T_h) = \frac{1}{2}$$

es decir,

$$e^{-\lambda T_h} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad T_h = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Como $\lambda = 3$/día, se obtiene

$$T_h = \frac{\ln 2}{3} \text{ días} \approx 0.2310 \text{ días}$$ ◀

Ejemplo 17 La función exponencial

$$f(r) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda r} & \text{para } r > 0 \\ 0 & \text{para } r \leqslant 0 \end{cases}$$

siendo $\lambda > 0$ una constante, se utiliza frecuentemente para modelar la dispersión de semillas (*véase* el Ejemplo 4 de esta sección). La función $f(r)$ es una función de densidad, y para $0 < a < b$, $\int_a^b f(r)\,dr$ describe la fracción de semillas dispersas entre las distancias a y b de la fuente en 0.

(a) Demuestre que $f(r)$ es una función de densidad.

(b) Demuestre que la fracción de semillas dispersas a una distancia mayor o igual que R decrece exponencialmente con R.

(c) Calcule R de forma que el 60% de las semillas se dispersen dentro de una distancia R de la fuente. ¿Cómo depende R de λ?

Solución

(a) Para demostrar que $f(r)$ es una función de densidad, hay que demostrar que $f(r) \geqslant 0$ para todo $r \in \mathbf{R}$ y que $\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\,dr = 1$. Como $\lambda > 0$ y $e^{-\lambda r} > 0$, se deduce inmediatamente que $f(r) \geqslant 0$ para $r > 0$. Combinando esto con que $f(r) = 0$ para $r \leqslant 0$, se obtiene que $f(r) \geqslant 0$ para todo $r \in \mathbf{R}$. Para comprobar el segundo criterio, hay que realizar la integración. Como la función $f(r)$ está definida por tramos, hay que separar la integral en dos partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\,dr = \int_{-\infty}^{0} f(r)\,dr + \int_{0}^{\infty} f(r)\,dr$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dr + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda r}\,dr$$

El término $\int_{-\infty}^{0} 0\,dr$ es igual a 0. $-e^{-\lambda t}$ es una primitiva de $\lambda e^{-\lambda t}$. Por tanto,

$$\int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda r} = \lim_{z\to\infty} \int_{0}^{z} \lambda e^{-\lambda r}\,dr = \lim_{z\to\infty} [-e^{-\lambda r}]_0^z$$

$$= \lim_{z\to\infty} [-e^{-\lambda z} - (-1)] = 1$$

ya que $\lim_{z\to\infty} e^{-\lambda z} = 0$.

(b) Para $R > 0$, sea $G(R)$ la fracción de semillas dispersas a una distancia de R o mayor. Entonces

$$G(R) = \int_{R}^{\infty} f(r)\,dr = \int_{R}^{\infty} \lambda e^{-\lambda r}\,dr = \lim_{z\to\infty} \int_{R}^{z} \lambda e^{-\lambda r}\,dr$$

$$= \lim_{z\to\infty} [-e^{-\lambda r}]_R^z = \lim_{z\to\infty} (-e^{-\lambda z} + e^{-\lambda R}) = e^{-\lambda R}$$

lo que demuestra que $G(R)$ decrece exponencialmente con R.

(c) El número R cumple

$$0.6 = \int_{0}^{R} \lambda e^{-\lambda r}\,dr$$

Realizando la integración, se obtiene

$$0.6 = [-e^{-\lambda r}]_0^R = 1 - e^{-\lambda R}$$

Para calcular R hay que resolver

$$e^{-\lambda R} = 0.4$$

$$-\lambda R = \ln 0.4$$

$$R = -\frac{\ln 0.4}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{5}{2}$$

donde en el último paso se ha utilizado que $-\ln 0{,}4 = \ln \frac{1}{0{,}4} = \ln \frac{5}{2}$. Vemos entonces que $R \propto \frac{1}{\lambda}$ (es decir, cuanto mayor sea λ, menor es R), lo que significa que las semillas se dispersan más cerca de la fuente con valores mayores de λ. ◀

Ejemplo 18 Suponga que se desea utilizar un ordenador para generar variables aleatorias con distribución exponencial pero el ordenador sólo tiene software para generar variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo (0, 1). ¿Cómo se procedería?

Solución

La clave para resolver este problema es el siguiente resultado. Si X es una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente $F(x)$, entonces $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Para demostrar este resultado, es necesario demostrar que

$$P(F(X) \leqslant u) = u \quad \text{para } 0 < u < 1$$

El suceso $\{F(X) \leqslant u\}$ es equivalente al suceso $\{X \leqslant F^{-1}(u)\}$, siendo $F^{-1}(\cdot)$ la función inversa de $F(\cdot)$. La función inversa existe debido a la suposición de que la función de distribución es estrictamente creciente, lo que implica que $F(x)$ es inyectiva. Por tanto,

$$P(F(X) \leqslant u) = P(X \leqslant F^{-1}(u))$$

Como $F(x) = P(X \leqslant x)$, se obtiene

$$P(X \leqslant F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$

donde el último paso se deduce de las propiedades de la función inversa.

¿Cómo se puede utilizar este resultado para generar variables aleatorias exponencialmente distribuidas a partir de variables aleatorias con distribución uniforme? El ordenador genera una variable aleatoria con distribución uniforme U, que se interpreta como $F(X)$, donde X está distribuida de acuerdo con la función de distribución $F(x)$. Como

$$U = F(X) \quad \text{es equivalente a} \quad X = F^{-1}(U)$$

se necesita obtener la función inversa de $F(x)$ y calcular $F^{-1}(U)$, que será la variable aleatoria X.

En el caso de una función exponencial de parámetro λ, la función de distribución $F(x)$ es

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geqslant 0$$

que es estrictamente creciente en el intervalo $[0, \infty)$. Sea $u = 1 - e^{-\lambda x}$ y se despeja x:

$$1 - u = e^{-\lambda x}$$

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) = x$$

Por tanto,

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

Para concretar, supongamos que $\lambda = 2$, y que el ordenador ha generado tres variables aleatorias uniformes en (0, 1):

$$u_1 = 0.8890, \qquad u_2 = 0.9394, \qquad u_3 = 0.3586$$

Entonces

$$x_1 = F^{-1}(u_1) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 0.8890) \approx 1.099$$

$$x_2 = F^{-1}(u_2) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 0.9394) \approx 1.402$$

$$x_3 = F^{-1}(u_3) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 0.3586) \approx 0.2221$$

son las correspondientes realizaciones de la variable aleatoria con distribución exponencial. ◀

Envejecimiento El envejecimiento es una característica universal de los organismos vivientes y de los dispositivos mecánicos. Consiste en una pérdida progresiva de vitalidad o de fiabilidad. Hay diversos modelos matemáticos que se utilizan para describir este fenómeno. El punto de partida de estos modelos es la **función de supervivencia** $S(x)$, que se define como la probabilidad de que un individuo/dispositivo este todavía vivo/funcionando a la edad de x. Si X es el tiempo de vida, entonces

$$S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x)$$

siendo $F(x)$ la función de distribución de X. Se supone ahora que X es una variable aleatoria continua y no negativa con función de densidad $f(x) > 0$ para $x > 0$. Esto implica que $F(0) = 0$ y que $F(x)$ es estrictamente creciente para $x > 0$. La función de **tasa de riesgo** o de **fallo** $\lambda(x)$ se define como la tasa relativa de descenso de la función de supervivencia.

$$\lambda(x) = -\frac{1}{S(x)}\frac{dS}{dx}$$

Nótese que para $x > 0$, $\lambda(x)$ es positivo ya que $S(x)$ es estrictamente decreciente. Como para $x > 0$,

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(u)\,du$$

se obtiene

$$\lambda(x) = -\frac{1}{S(x)}\frac{dS}{dx} = \frac{1}{P(X > x)}f(x)$$

En consecuencia, $\lambda(x)\,dx$ se puede interpretar como la probabilidad condicional de muerte en el intervalo $[x, x + dx)$ sabiendo que el individuo está vivo a la edad $x > 0$.

$$\lambda(x)\,dx = P(X \in [x, x + dx) \,|\, X > x) \qquad \text{para } x > 0$$

No envejecimiento Siguiendo esta interpretación de $\lambda(x)\,dx$, se dice que un sistema no envejece si la tasa de fallos $\lambda(x)$ es constante. En este caso, para $x > 0$,

$$-\frac{1}{S(x)}\frac{dS}{dx} = \lambda = \text{constante}$$

Separando variables e integrando resulta

$$\int \frac{dS}{S} = -\int \lambda\,dx$$

o

$$\ln S(x) = -\lambda x + C_1$$

Por tanto,

$$S(x) = C_1 e^{-\lambda x}$$

Como X es una variable aleatoria continua no negativa con $S(0) = P(X > 0) = 1$, se obtiene que $C_1 = 1$. Por tanto,

$$S(x) = e^{-\lambda x} = 1 - F(x) \quad \text{o} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{12.32}$$

Se concluye entonces que X tiene distribución exponencial de parámetro λ. Ya vimos anteriormente que la distribución exponencial tiene la propiedad de no envejecimiento. La Ecuación (12.32) indica que lo contrario también es cierto. Si un dispositivo tiene la propiedad de no envejecimiento (es decir, una tasa de fallos constante), entonces la distribución de su tiempo de vida es exponencial).

Ejemplo 19 Suponga que la función de riesgo es $\lambda(x) = 3$/año para $x \geqslant 0$. Calcule la probabilidad de que un individuo muera antes de la edad de 1 año.

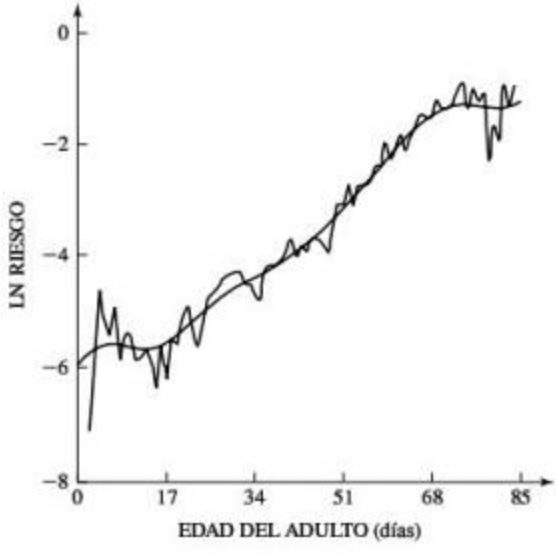
Solución

Si $\lambda(x) = 3$/año, entonces $S(x) = e^{-3x}$, $x \geqslant 0$, donde x se mide en años. Si X indica el tiempo de vida del individuo, entonces

$$P(X \leqslant 1) = 1 - S(1) = 1 - e^{-3} \approx 0.9502$$

Hay un 95% de probabilidad de que el individuo muera antes del primer año de edad. ◀

Envejecimiento Cuando la función de tasa de fallos crece con la edad, entonces un dispositivo viejo tiene mayor probabilidad de fallar que uno joven, y se dice que el sistema es un **sistema con envejecimiento**. La Figura 12.50 muestra una función empírica de tasa de riesgo basada en 8926 machos de un grupo endogámico de *Drosophila melanogaster* obtenida en el laboratorio del Profesor Jim Curtsinger de la Universidad de Minnesota. La curva suavizada es una curva ajustada a los datos. Los datos se basan en medidas diarias de supervivencia. El eje horizontal representa la edad de los individuos. El eje vertical representa $-\ln(N_{x+1}/N_x)$



▲ **Figura 12.50**
Una función empírica de tasa de riesgo (cortesía del Dr. Jim Curtsinger)

(en escala logarítmica), siendo N_x el número de adultos vivos de edad x. Esta cantidad se puede interpretar como la función de tasa de riesgo, promediada en el intervalo $[x, x+1]$ (*véase* Problema 65). Observando la gráfica se puede ver que la función de tasa de riesgo aumenta con la edad pero parece estabilizarse a edades muy altas. Este es el patrón típico que se observa en esta clase de estudios.

Supondremos de nuevo que el tiempo de vida X es una variable aleatoria continua y no negativa con función de tasa de riesgo $\lambda(x) > 0$ para $x > 0$ y función de supervivencia $S(x)$, $x \geqslant 0$, con $S(0) = 1$.

Dada la función de tasa de riesgo $\lambda(x)$, mediante integración se puede calcular la función de supervivencia $S(x)$. Para $x > 0$,

$$-\frac{1}{S(x)}\frac{dS}{dx} = \lambda(x)$$

$$\frac{dS}{S} = -\lambda(x)\,dx$$

$$\ln S(x) = -\int_0^x \lambda(u)\,du + C_1$$

$$S(x) = C\exp\left[-\int_0^x \lambda(u)\,du\right]$$

Como $S(0) = 1$, se obtiene que $C = 1$. Por tanto,

$$S(x) = \exp\left[-\textstyle\int_0^x \lambda(u)\,du\right]$$

Las dos funciones de tasa de riesgo más importantes para modelar el envejecimiento son la **ley de Gompertz**, en la que la función de tasa de riesgo aumenta exponencialmente con la edad y la **ley de Weibull**, en la que la función de tasa de riesgo aumenta según una ley potencial.

Ley de Gompertz:

$$\lambda(x) = A + Be^{\alpha x},\ x \geqslant 0$$

siendo A, B y α constantes positivas.

Ley de Weibull:

$$\lambda(x) = Cx^{\beta},\ x \geqslant 0$$

siendo C y β parámetros positivos.

La ley de Weibull se utiliza frecuentemente para la fiabilidad de dispositivos técnicos, mientras que la ley de Gompertz se usa en sistemas biológicos (*véase* el artículo de revisión de Gavrilov y Gavrilova, 2001).

Ejemplo 20 Suponga que el tiempo de vida de un organismo sigue la ley de Gompertz con función de tasa de riesgo

$$\lambda(x) = 1.5 + 0.3e^{0.1x},\ x \geqslant 0$$

donde x se mide en años. Calcule la probabilidad de que el organismo viva más de un año.

Solución

La función de supervivencia es

$$S(x) = \exp\left[- \int_0^x (1.5 + 0.3e^{0.1u})\, du \right], \; x \geqslant 0$$

Primero evaluaremos la integral. Para $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x (1.5 + 0.3e^{0.1u})\, du = 1.5u + \frac{0.3}{0.1} e^{0.1u} \Big|_0^x$$
$$= (1.5x + 3e^{0.1x}) - (0 + 3) = 1.5x + 3e^{0.1x} - 3$$

Por tanto,

$$S(x) = \exp[-(1.5x + 3e^{0.1x} - 3)], \; x \geqslant 0$$

Si X es el tiempo de vida de un organismo, la probabilidad de que el organismo viva más de un año es

$$P(X > 1) = S(1) = \exp[-(1.5 + 3e^{0.1} - 3)] \approx 0.1628$$

Es decir, el organismo tiene una probabilidad aproximada del 16% de vivir más de un año. ◀

Ejemplo 21 Los datos de mortalidad de *Drosophila melanogaster* se ajustaron a una ley de Weibull. Se obtuvo que el mejor ajuste correspondía a la siguiente función de tasa de riesgo.

$$\lambda(x) = (3 \times 10^{-6})x^{2.5}, \; x \geqslant 0$$

donde x se mide en días.

(a) Calcule la probabilidad de que un individuo muera dentro de los 20 primeros días.

(b) Calcule la edad a la que la probabilidad de estar vivo es de 0.5.

Solución

(a) La función de supervivencia es

$$S(x) \exp\left[- \int_0^x (3 \times 10^{-6})u^{2.5}\, du \right], \; x \geqslant 0$$

Primero se evalúa la integral. Para $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x (3 \times 10^{-6})u^{2.5}\, du = (3 \times 10^{-6}) \frac{1}{3.5} u^{3.5} \Big|_0^x$$
$$= (3 \times 10^{-6}) \frac{1}{3.5} x^{3.5}$$

Por tanto, la probabilidad de que un individuo muera en los 20 primeros días es

$$1 - S(20) = 1 - \exp\left[- (3 \times 10^{-6}) \frac{1}{3.5} (20)^{3.5} \right] \approx 0.0302$$

(b) Hay que calcular x para que

$$S(x) = 0.5$$

Despejando x:

$$\exp\left[-(3\times 10^{-6})\frac{1}{3.5}x^{3.5}\right]=\frac{1}{2}$$

$$-(3\times 10^{-6})\frac{1}{3.5}x^{3.5}=\ln\frac{1}{2}$$

$$x^{3.5}=\frac{(3.5)(\ln 2)}{3\times 10^{-6}}$$

$$x=\left(\frac{(3.5)(\ln 2)}{3\times 10^{-6}}\right)^{1/3.5}$$

$$x\approx 48.746$$

La edad donde la probabilidad de supervivencia es 0.5 es aproximadamente 48.7 días. ◀

12.5.5. Problemas

(12.5.1)

1. Demuestre que

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & \text{para } x>0\\ 0 & \text{para } x\leqslant 0\end{cases}$$

es una función de densidad. Calcule la correspondiente función de distribución.

2. Demuestre que

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{de otro modo}\end{cases}$$

es una función de densidad. Calcule la correspondiente función de distribución.

3. Determine c para que

$$f(x)=\frac{c}{1+x^2},\ x\in\mathbf{R}$$

sea una función de densidad.

4. Determine c para que

$$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^2} & \text{para } x>1\\ 0 & \text{para } x\leqslant 1\end{cases}$$

sea una función de densidad.

5. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

Calcule EX y var (X).

6. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

para $x\in\mathbf{R}$. Calcule EX y var(X).

7. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^2} & \text{para } x>1\\ 0 & \text{para } x\leqslant 1\end{cases}$$

Calcule EX y var (X).

8. Sea X una variable aleatoria continua con

$$P(X>x)=e^{-ax},\ x\geqslant 0$$

siendo a una constante positiva. Calcule EX y var (X).

9. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}(a-1)x^{-a} & \text{para } x>1\\ 0 & \text{para } x\leqslant 1\end{cases}$$

(a) Demuestre que $EX=\infty$ cuando $a\leqslant 2$.
(b) Calcule EX cuando $a>2$.

10. Suponga que X es una variable aleatoria continua que sólo toma valores no negativos. Sea

$$G(x)=P(X>x)$$

(a) Demuestre que

$$G'(x)=-f(x)$$

siendo $f(x)$ la correspondiente función de densidad.
(b) Suponga que

$$\lim_{x\to\infty}xG(x)=0$$

Utilice integración por partes y el resultado de (a) para demostrar

$$EX=\int_0^{\infty}G(x)\,dx \tag{12.33}$$

(c) Sea X una variable aleatoria continua con

$$P(X>x)=e^{-ax},\ x>0$$

siendo a una constante positiva. Utilice (12.33) para calcular EX (si hizo el Problema 8, compare los resultados).

(12.5.2)

11. Sea

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

para $-\infty<x<\infty$, la función de densidad de una distribución normal de media y desviación típica σ.

(a) Demuestre que $f(x)$ es simétrica alrededor de $x=\mu$.
(b) Demuestre que el máximo de $f(x)$ está en $x=\mu$.

(c) Demuestre que los puntos de inflexión de $f(x)$ están en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.
(d) Dibuje $f(x)$ para $\mu = 2$ y $\sigma = 1$.

12. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Demuestre que

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

es la media de la distribución. (*Sugerencia:* use el método del cambio de variable).

13. Suponga que un carácter cuantitativo tiene una distribución normal de media $\mu = 12.8$ y desviación típica $\sigma = 2.7$. Calcule un intervalo centrado en la media tal que el 95% (99%) de la población pertenezca a dicho intervalo.

14. Suponga que un carácter cuantitativo tiene una distribución normal de media $\mu = 15.4$ y desviación típica $\sigma = 3.1$. Calcule un intervalo centrado en la media tal que el 95% (99%) de la población pertenezca a dicho intervalo.

En los Problemas 15-20, suponga que un carácter cuantitativo tiene distribución normal de media μ y desviación típica σ. Determine la fracción de la población que pertenece a los intervalos dados.

15. $[\mu, \infty)$
16. $[\mu - 2\sigma, \mu + \sigma]$
17. $(-\infty, \mu + 3\sigma]$
18. $[\mu + \sigma, \mu + 2\sigma]$
19. $(-\infty, \mu - 2\sigma]$
20. $[\mu - 3\sigma, \mu]$

21. Suponga que X tiene distribución normal de media $\mu = 3$ y desviación típica $\sigma = 2$. Utilice la tabla del Apéndice B para calcular lo siguiente.
(a) $P(X \leqslant 4)$
(b) $P(2 \leqslant x \leqslant 4)$
(c) $P(X > 5)$
(d) $P(X \leqslant 0)$

22. Suponga que X tiene distribución normal de media $\mu = -1$ y desviación típica $\sigma = 1$. Utilice la tabla del Apéndice B para calcular lo siguiente.
(a) $P(X > 0)$
(b) $P(0 < X < 1)$
(c) $P(-1.5 < X < 2.5)$
(d) $P(X > 1.5)$

23. Suponga que X tiene distribución normal de media $\mu = 1$ y desviación típica $\sigma = 2$. Utilice la tabla del Apéndice B para calcular lo siguiente.
(a) $P(X \leqslant x) = 0.9$
(b) $P(X > x) = 0.4$
(c) $P(X \leqslant x) = 0.4$
(d) $P(|X - 1| < x) = 0.5$

24. Suponga que X tiene distribución normal de media $\mu = -2$ y desviación típica $\sigma = 1$. Utilice la tabla del Apéndice B para calcular lo siguiente.
(a) $P(X \geqslant x) = 0.8$
(b) $P(X < 2x + 1) = 0.5$
(c) $P(X \leqslant x) = 0.1$
(d) $P(|X - 2| > x) = 0.4$

25. Suponga que la puntuación X de un test de aptitud escolar tiene distribución normal de media 500 y desviación típica 100.
(a) Calcule la probabilidad de que la puntuación de un individuo supere 700.
(b) Calcule la puntuación tal que el 10% de los estudiantes que realizaron el test obtuvo dicha puntuación o superior.

26. En un estudio de *Drosophila melanogaster* realizado por Mackay (1984) se demostró que el número de cerdas en el quinto segmento abdominal en machos sigue una distribución normal de media 18.7 y desviación estándar 2.1.
(a) ¿Qué porcentaje de la población de machos tiene menos de 17 cerdas?
(b) Calcule un intervalo centrado en la media tal que el 90% de la población de machos tiene un número de cerdas que está en dicho intervalo.

27. Suponga que el peso de un animal tiene distribución normal de media 3720 gr y desviación típica 527 gr. ¿Qué porcentaje de la población tiene un peso superior a 5000 gr?

28. Suponga que la altura de un animal adulto tiene distribución normal de media 17.2 in. Calcule la desviación típica si la altura del 10% de los animales supera las 19 in.

29. Suponga que X tiene distribución normal de media 2 y desviación típica 1. Calcule $P(0 \leqslant X \leqslant 3)$.

30. Suponga que X tiene distribución normal de media y desviación típica 2. Calcule $P(-3.5 \leqslant X \leqslant 0.5)$.

31. Suponga que X tiene distribución normal de media μ y desviación típica σ. Demuestre que $EX = \mu$ [utilice el hecho de que si Z tiene distribución normal estándar, entonces $EZ = 0$ y $\text{var}(Z) = 1$].

32. Suponga que X tiene distribución normal de media μ y desviación típica σ. Demuestre que $\text{var}(X) = \sigma^2$ [utilice el hecho de que si Z tiene distribución normal estándar, entonces $EZ = 0$ y $\text{var}(Z) = 1$].

33. Suponga que X tiene distribución normal estándar. Calcule $E|X|$.

34. Suponga que el número de semillas que produce una planta tiene distribución normal de media 142 y desviación típica 31. Calcule la probabilidad de que en una muestra de 5 plantas, al menos una planta produzca más de 200 semillas. Suponga que las plantas son independientes.

35. La máxima puntuación posible de un examen de cálculo es de 100 puntos. La puntuación media obtenida ha sido de 74 y la desviación típica de 11. Asuma que la puntuación obtenida tiene distribución normal.
(a) Determine el porcentaje de estudiantes cuya puntuación es de 90 o superior.
(b) Determine el porcentaje de estudiantes cuya puntuación está entre 60 y 80 (ambos inclusive).
(c) Determine la puntuación mínima del 10% superior de la clase.
(d) Determine la puntuación máxima del 5% inferior de la clase.

36. El peso medio de las alumnas de un pequeño colegio es de 123 libras (lb) y su desviación típica es de 9 lb. Si los pesos tienen distribución normal, determine el porcentaje de alumnas cuyo peso (a) está entre 110 y 130 lb, (b) es menor que 100 lb, y (c) es mayor que 150 lb.

(12.5.3)

37. Suponga que se selecciona un número aleatoriamente del intervalo (0, 4). ¿Cuál es la probabilidad de que el primer dígito tras el punto decimal sea un 3?

38. Suponga que se escoge aleatoriamente un número X del intervalo $(0, a)$. Si $P(X \geq 1) = 0.2$, calcule a.

39. Suponga que se escoge aleatoriamente un número X del intervalo (a, b). Si $EX = 4$ y $\text{var}(X) = 3$, calcule a.

40. Suponga que se escogen aleatoriamente cinco números en el intervalo (0, 1). Suponga que los números son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los números sean mayores que 0.7?

41. Suponga que X_1, X_2 y X_3 son independientes y tienen distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Defina

$$Y = \max(X_1, X_2, X_3)$$

Calcule EY. [*Sugerencia:* calcule $P(Y \leq y)$ y a partir de eso deduzca la densidad de Y].

42. Suponga que X_1, X_2 y X_3 son independientes y tienen distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Defina

$$Y = \min(X_1, X_2, X_3)$$

Calcule EY. [*Sugerencia:* calcule $P(Y > y)$ y a partir de eso deduzca la densidad de Y].

43. Suponga que se desea simular un experimento aleatorio que consiste en lanzar diez veces una moneda en la que la probabilidad de salir cara es 0.6. El ordenador genera la siguiente secuencia de diez números aleatorios: 0.1905, 0.4285, 0.9963, 0.1666, 0.2223, 0.6885, 0.0489, 0.3567, 0.0719, 0.8661. Calcule la correspondiente secuencia de caras y cruces.

44. Suponga que se desea simular un experimento aleatorio que consiste en lanzar diez veces un dado bueno. El ordenador genera la siguiente secuencia de diez números aleatorios: 0.7198, 0.2759, 0.4108, 0.7780, 0.2149, 0.0348, 0.5673, 0.0014, 0.3249, 0.6630. Describa cómo obtendría la correspondiente secuencia de números del dado, y calcúlela.

45. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en (0, 1). Defina $X = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(a) Calcule $P(X > x)$.

(b) Demuestre que $P(X > x/n) \to e^{-x}$ cuando $n \to \infty$.

46. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en (0, 1). Defina $X = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(a) Calcule la función de distribución de X.

(b) Utilice el Problema 10 para calcular EX.

(12.5.4)

47. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Calcule EX.

48. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Calcule $\text{var}(X)$.

49. Suponga que el tiempo de vida de una batería tiene distribución exponencial con un valor medio de tres meses. ¿Cuál es la probabilidad de que la batería dure más de cuatro meses?

50. Suponga que el tiempo de vida de una batería tiene distribución exponencial con un valor medio de dos meses. Se compran seis baterías. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas dure más de dos meses? (Asuma que las baterías son independientes.)

51. Suponga que el tiempo de vida de un átomo radioactivo tiene distribución exponencial con una media de 27 días.

(a) Calcule la probabilidad de que el átomo no se desintegre durante los primeros 20 días desde que empieza a observarlo.

(b) Suponga que el átomo no se desintegra durante los primeros 20 días desde que empieza a observarlo. ¿Cuál es la probabilidad de que no se desintegre durante los 20 días siguientes?

52. Si X tiene función de distribución $F(x)$, se puede demostrar que $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Utilice este hecho para generar variables aleatorias exponencialmente distribuidas de media 1 [suponga que el ordenador ha generado estos cuatro números mediante un generador de variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo (0, 1): 0.0371, 0.5123, 0.1370, 0.9865].

53. Suponga que el tiempo de vida de un dispositivo técnico tiene distribución exponencial de media cinco años.

(a) Calcule la probabilidad de que el dispositivo falle después de tres años.

(b) Sabiendo que el dispositivo ha funcionado durante seis años, calcule la probabilidad de que funcione otro año más.

54. Suponga que el tiempo de vida de un organismo tiene distribución exponencial con función de tasa de riesgo $\lambda(x) = 2$/día.

(a) Calcule la probabilidad de que un individuo de esta especie viva más de tres días.

(b) Calcule el tiempo esperado de vida.

55. Suponga que el tiempo de vida de un dispositivo técnico tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$/año.

(a) ¿Cuál es el tiempo esperado de vida?

(b) La **vida media** se define como la edad x_m a la que la probabilidad de no haber fallado es 0.5. Calcule x_m.

56. La vida media se define como la edad x_m a la que la probabilidad de no haber fallado es 0.5. Si el tiempo de vida de un organismo tiene distribución exponencial y $x_m = 4$ años, ¿cuál es la función de tasa de riesgo?

57. La función de tasa de riesgo de un organismo es

$$\lambda(x) = 0.3 + 0.1e^{0.01x}, \quad x \geq 0$$

donde x se mide en días.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva más de cinco días?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva entre siete y diez días?

58. La función de tasa de riesgo de un organismo es

$$\lambda(x) = 0.1 + 0.5e^{0.02x}, \quad x \geq 0$$

donde x se mide en días.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva menos de diez días?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva otros cinco días sabiendo que ha sobrevivido los primeros cinco días?

59. La vida media se define como la edad x_m a la que la probabilidad de no haber fallado es 0.5. Utilice una calculadora gráfica para aproximar numéricamente la vida media si la función de tasa de riesgo es

$$\lambda(x) = 1.2 + 0.3e^{0.05x}, \quad x \geq 0$$

60. La vida media se define como la edad x_m a la que la probabilidad de no haber fallado es 0.5. Utilice una calculadora gráfica para aproximar numéricamente la vida media si la función de tasa de riesgo es

$$\lambda(x) = 0.5 + 0.1e^{0.2x},\ x \geqslant 0$$

61. La función de tasa de riesgo de un organismo es

$$\lambda(x) = (2 \times 10^{-5})x^{1.5},\ x \geqslant 0$$

donde x se mide en días.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva más de 50 días?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva entre 50 y 70 días?

62. La función de tasa de riesgo de un organismo es

$$\lambda(x) = 0.04x^{3.1},\ x \geqslant 0$$

donde x se mide en años.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva más de tres años?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el organismo viva otros tres años sabiendo que ha sobrevivido los tres primeros años?

63. La vida media se define como la edad x_m a la que la probabilidad de no haber fallado es 0.5. Calcule la vida media si la función de tasa de riesgo es

$$\lambda(x) = (4 \times 10^{-5})x^{2.2},\ x \geqslant 0$$

64. La vida media se define como la edad x_m a la que la probabilidad de no haber fallado es 0.5. Calcule la vida media si la función de tasa de riesgo es

$$\lambda(x) = (3.7 \times 10^{-6})x^{2.7},\ x \geqslant 0$$

65. Sea N_x el número de indivuduos que están vivos a la edad x. Demuestre que

$$-\ln \frac{N_{x+1}}{N_x}$$

se puede estimar mediante

$$\int_x^{x+1} \lambda(u)\,du$$

siendo $\lambda(x)$ la función de tasa de riesgo a la edad x.

12.6 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

12.6.1 La ley de los grandes números

Los niveles de antígeno prostático específico (PSA, *prostate-specific antigen*) proporcionan una herramienta de diagnóstico para el cáncer de próstata. Se utilizan también para detectar un «fallo bioquímico» tras una operación de extracción de próstata. El fallo bioquímico se define como el nivel de PSA que excede los 0.5 ng/ml. Puede ser una indicación de que todavía quedan células de cáncer de próstata en el cuerpo del paciente. En 429 de 817 hombres de un estudio, la enfermedad estaba limitada a la próstata. Tras cinco años, el 8% de los hombres del grupo cuyo cáncer estaba limitado a la próstata tuvieron fallo bioquímico.

Supongamos ahora un pequeño estudio con 30 hombres cuya próstata se extirpó quirúrgicamente y en los que la enfermedad estaba limitada a la próstata. Tras cinco años, tres de los treinta hombres, un 10%, experimentaron fallo bioquímico, tal como se define anteriormente. ¿Cuál de las dos cifras, 8% o 10% se puede considerar más fiable? La respuesta que daremos será seguramente el 8%. Tendemos a confiar más en estudios grandes que en estudios pequeños. La razón de esto se encuentra en un resultado matemático, conocido como la **ley de los grandes números**, que establece que las estimaciones de proporciones se hacen más fiables a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

Hay dos desigualdades que nos ayudarán a establecer este resultado:

Desigualdad de Markov Sea X una variable aleatoria no negativa con $EX < \infty$. Entonces, para todo $a > 0$,

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Demostración Demostraremos este resultado cuando X es una variable aleatoria continua y no negativa, con función de densidad $f(x)$. Sea $a > 0$. Entonces

$$EX = \int_0^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{a} xf(x)\,dx + \int_a^{\infty} xf(x)\,dx \qquad (12.34)$$

Como $\int_0^a xf(x)\,dx \geqslant 0$, se obtiene que

$$EX \geqslant \int_a^\infty xf(x)\,dx \tag{12.35}$$

Utilizando que $x \geqslant a$, el miembro derecho de (12.35) está acotado por

$$\geqslant \int_a^\infty af(x)\,dx = a\int_a^\infty f(x)\,dx = aP(X \geqslant a)$$

Por tanto,

$$EX \geqslant aP(X \geqslant a) \quad \text{o} \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$ ■

La inecuación siguiente es una consecuencia de la desigualdad de Markov.

Desigualdad de Chebyshev Sea X una variable aleatoria de media y varianza finita σ^2. Entonces, para $c > 0$,

$$P(|X - \mu| \geqslant c) \leqslant \frac{\sigma^2}{c^2}$$

Demostración Los sucesos $\{|X - \mu| \geqslant c\}$ y $\{(X - \mu)^2 \geqslant c^2\}$ son el mismo. Por tanto,

$$P(|X - \mu| \geqslant c) = P((X - \mu)^2 \geqslant c^2)$$

La variable aleatoria $(X - \mu)^2$ es no negativa y $E(X - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$ por hipótesis. Por tanto, se puede aplicar la desigualdad de Markov con lo que resulta

$$P((X - \mu)^2 \geqslant c^2) \leqslant \frac{E(X - \mu)^2}{c^2} = \frac{\sigma^2}{c^2}$$ ■

Consideremos ahora una secuencia de variables aleatorias independientes X_1, X_2, ..., X_n, todas con la misma distribución. Se dice entonces que $X_1, X_2, ..., X_n$ son **independientes e idénticamente distribuidas** (i.i.d. para abreviar). Se supone que $EX_i = \mu$ y que $\text{var}(X_i) = \sigma^2$. Podemos imaginar que esta secuencia proviene de un experimento aleatorio que se repite n veces y que X_i es el resultado de la prueba i-ésima. Por ejemplo, las variables X_i podrían ser los resultados sucesivos de lanzar una moneda n veces, siendo $X_i = 1$ si el i-ésimo resultado es cara y $X_i = 0$ si es cruz.

Estamos interesados en el **promedio** (aritmético) de $X_1, X_2, ..., X_n$, que es

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

En el caso del lanzamiento de moneda, $\bar{X}_n$ sería la fracción de caras en n lanzamientos.

Utilizando las reglas de las esperanzas, se puede obtener la media y la varianza de $\bar{X}_n$:

$$E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

y, utilizando la independencia,

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \text{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \text{var}\,X_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Aplicando la desigualdad de Chebyshev con $c > 0$ a $\bar{X}_n$ resulta

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq c) \leq \frac{\text{var}(\bar{X}_n)}{c^2} = \frac{\sigma^2}{nc^2}$$

Si se hace $n \to \infty$, el miembro derecho tiende a 0. Como las probabilidades son siempre no negativas, se puede concluir que

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq c) = 0 \tag{12.36}$$

Este tipo de convergencia se denomina **convergencia en probabilidad**. De forma más general, decimos que la variable Z_n converge en probabilidad a la constante γ cuando $n \to \infty$ si, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - \gamma| \geq \varepsilon) = 0$$

El resultado límite de (12.36) se puede expresar por tanto como «$\bar{X}_n$ converge a μ en probabilidad». Ésta es la ley débil de los grandes números.

LEY DÉBIL DE LOS GRANDES NÚMEROS

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con $E|X_i| < \infty$, entonces cuando $n \to \infty$, $\bar{X}_n$ converge en probabilidad a EX_i.

Hemos demostrado el resultado utilizando la hipótesis adicional de que $\text{var}(X_i) < \infty$. La ley débil de los grandes números todavía se cumple si $\text{var}(X_i) = \infty$ siempre que $E|X_i| < \infty$, pero la demostración de este resultado es algo más complicada, y no la consideraremos.

La ley débil de los grandes números explica por qué al tomar una muestra grande aumenta la fiabilidad de los estimadores de proporciones. En el ejemplo del cáncer de próstata del comienzo de esta subsección estábamos interesados en la verosimilitud de fallo biológico tras cinco años en hombres operados de próstata cuando el cáncer estaba limitado a la próstata. Podemos ver esta verosimilitud como una probabilidad (desconocida para nosotros) que se estima tomando una muestra grande donde se considera que los individuos son independientes (esta muestra se denomina muestra aleatoria). Si se hace

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{sí hay fallo bioquímico con cinco años en el individuo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es la fracción de hombres de la muestra que experimentan fallo biológico tras cinco años. Ahora, si hacemos

$$\mu = EX_i = P(X_i = 1)$$

entonces la ley de los grandes números afirma que $\bar{X}_n \to \mu$ en probabilidad cuando $n \to \infty$. Por tanto, si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, $\bar{X}_n$ es un buen estimador de la probabilidad de fallo bioquímico, en el sentido de que con una probabilidad alta, $\bar{X}_n$ estará cercano a μ.

Ejemplo 1 Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Demuestre que $\bar{X}_n$ converge en probabilidad a p cuando $n \to \infty$.

Solución

Como

$$E|X_i| = |1|(p) + |0|(1-p) = p < \infty \quad \text{y} \quad EX_i = (1)(p) + (0)(1-p) = p$$

se puede utilizar la ley de los grandes números para concluir que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to EX_i = p$$

en probabilidad cuando $n \to \infty$. ◀

Ejemplo 2 Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Utilice la desigualdad de Chebyshev para calcular el valor de n tal que $\bar{X}_n$ difiera de p menos de 0.01 con una probabilidad de 0.95.

Solución

Sabemos del Ejemplo 1 que $\bar{X}_n$ converge en probabilidad a p cuando $n \to \infty$. Ahora vamos a estudiar la rapidez con la que $\bar{X}_n$ converge a p. Más exactamente, vamos a calcular el valor de n tal que

$$P(|\bar{X}_n - p| < 0.01) \geqslant 0.95$$

o, tomando complementarios,

$$P(|\bar{X}_n - p| \geqslant 0.01) \leqslant 0.05$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev, se obtiene

$$P(|\bar{X}_n - p| \geqslant 0.01) \leqslant \frac{\text{var}\,(\bar{X}_n)}{(0.01)^2}$$

Como las X_i son independientes,

$$\text{var}\,(\bar{X}_n) = \text{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \text{var}\,(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Por tanto,

$$\frac{\text{var}\,(\bar{X}_n)}{(0.01)^2} = 10\,000\,\frac{p(1-p)}{n}$$

Queremos que esta expresión sea menor o igual que 0.05, aunque no conocemos el valor de p. Obtendremos una cota sobre $p(1-p)$. La función $f(p) = p(1-p)$ es una parábola invertida con raíces en $p = 0$ y $p = 1$. Su máximo está en $p = 1/2$, concretamente $f(1/2) = 1/4$. Por tanto,

$$p(1-p) \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{para todo } 0 \leqslant p \leqslant 1$$

Por tanto, se obtiene

$$10\,000\,\frac{p(1-p)}{n} \leqslant 10\,000\,\frac{1}{4n} \leqslant 0.05 \quad \text{o} \quad n \geqslant 50\,000$$

Concluimos entonces que una muestra de 50 000 sería suficiente para estimar p con un error máximo de 0.01 con una probabilidad del 95%. La desigualdad de Chebyshev no proporciona estimadores muy buenos y esta cota inferior del tamaño de la muestra resulta ser mucho mayor que la que realmente necesitaríamos. En la subsección siguiente veremos un método mejor para estimar el tamaño de la muestra. ◀

Ejemplo 3 **Integración Montecarlo** Suponga que $f(x)$ es una función integrable en $[0, 1]$ con $f(x) \geqslant 0$ para $x \in [0, 1]$. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ variables aleatorias i.i.d. con U_i uniformemente distribuida en $(0, 1)$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(U_i) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{en probabilidad}$$

Solución

Sea $X_i = f(U_i)$. Entonces, utilizando que la función de densidad de una distribución uniforme en $(0, 1)$ es igual a 1 en dicho intervalo,

$$E|X_i| = E|f(U_i)| = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx < \infty$$

y

$$EX_i = Ef(U_i) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Las variables aleatorias X_i son i.i.d. Por tanto, podemos aplicar la ley de los grandes números y concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(U_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = EX_i = \int_0^1 f(x)\,dx$$

en probabilidad. ◀

12.6.2 El teorema central del límite

Vamos a presentar ahora un resultado central a la teoría de probabilidad. Dice que si se suman un gran número de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media y varianza finitas, entonces, tras un cambio de escala adecuado, la distribución de la cantidad resultante es aproximadamente normal. No podemos demostrar este resultado aquí, pero exploraremos algunas de sus implicaciones.

Teorema cental del límite Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. de media $EX_i = \mu$ y varianza $\text{var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces, cuando $n \to \infty$,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leqslant x\right) \to F(x)$$

siendo $F(x)$ la función de distribución con distribución normal estándar.

Ejemplo 4 Se lanza una moneda 500 veces. Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a la probabilidad de obtener al menos 250 caras.

Solución

Se define

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo lanzamiento es cara} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\mu = EX_i = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \text{var}(X_i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Sea $S_{500} = \sum_{i=1}^{500} X_i$ el número de caras en los primeros 500 lanzamientos. Entonces,

$$\begin{aligned} P(S_{500} \geqslant 265) &= P\left(\frac{S_{500} - 500\mu}{\sqrt{500\sigma^2}} \geqslant \frac{265 - 250}{\sqrt{125}}\right) \\ &\approx 1 - F\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) = 1 - F(1.34) \\ &= 1 - 0.9099 = 0.0901 \end{aligned}$$

siendo $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria con distribución normal estándar. Los valores de $F(x)$ se obtienen de la tabla del Apéndice B. ◀

Cuando se aplica el teorema central del límite a variables aleatorias de valor entero, en general se aplica una corrección. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Dada la variable S_{500} definida en el Ejemplo 4, utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a $P(S_{500} = 250)$.

Solución

Si se aplicara el teorema central del límite sin correcciones, se obtendría

$$P(S_{500} = 250) = P\left(\frac{S_{500} - 500\mu}{\sqrt{500\sigma^2}} = \frac{250 - 250}{\sqrt{125}}\right) \approx P(Z = 0) = 0$$

siendo Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Podemos comparar con el valor exacto. Concretamente, S_{500} tiene distribución binomial de parámetros $n = 500$ y $p = 1/2$. Se obtiene

$$P(S_{500} = 250) = \binom{500}{250}\left(\frac{1}{2}\right)^{500} \approx 0.036$$

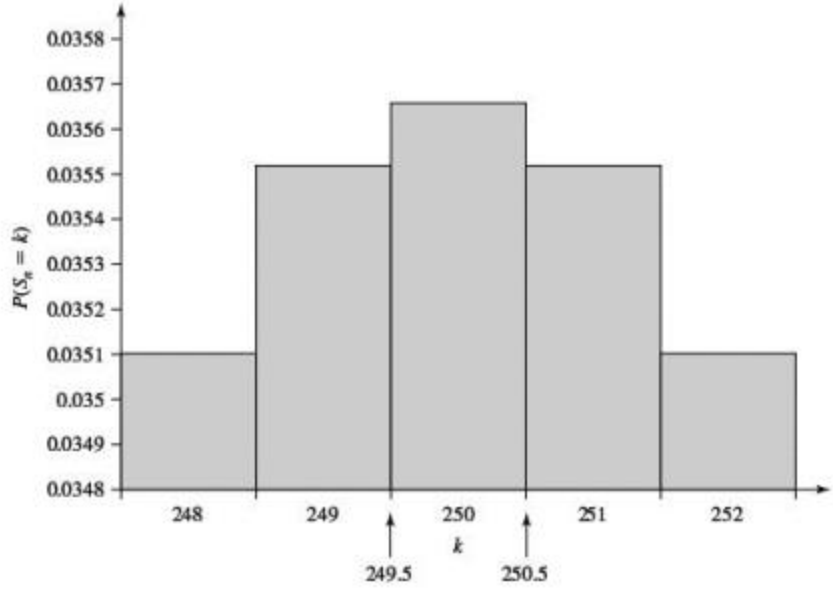
El teorema central del límite no proporciona una buena aproximación. Podemos mejorarla expresando el suceso $\{S_{500} = 250\}$ como $\{249.5 \leqslant S_{500} \leqslant 250.5\}$ (*véase* la Figura 12.51). Entonces

$$\begin{aligned} P(S_{500} = 250) &= P(249.5 \leqslant S_{500} \leqslant 250.5) \\ &= P\left(\frac{249.5 - 250}{\sqrt{125}} \leqslant \frac{S_{500} - 500\mu}{\sqrt{500\sigma^2}} \leqslant \frac{250.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) \\ &= P(-0.04 \leqslant Z \leqslant 0.04) \end{aligned}$$

siendo Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Se obtiene

$$P(-0.04 \leqslant Z \leqslant 0.04) = 2F(0.04) - 1 = (2)(0.5160) - 1 = 0.032$$

siendo $F(x)$ la función de distribución normal estándar. ◀



▲ **Figura 12.51**
Corrección del histograma en el Ejemplo 5

La corrección empleada en el Ejemplo 5 se denomina **corrección del histograma**.

Ejemplo 6 Vuelva a hacer el Ejemplo 4 con corrección del histograma.

Solución

Expresaremos el suceso $\{S_{500} \geqslant 265\}$ como $\{S_{500} \geqslant 264.5\}$ (*véase* la Figura 12.52). Entonces

$$P(S_{500} \geqslant 265) = P(S_{500} \geqslant 264.5) = P\left(\frac{S_{500} - 500\mu}{\sqrt{500\sigma^2}} \geqslant \frac{264.5 - 250}{\sqrt{125}}\right)$$
$$\approx P(Z \geqslant 1.30) = 1 - F(1.30) = 1 - 0.9032 = 0.0968$$

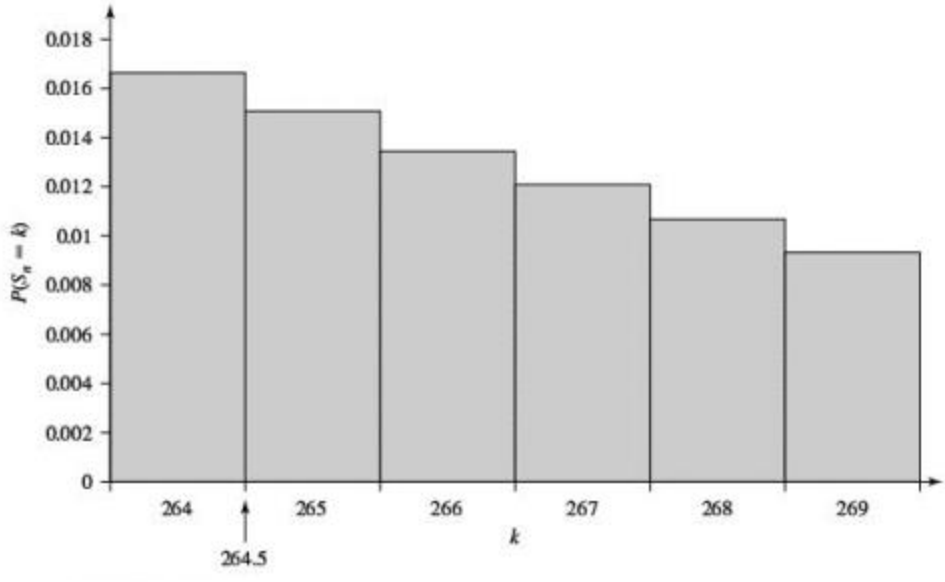
siendo Z una variable aleatoria con distribución normal estrándar y función de distribución $F(x)$. ◀

La genética cuantitativa es un campo de la biología que intenta explicar las diferencias cuantitativas entre individuos debidas bien a origen genotípico o a origen ambiental, como pueden ser las diferencias en altura, tamaño de camada, número de segmentos abdominales en la *Drosophila*, etc. Las estimaciones del número de locus para el estudio cuantitativo de características varían desde sólo unos pocos, como cinco locus en un estudio de la longitud del cráneo de conejos (Wright, 1968), hasta muchos, como los 98 loci del estudio de los segmentos abdominales de la *Drosophila* (Falconer, 1989).

Cuando un estudio cuantitativo involucra muchos loci, se utiliza el **modelo infinitesimal** para modelar el valor genotípico de cada rasgo. El valor genotípico G de un rasgo se considera como la suma de contribuciones de los loci implicados,

$$G = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

donde en el caso más simple, las X_i se consideran independientes e idénticamente distribuidas y representan la contribución del locus i al valor genotípico. Si las X_i



▲ **Figura 12.52**
Corrección del histograma del Ejemplo 6

tienen media y varianza finitas, y n es grande, la distribución de G se puede aproximar por una normal.

Ejemplo 7 Suponga que un rasgo se controla mediante 100 loci. Cada locus, independientemente de los demás, contribuye al valor genotípico del rasgo con $+1$, con una probabilidad de 0.6 o con -0.7, con una probabilidad de 0.4.

(a) Calcule el valor medio del rasgo.

(b) ¿Qué proporción de la población tiene un valor del rasgo mayor que 40?

Solución

(a) El valor genotípico del rasgo se puede expresar como

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 0.6 \\ -0.7 & \text{con probabilidad } 0.4 \end{cases}$$

Por tanto,

$$ES_{100} = \sum_{i=1}^{100} EX_i = \sum_{i=1}^{100} [(1)(0.6) + (-0.7)(0.4)]$$
$$= \sum_{i=1}^{100} 0.32 = 32$$

El valor medio de este rasgo es de 32.

(b) Para calcular la proporción de población que tiene un valor del rasgo mayor que 40, se emplea el teorema central del límite. Primero se calcula la varianza de X_i

$$EX_i^2 = (1)^2(0.6) + (-0.7)^2(0.4) = 0.796$$

Entonces,

$$\text{var}(X_i) = EX^2 - (EX_i)^2 = 0.796 - (0.32)^2 = 0.6936$$

Así,

$$P(S_{100} > 40) = P\left(\frac{S_{100} - 32}{\sqrt{(100)(0.6936)}} > \frac{40 - 32}{\sqrt{69.36}}\right)$$
$$\approx 1 - F(0.96) = 1 - 0.8315 = 0.1685$$

siendo $F(x)$ la función de distribución normal estándar. Aproximadamente el 17% de la población tiene un valor del rasgo mayor que 40. ◀

Ejemplo 8 **Estimación de tamaños de muestra** Suponga que desea realizar un estudio médico para determinar la fracción de gente de la población general cuyo nivel total de colesterol está por encima de 220 g/dl. ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra necesaria para estimar la proporción con un error menor de 0.01 respecto al valor verdadero, con una probabilidad como mínimo de 0.95?

Solución

Se define

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo individual tiene colesterol} \geqslant 220 \text{ mg/dl} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y se supone que los individuos se seleccionan de forma que las variables aleatorias X_i son i.i.d.. Entonces

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

es un estimador de la proporción de individuos cuyo nivel de colesterol supera los 220 g/dl.

Si se hace $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces, con $p = EX_i$ y $\sigma^2 = \text{var}(X_i)$,

$\frac{S_n - np}{\sqrt{n\sigma^2}}$ tuvo aproximadamente distribución normal estándar

Dividiendo el numerador y el denominador por n, se obtiene con $\sigma = \sqrt{\text{var}(X_i)} = \sqrt{p(1-p)}$,

$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ tuvo aproximadamente distribución normal estándar

Estamos interesados en calcular n para estimar la proporción con un error menor de 0.01 respecto al valor verdadero, con una probabilidad como mínimo de 0.95.

$$P(|\bar{X}_n - p| \leqslant 0.01) \geqslant 0.95$$

que se puede expresar como

$$P(-0.01 \leqslant \bar{X}_n - p \leqslant 0.01) \leqslant 0.95$$

o

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{-0.01}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \sqrt{n}\,\frac{0.01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geqslant 0.95$$

Como $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ tiene aproximadamente distribución normal estándar, se obtiene que el miembro izquierdo es aproximadamente

$$2F\left(\sqrt{n}\,\frac{0.01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1$$

Esto es $\geqslant 0.95$ si

$$F\left(\sqrt{n}\,\frac{0.01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geqslant 0.975$$

o

$$\sqrt{n}\,\frac{0.01}{\sqrt{p(1-p)}} \geqslant 1.96$$

Despejando n, se obtiene

$$n \geqslant (196)^2 p(1-p)$$

Como no conocemos p, se toma el peor caso posible que maximiza $p(1-p)$. Como vimos en el Ejemplo 2, esto ocurre para $p = 1/2$. Por tanto,

$$n \geqslant (196)^2 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 9604$$

Por tanto, aproximadamente 9604 personas serían suficientes para este estudio. Es interesante comparar este resultado con el del Ejemplo 2, donde resolvimos el mismo problema (aunque en una aplicación diferente) utilizando la desigualdad de Chebyshev en vez del teorema central del límite. ◀

Observación. Tanto la distribución normal como la de Poisson sirven como aproximación a la distribución binomial. Como regla simple, las aproximaciones son razonablemente buenas cuando $n \geqslant 40$. Cuando $np \leqslant 5$, se debe utilizar la aproximación de Poisson; si $np \geqslant 5$, debe utilizarse la aproximación por la normal.

12.6.3. Problemas

(12.6.1)

1. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1/2$. Utilice la desigualdad de Markov para estimar $P(X \geqslant 3)$, y compare el resultado con el valor correcto.

2. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(1, 4)$.
(a) Utilice la desigualdad de Markov para estimar $P(X \geqslant a)$, $1 \leqslant a \leqslant 4$, y compare el resultado con el valor correcto.
(b) Calcule el valor de $a \in (1, 4)$ que minimiza la diferencia entre la cota y la probabilidad exacta calculada en (a).

3. Demuestre la desigualdad de Markov cuando X es una variable aleatoria no negativa con $EX < \infty$.

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$. Suponga que $X \geqslant 2$ ¿por qué es $EX \geqslant 2$?

5. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(-2, 2)$. Utilice la desigualdad de Chebyshev para estimar $P(|X| \geqslant 1)$, y compare el resultado con el valor correcto.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Utilice la desigualdad de Chebyshev para estimar (a) $P(|X| \geqslant 1$, (b) $P(|X| \geqslant 2)$ y (c) $P(|X| \geqslant 3)$. En cada caso, compare con el valor correcto.

7. Suponga que X es una variable aleatoria de media 10 y varianza 9. ¿Qué se puede decir sobre $P(|X - 10| \geqslant 5)$?

8. Suponga que X es una variable aleatoria de media -5 y varianza 2. ¿Qué se puede decir sobre la probabilidad de que X se desvíe de su media como mínimo 4?

9. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d., con

$$X_i = \begin{cases} -1 & \text{con probabilidad } 0.2 \\ 1 & \text{con probabilidad } 0.5 \\ 2 & \text{con probabilidad } 0.3 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir sobre $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ cuando $n \to \infty$?

10. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con $P(X_i > x) = e^{-2x}$. ¿Qué se puede decir sobre $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ cuando $n \to \infty$?

11. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \; x \in \mathbf{R}$$

¿Se puede aplicar la ley de los grandes números a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$? Si es así, ¿qué se puede decir sobre $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ cuando $n \to \infty$?

12. ¿Cuántas veces hay que lanzar una moneda para determinar P(caras) con un error menor de 0.1 respecto a su valor verdadero con probabilidad de al menos 0.9?

13. Un estudio previo ha demostrado que menos del 5% de la población sufre una cierta enfermedad. Para obtener un estimador más preciso de esta proporción, se planea realizar otro estudio. ¿Qué tamaño de muestra se debería escoger si se desea estar al menos el 95% seguro de que el error del estimador es menor de 0.05 respecto al verdadero valor?

14. Suponga que $Ee^{cX} < \infty$ para $c > 0$. Utilice la desigualdad de Markov para demostrar la **desigualdad de Bernstein**,

$$P(X \geq x) \leq e^{-cx} Ee^{cX}$$

para $c > 0$.

(12.6.2)

15. Se lanza una moneda buena 400 veces. Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a la probabilidad de obtener como máximo 190 caras.

16. Se lanza una moneda buena 150 veces. Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a la probabilidad de obtener como mínimo 70 caras.

17. Se lanza una moneda buena 200 veces.
(a) Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a la probabilidad de obtener como mínimo 120 caras.
(b) Utilice la desigualdad de Markov para calcular una estimación de la probabilidad del suceso de (a) y compárela con su respuesta de (a).

18. Se lanza una moneda buena 300 veces.
(a) Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 140 y 160.
(b) Utilice la desigualdad de Chebyshev para calcular una estimación de la probabilidad del suceso de (a) y compárela con su respuesta de (a).

19. Suponga que S_n tiene distribución binomial de parámetros $n = 200$ y $p = 0.3$. Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a $P(99 \leq S_n \leq 101)$ (a) sin la corrección del histograma, y (b) con la corrección del histograma. (c) Utilice una calculadora gráfica para calcular la probabilidad exacta y compárela con las respuestas de (a) y (b).

20. Suponga que S_n tiene distribución binomial de parámetros $n = 150$ y $p = 0.4$. Utilice el teorema central del límite para calcular una aproximación a $P(S_n = 60)$ (a) sin la corrección del histograma, y (b) con la corrección del histograma. (c) Utilice una calculadora gráfica para calcular la probabilidad exacta y compárela con las respuestas de (a) y (b).

21. Suponga que un rasgo genotípico está controlado por 60 loci. Cada locus contribuye independientemente de los demás al valor genotípico con $+0.3$, con probabilidad 0.2, -0.1, con probabilidad 0.5 o con -0.5, con probabilidad 0.3.
(a) Calcule el valor medio del rasgo.
(b) ¿Qué proporción de la población tiene un valor del rasgo comprendido entre -12 y -7?

22. Suponga que un rasgo genotípico está controlado por 90 loci. Cada locus contribuye independientemente de los demás al valor genotípico con 1.1, con probabilidad 0.7, 0.9, con probabilidad 0.1 o con 0.1, con probabilidad 0.2.
(a) Calcule el valor medio del rasgo.
(b) ¿Qué proporción de la población tiene un valor del rasgo menor que 72?

23. ¿Cuántas veces hay que lanzar una moneda para estar al menos 90% seguro de que el estimador de P(caras) tiene un error menor que 0.1 respecto a su valor verdadero?

24. ¿Cuántas veces hay que lanzar una moneda para estar al menos 90% seguro de que el estimador de P(caras) tiene un error menor que 0.01 respecto a su valor verdadero?

25. Para predecir el resultado de una elección presidencial en la que hay dos candidatos, se realiza un sondeo telefónico. ¿A cuantas personas habría que consultar para estar al menos 95% seguro de que el estimador tiene un error menor de 0.05 respecto al valor verdadero? (Suponga que en el sondeo no hay indecisos.)

26. Se realiza un estudio médico para estimar la proporción de gente afectada por una enfermedad de tipo estacional. ¿A cuantas personas habría que estudiar para estar al menos 99% seguro de que el estimador tiene un error menor de 0.02 respecto al valor verdadero?

En los Problemas 27-30, S_n tiene distribución binomial de parámetros n y p.

27. Para $n = 100$ y $p = 0.01$, calcule $P(S_n = 0)$ (a) exactamente, (b) utilizando la aproximación de Poisson y (c) utilizando la aproximación normal.

28. Para $n = 100$ y $p = 0.1$, calcule $P(S_n = 10)$ (a) exactamente, (b) utilizando la aproximación de Poisson y (c) utilizando la aproximación normal.

29. Para $n = 50$ y $p = 0.1$, calcule $P(S_n = 5)$ (a) exactamente, (b) utilizando la aproximación de Poisson y (c) utilizando la aproximación normal.

30. Para $n = 50$ y $p = 0.5$, calcule $P(S_n = 25)$ (a) exactamente, (b) utilizando la aproximación de Poisson y (c) utilizando la aproximación normal.

31. Suponga que se desea estimar la proporción de gente en Estados Unidos que no cree en la evolución. Acude a una clase sobre teoría de la evolución en una universidad estadounidense, a la que acuden 200 estudiantes, todos ellos especializados en biología. ¿Se obtendría una estimación mejor si se preguntara a los 200 estudiantes de la clase? Comente su respuesta.

32. Una compañía de refrescos presenta una nueva bebida. Un mes después de su presentación, la compañía desea saber si sus estrategias de marketing han llegado a los adultos jóvenes de entre 18 y 20 años. Usted trabaja a tiempo parcial para la empresa de marketing para realizar el estudio. Al mismo tiempo asiste a una clase de cálculo con 250 estudiantes. Sería fácil para usted realizar el estudio en esa clase. ¿Qué sugeriría usted a su supervisor en la empresa de marketing? Comente su respuesta.

33. Las clementinas se venden en cajas. Cada caja contiene 50 clementinas. La probabilidad de que una clementina de la caja esté estropeada es de 0.01.
(a) Utilice una aproximación adecuada para determinar la probabilidad de que una caja contenga 0, 1 o como máximo 2 clementinas estropeadas.
(b) Un pedido de 100 cajas de clementinas se considera inaceptable si el 35% o más de las cajas contienen clementinas estropeadas. ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido sea inaceptable?

34. El síndrome de Turner es una anomalía genética rara en la que las chicas tienen un solo cromosoma X. Afecta a 1 de cada 2000 chicas en Estados Unidos. Aproximadamente 1 de cada 10 chicas con el síndrome de Turner sufren de estrechamiento anormal de la aorta.
(a) En un grupo de 4000 chicas, ¿cuál es la probabilidad de que haya 0, 1, 2 ó 3 de ellas afectadas por el síndreome de Turner?
(b) En un grupo de 170 chicas afectadas por el síndrome de Turner, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 20 sufran un estechamiento anormal de la aorta?

En los Problemas 35-37, utilice los siguientes hechos: la fibrosis cística es una enfermedad genética que causa unas secreciones corporales anormalmente espesas. En Estados Unidos, aproximadamente 1 de cada 2500 bebés de raza blanca padecen esta enfermedad. Aproximadamente un 3% de los niños con fibrosis cística desarrollan diabetes mellitus, y aproximadamente 1 de cada 5 mujeres con fibrosis cística son infértiles.

35. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 5000 bebés recien nacidos de raza blanca de los Estados Unidos haya como mínimo 4 con fibrosis cística.

36. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 1000 niños con fibrosis cística como mínimo 25 desarrollen diabetes mellitus.

37. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 250 mujeres con fibrosis cística, no más de 60 sean infértiles.

12.7 HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS

En las secciones anteriores de este capítulo hemos aprendido a modelar diversos experimentos aleatorios. Realizando suposiciones sobre la distribución de probabilidad subyacente del modelo, hemos aprendido a comparar probabilidades de sucesos, como la de obtener plantas de guisantes con flores blancas.

Sin embargo, para comprender los fenómenos de la naturaleza, a menudo se opta por el procedimiento inverso, y se infiere la distribución de probabilidad subyacente a partir de la observación de sucesos. Basándose en un conjunto de observaciones, denominadas **datos**, se estiman características de la distribución de probabilidad subyacente. Por ejemplo, en el caso de una distribución normal, nuestro objetivo podría ser estimar la media y la varianza, que son los parámetros que describen una distribución normal.

12.7.1 Recogida y descripción de datos

Para aprender algo sobre la distribución de una cantidad en una población (tamaño de nidada, altura de una planta, tiempo de vida, etc.), no se puede medir dicha cantidad en cada individuo de la población. Lo que se hace es tomar un subconjunto de la población, denominado **muestra**, medir la cantidad en la muestra y tratar de inferir la distribución de la cantidad en la población a partir de su distribución en la muestra. Para poder hacer eso, la muestra debe ser representativa de la población. Se trata de un problema difícil, que no podemos considerar aquí de forma satisfactoria. Es fácil introducir un sesgo en la muestra si las observaciones se escogen de una sección de la población con similares características que no sean representativas de la población completa. Por ejemplo, si se desea estudiar la fecundidad de una planta que crece en una amplia variedad de suelos pero sólo tomamos muestras de plantas en suelos arenosos, nuestra muestra podría no representar la fecundidad de la población completa.

A partir de ahora, supondremos siempre que nuestra muestra es representativa de la población. Esta muestra se denomina **muestra aleatoria**. Todas las observaciones de una muestra aleatoria son independientes y provienen de la misma distribución (concretamente, de la distribución de la cantidad en la población completa). Un esquema típico para obtener una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionar aleatoriamente un individuo de la población, medir la cantidad de interés, devolver al individuo y seleccionar después el siguiente individuo. Este procedimiento se repite hasta que se obtiene una muestra de tanaño n. Al devolver al individuo tras medir la cantidad de interés se asegura que la población tiene siempre la misma composición y que, por tanto, todas las observaciones tienen la misma distribución. Representaremos la muestra mediante el vector $(X_1, X_2, ..., X_n)$, siendo X_k la k-ésima observación. Las X_k son variables aleatorias todas con la misma distribución. Como en la sección anterior, se dice que las X_k son independientes e idénticamente distribuidas.

El siguiente conjunto de datos representa las puntuaciones de once estudiantes en dos exámenes. La puntuación máxima de cada examen era de 10. Utilizaremos este conjunto de datos para explicar las definiciones de esta subsección.

Estudiante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Examen 1	6	4	9	7	8	7	8	5	7	8	7
Examen 2	8	6	8	7	7	—	9	6	7	8	8

Una forma de resumir los datos es dar el número de veces que aparece cada categoría (en este caso, una puntuación en el examen). Estos números se denominan frecuencias. Si se dividen las frecuencias por el número total de observaciones, se obtienen las frecuencias relativas. La lista de las frecuencias (relativas) se denomina distribución de frecuencias (relativas). Las distribuciones de frecuencias ya han aparecido anteriormente en este capítulo.

Para obtener la distribución de frecuencias del examen 1, se cuenta el número de veces que aparece cada puntuación. Por ejemplo, la puntuación 6 aparece una vez, por lo que su frecuencia es 1. La puntuación 7 aparece cuatro veces, por lo que su frecuencia es 4, y así sucesivamente.

La tabla que sigue contiene las frecuencias de los exámenes (las puntuaciones que no aparecen en la tabla tienen una frecuencia de 0).

Puntuación	4	5	6	7	8	9
Examen 1	1	1	1	4	3	1
Examen 2	0	0	2	3	4	1

Para obtener las frecuencias relativas, se divide cada frecuencia del primer examen por 11, ya que 11 estudiantes realizaron el primer examen, y cada frecuencia del segundo examen por 10, ya que 10 estudiantes realizaron el segundo examen. Las frecuencias relativas de las puntuaciones del examen aparecen en la tabla siguiente (las puntuaciones que no aparecen en la tabla tienen una frecuencia relativa de 0).

Puntuación	4	5	6	7	8	9
Examen 1	1/11	1/11	1/11	4/11	3/11	1/11
Examen 2	0	0	0.2	0.3	0.4	0.1

Las cantidades que calculan a partir de las observaciones se denominan **estadísticos**.

El primer estadístico que estudiaremos será la **mediana muestral**. Coincide con la mitad de las observaciones cuando los datos se ordenan de acuerdo a su tamaño. Cuando el número de observaciones es impar, hay un dato en la mitad de los datos ordenados. Si el número de observaciones es par, se toma el promedio de las dos observaciones centrales. Se presentan a continuación las listas ordenadas de las puntuaciones de los exámenes:

Examen 1: 4,5,6,7,7,7,7,8,8,8,9

Examen 2: 6,6,7,7,7,8,8,8,8,9

Once estudiantes realizan el primer examen. Tras ordenar las puntuaciones, la sexta puntuación es la mediana, que es 7. Diez estudiantes realizan el segundo examen. Tras ordenar las puntuaciones, el promedio de la quinta y la sexta puntuación es la mediana, que es $\frac{7+8}{2} = 7.5$.

Los dos estadísticos más importantes que se utilizan para resumir datos son la **media muestral** y la **varianza muestral**. Para definir estas cantidades, recordare-

mos que el vector $(X_1, X_2, ..., X_n)$ representa la muestra de tamaño n, siendo X_k la observación k-ésima. La media muestral y la varianza muestral se definen como sigue.

$$\text{Media muestral: } \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$\text{Varianza muestral: } S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2$$

La media muestral es por tanto el promedio aritmético de las observaciones (esta cantidad ya ha aparecido previamente). La varianza muestral es la suma de las desviaciones al cuadrado de la media muestral, divididas por $n - 1$ (en la siguiente subsección explicaremos por qué dividimos por $n - 1$ en vez de por n).

Esta definición de varianza muestral no es muy conveniente para los cálculos. Existe una forma alternativa que en general es más fácil de usar. Se deduce que una transformación algebráica de la definición de varianza muestral:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (X_k^2 - 2X_k\bar{X}_n + \bar{X}_n^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\bar{X}_n \sum_{k=1}^{n} X_k + n\bar{X}_n^2\right]$$

Utilizando que $\sum_{k=1}^{n} X_k = n\bar{X}_n$, se puede simplificar

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]$$

Ejemplo 1 Calcule la media muestral y la varianza muestral de los datos del primer examen.

Solución

Se obtiene

$$\sum_{k=1}^{11} X_k = 76 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{11} (X_k)^2 = 546$$

Por tanto,

$$\bar{X}_n = \frac{76}{11} \approx 6.9$$

y

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left(546 - \frac{1}{11}(76)^2\right) \approx 2.09$$ ◀

Si la distribución muestral se resume en la distribución de frecuencias, la media muestral y la varianza muestral tienen las siguientes definiciones: suponga que

una muestra de tamaño n tiene l valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_l$, donde x_k aparece f_k veces en la muestra. Entonces la media muestral está dada por la fórmula

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{l} x_k f_k$$

y la varianza muestral tiene la forma

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{l} x_k^2 f_k - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{l} x_k f_k\right)^2\right]$$

Ejemplo 2 Utilice la distribución de frecuencias del primer examen para calcular la varianza muestral y la media muestral.

Solución

Se obtienen las mismas respuestas que en el Ejemplo 1.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{l} x_k f_k$$

$$= \frac{1}{11}[(4)(1) + (5)(1) + (6)(1) + (7)(4) + (8)(3) + (9)(1)] = \frac{76}{11}$$

y

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{l} x_k^2 f_k - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{l} x_k f_k\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{10}[(16)(1) + (25)(1) + (36)(1) + (49)(4) + (64)(3) + (81)(1)$$

$$- \frac{1}{11}(76)^2]$$

$$= \frac{1}{10}\left[546 - \frac{1}{11}(76^2)\right] \approx 2.09$$ ◀

12.7.2 Estimación de medias y proporciones

En la Sección 12.4 vimos que la media y la varianza son parámetros de utilidad para describir la distribución de probabilidad de una población. Si se desea obtener información sobre alguna cantidad a partir de una muestra aleatoria de la población, es deseable conocer su media y su varianza. Utilizaremos la media muestral y la varianza muestal como estimadores de la media y la varianza de la población.

Es importante advertir que cualquier estadístico calculado a partir de una muestra variará de una muestra a otra, ya que las muestras son subconjuntos aleatorios de la población. Los estadísticos son por tanto variables aleatorias con sus propias distribuciones de probabilidad.

Supondremos que la distribución de la población tiene media μ y varianza finita σ^2. Estos dos parámetros son desconocidos, y deseamos estimarlos tomando una muestra aleatoria $(X_2, X_2, \ldots, X_n)$ de tamaño n de la población. Las X_k son independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo con la distribución de la población con

$$EX_k = \mu \quad \text{y} \quad \text{var}(X_k) = \sigma^2 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n \qquad (12.37)$$

Para estimar la media y la varianza de la distribución de la población, utilizaremos la media muestral y la varianza muestral definidas en la subsección anterior. La media muestral es el promedio aritmético

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Hemos dicho que los estadísticos son variables aleatorias. Como tales, podemos calcular su media y su varianza. Utilizando (12.37), la media de la media muestral es

$$E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

Utilizando la independencia de las observaciones junto con (12.37), la varianza de la media muestral es

$$\operatorname{var}(\bar{X}_n) = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{var}(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Podemos ver entonces que el valor esperado de la media muestral es igual a la media de la población. La dispersión de la distribución de $\bar{X}_n$ está descrita por la varianza de $\bar{X}_n$. Como la varianza de $\bar{X}_n$ disminuye a medida que el tamaño de la muestra aumenta ($\sigma^2/n \to 0$ cuando $n \to \infty$), se concluye que la media muestral de muestras grandes tiene menos variación alrededor de su media que la media muestral de muestras pequeñas. Esto implica que cuanto mayor es el tamaño de la muestra, con más exactitud se puede estimar la media de la población. De hecho, utilizando la ley débil de los grandes números de la sección anterior, se obtiene que

$$\bar{X}_n \to \mu \quad \text{en probabilidad cuando } n \to \infty$$

Esto justifica el uso de $\bar{X}_n$ como estimador de la media de la distribución. Como $E\bar{X}_n = \mu$, se dice que $\bar{X}_n$ es un **estimador insesgado** de μ.

La varianza muestral es

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2$$

Para calcular su media, se necesita la siguiente igualdad. Para todo $c \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - c)^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 + n(\bar{X}_n - c)^2 \tag{12.38}$$

Para ver por qué esto es cierto, se desarrolla el miembro derecho de (12.38) tras sumar $0 = \bar{X}_n - \bar{X}_n$ dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (X_k - c)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n + \bar{X}_n - c)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(X_k - \bar{X}_n)^2 + 2(X_k - \bar{X}_n)(\bar{X}_n - c) + (\bar{X}_n - c)^2] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 + 2(\bar{X}_n - c)\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n) + n(\bar{X}_n - c)^2
\end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n) = 0$, el término central es igual a 0, y se obtiene (12.38).

Si se hace $c = \mu$ en (12.38) y se reordena la ecuación, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 - n(\bar{X}_n - \mu)^2$$

Tomando esperanzas en los dos miembros, y utilizando en el miembro derecho que la esperanza de una suma es la suma de las esperanzas, se obtiene

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k - \mu)^2 - nE(\bar{X}_n - \mu)^2$$

Entonces, $\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 = (n-1)S_n^2$, $E(X_k - \mu)^2 = \sigma^2$, y $E(\bar{X}_n - \mu)^2 = \text{var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$. Por tanto,

$$(n-1)ES_n^2 = n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2$$

con lo que,

$$ES_n^2 = \sigma^2$$

Es decir, el valor esperado de la varianza muestral es igual a la varianza de la población. Esta es la razón de dividir por $n - 1$ en vez de por n en la expresión de la varianza muestral. No calcularemos la varianza de la varianza muestral. Su expresión es una fórmula complicada. Se puede demostrar que la varianza de la varianza muestral tiende a 0 cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. Utilizando de muevo la ley débil de los grandes números, se obtiene que

$$S_n^2 \to \sigma^2 \quad \text{en probabilidad cuando } n \to \infty$$

Como $ES_n^2 = \sigma^2$, S_n^2 se utiliza como estimador insesgado de σ^2.

Veamos un ejemplo para ilustrar cómo se estima la media y la varianza de la característica de una población.

Ejemplo 3 Suponga que un ordenador genera la siguiente muestra de observaciones independientes de una población

0.0201, 0.8918, 0.9619, 0.1713, 0.0357,
0.6325, 0.4276, 0.2517, 0.2330, 0.6754

Estime la media y la varianza.

Solución

Para estimar la media, se calcula la media muestral $\bar{X}_n$. Se suman los diez números de la muestra y se divide el resultado por 10, con lo que se obtiene

$$\bar{X}_n = 0.4301$$

Por tanto, la estimación de la media es 0.4301.

Para estimar la varianza, se calcula la varianza muestral S_n^2. Se suman las diferencias al cuadrado entre cada valor de la muestra y la media muestral y el resultado se divide por 9. Se obtiene

$$S_n^2 = 0.1176$$

Por tanto, la estimación de la varianza es 0.1176. ◀

En el ejemplo anterior hemos estimado la media y la varianza de la población a partir de una muestra de tamaño 10. Como no conocemos los parámetros de la población, no sabemos la calidad de los estimadores. A continuación consideraremos este problema.

Intervalos de confianza En publicaciones científicas, frecuentemente se encuentra la media muestral con un encabezamiento de la forma «Media ± E.E.». La expresión «Media» es la media muestral $\bar{X}_n$, y la expresión «E.E.» significa **error estándar**, que sirve como estimador de la desviación estándar de la media muestral. Se expresa como $S_{\bar{X}}$ y su definición es

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{12.39}$$

siendo S_n la raíz cuadrada de la varianza muestral, denominada **desviación típica muestral**. El motivo de esta definición es el siguiente (supondremos de nuevo que la media y la varianza de la distribución de la población son finitas). Para estimar la media de la población μ se usa la media muestral $\bar{X}_n$. La varianza de $\bar{X}_n$ nos da una idea de cómo varía la distribución de $\bar{X}_n$. Entonces,

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \text{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\,\text{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

Como las X_k son independientes, la varianza de la suma es la suma de las varianzas. Además, todas las X_k tienen la misma distribución. Por tanto,

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\,n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{12.40}$$

La varianza de $\bar{X}_n$ depende de otro parámetro de la población, concretamente la varianza σ^2. En problemas donde se desea estimar la media, generalmente tampoco conoceremos la varianza. Sin embargo, si el tamaño de la muestra es grande, la varianza muestral tendrá un valor cercano a la varianza de la población. Por tanto se puede aproximar la varianza de $\bar{X}_n$ sustituyendo σ^2 por S_n^2 en (12.40), con lo que se obtiene S_n^2/n. El error estándar es la raíz cuadrada de esta expresión.

Presentamos a continuación un ejemplo de cómo se determina una media muestral y su error estándar.

Ejemplo 4 En una muestra de seis hojas de una planta infectada con áfidos, se obtienen los siguientes números de áfidos por hoja: 12, 27, 17, 35, 14 y 18. Calcule la media muestral, la varianza muestral y el error estándar.

Solución

El tamaño de la muestra es $n = 6$. Se construye la siguiente tabla:

$\sum_{k=1}^{n} X_k$	$\sum_{k=1}^{n} X_k^2$	$\bar{X}_n$	S_n^2	$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$
123	2907	20.5	77.1	3.58

donde se han utilizado las fórmulas

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{y} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]$$

con $n = 6$. Si se deseara dar este resultado como «Media ± E.E.», se expresaría como 20.5 ± 3.58. ◀

¿Qué significa «Media ± E.E.»? Cuando se escribe «Media ± E.E.» se especifica un intervalo, concretamente [Media − E.E., Media + E.E.]. Como se utiliza «media» ($= \bar{X}_n$) como estimador de la media de la población μ, sería conveniente que este intervalo contuviera a μ. Seguramente, como $\bar{X}_n$ es una variable aleatoria,

si se toman muestras repetidamente y se calculan estos intervalos para cada muestra, no *todos* los intervalos contendrán a μ. Pero posiblemente podamos al menos fijar qué fracción de esos intervalos (o de intervalos similares) contendrán a la media poblaciónal μ. En otras palabras, deseamos saber antes de tomar la muestra cuál es la probabilidad de que el intervalo [Media − E.E., Media + E.E.], o de forma más general [Media − aE.E., Media + aE.E.], siendo a una constante positiva, contenga a μ. Para concretar, intentaremos determinar a de forma que esta probabilidad sea igual a 0.95.

Si el tamaño n de la muestra es muy grande, se deduce del teorema central del límite que

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

tiene aproximadamente distribución normal estándar. Si Z tiene distribución normal estándar, entonces

$$P(-1.96 \leqslant Z \leqslant 1.96) = 0.95$$

Por tanto, el suceso

$$-1.96 \leqslant \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant 1.96 \tag{12.41}$$

tiene una probabilidad de aproximadamente 0.95 para n suficientemente grande.

Reordenando los términos de (12.41) se obtiene

$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X}_n - \mu \leqslant 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

o

$$\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por tanto, se puede escribir

$$P\left(\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.95 \quad \text{para } n \text{ grande} \tag{12.42}$$

Esto significa que si se toman repetidamente muestras de una población de media μ y desviación típica σ, entonces aproximadamente el 95% de las veces el intervalo $[\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ contendrá a la verdadera media μ. Este intervalo se denomina **intervalo de confianza 95%**.

Nótese que la definición del intervalo contiene el parámetro σ. Si no conocemos μ, probablemente tampoco conozcamos σ. Una solución es sustituir σ por la raíz cuadrada de la varianza muestral, S_n. Afortunadamente, cuando n es grande, S_n tendrá un valor muy cercano a σ y (12.42) se cumplirá aproximadamente al sustituir σ por S_n.

Tenemos por tanto que para n grande,

$$P\left(\bar{X}_n - 1.96\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}_n + 1.96\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.95$$

o, expresando el suceso en notación de intervalos,

$$P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - 1.96\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \approx 0.95$$

El intervalo de esta expresión es de la forma

$$[\text{Media} - (1.96)\text{E.E.}, \text{Media} + (1.96)\text{E.E.}] \tag{12.43}$$

Hemos tenido, por tanto, éxito al determinar qué fracción de intervalos de la forma (12.43) contiene a la media. Concretamente, si n es grande y se toman repetidas muestras de tamaño n, entonces aproximadamente el 95% de los intervalos [Media − (1.96)E.E., Media + (1.96)E.E.] contendran a la media verdadera [o, de forma equivalente, antes de tomar la muestra, con probabilidad 0.95 el intervalo de (12.43) contendrá el valor real de μ]. Si se desea que el 99% de esos intervalos contengan la media verdadera, es necesario sustituir el factor 1.96 por 2.58, ya que si Z tiene distribución normal estándar, entonces $P(-2.58 \leqslant Z \leqslant 2.58) = 0.99$ (95% y 99% son los porcentajes más comúnmente utilizados en los intervalos de confianza). Como $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 0.68$, se concluye que el 68% de los intervalos de la forma [Media − E.E., Media + E.E.] contienen a la media de la población μ.

Hay que resaltar que las consideraciones anteriores requieren que el tamaño de la muestra n sea grande. El que un valor de n particular se pueda considerar o no grande depende de la distribución de la población. Si las X_k tienen distribución normal de media μ y desviación típica σ, se puede demostrar que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ tiene distribución normal estándar para *todo* n. Cuando se sustituye σ por S_n en (12.41), entonces, n se considera grande para $n \geqslant 40$. Es decir, para $n \geqslant 40$, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/S_n$ tiene aproximadamente distribución normal estándar. Cuanto más diferente sea la distribución de las X_k de la distribución normal, se necesitará un valor mayor de n para utilizar la distribución normal como aproximación.

Estimación de proporciones Es de particular interés el caso de la estimación de proporciones (por ejemplo, la proporción de plantas de guisantes de flor blanca en un cruce $Cc \times Cc$). Si se toma una muestra aleatoria de tamaño n de una población en la que una cierta característica tiene una proporción p, entonces el número de observaciones de la muestra con esta característica tiene una distribución binomial de parámetros n y p. Si se denomina B_n a esta cantidad, entonces,

$$P(B_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Consideramos cada observación de la muestra como un éxito o un fallo, dependiendo de si la observación tiene la característica bajo estudio. Sea

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la } k\text{-ésima observación tiene éxito} \\ 0 & \text{si la } k\text{-esima observación es un fallo} \end{cases}$$

Entonces $B_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ es el número total de éxitos en la muestra, y p es la probabilidad de éxito. La media muestral $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ es por tanto la fracción de éxitos en la muestra. Se obtiene

$$E\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k = \frac{1}{n}(np) = p$$

y

$$\operatorname{var}(\bar{X}_n) = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\, n(\operatorname{var}(X_1))$$

$$= \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

La media muestral $\bar{X}_n$ sirve por tanto como estimador de la probabilidad de éxito p. Es costumbre utilizar en este caso $\hat{p}$ en vez de $\bar{X}_n$. Es decir, el estimador

de p se denomina $\hat{p}$ (se lee «p gorro»). Si se observan k éxitos en una muestra de tamaño n, entonces

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

con

$$E\hat{p} = p \quad \text{y} \quad \text{var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Para calcular el error estándar en el caso de k éxitos en una muestra de tamaño n, adviértase que

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left(k - \frac{k^2}{n}\right) \\ &= \frac{n}{n-1}\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{n\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1} \end{aligned}$$

El error estándar de la media muestral p es por tanto

$$S_{\hat{p}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}} \tag{12.44}$$

En la literatura, es típico expresar el error estándar de proporciones como

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{12.45}$$

Para n grande, los dos números están muy próximos, por lo que no importa cuál de ellos utilizar.

Como ejemplo, consideraremos el experimento de Mendel de cruce de plantas de guisantes.

Ejemplo 5 Para estimar la probabilidad de plantas de flor blanca en un cruce $Cc \times Cc$, Mendel cruzó aleatoriamente plantas de guisantes de flor roja de genotipo Cc. Obtuvo 705 plantas con flores rojas y 224 plantas con flores blancas. Estime la probabilidad de que en un cruce $Cc \times Cc$ salga una planta con flores blancas y calcule un intervalo de confianza 95%.

Solución

La media muestral es

$$\bar{X}_n = \frac{224}{224 + 705} \approx 0.24$$

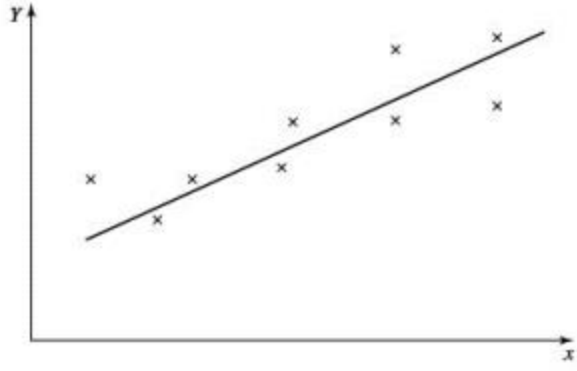
El estimador de la probabilidad de una planta con flores blancas en un cruce $Cc \times Cc$ es por tanto $\hat{p} = 0.24$. El error estándar es

$$\text{S.E.} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{705 + 224}} \approx 0.014$$

El resultado se puede dar por tanto como 0.24 ± 0.014. Como n es grande, el intervalo de confianza 95% es

$$[0.24 - (1.96)(0.014),\ 0.24 + (1.96)(0.014)] = [0.213,\ 0.267]$$

Sabemos de las leyes de la herencia que el valor esperado de $\bar{X}_n$ es $p = 0.25$, que está contenido en el intervalo de confianza. ◀



▲ **Figura 12.53**
Ajuste de una recta a una serie de datos

12.7.3 Regresión lineal

En los libros de texto o en la literatura científica, vemos frecuentemente gráficas donde se ajusta una línea recta a una serie de datos (como se muestra en la Figura 12.53). Las cantidades del eje horizontal y del eje vertical se encuentran relacionadas linealmente, y para describir esta relación se utiliza un modelo lineal. La cantidad del eje horizontal se denominará x y la del eje vertical, Y. Podemos imaginar x como un tratamiento concreto, que está bajo el control del experimentador, e Y como la respuesta. Cuando se toman medidas de Y, en general hay errores presentes, por lo que los puntos de datos no se ajustarán exactamente a una línea recta (incluso aunque el modelo lineal sea correcto), sino que estarán dispersos alrededor de la recta. Es decir, Y no está completamente determinada por x. El grado de dispersión es un indicador de cuánta variación aleatoria existe. En lo que sigue veremos cómo separar la variación aleatoria de la relación real entre las dos cantidades en el caso de que estén relacionadas linealmente. Veremos un modelo particular.

Se supone que x está bajo el control del experimentador, de forma que se puede medir sin error. Sin embargo, la respuesta Y presenta variación aleatoria. Se supone el siguiente modelo lineal

$$Y = a + bx + \varepsilon$$

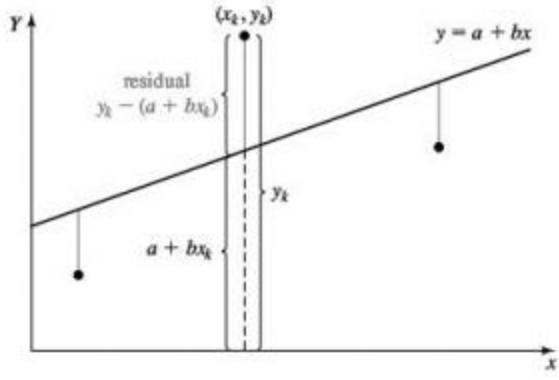
donde ε es una variable aleatoria normal, que representa el **error**, de media 0 y desviación típica σ. La desviación estándar del error no depende de x, y por tanto es la misma para todos los valores de x.

Nuestro objetivo es estimar a y b a partir de los datos. Los datos están formados por puntos (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. El método será escoger a y b para que se minimice la suma de las desviaciones al cuadrado

$$h(a, b) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (a + bx_k)]^2$$

Las desviaciones $y_k - (a + bx_k)$ se denominan **residuos**. El procedimiento de cálculo de a y b se denomina **método de mínimos cuadrados**, y se ilustra en la Figura 12.54. La recta resultante se denomina **recta de mínimos cuadrados** (o **recta de regresión lineal**).

Ejemplo 6 Dados los tres puntos (0, 2), (1, 0) y (2, 1), utilice el método de mínimos cuadrados para obtener la recta de mínimos cuadrados.



▲ **Figura 12.54**
La recta $Y = a + bx$ se escoge de forma que se minimiza la suma de los residuos al cuadrado

Solución

Se desea obtener una recta de la forma $y = a + bx$. Para valores dados de a y b, los residuos son

$$2 - (a + 0b) \qquad 0 - (a + b) \qquad 1 - (a + 2b)$$

y la suma de sus cuadrados es

$$\begin{aligned}
&(2 - a)^2 + (a + b)^2 + (1 - a - 2b)^2 \\
&= (4 - 4a + a^2) + (a^2 + 2ab + b^2) + (1 + a^2 + 4b^2 - 2a - 4b + 4ab) \\
&= 5 - 6a + 3a^2 + 6ab + 5b^2 - 4b \\
&= (2b^2 + 2b) + (3 + 3b^2 + 3a^2 + 6ab - 6a - 6b) + 2 \\
&= 2(b^2 + b) + 3(1 + b^2 + a^2 + 2ab - 2a - 2b) + 2
\end{aligned}$$

Agrupando los términos de esta forma se pueden completar los cuadrados. Se obtiene entonces

$$2\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + 3(1 - a - b)^2 + \frac{3}{2} \tag{12.46}$$

(Si esto parece magia, no nos preocupemos; en breve obtendremos una fórmula general para a y b.) Como (12.46) consiste en dos cuadrados (más un término constante), vemos que la expresión se minimiza cuando los dos cuadrados son iguales a 0. Se resuelve

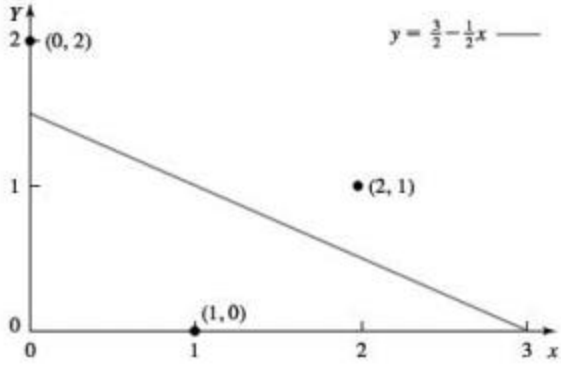
$$b + \frac{1}{2} = 0$$

$$1 - a - b = 0$$

con lo que resulta $b = -1/2$ y $a = 3/2$. En consecuencia, la recta de mínimos cuadrados tiene la forma

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

La Figura 12.55 muestra esta recta junto con los tres puntos. ◀



▲ **Figura 12.55**
La recta de mínimos cuadrados junto con los tres puntos del Ejemplo 6

Obtendremos ahora la fórmula general para calcular a y b. Los pasos básicos son similares a los del Ejemplo 6. Primero expresaremos los residuos. Sean

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

y

$$y_k - (a + bx_k) = (y_k - \bar{y}) + (\bar{y} - a - b\bar{x}) - b(x_k - \bar{x})$$

En lo que sigue, escribiremos simplemente $\sum$ en vez de $\sum_{k=1}^{n}$. Si se eleva la expresión al cuadrado y se suma sobre k, se obtiene

$$\begin{aligned}\sum [y_k - (a + bx_k)]^2 = {} & \sum (y_k - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 \\ & + b^2 \sum (x_k - \bar{x})^2 - 2b \sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ & + 2(\bar{y} - a - b\bar{x}) \sum (y_k - \bar{y}) \\ & - 2b(\bar{y} - a - b\bar{x}) \sum (x_k - \bar{x})\end{aligned} \tag{12.47}$$

Los dos últimos términos son iguales a 0. Utilizaremos esta notación para simplificar el desarrollo

$$SS_{xx} = \sum (x_k - \bar{x})^2 = \sum x_k^2 - \frac{(\sum x_k)^2}{n}$$

$$SS_{yy} = \sum (y_k - \bar{y})^2 = \sum y_k^2 - \frac{(\sum y_k)^2}{n}$$

$$SS_{xy} = \sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum x_k y_k - \frac{(\sum x_k)(\sum y_k)}{n}$$

Utilizando esta notación, el miembro derecho de (12.47) se puede expresar como

$$SS_{yy} + n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 + b^2 SS_{xx} - 2bSS_{xy}$$

Los dos últimos términos sugieren que se puede completar el cuadrado:

$$\begin{aligned}SS_{yy} + n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 + SS_{xx}\left(b^2 - 2b\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} + \left(\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}\right)^2\right) - \frac{(SS_{xy})^2}{SS_{xx}} \\ = n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 + SS_{xx}\left(b - \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}\right)^2 + SS_{yy} - \frac{(SS_{xy})^2}{SS_{xx}}\end{aligned}$$

Como en el Ejemplo 6, hemos podido escribir la suma de las desviaciones al cuadrado como la suma de dos cuadrados más un término adicional. La expresión se puede minimizar igualando los cuadrados a 0:

$$\bar{y} - a - b\bar{x} = 0$$

$$b - \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = 0$$

Despejando a y b se obtiene

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Estas expresiones sirven como estimadores de a y b, $\hat{a}$ y $\hat{b}$. Resumiendo nuestros resultados, tenemos lo siguiente.

La recta de mínimos cuadrados (o recta de regresión lineal) es

$$y = \hat{a} + \hat{b}x$$

con

$$\hat{b} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2} \tag{12.48}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \tag{12.49}$$

Ilustraremos el cálculo de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7 Ajuste una recta de regresión lineal a los puntos

$$(1, 1.62), (2, 3.31), (3, 4.57), (4, 5.42), (5, 6.71)$$

Solución

Para facilitar los cálculos, construiremos la siguiente tabla

x_k	y_k	$x_k - \bar{x}$	$y_k - \bar{y}$	$(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$
1	1.62	−2	−2.706	5.412
2	3.31	−1	−1.016	1.016
3	4.57	0	0.244	0
4	5.42	1	1.094	1.094
5	6.71	2	2.384	4.768
$\bar{x} = 3$	$\bar{y} = 4.326$	$\sum (x_k - \bar{x})^2 = 10$	$\sum (y_k - \bar{y})^2 = 15.29$	$\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = 12.29$

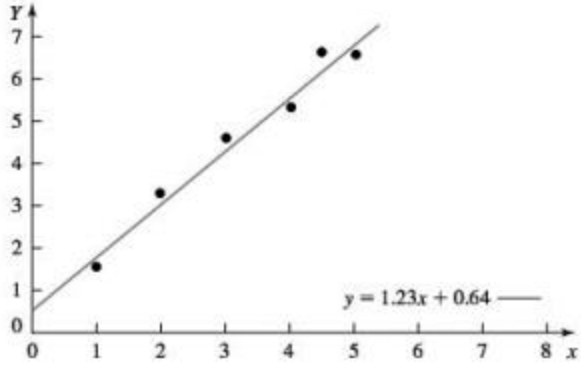
Entonces,

$$\hat{b} = \frac{12.29}{10} = 1.229$$

$$\hat{a} = 4.326 - (1.229)(3) = 0.639$$

Por tanto, la recta de regresión lineal es

$$y = 1.23x + 0.64$$



▲ **Figura 12.56**
La recta de mínimos cuadrados y los puntos de datos del Ejemplo 7

Esta recta y los puntos de datos se muestran en la Figura 12.56. ◀

Ahora que sabemos cómo ajustar una recta a una serie de puntos, podemos preguntarnos sobre la bondad del ajuste. Para este propósito definiremos una cantidad conocida como **coeficiente de determinación**. Motivaremos su definición como sigue. Comenzaremos con una serie de observaciones (x_k, y_k), $k = 1, 2, ..., n$, y supongamos el modelo lineal $Y = a + bx + \varepsilon$. Hacemos

$$\hat{y}_k = \hat{a} + \hat{b}x_k \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

Podemos ver $\hat{y}_k$ como la respuesta esperada bajo el modelo lineal si $x = x_k$. Ahora, $y_k - \bar{y}$ es la desviación de la observación con respecto a la media muestral, $y_k - \hat{y}_k$ es la desviación de la observación con respecto a la respuesta esperada bajo el modelo lineal e $\hat{y}_k - \bar{y}$ es la desviación de la respuesta esperada bajo el modelo lineal con respecto a la media muestral. La desviación $\hat{y}_k = \bar{y}$ puede verse como explicada por el modelo, y la desviación $y_k - \hat{y}_k$ como la parte no explicada debida a la variación aleatoria (el error estocástico). Podemos expresar

$$y_k - \bar{y} = (\hat{y}_k - \bar{y}) + (y_k - \hat{y}_k) \tag{12.50}$$

Si se observa la suma total de las desviaciones al cuadrado, $\sum (y_k - \bar{y})^2$, y se usa (12.50), se obtiene

$$\begin{aligned}\sum (y_k - \bar{y})^2 &= \sum [(\hat{y}_k - \bar{y}) + (y_k - \hat{y}_k)]^2 \\ &= \sum (\hat{y}_k - \bar{y})^2 + 2\sum (\hat{y}_k - \bar{y})(y_k - \hat{y}) \\ &\quad + \sum (y_k - \hat{y}_k)^2\end{aligned} \tag{12.51}$$

Se desea demostrar que $\sum (\hat{y}_k - \bar{y})(y_k - \hat{y}) = 0$. Para ello, observamos que

$$\hat{y}_k - \bar{y} = (\hat{a} + \hat{b}x_k) - (\hat{a} + \hat{b}\bar{x}) = \hat{b}(x_k - \bar{x})$$

$$y_k - \hat{y}_k = (y_k - \bar{y}) - (\hat{y}_k - \bar{y}) = (y_k - \bar{y}) - \hat{b}(x_k - \bar{x})$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum (\hat{y}_k - \bar{y})(y_k - \hat{y}_k) &= \sum \hat{b}(x_k - \bar{x})[(y_k - \bar{y}) - \hat{b}(x_k - \bar{x})] \\ &= \hat{b}\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) - \hat{b}^2 \sum (x_k - \bar{x})^2\end{aligned}$$

Utilizando (12.48) para sustituir una de las $\hat{b}$ en el término $\hat{b}^2$, resulta

$$\begin{aligned}\sum (\hat{y}_k - \bar{y})(y_k - \hat{y}_k) &= \hat{b} \sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &\quad - \hat{b} \frac{\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum (x_k - \bar{x})^2} \sum (x_k - \bar{x})^2 \qquad (12.52) \\ &= 0\end{aligned}$$

Esto nos permite dividir la suma total de cuadrados en las sumas de cuadrados explicadas y no explicadas. Concretamente, continuando con (12.51) y utilizando (12.52), se obtiene

$$\underbrace{\sum (y_k - \bar{y})^2}_{\text{total}} = \underbrace{\sum (\hat{y}_k - \bar{y})^2}_{\text{explicada}} + \underbrace{\sum (y_k - \hat{y}_k)^2}_{\text{no explicada}}$$

El cociente

$$\frac{\text{explicada}}{\text{total}} = \frac{\sum (\hat{y}_k - \bar{y})^2}{\sum (y_k - \bar{y})^2}$$

es por tanto la proporción de variación explicada por el modelo. Se expresa como r^2 y se denomina coeficiente de determinación. Con $\hat{y}_k - \bar{y} = \hat{b}(x_k - \bar{x})$ y $\hat{b}$ expresado en (12.48), esto se puede escribir como

$$\begin{aligned} r^2 &= (\hat{b})^2 \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{\sum (y_k - \bar{y})^2} \left(\frac{\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum (x_k - \bar{x})^2} \right)^2 \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{\sum (y_k - \bar{y})^2} \\ &= \frac{[\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})]^2}{\sum (x_k - \bar{x})^2 \sum (y_k - \bar{y})^2} \end{aligned}$$

Resumimos los resultados en el siguiente recuadro.

El coeficiente de determinación r^2 está dado por

$$r^2 = \frac{[\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})]^2}{\sum (x_k - \bar{x})^2 \sum (y_k - \bar{y})^2}$$

y representa la proporción de variación que es explicada por el modelo.

Volviendo al Ejemplo 7, se obtiene

$$r^2 = \frac{(12.29)^2}{(10)(15.29)} = 0.988$$

Es decir, el 98.8% de la variación es explicada por el modelo.

Como r^2 es la proporción de variación explicada en la variación total, se deduce que $r^2 \leqslant 1$. Además, como r^2 es el cuadrado de una expresión, es siempre no negativo. Es decir, tenemos que

$$0 \leqslant r^2 \leqslant 1$$

Cuanto más cerca esté r^2 de 1, más cerca están los puntos de la recta resultante del modelo lineal. En el caso extremo, cuando $r^2 = 1$ todos los puntos están en la recta. No hay variación aleatoria.

12.7.4. Problemas

(12.7.1)

1. Los siguientes datos representan el número de áfidos por planta encontrados en una muestra de diez plantas:

17, 13, 21, 47, 3, 6, 12, 25, 0, 18

Calcule la mediana, la media muestral y la varianza muestral.

2. Los siguientes datos representan el número de semillas por flor en una muestra de nueve plantas en flor

27, 39, 42, 18, 21, 33, 45, 37, 21

Calcule la mediana, la media muestral y la varianza muestral.

3. Los datos siguientes representan la distribución de frecuencias del número de semillas por flor en una planta en flor.

Número de semilla	*Frecuencia*
9	37
10	48
11	53
12	49
13	61
14	42
15	31

Calcule la media muestral y la varianza muestral.

4. Los datos siguientes representan la distribución de frecuencias del número de días que tardó una cierta pomada en eliminar una erupción cutánea.

Número de días	*Frecuencia*
1	2
2	7
3	9
4	27
5	11
6	5

Calcule la media muestral y la varianza muestral.

5. Los datos siguientes representan la distribución de frecuencias relativas del tamaño de camada en una muestra de laboratorio de 300 cerdos de guinea.

Tamaño de camada	*Frecuencia relativa*
2	0.05
3	0.09
4	0.12
5	0.19
6	0.23
7	0.12
8	0.13
9	0.07

Calcule la media muestral y la varianza muestral.

6. Los datos siguientes representan la distribución de frecuencias relativas de los tamaños de nidada de una muestra de 42 patos.

Tamaño de nidada	*Frecuencia relativa*
6	0.10
7	0.24
8	0.29
9	0.21
10	0.16

Calcule la media muestral y la varianza muestral.

7. Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra de tamaño n. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}) = 0$$

donde $\bar{X}$ representa la media muestral.

8. Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra de tamaño n. Demuestre que

$$n\bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2$$

donde $\bar{X}$ representa la media muestral.

9. Suponga que una muestra de tamaño n tiene l valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ donde x_k aparece f_k veces en la muestra. Explique por qué la media muestral se puede expresar mediante la fórmula

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l} x_k f_k$$

10. Suponga que una muestra de tamaño n tiene l valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ donde x_k aparece f_k veces en la muestra. Explique por qué la varianza muestral se puede expresar mediante la fórmula

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{l} x_k^2 f_k - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{l} x_k f_k\right)^2\right]$$

(12.7.2)

11. Utilice una calculadora gráfica para generar tres muestras de tamaño 10, cada una de ellas de una distribución uniforme en el intervalo (0,1).

(a) Calcule la media muestral y la varianza muestral de cada muestra.

(b) Combine las tres muestras y calcule la media muestral y la varianza muestral de la muestra combinada.

(c) Compare sus respuestas de (a) y (b) con el verdadero valor de la media y la varianza.

12. Suponga que X tiene distribución exponencial de media 1. Un ordenador genera la siguiente muestra de observaciones independientes de esta población.

0.3169, 0.5531, 2.376,
1.150, 0.6174, 0.1563
2.936, 1.778, 0.7357
0.1024

Calcule la media muestral y la varianza muestral, y compárelas con los correspondientes parámetros de la población.

13. Calcule la media muestral y el error estándar para la muestra del Problema 1.

14. Calcule la media muestral y el error estándar para la muestra del Problema 2.

15. Los siguientes datos representan una muestra de una distribución normal de media 0 y varianza 1.

$-0.68, 1.22, 1.33, -0.84$
$-0.06, 0.50, 0.03, -0.13$
$-0.29, -0.47$

Construya un intervalo de confianza 95%.

16. Los siguientes datos representan una muestra de una distribución normal de media 0 y varianza 1.

$-1.18, 0.52, 0.36, -0.16$
$0.92, 0.68, -0.61, -0.54$
$0.15, 1.04$

Construya un intervalo de confianza 95%.

17. Utilice una calculadora gráfica para obtener un intervalo de confianza 95% de una muestra de tamaño 30 de una distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Realice un sondeo en la clase para determinar el porcentaje de intervalos de confianza que contienen a la media verdadera. Comente el resultado en clase.

18. (a) Si X tiene como función de distribución $F(x)$, se puede demostrar que $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Utilice este hecho, una calculadora gráfica y la tabla de la distribución normal estándar para generar quince variables aleatorias con distribución normal estándar.

(b) Utilice los datos de (a) para obtener un intervalo de confianza 95%. Realice un sondeo en la clase para determinar el porcentaje de intervalos de confianza que contienen a la media verdadera. Comente el resultado en clase.

19. Para determinar el éxito en la germinación de semillas de una cierta planta, se plantan 162 semillas. Se obtiene que 117 de las semillas germinan. Estime la probabilidad de germinación y de un intervalo de confianza 95%.

20. Para probar un nuevo medicamento de reducción del colesterol, 72 personas con colesterol elevado reciben el medicamento. 51 de ellas muestran niveles de colesterol reducidos. Estime la probabilidad de que este medicamento reduzca el colesterol y calcule un intervalo de confianza del 95%.

(12.7.3)

En los Problemas 21-22, ajuste una recta de regresión lineal a los puntos dados y calcule el coeficiente de determinación.

21. $(-3, -6.3), (-2, -5.6), (-1, -3.3), (0, 0.1), (1, 1.7), (2, 2.1)$

22. $(0, 0.1), (1, -1.3), (2, -3.5), (3, -5.7), (4, -5.8)$

23. Demuestre que la suma de los residuos de la recta de regresión lineal es igual a 0.

24. Demuestre que los dos últimos términos de (12.47),

$$2(\bar{y} - a - b\bar{x}) \sum (y_k - \bar{y})$$

y

$$2(\bar{y} - a - b\bar{x}) \sum (x_k - \bar{x})$$

son iguales a 0.

25. Para determinar si la frecuencia del canto de los grillos depende de la temperatura, se obtuvieron los siguientes datos (Pierce, 1949).

Temperatura (F)	*Cantos/s*
69	15
70	15
72	16
75	16
81	17
82	17
83	16
84	18
89	20
93	20

Ajuste una recta de regresión lineal y calcule el coeficiente de determinación.

26. La velocidad inicial v de una reacción enzimática que sigue la cinética de Michaelis-Menten es

$$v = \frac{v_{max} s}{K_m + s} \tag{12.53}$$

siendo s la concentración de sustrato, y v_{max} y K_m dos parámetros que caracterizan la reacción. La siguiente tabla generada por ordenador contiene valores de la velocidad inicial v cuando se varía la concentración de sustrato s.

s	v
1	4.1
2.5	6.1
5	9.3
10	12.9
20	17.1

(a) Invierta (12.53) y demuestre que

$$\frac{1}{v} = \frac{K_m}{v_{max}} \frac{1}{s} + \frac{1}{v_{max}} \tag{12.54}$$

Esta es la ecuación de Lineweaver-Burk. Si se dibuja $1/v$ en función de $1/s$, se obtiene una recta de pendiente K_m/v_{max} y de ordenada en el origen $1/v_{max}$. Transforme los datos utilizando (12.54) y ajuste una recta de regresión lineal a los datos transformados. Obtenga la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión lineal y determine K_m y v_{max}.

(b) Dowd y Riggs propusieron utilizar la transformación

$$v = v_{max} - K_m \frac{v}{s} \tag{12.55}$$

y después dibujar v frente a v/s. La recta resultante tiene pendiente $-K_m$ y ordenada en el origen v_{max}. Transforme los datos utilizando (12.55) y ajuste una recta de regresión lineal a los datos transformados. Obtenga la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión lineal y determine K_m y v_{max}.

12.8. TÉRMINOS CLAVE

Repaso del Capítulo 12: Temas *Comente las siguientes definiciones y conceptos*:

1. Principio de multiplicación
2. Permutación
3. Combinación
4. Experimento aleatorio
5. Espacio muestral
6. Conjunto básico de operaciones, diagrama de Venn, leyes de Morgan
7. Definición de probabilidad
8. Resultados equiprobables
9. Experimentos de Mendel con guisantes
10. Método de marca-recaptura
11. Estimador de máxima verosimilitud
12. Probabilidad condicional
13. Partición del espacio muestral
14. Ley de la probabilidad total
15. Independencia
16. Fórmula de Bayes
17. Variable aleatoria
18. Distribución discreta
19. Función de masa de probabilidad
20. Función de distribución de una variable aleatoria discreta
21. Media y varianza
22. Distribuciones conjuntas
23. Distribución binomial
24. Distribución multinomial
25. Distribución geométrica
26. Distribución de Poisson
27. Aproximación de Poisson a la distribución binomial
28. Variable aleatoria continua
29. Función de densidad
30. Función de distribución de una variable aleatoria continua
31. Media y varianza de una variable aleatoria continua
32. Histograma
33. Distribución normal
34. Distribución uniforme
35. Distribución exponencial
36. Envejecimiento
37. Ley de Gompertz
38. Ley de Weibull
39. Ley de los grandes números
40. Desigualdad de Markov
41. Desigualdad de Chebyshev
42. Teorema central del límite
43. Corrección del histograma
44. Muestra
45. Estadístico
46. Mediana muestral, media muestral, varianza muestral, error estándar
47. Intervalo de confianza
48. Estimación de proporciones
49. Recta de regresión lineal
50. Coeficiente de determinación

12.9. PROBLEMAS DE REPASO

1. (a) En una clase de cálculo hay 25 estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los estudiantes tengan cumpleaños en distintos días?

(b) Sea p_n la probabilidad de que en un grupo de n personas, ninguna cumpla años el mismo día. Demuestre que

$$p_1 = 1 \quad \text{y} \quad p_{n+1} = p_n \frac{365 - n}{365}$$

Utilice esta fórmula para generar la tabla de p_n para $1 \leqslant n \leqslant 25$.

2. Treinta pacientes se asignan aleatoriamente a dos grupos de tratamiento. ¿De cuantas formas se puede hacer esto?

3. Quince plantas diferentes se dividen en cinco parcelas. ¿De cuantas formas se puede hacer esto?

4. Suponga que una cierta enfermedad está causada por una mutación genética que aparece espontáneamente. La enfermedad aparece en el 67% de las personas con la mutación y en el 23% de las personas sin la mutación. Suponga que el 3% de la población tiene el gen de la enfermedad.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo escogido aleatoriamente desarrolle la enfermedad?

(b) Sabiendo que un individuo sufre la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la mutación genética?

5. Suponga que el 42% de las semillas de una cierta planta germinan.

(a) ¿Cuál es el número esperado de semillas que germinan en una muestra de diez semillas?

(b) Se plantan diez semillas en un tarro. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas germine?

(c) Se plantan cinco tarros con diez semillas cada uno. ¿Cuál es el número esperado de tarros en los que no germinan semillas?

(d) Se plantan cinco tarros con diez semillas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que como mínimo en un tarro no germinen semillas?

6. Suponga que la cantidad anual de precipitaciones en una cierta área tiene distribución normal de media 27 y desviación típica 5.7.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado año las precipitaciones superen 35?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que en cinco años consecutivos las precipitaciones superen 35?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos en un año de diez las precipitaciones superen 35?

7. Suponga que cada vez que un estudiante realiza un test tiene una probabilidad del 20% de superarlo (asuma que los intentos consecutivos son independientes).

(a) ¿Cuál es la probabilidad de superar el test al segundo intento?

(b) Sabiendo que un estudiante no supera el test la primera vez, ¿cuál es la probabilidad de superar el test al segundo intento?

8. Explique por qué

$$2^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

9. Una bolsa contiene un promedio de 170 pasas cubiertas de chocolate. Los estándares de producción exigen que en el 95% de las bolsas el número de pasas no se desvíe de 170 en más de 10. Suponga que el número de pasas tiene distribución normal de media μ y varianza σ^2.

(a) Determine μ y σ^2.

(b) Un envío contiene 100 bolsas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna bolsa contenga menos de 160 pasas?

10. Suponga que dos padres son portadores de un gen recesivo que causa un desorden metabólico. Ninguno de los padres tiene la enfermedad. Si tienen tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos resulte afectado por la enfermedad? (Advierta que el gen recesivo sólo causa la enfermedad si un individuo tiene dos copias del gen.)

11. Suponga que se escoge una planta entre un gran número de plantas de guisantes con flor roja y se cruza con una planta de guisantes de flor blanca. ¿Qué porcentaje de las plantas padres de flor roja son de genotipo *Cc* si el 90% de la descendencia tienen flores rojas?

12. Suponga que una variable aleatoria tiene distribución normal de media μ y varianza σ^2. ¿Cómo estimaría μ y σ?

13. Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra de tamaño n de una población con media μ y varianza σ^2. Defina

$$V = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2$$

siendo $\bar{X}$ la media muestral.

(a) Si S^2 es la varianza muestral, demuestre que

$$V = \frac{n-1}{n} S^2$$

(b) Calcule EV.

14. Suponga que el peso de una cierta especie tiene distribución normal de media μ y varianza σ^2. Los siguientes datos representan los pesos (medidos en gramos) de diez individuos de esta especie seleccionados aleatoriamente.

171, 168, 151, 192, 175
163, 182, 157, 177, 169

(a) Calcule la mediana, la media muestral y la varianza muestral.

(b) Construya un intervalo de confianza 95% para la media muestral.

15. (a) Genere cinco observaciones (x, y) de un experimento aleatorio, donde

$$y = 2x + 1 + \varepsilon$$

$x = 1, 2, 3, 4, 5$, y ε es una variable aleatroria con distribución normal de media 0 y varianza 1.

(b) Utilice los datos de (a) para calcular la recta de mínimos cuadrados y compare los resultados con el modelo lineal que describe este experimento.

(c) ¿Qué parte de los datos es explicada por el modelo?

16. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1 \\ (r-1)x^{-r} & \text{para } x \geqslant 1 \end{cases}$$

siendo r una constante mayor que 1.

(a) ¿Para qué valores de r es $EX = \infty$?

(b) Calcule aquellos valores de r para los que $EX < \infty$.

APÉNDICES

A SÍMBOLOS UTILIZADOS FRECUENTEMENTE

A.1 Letra griegas

Letras minúsculas

α	alpha	ν	nu
β	beta	ξ	xi
γ	gamma	o	omicron
δ	delta	π	pi
ε	epsilon	ρ	rho
ζ	zeta	σ	sigma
η	eta	τ	tau
θ	theta	υ	upsilon
ι	iota	ϕ	phi
κ	kappa	χ	chi
λ	lambda	ψ	psi
μ	mu	ω	omega

Letras mayúsculas

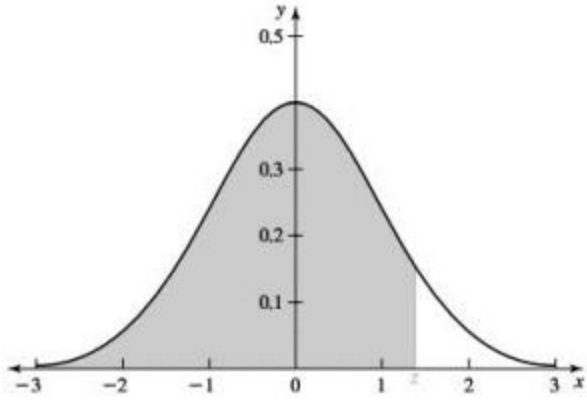
Γ	Gamma	Π	Pi
Δ	Delta	Σ	Sigma
Λ	Lambda	Ω	Omega

A.2 Símbolos matemáticos

$<$	menor que
$\leqslant$	menor o igual que
$>$	mayor que
$\geqslant$	mayor o igual que
$\cup$	unión
$\subset$	subconjunto
$\in$	elemento de
$\perp$	perpendicular
$\parallel$	paralelo
$\cap$	intersección
$=$	igual a
$\neq$	no igual a
$\approx$	aproximadamente
$\propto$	proporcional a
Σ	suma

B TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Áreas bajo la curva normal estándar desde $-\infty$ hasta z (*véase* la Figura B.1).



◀ **Figura B.1**

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

SECCIÓN DE RESPUESTAS

Sección 1.1

1. (a) $\{-4, 2\}$ (b) $\{-4, 2\}$

3. (a) $\{-1, 5\}$ (b) $x = 5$ o $x = 1$

5. (a) $[-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}]$, (b) $(-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (3, \infty)$,
(c) $(-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{7}, \infty)$, (d) $(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5})$

7. $x + 3y - 14 = 0$

9. $3x + y + 2 = 0$

11. $7x - 3y + 5 = 0$

13. $4x + 3y - 12 = 0$

15. $2y - 3 = 0$

17. $x + 1 = 0$

19. $3x - y + 2 = 0$

21. $2y - x - 4 = 0$

23. $y + 2x - 2 = 0$

25. $x + 4y - 3 = 0$

27. $x + 2y + 4 = 0$

29. $x + 3y + 4 = 0$

31. $2x + 5y - 22 = 0$

33. $y - x + 6 = 0$

35. $y = 2$

37. $x = -1$

39. $x = -1$

41. $y = 3$

43. (a) $y = kx$, $[x] =$ ft, $[y] =$ cm, $k = \frac{30.5 \text{ cm}}{1 \text{ ft}}$ implica $y = (30.5 \frac{\text{cm}}{\text{ft}})x$

(b) (i) 183 cm, (ii) $\frac{1159}{12}$ cm, (iii) $\frac{1159}{24}$ cm

(c) (i) $\frac{346}{61}$ ft, (ii) $\frac{150}{61}$ ft, (iii) $\frac{96}{61}$ ft

45. $s(t) = (40 \text{ min/hr})t$, $k = 40$ min/hr

47. $\frac{1}{(0.305)^2}$ ft^2

49. (a) $[y] =$ litro, $[x] =$ onza, $y = (\frac{1}{33.81} \frac{\text{litro}}{\text{onza}})$

(b) $\frac{12}{33.81}$ litros

51. (a) 88 km/hr, (b) 81 min/hr

53. (a) $C = K - 273.15$,
(b) 77.4 K $= -195.75$ °C $= -320.35$ °F,
90.2 K $= -182.95$ °C $= -297{,}31$ °F, el nitrógeno se destila primero ya que tiene el punto de ebullición más bajo.

55. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

57. (a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$,
(b) $y = \sqrt{5} + 5$ o $y = -\sqrt{5} - 5$, (c) No

59. centro: (2, 0); radio: 4

61. centro: (2, -1); radio: 4

63. (a) $\frac{5}{12}\pi$, (b) 255°

65. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, (b) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, (c) $\sqrt{3}$

67. (a) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ o $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ (b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ o $\alpha = \frac{4\pi}{3}$

69. Dividir a la izquierda y a la derecha por $\cos\theta$

71. $\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

73. (a) $4^{7/3}$, (b) 27, (c) $(625)^k$

75. (a) $x = \frac{1}{16}$, (b) $x = 27$, (c) $x = \frac{1}{100}$

77. (a) $x = -5$, (b) $x = -4$, (c) $x = -3$

79. (a) $\ln 3$, (b) $\log_4(x - 2) + \log_4(x + 2)$, (c) $6x - 2$

81. $x = \frac{1}{3}(\ln 2 + 1)$

83. (a) $x = 3 + e^5$ (b) $x = \sqrt{4 + e}$ (c) $x = 18$

85. $5 - 7i$

87. $13 + 2i$

89. $15 + 9i$

91. 37

93. $3 + 2i$

95. $6 - 3i$

97. $8 - 2i$

99. $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2bi$

101. $x_1 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$

103. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

105. $x_1 = \frac{3}{8} + i\frac{\sqrt{7}}{8}$, $x_2 = \frac{3}{8} - i\frac{\sqrt{7}}{8}$

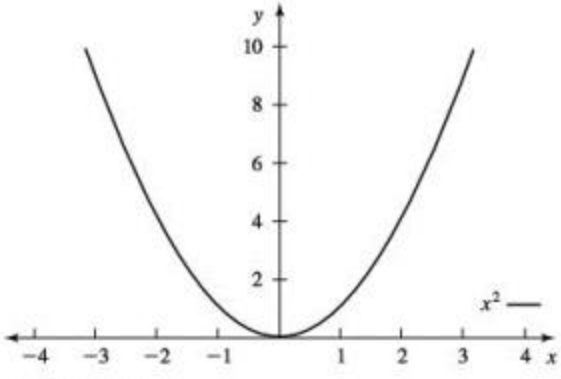
107. $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = -1$

109. $x_1 = x_2 = 1$

111. $x_1 = \frac{5 + i\sqrt{47}}{6}$, $x_1 = \frac{5 - i\sqrt{47}}{6}$

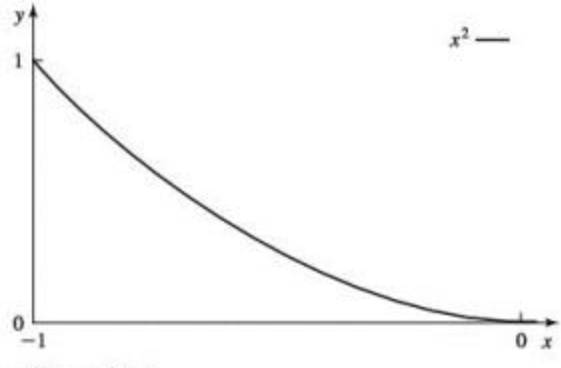
Sección 1.2

1. recorrido: $y \geqslant 0$



▲ **Figura 1.2.1**

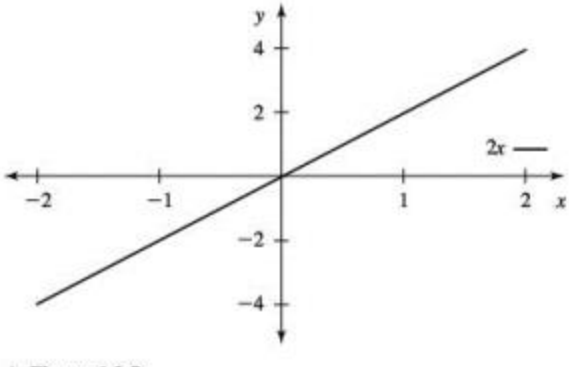
3. recorrido: $y \in [0, 1)$



▲ **Figura 1.2.3**

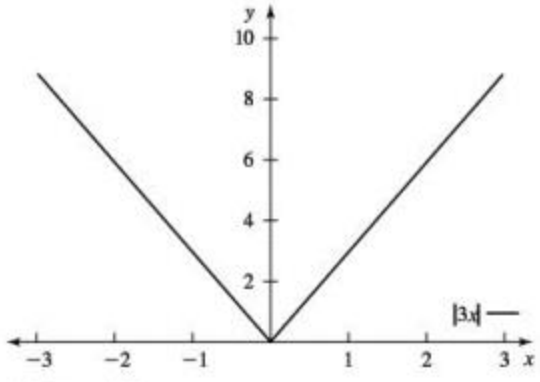
5. (b) No, sus dominios son diferentes

7. $f(x)$ es impar. $f(-x) = -2x = -f(x)$



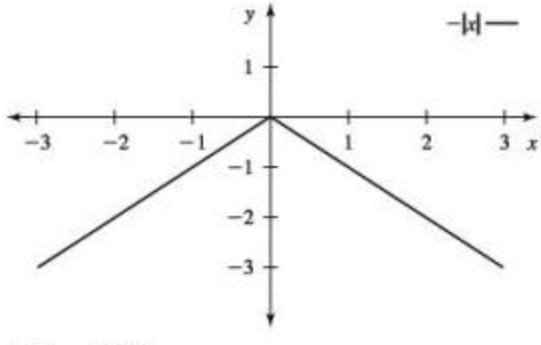
▲ **Figura 1.2.7**

9. $f(x)$ es par $f(-x) = |3(-x)| = |3x| = f(x)$



▲ **Figura 1.2.9**

11. $f(x)$ es par. $f(-x) = -|-x| = -|x| = f(x)$



▲ **Figura 1.2.11**

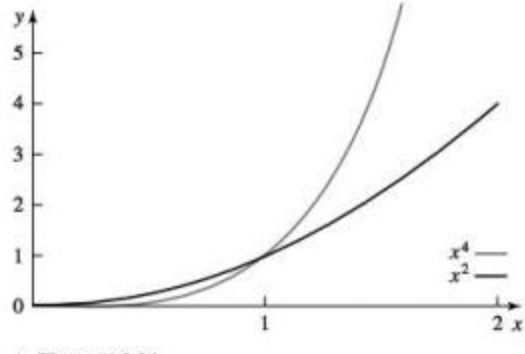
15. (a) $(f \circ g)(x) = 1 - 4x^2$, $x \in \mathbf{R}$

(b) $(g \circ f)(x) = 2(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$

17. $(f \circ g)(x) = 3x$, $x \geqslant 9$

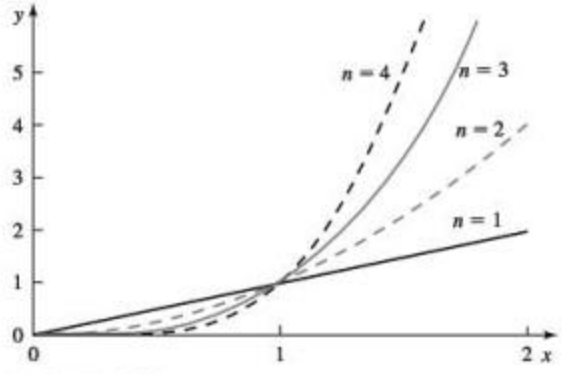
19. $(f \circ g)(x) = x$, $x \geqslant 0$; $(g \circ f)(x) = x$, $x \geqslant 0$

21. $x^2 > x^4$ para $0 < x < 1$; $x^2 < x^4$ para $x > 1$



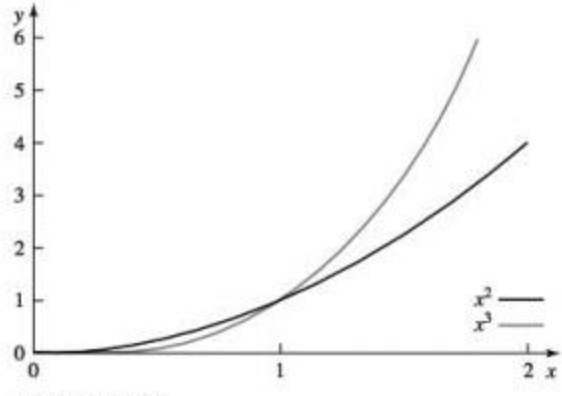
▲ **Figura 1.2.21**

23. Se cortan en $x = 0$ o 1.



▲ **Figura 1.2.23**

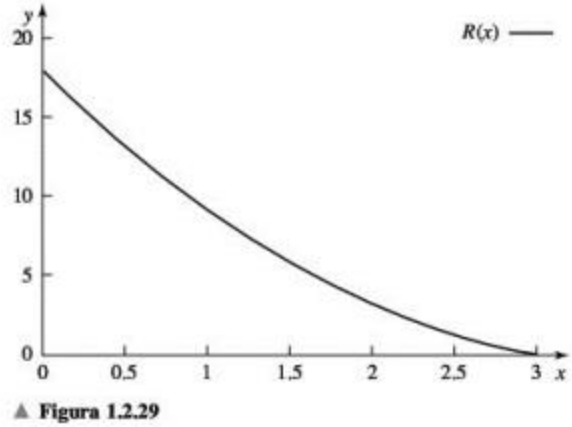
25. (a)



▲ **Figura 1.2.25**

27. (a) $f(-x) = f(x)$ **(b)** $f(-x) = -f(x)$

29. (a) $k = \frac{3}{2}$ **(b)** dominio: $0 \leqslant x \leqslant 3$



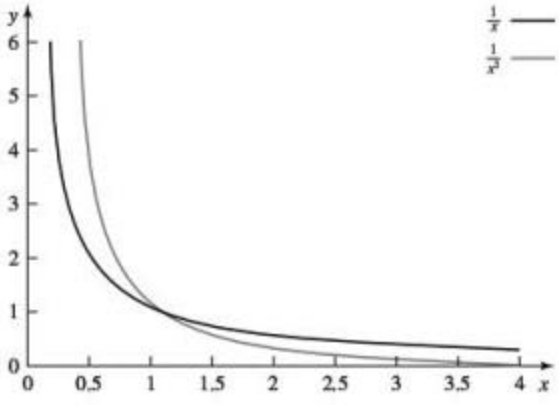
▲ **Figura 1.2.29**

31. $s(t) = t$, polinomio de grado 1

33. dominio: $x \neq 1$; recorrido: $y \neq 0$

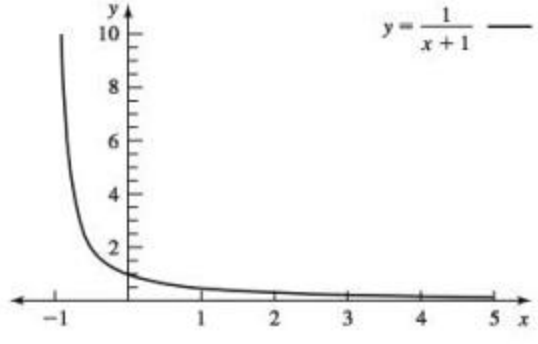
35. dominio: $x \neq -3, 3$; recorrido: **R**

37. $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ para $0 < x < 1$; $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ para $x > 1$; se cortan en $x = 1$.



▲ **Figura 1.2.37**

39. (a)

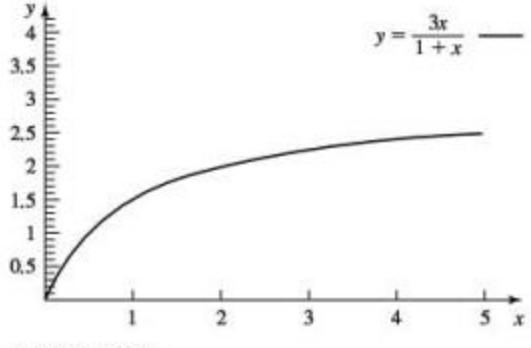


▲ **Figura 1.2.39**

(b) el recorrido de $f(x)$ es $(0, \infty)$, **(c)** $x = -\frac{1}{2}$,

(d) exactamente uno.

41. (a)



▲ **Figura 1.2.41**

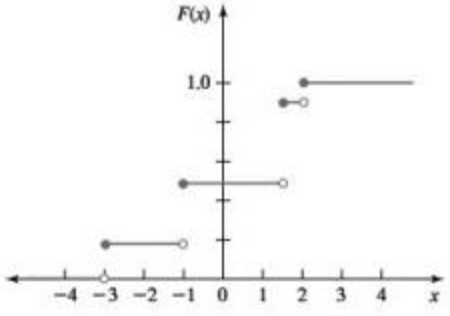
(b) el recorrido de $f(x)$ es $[0, 3)$,

(c) $x = 2$,

(d) exactamente uno, $x = \frac{a}{3-a}$.

43. 83.3%, 4.76%

45. (a)

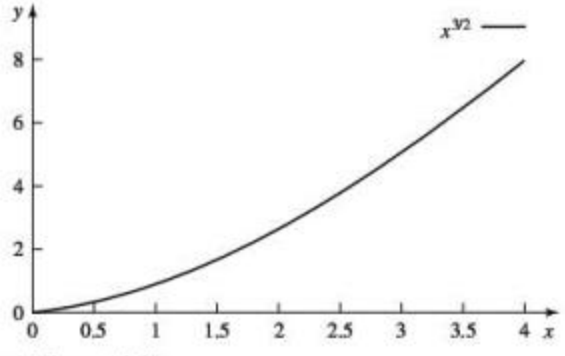


▲ **Figura 1.2.45**

(b) el recorrido de $f(x)$ es $[0, 1)$,

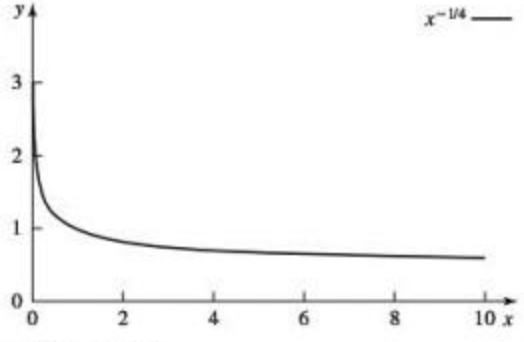
(c) $f(x)$ se aproxima a 1.

47.



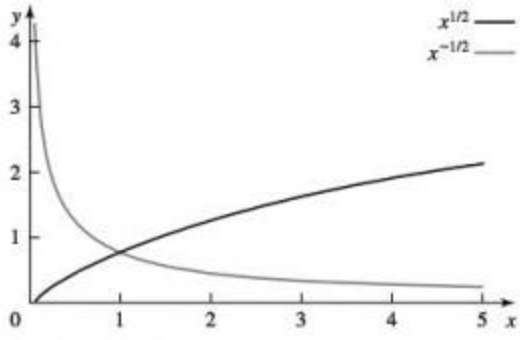
▲ **Figura 1.2.47**

49.



▲ **Figura 1.2.49**

51. (a)



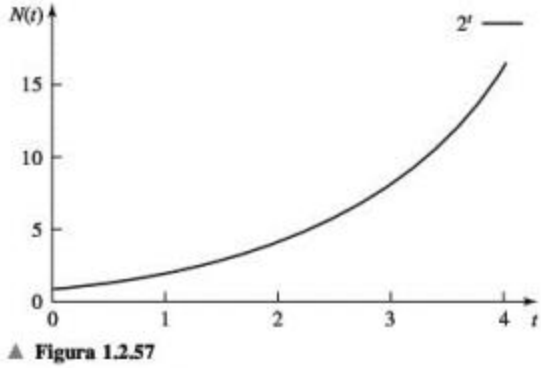
▲ **Figura 1.2.51**

53. crece

55. crece

57. (a) 1, 2, 4, 8, 16

(b)



▲ **Figura 1.2.57**

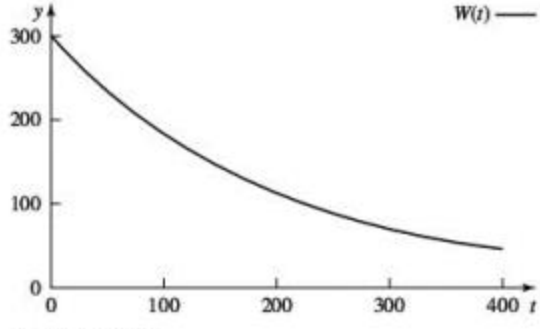
59. $20 \exp[-\frac{\ln 2}{5730} 2000]$

61. $\lambda = \frac{\ln 2}{7 \text{ días}}$

63. (a) $W(t) = (300 \text{ gr}) \exp[-\frac{\ln 2}{140 \text{ días}} t]$

(b) $t = \frac{\ln 5}{\ln 2} 140 \text{ días} \approx 325 \text{ días}$

(c)



▲ **Figura 1.2.63**

65. $\frac{W(t)}{W(0)} = \exp\left[-\frac{\ln 2}{5730} 15\,000\right] \approx 16.3\%$

69. **(a)** sí

(b) no

(c) sí

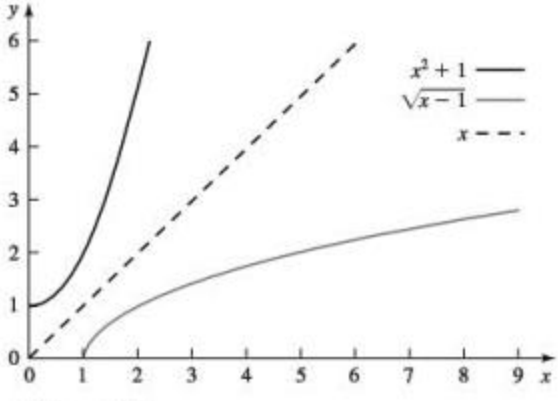
(d) sí

(e) no

(f) sí

71. **(a)** $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1$

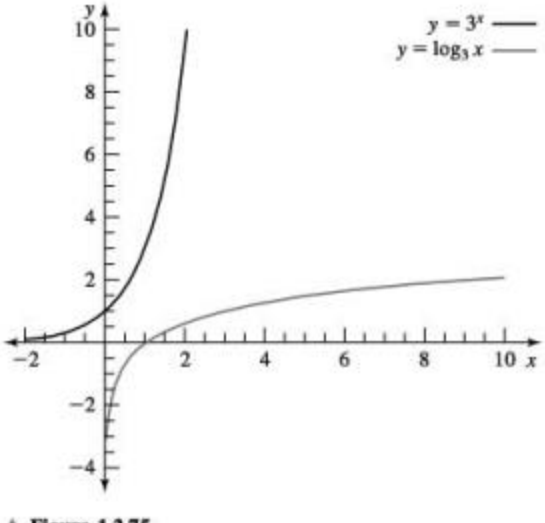
(b)



▲ **Figura 1.2.71**

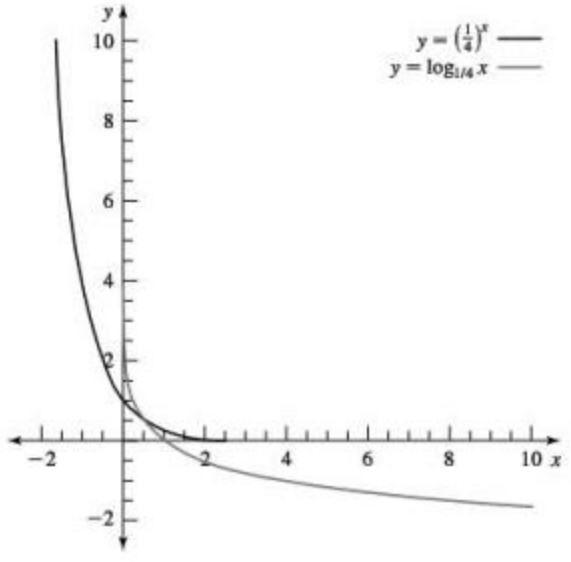
73. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}, x > 0$

75. $f^{-1}(x) = \log_3 x, x > 0$



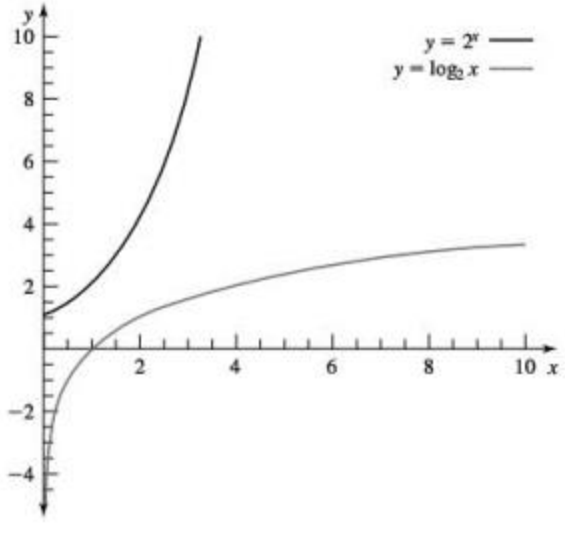
▲ **Figura 1.2.75**

77. $f^{-1}(x) = \log_{1/4} x, x > 0$



▲ **Figura 1.2.77**

79. $f^{-1}(x) = \log_2(x), x \geqslant 1$



▲ **Figura 1.2.79**

81. **(a)** x^5,

(b) x^4,

(c) x^{-5},

(d) x^{-4},

(e) x^{-3},

(f) x^2

83. **(a)** $5 \ln x$,

(b) $6 \ln x$,

(c) $\ln(x-1)$,

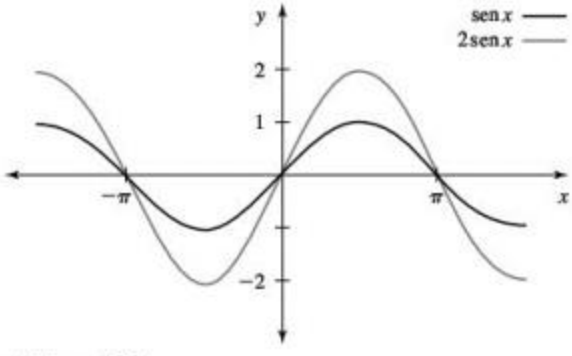
(d) $-4 \ln x$

85. (a) $e^{x \ln 3}$,
(b) $e^{(x^2-1)\ln 4}$,
(c) $e^{-(x+1)\ln 2}$,
(d) $e^{(-4x+1)\ln 3}$

87. $\mu = \ln 2$

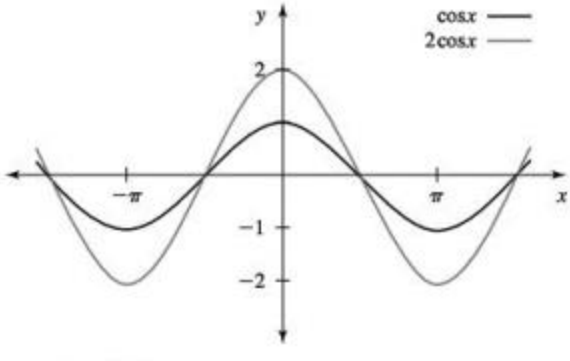
89. $K = -\frac{3}{4}\ln(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{47}{300})$

91. Mismo periodo; $2\operatorname{sen} x$ tiene amplitud doble que $\operatorname{sen} x$.



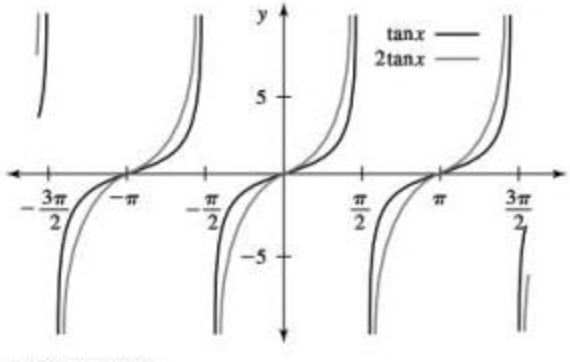
▲ **Figura 1.2.91**

93. Mismo periodo; $2\cos x$ tiene amplitud doble que $\cos x$



▲ **Figura 1.2.93**

95. Mismo periodo; $y = 2\tan x$ está estirada un factor de 2.



▲ **Figura 1.2.95**

97. amplitud: 3; periodo: $\frac{\pi}{2}$

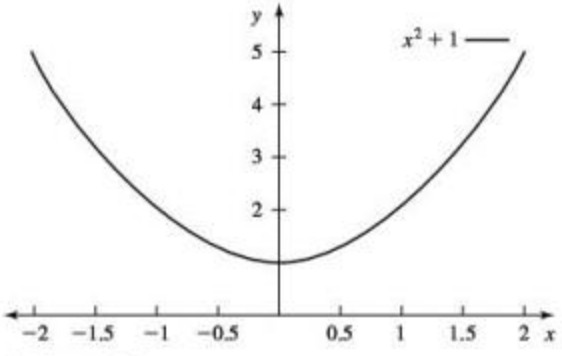
99. amplitud: 4; periodo: 1

101. amplitud: 4; periodo: 8π

103. amplitud: 3; periodo: 10

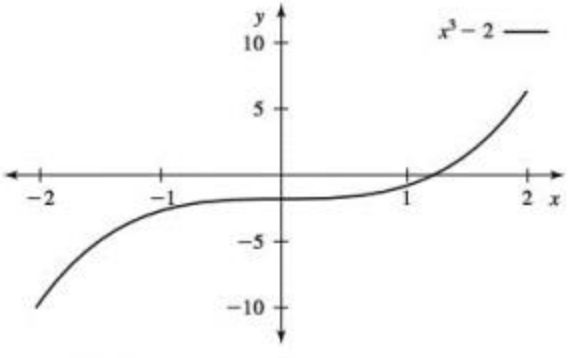
Sección 1.3

1.



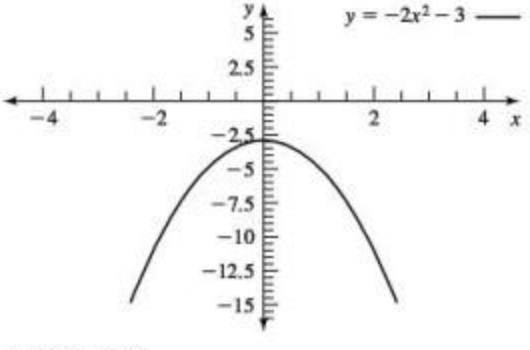
▲ **Figura 1.3.1**

3.



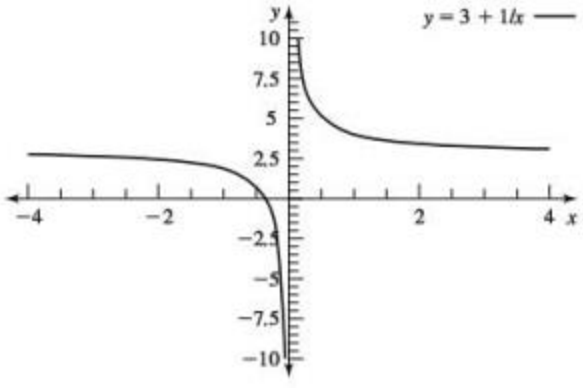
▲ **Figura 1.3.3**

5.



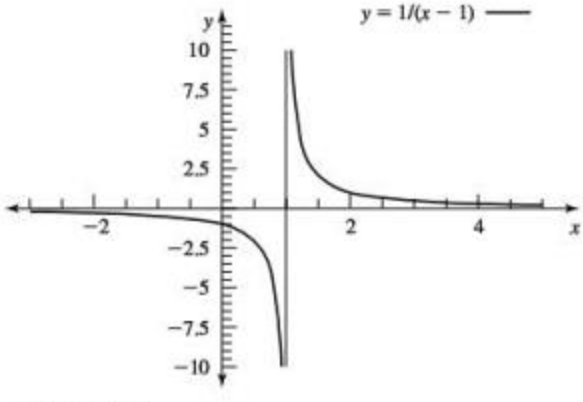
▲ **Figura 1.3.5**

7.



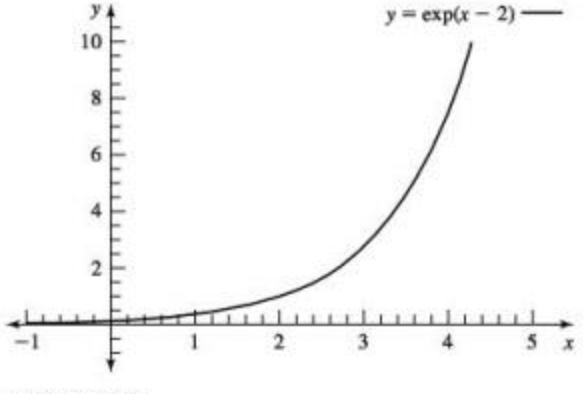
▲ **Figura 1.3.7**

9.



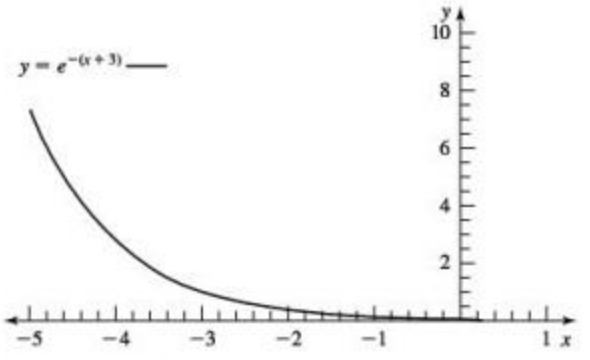
▲ **Figura 1.3.9**

11.



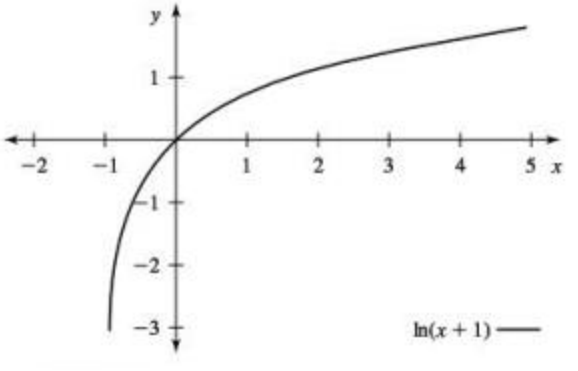
▲ **Figura 1.3.11**

13.



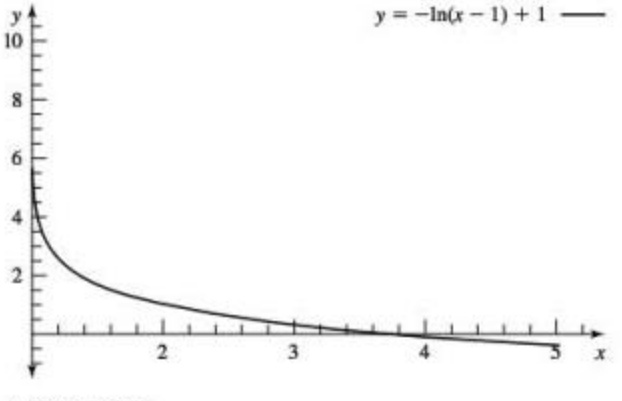
▲ **Figura 1.3.13**

15.



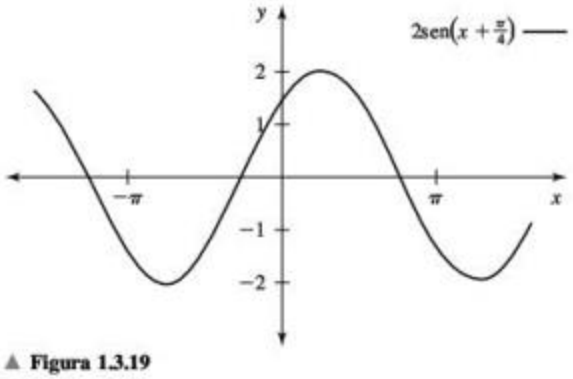
▲ **Figura 1.3.15**

17.



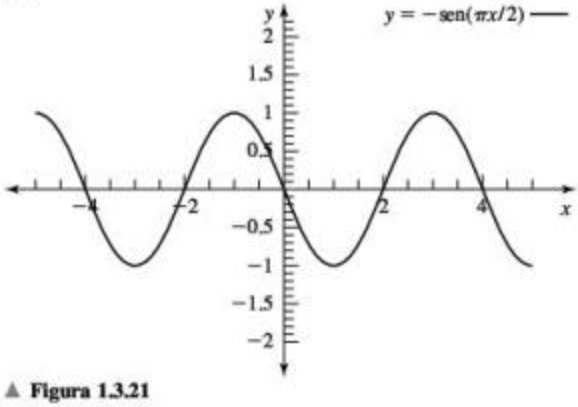
▲ **Figura 1.3.17**

19.



▲ **Figura 1.3.19**

21.



▲ **Figura 1.3.21**

23. **(a)** Desplazar dos unidades hacia abajo.

(b) Desplazar $y = x^2$ una unidad a la derecha y otra arriba.

(c) Desplazar $y = x^2$ dos unidades a la izquierda, estirar un factor de 2 y reflejar respecto al eje x.

25. **(a)** 1. Reflejar $\frac{1}{x}$ respecto al eje x. 2. Subir una unidad.

(b) 1. Desplazar $\frac{1}{x}$ una unidad a la derecha. 2. Reflejar respecto al eje x.

(c) 1. Desplazar $y = \frac{1}{x}$ una unidad a la izquierda. 2. Reflejar respecto al eje x. 3. Subir una unidad.

27. **(a)** Estirar $y = e^x$ por un factor de 2, y después bajar una unidad.

(b) Reflejar $y = e^x$ respecto al eje y, después reflejar respecto al eje x.

(c) Desplazar $y = e^x$ dos unidades a la derecha, después subir una unidad.

29. **(a)** Desplazar $y = \ln x$ una unidad a la derecha.

(b) Reflejar $y = \ln x$ respecto al eje x, después subir una unidad.

(c) Desplazar $y = \ln x$ tres unidades a la izquierda, después bajar una unidad.

31. **(a)** Reflejar $y = \operatorname{sen} x$ respecto al eje x, después subir una unidad.

(b) Desplazar $y = \operatorname{sen} x$ $\pi/4$ unidades a la derecha.

(c) Desplazar $y = \operatorname{sen} x$ $\pi/3$ unidades a la izquierda, después reflejar respecto al eje x.

35. **(b)** No, **(c)** No

37. siete

39. una, tres

41. seis a siete

43. $y = 5 \times (0.58)^x$

45. $y = 3^{1/3} \times (3^{-1/3})^x$

47. $\log y = \log 3 - 2x$

49. $\log y = \log 2 - (1.2)(\log e)x$

51. $\log y = \log 5 + (4 \log 2)\, x$

53. $\log y = \log 4 + (2 \log 3)x$

55. $y = (2)x^{-(\log 2)/\log 5}$

57. $y = \frac{1}{8} x^2$

59. $\log y = \log 2 + 5 \log x$

61. $\log y = 6 \log x$

63. $\log y = -2 \log x$

65. $\log y = \log 4 - 3 \log x$

67. $\log y = \log 3 + 1.7 \log x$, transformación log-log

69. $\log N(t) = \log 130 + (1.2t) \log 2$, transformación log-lineal

71. $\log R(t) = \log 3.6 + 1.2 \log t$, transformación log-log

73. $y = 1.8x^{0.2}$

75. $y = 4 \times 10^x$

77. $y = (5.7)x^{2.1}$

79. $\log_2 y = x$

81. $\log_2 y = -x$

83. **(a)** $\log N = \log 2 + 3t \log e$,

(b) pendiente: $3 \log e \approx 1.303$

85. $\log S = \log C + z \log A$, z = pendiente de recta

87. $v_{\max}$ = corte con recta horizontal,
$\frac{v_{\max}}{K_m}$ = corte con recta vertical

89. **(a)** $\log y = \log 1.162 + 0.933 \log x$

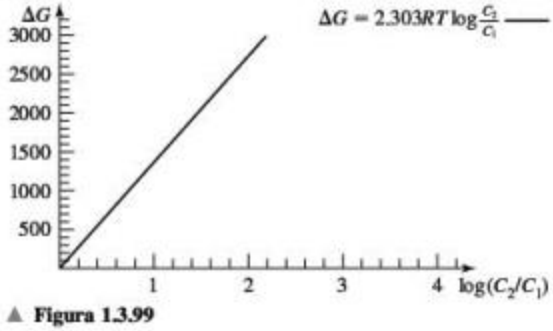
91. **(a)** $\alpha = -\ln 0.91/\text{m}$,
(b) 10%,
(c) 1 m: 90%, 2 m: 81%, 3 m: 72.9%,
(e) pendiente $= \log 0.9 = -\alpha/\ln 10$,
(f) $z = -\frac{1}{\alpha} \ln(0.)1 = \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.9)}$,
(g) lago claro: α pequeña; lago lechoso: α grande

93. $y = (100)(10^{1/3})^x$

95. $y = (2^{1/3})(2^{2/3})^x$

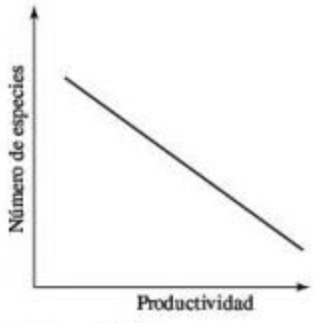
97. $y = \log x$

99.



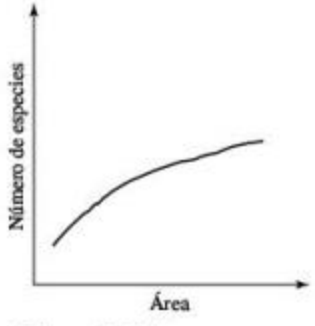
▲ **Figura 1.3.99**

101.



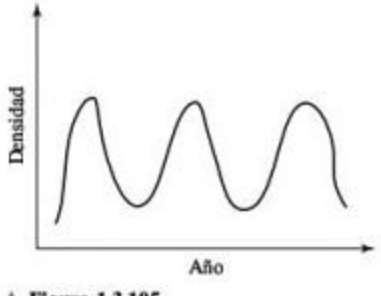
▲ **Figura 1.3.101**

103.



▲ **Figura 1.3.103**

105.

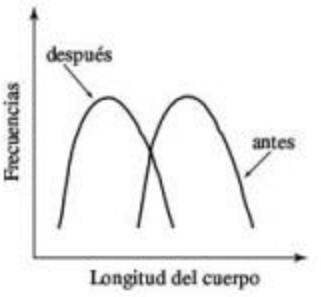


▲ **Figura 1.3.105**

107.

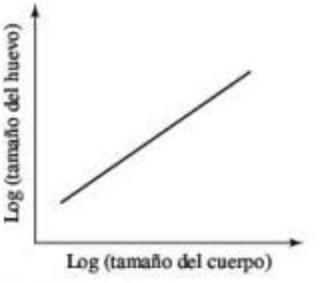
▲ **Figura 1.3.107**

109.



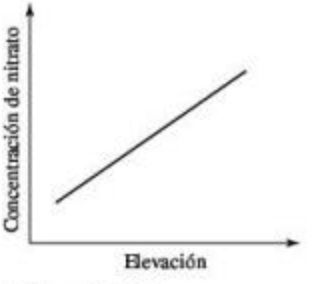
▲ **Figura 1.3.109**

111.



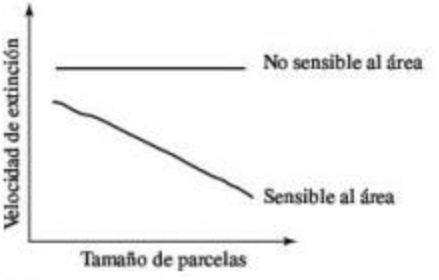
▲ **Figura 1.3.111**

113.



▲ **Figura 1.3.113**

115.



▲ **Figura 1.3.115**

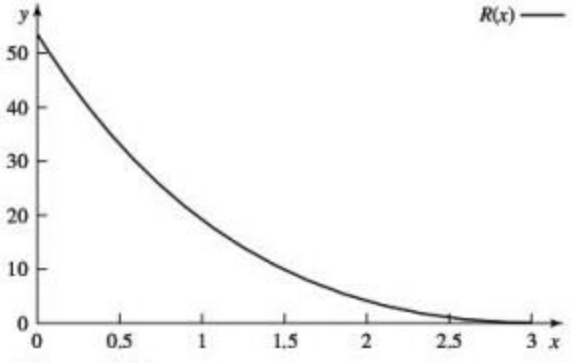
Sección 1.5

1. **(a)** 10^4, 1.1×10^4, 1.22×10^4, 1.35×10^4, 1.49×10^4

(b) $t = 10 \ln 10 \approx 23.0$

3. **(b)** $R(x) = -4kx^3 + 4k(a+b)x^2 - kb(4a-b)x + kab^2$, polinomio de grado 3

(c) $R(x) = (0.3)(5-x)(6-2x)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$



▲ **Figura 1.5.3**

5. **(a)** $L(t) = 0.69,\ 2.40,\ 4.62,\ 6.91$, $E(t) = 1.72,\ 2.20 \times 10^4,\ 2.69 \times 10^{43},\ 10^{434}$

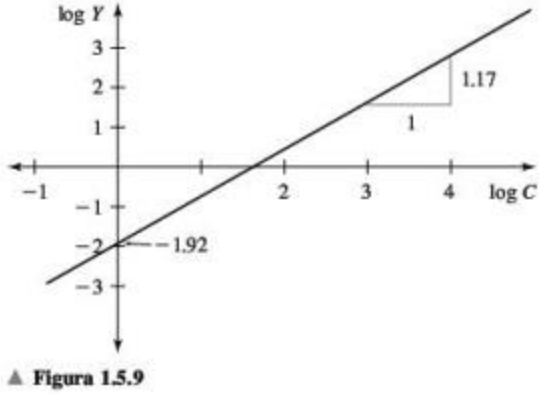
(b) 20.93 años, 3.13 ft

(c) $10^{536\,000\,000}$ años, 21.98 ft

(d) $L = 19.92$ ft, $E = 10^{195 \times 10^6}$ ft

7. $T = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{q}{100}\right)}$, T tiende a infinito cuando q tiende a 0.

9. **(a)**



▲ **Figura 1.5.9**

(b) $Y = C^{1.17} 10^{-1.92}$

(c) $Y_p = 2.25 Y_e$

(d) 8.5%

11. **(a)** 400 días por año

(b) $y = 4.32 \times 10^9 - 1.8 \times 10^8 x$

(c) 376×10^6 hasta 563×10^6 años

13. **(a)** machos: $S(t) = \exp[-(0.019t)^{3.41}]$; hembras: $S(t) = \exp[-0.022t)^{3.24}]$

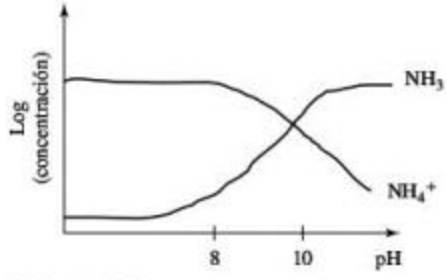
(b) machos: 47.27 días; hembras: 40.59 días

(c) los machos deberían vivir más tiempo

15. **(a)** $x = k$, $v = \frac{a}{2}$

(b) $x_{0.9} = 81 x_{0.1}$

17.



▲ **Figura 1.5.17**

19. $g(s) = \frac{v_{max}}{S_k} S$

▲ **Figura 1.5.19**

21. **(a)** $\alpha = -\frac{\ln(0.01)}{18\text{ m}} \approx 0.25 \frac{1}{\text{m}}$

(b) 4.87 m

Sección 2.1

1. 0.5, 0.33, 0.25, 0.2, 0.17, 0.14

3. 1, 0.25, 0.11, 0.063, 0.04, 0.028

5. −1, 0, 3, 8, 15, 24

7. 1, 4, 9, 16, 25, 36

9. 1, 2.72, 4.11, 5.65, 7.39, 9.36

11. 1, 0.33, 0.11, 0.037, 0.012, 0.0041

13. 1, 2, 4, 8, 16, 32

15. 161 minutos

17. 50 minutos

19. $N(t) = (40)(2^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

21. $N(t) = (20)(3^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

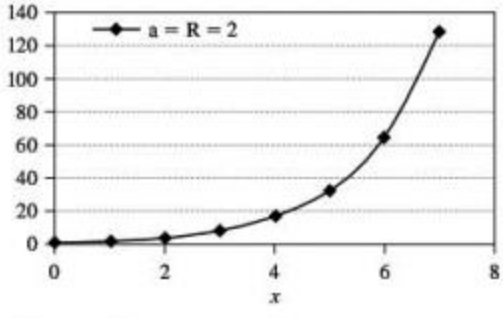
23. $N(t) = (5)(4^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

25. $N(t + 1) = 2N(t)$, $N(0) = 20$

27. $N(t + 1) = 3N(t)$, $N(0) = 10$

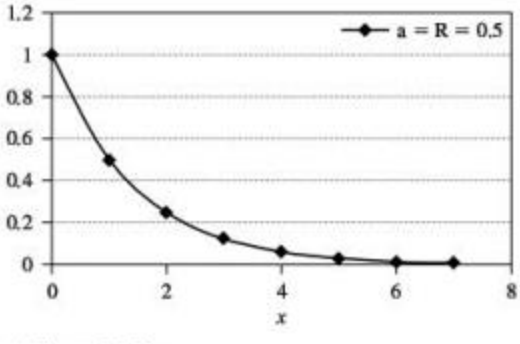
29. $N(t + 1) = 4N(t)$, $N(0) = 30$

31.



▲ **Figura 2.1.31**

33.



▲ **Figura 2.1.33**

35. 3, 6, 12, 24, 48, 96

37. 2, 6, 18, 54, 162, 486

39. 1, 5, 25, 125, 625, 3125

41. 1024, 512, 256, 128, 64, 32

43. 729, 243, 81, 27, 9, 3

45. 31250, 6250, 1250, 250, 50, 10

47. $N(t) = (15)(2^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

49. $N(t) = (12)(3^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

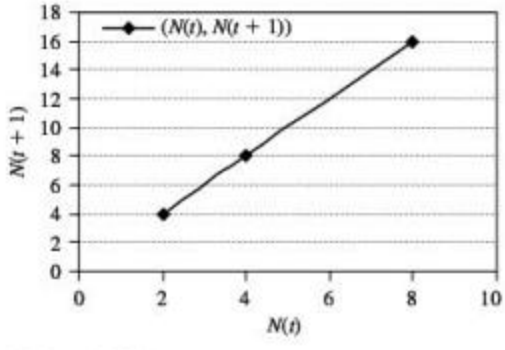
51. $N(t) = (24)(4^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

53. $N(t) = (5000)\left(\frac{1}{2}\right)^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

55. $N(t) = (8000)\left(\frac{1}{3}\right)^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

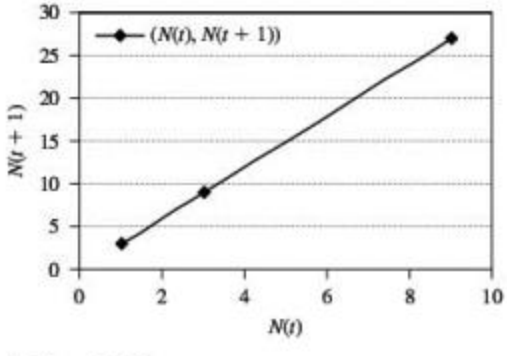
57. $N(t) = (1200)\left(\frac{1}{2}\right)^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

59.



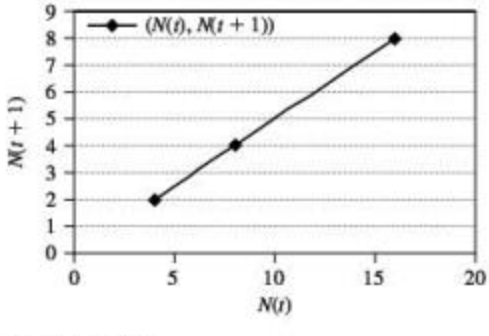
▲ **Figura 2.1.59**

61.



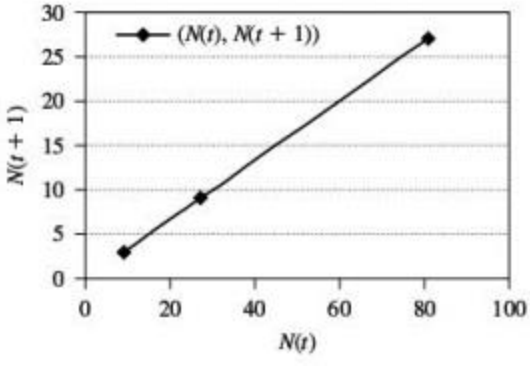
▲ **Figura 2.1.61**

63.



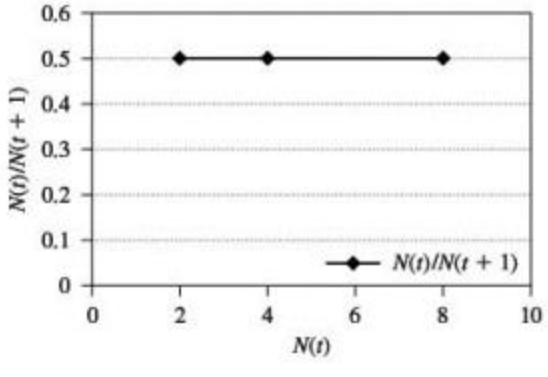
▲ **Figura 2.1.63**

65.



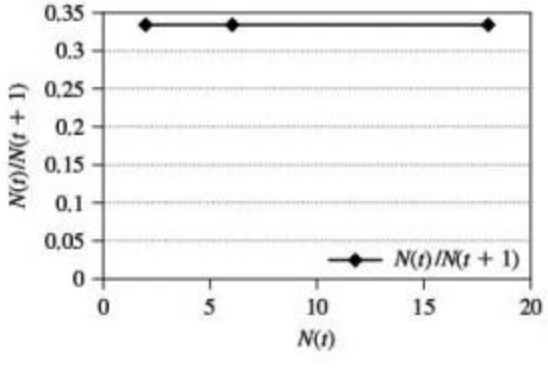
▲ **Figura 2.1.65**

67.



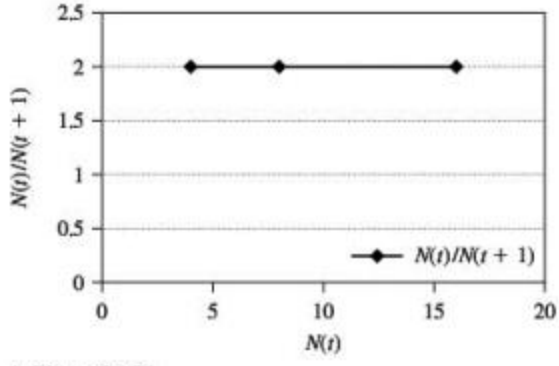
▲ **Figura 2.1.67**

69.



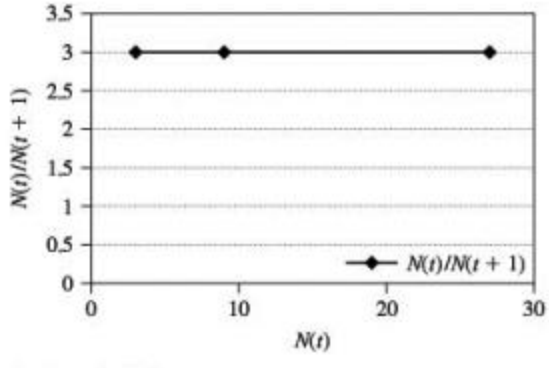
▲ **Figura 2.1.69**

71.



▲ **Figura 2.1.71**

73.



▲ **Figura 2.1.73**

75. **(a)** No, **(b)** Sí, **(c)** Sí

77. Recursos alimentarios limitados; hábitat limitado; lugares de anidamiento limitados.

Sección 2.2

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

5. $0, -1, 2, -3, 4, -5$

7. $0, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}$

9. 6, 7, 8, 9

11. $\frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}$

13. $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$

15. $\sqrt{6+e^6}, \sqrt{7+e^7}, \sqrt{8+e^8}, \sqrt{9+e^9}$

17. $a_n = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

19. $a_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

21. $a_n = \frac{1}{3^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

23. $a_n = (-1)^{n+1}(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

25. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

27. $a_n = \operatorname{sen}[(n+1)\pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

29. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$; 0

31. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; 1

33. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}$; 0

35. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; 0

37. $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}$; 0

39. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 0

41. $0, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}$; el límite no existe.

43. $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$; el límite no existe.

45. 1, 2, 4, 8, 16; el límite no existe.

47. 1, 3, 9, 27, 64; el límite no existe.

49. $a = 0$, $N = 100$

51. $a = 0$, $N = 10$

53. $a = 0$, $N = 100$

55. $a = 0$, $N = 100$

57. $a = 0$, $N = 31$

59. $a = 1$, $N = 99$

61. $a = 1$, $N = 100$

63. $a = 1$, $N = 9$

65. N es el mayor entero mayor o igual que $1/\varepsilon$.

67. N es el mayor entero mayor o igual que $\sqrt{1/\varepsilon}$.

69. N es el mayor entero mayor o igual que $1/\varepsilon$.

71. 0

73. 1

75. 1

77. 0

79. 0

81. 1

83. 2, 4, 8, 16, 32

85. 1, 1, 1, 1, 1

87. -6, 16, -28, 60, -116

89. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

91. $2, \frac{5}{2}, \frac{29}{10}, \frac{941}{290}, \frac{969\,581}{272\,890}$

93. 4

95. -3

97. 2, -2

99. $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$

101. 0, 5

103. 5; 5

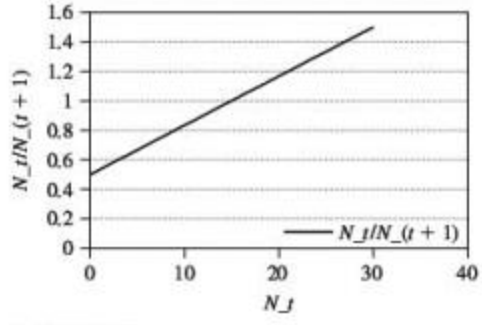
105. 0, 2; 2

107. $0, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

109. 2, -2; 2

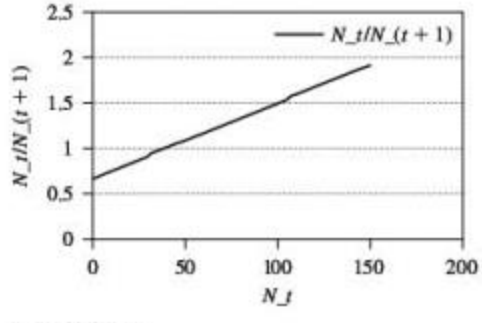
Sección 2.3

1. $N_t = \frac{2N_t}{1-\frac{1}{15}N_t}$



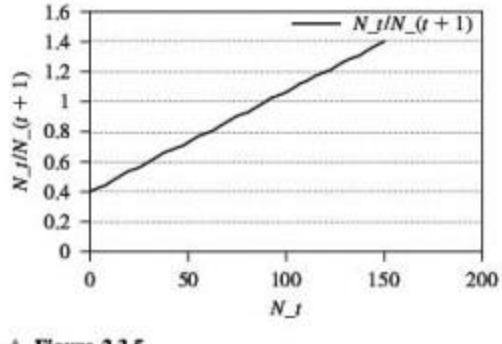
▲ **Figura 2.3.1**

3. $N_t = \frac{1.5N_t}{1-\frac{0.5}{40}N_t}$



▲ **Figura 2.3.3**

5. $N_t = \frac{2.5N_t}{1-\frac{1.5}{90}N_t}$



▲ **Figura 2.3.5**

7. $R = 2$, $K = 20$

9. $R = 1.5$, $K = 30$

11. $R = 4$, $K = 450$

13. 0, 90

15. 0, 30

17. 0, 60

19. Tamaño límite de población: 10

21. Tamaño límite de población: 15

23. Tamaño límite de población: 40

25. $r = 2$, $x_t = \frac{1}{20} N_t$

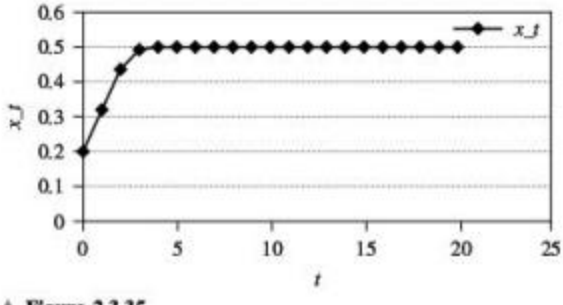
27. $r = 3$, $x_t = \frac{2}{45} N_t$

29. $r = 3.5$, $x_t = \frac{2.5}{105} N_t$

31. (c) $N_t = 1000M_t$, $K = 1000L$, (d) $M_t = 20$, $L = 5$

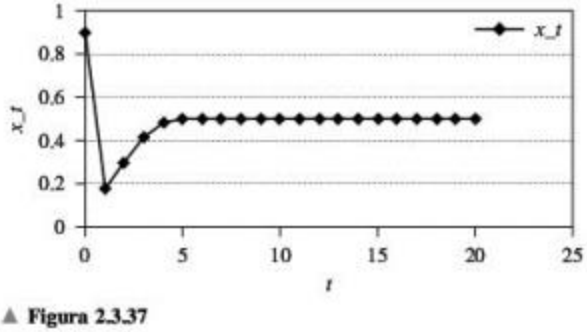
33. $z = 6$

35.



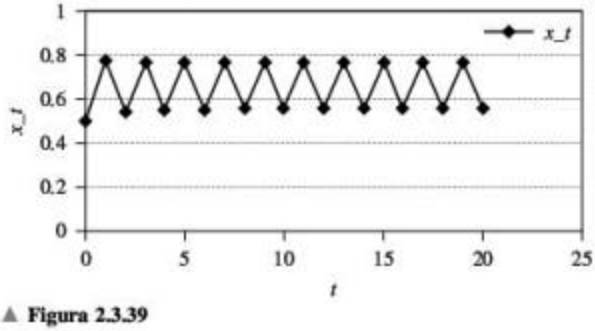
▲ **Figura 2.3.35**

39.



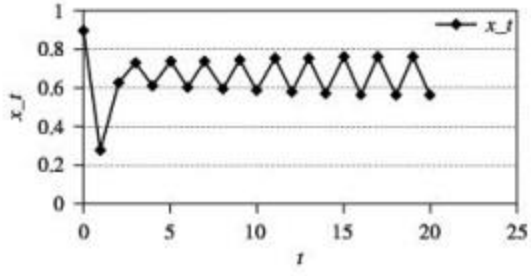
▲ **Figura 2.3.37**

39.



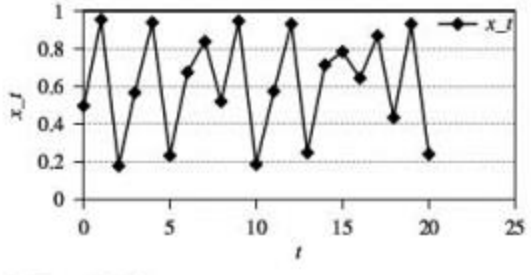
▲ **Figura 2.3.39**

41.



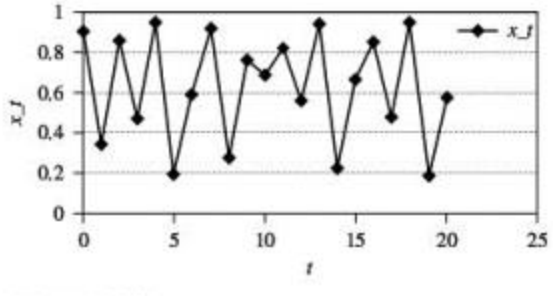
▲ **Figura 2.3.41**

43.



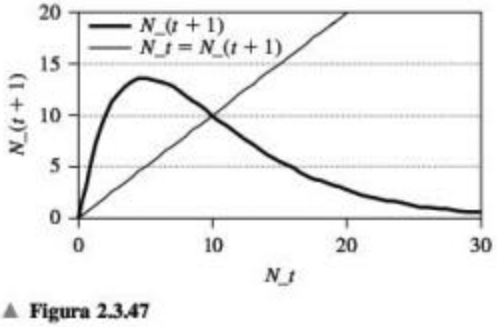
▲ **Figura 2.3.43**

45.



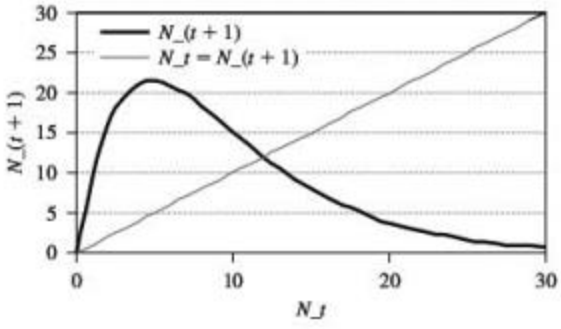
▲ **Figura 2.3.45**

47. Puntos de intersección: $N = 0$ y $N = 10$



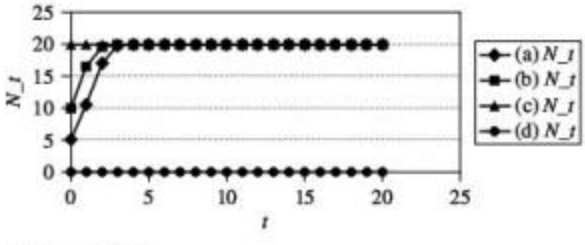
▲ **Figura 2.3.47**

49. Puntos de intersección: $N = 0$ y $N = 12$



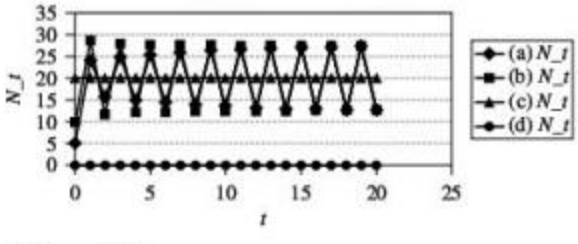
▲ **Figura 2.3.49**

51.



▲ **Figura 2.3.51**

53.



▲ **Figura 2.3.53**

57. Una pareja de conejos de un mes producen una pareja de conejos; una pareja de conejos de dos meses de edad producen dos parejas de conejos.

Sección 2.5

1. 0

3. 40

5. ∞

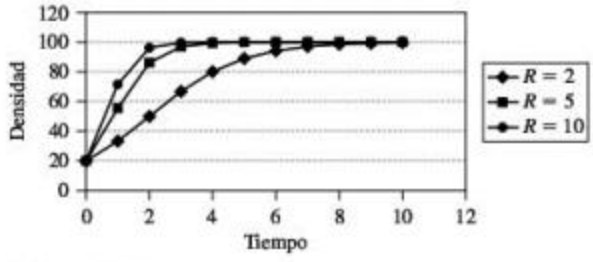
7. 1

9. 0

11. $a_n = \frac{2n+3}{2n+2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

13. $a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

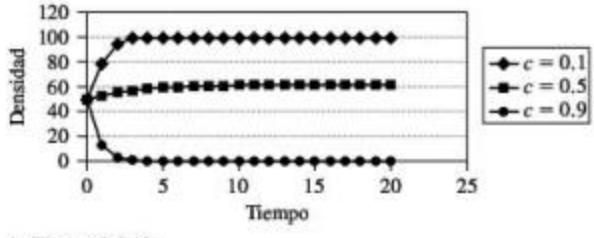
15.



▲ **Figura 2.5.15**

17. $\hat{R}_t \approx 0.8$ para t grande; se produciría la extinción.

19.



▲ **Figura 2.5.19**

Sección 3.1

1. -1

3. $-\frac{1}{2}$

5. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

7. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

9. $e^{-1/2}$

11. 0

13. 7

15. 0

17. 1

19. 0

21. $-\infty$

23. ∞

25. ∞

27. ∞

29. $\frac{1}{6}$

31. $\frac{1}{2}$

33. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

35. divergencia por oscilación

37. -9

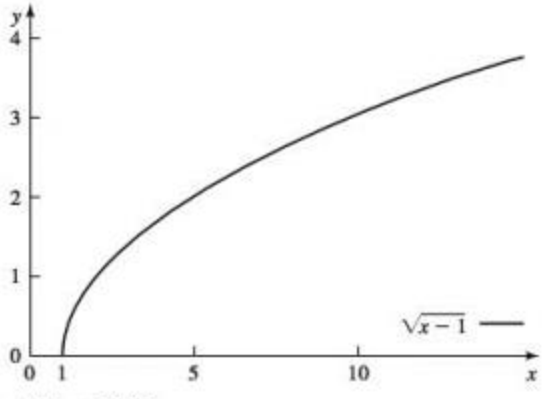
39. 54

41. $\frac{53}{3}$

43. $\frac{47}{2}$
45. $\frac{28}{3}$
47. 2
49. 4
51. $-\frac{1}{6}$
53. -5

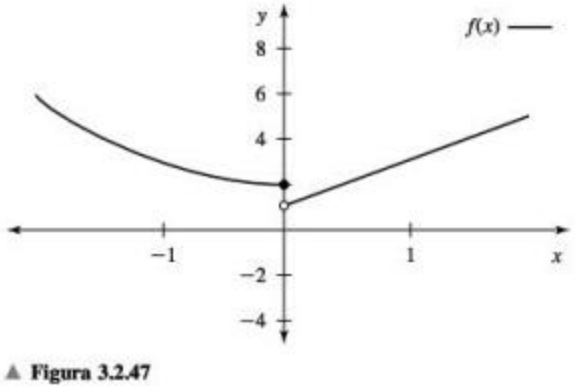
Sección 3.2

5. $f(2) = 3$
7. $a = 6$
9. $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$ no existe
11. $f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$
15. **(b)**



▲ **Figura 3.2.15**

(c) No
17. $x \in \mathbf{R}$
19. $x \neq 1$
21. $x \in \mathbf{R}$
23. $\{x : x < -1 \text{ o } x > 0\}$
25. $\{x \in \mathbf{R} : x \neq \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
27. **(a)** $f(x)$ no es continua en $x = 0$

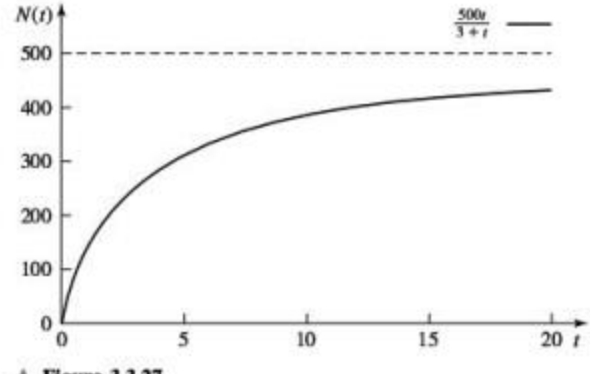


▲ **Figura 3.2.47**

(b) $c = 2$
29. $\frac{1}{2}$
31. 1
33. 3
35. 1
37. 1
39. 1
41. 2
43. $\frac{1}{4}$
47. 0

Sección 3.3

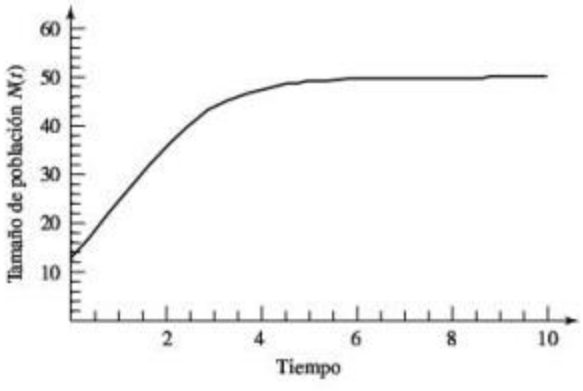
1. 0
3. ∞
5. 3
7. ∞
9. ∞
11. ∞
13. 4
15. 2
17. 0
19. 0
21. $\frac{3}{2}$
23. 0
25. a
27. **(a)**



▲ **Figura 3.3.27**

(b) 500
(c) 250

29. (a)

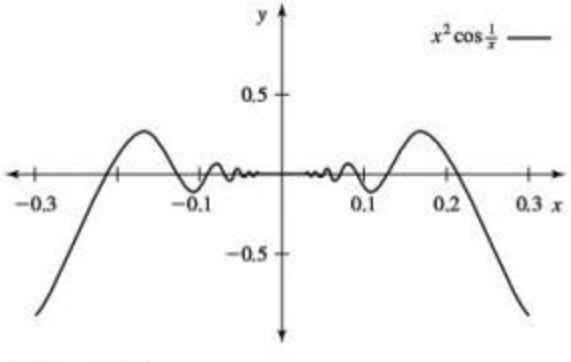


▲ **Figura 3.3.29**

(b) 50

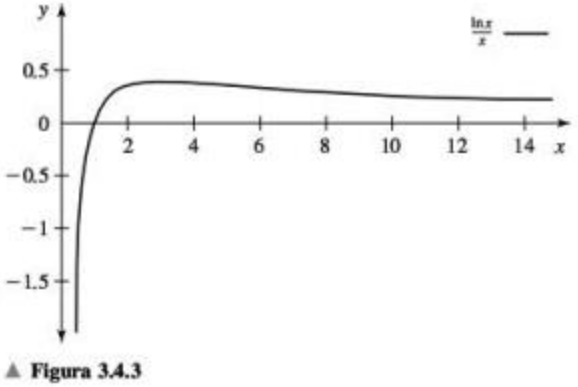
Sección 3.4

1. (a)



▲ **Figura 3.4.1**

3. (a)



▲ **Figura 3.4.3**

(b) $x \geqslant e$

5. 1

7. 5

9. π

11. 0

13. 1

15. 0

17. 0

Sección 3.5

1. (b) $f(0) = -1,\ f(2) = 3$

3. (b) $f(1) = \sqrt{3} < 2 < f(2) = \sqrt{6}$

5. $f(0) = 1 > 0,\ f(1) = e^{-1} - 1 < 0$

7. $x \approx 0.57$

9. (a) $x \approx -0.67$ **(c)** No

11. (a) $N(10) = 23$ **(b)** $N(10) = 23.5$ (en millones)

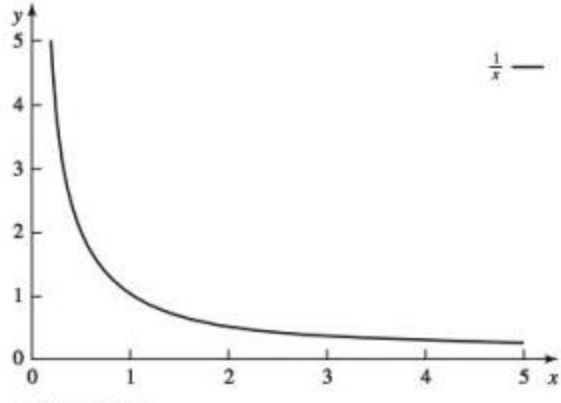
Sección 3.6

1. $0.495 < x < 0.505$

3. $\sqrt{\frac{11}{30}} < x < \sqrt{\frac{11}{30}}$

5. (b) $1.995 < x < 2.005$

7. (a)



▲ **Figura 3.6.7**

(b) $0 < x < \frac{1}{4}$

9. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

11. $\delta = 6\varepsilon - \varepsilon^2$ para $0 < \varepsilon \leqslant 3,\ \delta = 9$ para $\varepsilon > 3$

13. $\delta = \frac{2}{\sqrt{M}}$

15. $\delta = \frac{2}{\sqrt[4]{M}}$

17. $N = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$

19. $N = \frac{1}{\varepsilon}$

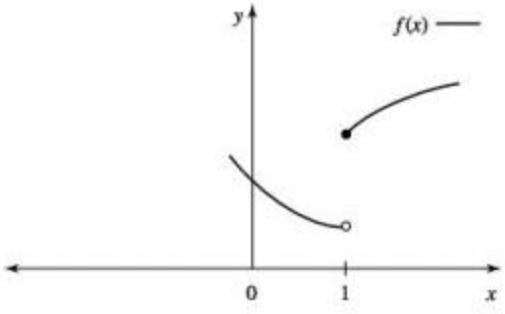
21. $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$

Sección 3.8

1. $x \in \mathbf{R}$

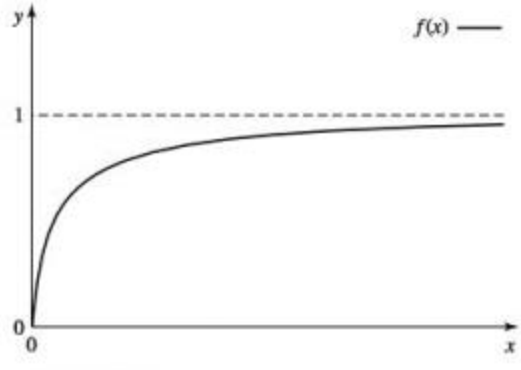
3. $x \in \mathbf{R}$

5.



▲ **Figura 3.8.5**

7.



▲ **Figura 3.8.7**

9. $f(-2) = -2$, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -3$

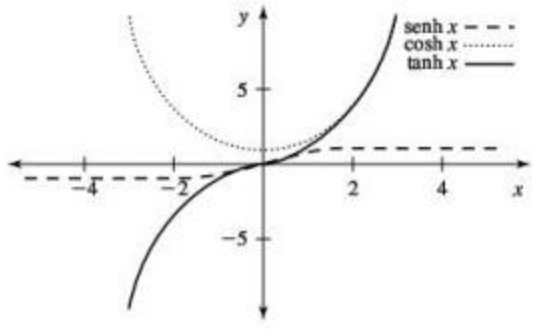
11. $a = 1.24 \times 10^6$, $k = 5$

13. **(a)** $g(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } \frac{1}{6} + 2k \leqslant x \leqslant \frac{5}{6} + 2k, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$

(b) $s(t)$ es continua, $g(t)$ no es continua

15. **(c)** $T_h = 0$: $g(N) = aTN = f(N)$

(d) $\lim_{N \to \infty}(aTN) = \infty$; $\lim_{N \to \infty} \frac{aTN}{1 + aT_hN} = \frac{T}{T_h}$



▲ **Figura 3.8.17**

(b) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{senh} x = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \cosh x = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} \cosh x = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$

Sección 4.1

1. 0

3. 2

5. 0

7. 0

9. $-2h$

11. $\sqrt{4 + h} - 2$

13. **(a)** $f'(-1) = -10$ **(b)** $y = -10x - 5$

15. **(a)** $f'(2) = -12$ **(b)** $y = \frac{1}{12}x - \frac{43}{6}$

17. $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}$

19. $y = 4x - 2$

21. $y = \frac{1}{4}x + 1$

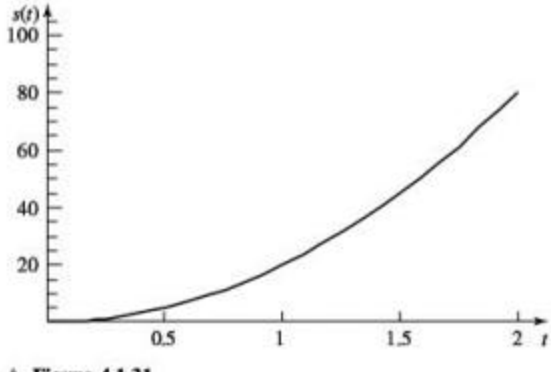
23. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

25. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

27. $f(x) = 2x^2$ y $x = a$

29. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $a = 2$

31. **(a)**



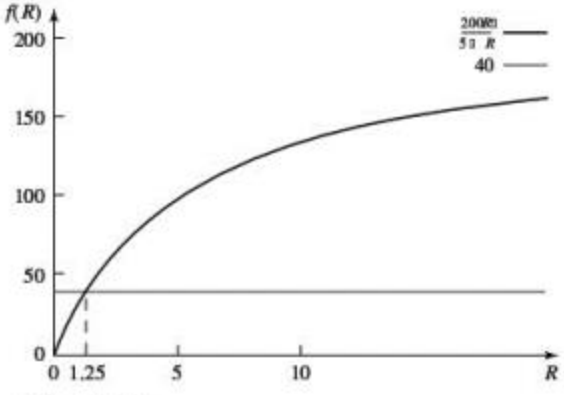
▲ **Figura 4.1.31**

(b) 40 km/h, **(c)** 40 km/h

33. **(a)** $s(\frac{3}{4}) = 30$, $s(1) = \frac{160}{3}$

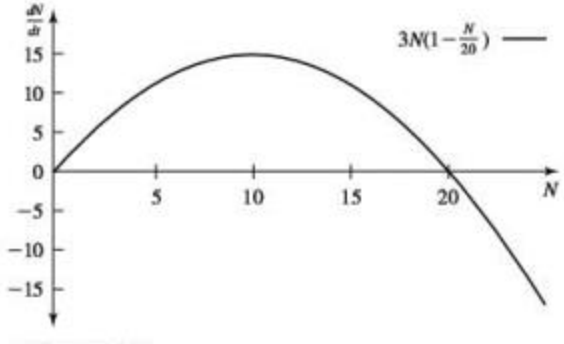
(b) $\frac{280}{3}$ **(c)** $v(\frac{3}{4}) = 80$, $|v(\frac{3}{4})| = 80$

35. $R^* = 1.25$



▲ **Figura 4.1.35**

37. $f(N) = 0$ para $N = 0$ y $N = 20$



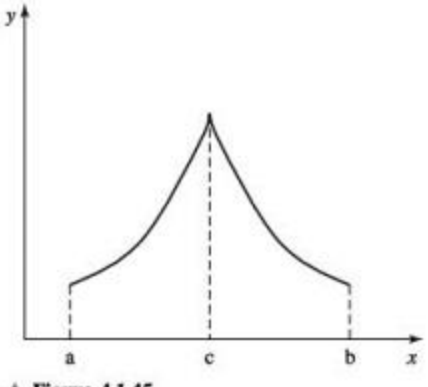
▲ **Figura 4.1.37**

39. $x = 7$ o $x = 4$; la reacción cesa cuando $x = 4$.

41. $\frac{dN}{dt} = 0$ para $N = 0$ o $N = K$

43. B

45.



▲ **Figura 4.1.45**

47. $x = -5$

49. $x = -2$

51. $x = 3$

53. $x = -1$

55. $x = \sqrt{1/2}$ y $x = -\sqrt{1/2}$

57. $x = 1$

59. $x = 0$

Sección 4.2

1. $6x^2 - 3$

3. $-10x^4 + 7$

5. $-4 - 10x$

7. $35s^6 + 6s - 5$

9. $-2t^3 + 4$

11. $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

13. $-12x^3 \tan\frac{\pi}{6}$

15. $3t^2e^{-2} + 1$

17. $3s^2e^3$

19. $60x^2 - 24x^5 + 72x^7$

21. $24x^2 + \frac{1}{8}$

23. $3ax^2$

25. $2ax$

27. $2rs$

29. $3rs^2x^2 - r$

31. $4(b-1)N^3 - \frac{2N}{b}$

33. $a^3 - 3at^2$

35. $V_0\gamma$

37. $1 - \frac{2N}{K}$

39. $2rN - 3\frac{r}{K}N^2$

41. $4\frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{c^3h^3}T^3$

43. $-191x + y - 377 = 0$

45. $8x - \sqrt{2}y - 18 = 0$

47. $y - 21x + 16 = 0$

49. $3y + x - 2 = 0$

51. $x + 24y - 71\sqrt{3} = 0$

53. $\sqrt{3}y - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 0$

55. $2ax - y - a = 0$

57. $(a^2 + 2)y - 4ax + 4a = 0$

59. $\frac{1}{3a}x + y + a + \frac{1}{3a} = 0$

61. $2a(a+1)y + \frac{1}{2}(a+1)^2x - 8a^2 - (a+1)^2 = 0$

63. $(0, 0)$

65. $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

67. $(0, 0)$ y $(\frac{2}{9}, -\frac{4}{243})$

69. $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{17}{96})$, y $(4, -\frac{160}{3})$

71. (0, 4); solo punto
73. $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$; solo punto
75. $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{7}{9}\sqrt{3}+2)$; $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{7}{9}\sqrt{3}+2)$
77. Recta tangente: $y = 2x - 1$
79. $y = 2ax - a^2$
81. $P'(x)$ es un polinomio de grado 3.

Sección 4.3

1. $f'(x) = 4 + 2x - 6x^2$
3. $f'(x) = 3x^2(3x - 14x^2) + (x^3 + 17)(3 - 28x)$
5. $f'(x) = x(2x + 3x^2) + (\frac{1}{2}x^2 - 1)(2 + 6x)$
7. $f'(x) = \frac{2x}{5}$
9. $f'(x) = 6(3x - 1)$
11. $f'(x) = -12(1 - 2x)$
13. $g'(s) = 2(4s - 5)(2s^2 - 5s)$
15. $g'(t) = 6(4t - 20t^3)(2t^2 - 5t^4)$
17. $y = x - 1$
19. $y = -56x - 64$
21. $y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{3}$
23. $y = \frac{1}{5}x$
25. $f'(x) = (12x + 5)(1 - x) - (2x - 1)(3x + 4)$
27. $f'(x) = (6x^2 - 12x + 1)(1 - x^2) - 2x(x - 3)(2x^2 + 1)$
29. $f'(x) = a(4x - 3)$
31. $f'(x) = 8ax(x^2 - a)$
33. $g'(t) = 2a(at + 1)$
35. 11
37. $y' = 2f(x) + 2xf'(x)$
39. $y' = -15x^2f(x) - 5x^3f'(x) - 2$
41. $y' = 3f'(x)g(x) + 3f(x)g'(x)$
43. $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + 4g(x)g'(x)$
45. $f(B) = Bg(B)$ con $f'(0) = g(0)$
47. $f'(N) = r[(a - 2N)(1 - \frac{N}{K}) - \frac{1}{K}(aN - N^2)]$
49. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
51. $\frac{-4x+2x^2+1}{(1-x)^2}$
53. $f'(x) = \frac{2x^3-3x^2+3}{(1-x)^2}$
55. $h'(t) = \frac{t^2+2t-4}{(t+1)^2}$
57. $f'(s) = \frac{2s^2-4s+4}{(1-s)^2}$
59. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 1) + \sqrt{x}$
61. $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + 2x\sqrt{3x}$
63. $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x^4}$
65. $f'(x) = 4x - \frac{3-6x}{x^4}$
67. $g'(s) = \frac{2s^{-1/3} - s^{-2/3} - 1}{(3s^{2/3} - 1)^2}$
69. $f'(x) = (-2)(\sqrt{2x} + \frac{2}{\sqrt{x}}) + (1 - 2x)(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{x^{3/2}})$
71. $y = -8x - \frac{41}{3}$
73. $y = \frac{7}{16}x - 1$
75. $f'(x) = \frac{3a}{(3+x)^2}$
77. $f'(x) = \frac{8ax}{(4+x^2)^2}$
79. $f'(R) = \frac{2Rk+R^2}{(k+R)^2}$
81. $h'(t) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}(t - a) + \sqrt{at} + a$
83. $-\frac{5}{18}$
85. $y' = \frac{2xf(x) - x^2f'(x)}{[f(x)]^2}$
87. $y' = \frac{xf'(x) - f(x)}{[f(x) + x]^2}$
89. $y' = \frac{f'(x)g(x) - 2f(x)g'(x)}{[g(x)]^3}$
91. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)g(x) + \sqrt{x}f'(x)g(x) + \sqrt{x}f(x)g'(x)$
93. $y = -\frac{c}{x_1^2}x + 2\frac{c}{x_1} + y_1$

Sección 4.4

1. $2(x - 2)$
3. $-24x(1 - 3x^2)^3$
5. $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$
7. $\frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}$
9. $-\frac{12x^2}{(x^3-2)^5}$
11. $\frac{2x-3}{(2x^2-1)^{3/2}}$
13. $\frac{1-3x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^3}$
15. $\frac{2\sqrt{s}+1}{4\sqrt{s}\sqrt{s+\sqrt{s}}}$
17. $\frac{-9t^2}{(t-3)^4}$
19. $(r^2 - r)^2(r + 3r^3)^{-5}[3(2r - 1)(r + 3r^3) - 4(1 + 9r^2)(r^2 - r)]$
21. $-\frac{4}{5}x^3(3 - x^4)^{-4/5}$
23. $\frac{2x-2}{7(x^2-2x+1)^{6/7}}$
25. $g'(s) = \pi(3s^7 - 7s)^{\pi-1}(21s^6 - 7)$
27. $\frac{2}{5}(3t + \frac{3}{t})^{-3/5}(3 - \frac{3}{t^2})$
29. $\frac{a^x}{\sqrt{a^x-2}}$
31. $g'(N) = \frac{bk - bN}{(k+N)^3}$
33. $g'(T) = -3a(T_0 - T)^2$
35. (a) $\frac{2x}{x^2+3}$, (b) $\frac{1}{2(x-1)}$
37. $2(\frac{f(x)}{g(x)} + 1)\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
39. $\frac{2f(x)f'(x)[g(2x)+2x] - [f(x)]^2(g'(2x)\cdot 2+2)}{[g(2x)+2x]^2}$

41. $y' = 3(\sqrt{x^3 - 3x} + 3x)^2 (\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}} + 3)$

43. $y' = 36x(3x^2 - 1)(1 + (3x^2 - 1)^3)$

45. $y' = 3(\frac{2x+1}{3(x^3-1)^3-1})^2 \frac{6(x^3-1)^3-2-27x^2(2x-1)(x^3-1)}{(3(x^3-1)^3-1)^2}$

47. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

49. $\frac{dy}{dx} = -(\frac{y}{x})^{1/4}$

51. $\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{xy} - \frac{y}{x}$

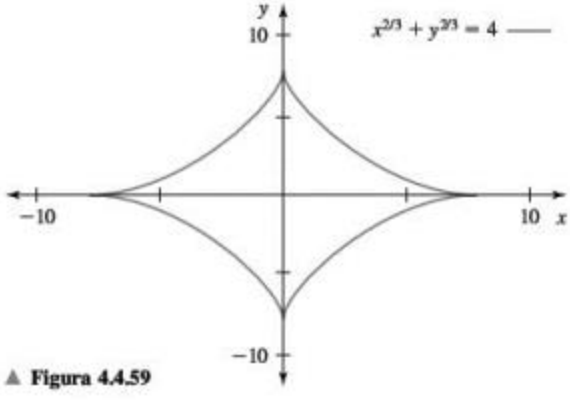
53. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

55. (a) $y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$ (b) $y = -\frac{3}{4}x$

57. (a) $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$ (b) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{136}{9}$

59. (a) $(27)^{1/6}$

(b)



▲ **Figura 4.4.59**

61. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

63. $-\frac{3}{4}$

65. $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

67. $\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

69. $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi} \frac{\text{m}}{\text{min}}$

71. $\frac{183}{\sqrt{21}} \frac{\text{mi}}{\text{hr}}$ para $t = 20$ min y $t = 40$ min

73. $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$

75. $g'(x) = 2(x+1)^{-2}$, $g''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$

77. $g'(t) = \frac{9t^2+2}{2\sqrt{3t^3+2t}}$, $g''(t) = \frac{27t^4+36t^2-4}{4(3t^3+2t)^{3/2}}$

79. $f'(s) = \frac{3}{4}(s^{1/2} - \frac{1}{s})^{-1/2}$, $f''(s) = -\frac{3}{8}\frac{2\sqrt{s} + \frac{1}{s^2}}{s^{3/2} - \frac{1}{s^3}}$

81. $g'(t) = -\frac{5}{2}t^{-7/2} - \frac{1}{2}t^{-1/2}$, $g''(t) = \frac{35}{4}t^{-9/2} + \frac{1}{4}t^{-3/2}$

83. $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(5)}(x) = 120$, $f^{(6)} = \cdots = f^{(10)}(x) = 0$

85. $p(x) = 3x^2 + 2x + 3$

87. (a) velocidad: $v_0 - gt$, aceleración: $-g$,

(b) $t = \frac{v_0}{g}$

Sección 4.5

1. $f'(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} x$

3. $f'(x) = 3\cos x - 5\operatorname{sen} x - 2\sec x \tan x$

5. $f'(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$

7. $f'(x) = 3\cos(3x)$

9. $f'(x) = 6\cos(3x + 1)$

11. $f'(x) = 4\sec^2(4x)$

13. $f'(x) = 4\sec(1 + 2x)\tan(1 + 2x)$

15. $f'(x) = 6x\cos(x^2)$

17. $f'(x) = 2x\sec(x^2 - 3)\tan(x^2 - 3)$

19. $f'(x) = 6\operatorname{sen} x \cos x$

21. $f'(x) = -8x\operatorname{sen}(x^2)$

23. $f'(x) = -8\operatorname{sen} x \cos x$

25. $f'(x) = -4x\sec^2(1 - x^2)$

27. $f'(x) = -18\tan^2(3x - 1)\sec^2(3x - 1)$

29. $f'(x) = \frac{2x\cos(2x^2 - 1)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2 - 1)}}$

31. $g'(s) = \frac{-\operatorname{sen} s}{2\sqrt{\cos s}}$

33. $g'(t) = \frac{2\cos(2t)[\cos(6t) - 1] + 6\operatorname{sen}(6t)[\operatorname{sen}(2t) + 1]}{[\cos(6t) - 1]^2}$

35. $f'(x) = \frac{2x\sec(x^2-1)[\tan(x^2-1) + \cot(x^2+1)]}{\csc(x^2+1)}$

37. $f'(x) = 2\cos(2x-1)\cos(3x+1) - 3\operatorname{sen}(2x-1)\operatorname{sen}(3x+1)$

39. $f'(x) = 6x\sec^2(3x^2-1)\cot(3x^2+1) - 6x\csc^2(3x^2+1)\tan(3x^2-1)$

41. $f'(x) = \sec^2 x$

43. $f'(x) = -\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$

45. $g'(x) = \frac{-6x\cos(3x^2 - 1)}{\operatorname{sen}^2(3x^2 - 1)}$

47. $g'(x) = \frac{-10x\cot(1 - 5x^2)}{\csc^2(1 - 5x^2)}$

49. $h'(x) = -\frac{6\sec^2(2x) - 3}{(\tan(2x) - x)^2}$

51. $h'(s) = 0$

53. $f'(x) = \frac{2(1+x^2)\cos(2x) - 2x\operatorname{sen}(2x)}{(1+x^2)^2}$

55. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sec^2(\frac{1}{x})$

57. $f'(x) = \frac{2(\sec x^2)[x(\tan x^2) - \tan x]}{\sec^2 x}$

59. $x = \frac{3}{2} + 3k$, $k \in \mathbf{Z}$

65. $f'(x) = \frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

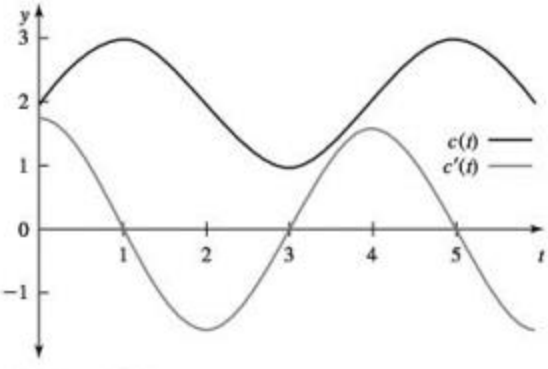
67. $f'(x) = (\cos\sqrt{3x^3 + 3x})\frac{9x^2+3}{2\sqrt{3x^3+3x}}$

69. $f'(x) = 4x\,\text{sen}\,(x^2 - 1)\cos(x^2 - 1)$

71. $f'(x) = 27x^2\tan^2(3x^3 - 3)\sec^2(3x^3 - 3)$

73. (a) $\frac{dc}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t)$

(b)



▲ **Figura 4.5.73**

(c) (i) $\frac{dc}{dt} = 0$, (ii) creciente,

(iii) $c(t)$ tiene una tangente horizontal en cada máximo o mínimo

Sección 4.6

1. $f'(x) = 2e^{2x}$

3. $f'(x) = -12e^{1-3x}$

5. $f'(x) = (-4x + 3)e^{2x^2+3x-1}$

7. $f'(x) = (21x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}})e^{7x^3-\sqrt{x}+3}$

9. $f'(x) = e^x(1 + x)$

11. $f'(x) = xe^{-x}(2 - x)$

13. $f'(x) = \frac{e^x(1+x^2-2x)-2x}{(1+x^2)^2}$

15. $f'(x) = \dfrac{2e^x - 2e^{-x} - 2}{(2 + e^x)^2}$

17. $f'(x) = (\cos x)e^{\text{sen}\,x}$

19. $f'(x) = e^{\text{sen}\,(x^2-1)}\cos(x^2 - 1)2x$

21. $f'(x) = e^x\cos(e^x)$

23. $f'(x) = (2e^{2x} + 1)\cos(e^{2x} + x)$

25. $f'(x) = (1 - \cos x)\exp(x - \text{sen}\,x)$

27. $g'(s) = \exp[\sec s^2)(\sec s^2)(\tan s^2)(2s)$

29. $f'(x) = (\text{sen}\,x + x\cos x)e^{x\,\text{sen}\,x}$

31. $f'(x) = (-3)(2x + \sec^2 x)e^{x^2+\tan x}$

33. $f'(x) = (\ln 2)2^x$

35. $f'(x) = (\ln 2)2^{x+1}$

37. $f'(x) = 2(\ln 5)5^{2x-1}$

39. $f'(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2} + 1$

41. $h'(t) = (2t)(\ln 2)2^{t^2-1}$

43. $f'(x) = (\ln 2)\frac{1}{2\sqrt{x}}\,2^{\sqrt{x}}$

45. $f'(x) = (\ln 2)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,2^{\sqrt{x^2-1}}$

47. $h'(t) = \frac{\ln 5}{2\sqrt{t}}\,5^{\sqrt{t}}$

49. $g'(x) = -2(\ln 2)(\text{sen}\,x)2^{2\cos x}$

51. $g'(r) = \frac{\ln 31}{5r^{1/5}}\,3^{r^{1/5}}$

53. 2

55. 0

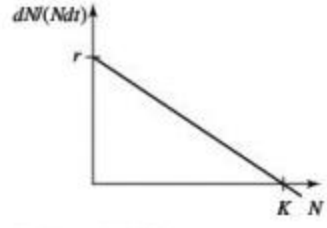
57. $\frac{1}{\ln 2}$

59. (a) $N(0) = 1$

61. $\frac{dN}{dt} = (\ln 2)N(t)$ lo que implica que $\frac{dN}{dt}$ es proporcional a $N(t)$

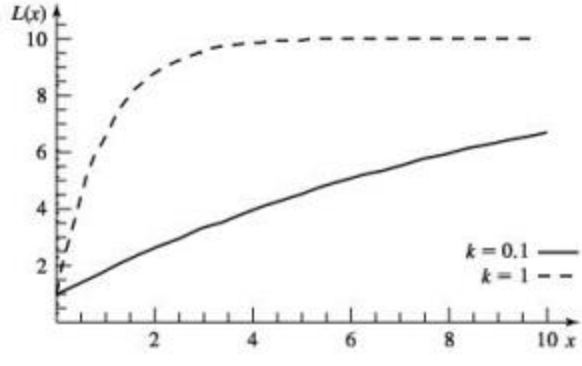
63. (a) $\frac{dN}{dt} = \dfrac{rK(\frac{K}{N(0)}-1)e^{-rt}}{[1+(\frac{K}{N(0)}-1)e^{-rt}]^2}$,

(c)



▲ **Figura 4.6.63**

65. (a)



▲ **Figura 4.6.65**

(b) L_∞ es el tamaño límite L_0 es el tamaño inicial.

(c) El pez con $k = 1$ alcanza $L = 5$ más rápido.

(d) Con la edad, la velocidad de crecimiento disminuye.

(e) Cuanto mayor es k, más rápido crece y alcanza su tamaño límite el pez.

67. $\frac{dW}{dt} = -4W(t)\,\frac{1}{\text{días}}$

69. $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{5}W(t)\,\frac{1}{\text{días}}$

71. (a) $W(4) = 6e^{-12}$, (b) vida media: $\frac{\ln 2}{3}$

73. (a) $\frac{dW}{dt} = -(\ln\frac{5}{2})W(t)$, (b) $W(3) = 5(\frac{5}{2})^{-3}$,

(c) vida media: $\frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}$

Sección 4.7

1. $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = x$
3. $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{x}}$
5. $f^{-1}(x) = (\frac{3-x}{2})^{1/3}$, $x \leq 3$, $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{6}(\frac{2}{3-x})^{2/3}$
7. $\frac{d}{dx}f^{-1}(0) = \frac{1}{4}$
9. $\frac{d}{dx}f^{-1}(2) = 4$
11. $\frac{d}{dx}f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$
13. $\frac{d}{dx}f^{-1}(\pi) = \frac{1}{2}$
15. $\frac{d}{dx}f^{-1}(0) = 1$
17. $\frac{d}{dx}f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
19. $\frac{d}{dx}f^{-1}(1) = 1$
21. $\frac{d}{dx}f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$
23. $f'(x) = \frac{1}{x+1}$
25. $f'(x) = \frac{-2}{1-2x}$
27. $f'(x) = \frac{2}{x}$
29. $f'(x) = \frac{3}{x}$
31. $f'(x) = 2(\ln x)\frac{1}{x}$
33. $f'(x) = \frac{4(\ln x)^2}{x}$
35. $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$
37. $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$
39. $f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{1+2x}$
41. $f'(x) = (1 - \frac{1}{x})\exp[x - \ln x]$
43. $f'(x) = \cot x$
45. $f'(x) = \frac{2x\sec^2(x^2)}{\tan(x^2)}$
47. $f'(x) = \ln x + 1$
49. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
51. $h'(t) = \cos(\ln(3t))\frac{1}{t}$
53. $f'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$ para $|x| \neq \sqrt{3}$
55. $f'(x) = \frac{-2x}{(\ln 10)(1-x^2)}$
57. $f'(x) = \frac{3x^2-3}{(\ln 10)(x^3-3x)}$
59. $f'(u) = \frac{4u^3}{(\ln 3)(3+u^4)}$
63. $\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$
65. $\frac{dy}{dx} = (\ln x)^x[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}]$
67. $\frac{dy}{dx} = x^{\ln x}2(\ln x)\frac{1}{x}$
69. $\frac{dy}{dx} = x^{1/x-2}(1 - \ln x)$
71. $\frac{dy}{dx} = [x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}]x^{x^x}$
73. $\frac{dy}{dx} = x^{\cos x}[\frac{\cos x}{x} - (\operatorname{sen} x)(\ln x)]$
75. $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{27}{9x-2} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{9x^2}{4(3x^3-7)}$

Sección 4.8

1. $\sqrt{65} \approx 8.0625$, error $= 2.42 \times 10^{-4}$
3. $\sqrt[3]{127} \approx \frac{374}{75}$, error $\approx 3.57 \times 10^{-5}$
5. $(0.99)^{25} \approx 0.75$, error ≈ 0.0278
7. $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 0.02) \approx 1$, error $\approx 2.00 \times 10^{-4}$
9. $\ln(1.01) \approx 0.01$, error $\approx 4.97 \times 10^{-5}$
11. $L(x) = 1 - x$
13. $L(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
15. $L(x) = 1 - 2x$
17. $L(x) = 1 + x$
19. $L(x) = \frac{1}{e}x$
21. $L(x) = 1 + x$
23. $L(x) = 1 - x$
25. $L(x) = x$
27. $L(x) = 1 - nx$
29. $L(x) = x$
31. 100.3
33. $B(1.1) \approx 5.005$
35. [1.8, 2.2]
37. [10.8, 13.2]
39. [5.91, 8.87]
41. $\pm 6\%$
43. $\pm 0.668\%$
45. $\pm 9\%$
47. $\pm 2.4\%$
49. $\pm \frac{(a+b-2x)x}{(a-x)(b-x)}(100\frac{\Delta x}{x})$

Sección 4.10

1. $f'(x) = -12x^3 - \frac{1}{x^{3/2}}$
3. $h'(t) = \frac{1}{3}(\frac{1+t}{1-t})^{2/3}\frac{-2}{(1+t)^2}$
5. $f'(x) = 2e^{2x}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) + e^{2x}\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$
7. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}\ln x - \frac{1}{x}\ln(x+1)}{[\ln x]^2}$
9. $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, $f''(x) = e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$
11. $h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $h''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x + y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy}$

15. $\frac{dy}{dx} = 1 - 2(x - y)$

17. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{y^3}$

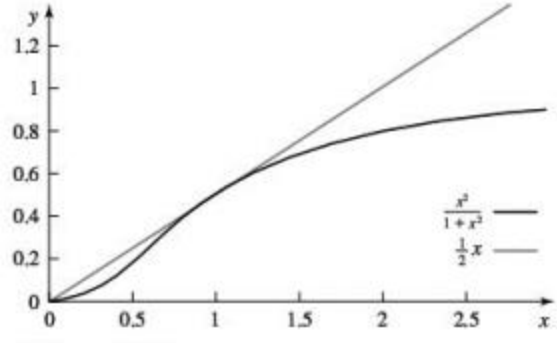
19. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$

21. $5.70 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$

23. **(a)** $\frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$ **(b)** $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

(c) $\frac{dy}{dx} = 2f(x)f'(x)$

25. **(a)**



▲ **Figura 4.10.25**

(b) $c = 1, y = \frac{1}{2}x$

27. $y - \frac{1}{2}e^{-(\pi/3)^2} = e^{-(\pi/3)^2}(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{3})$

29. $y = x$

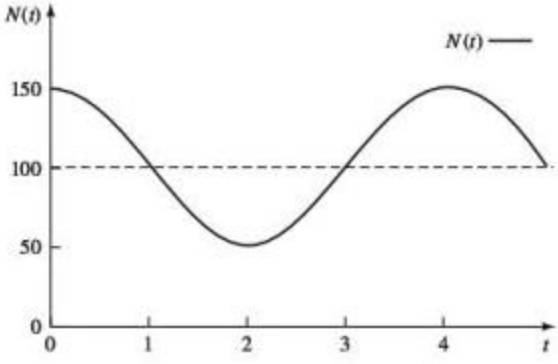
31. $p(x) = 2x^2 + 4x + 8$

33. **(a)** $s(5.5) \approx 54.84$ millas

(b) $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3\pi + 3\pi \operatorname{sen}(\pi t)$, $a(t) = \frac{dv}{dt} = 3\pi^2 \cos(\pi t)$

(c) $c(t) \geq 0$ **(d)** Tres valles y tres colinas

35. **(b)** $N(t) = 100 + 50\cos(\frac{\pi}{2}t)$



▲ **Figura 4.10.35**

(c) El tamaño de la población muestra oscilaciones.

37. 9.33%

Sección 5.1

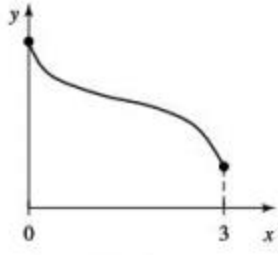
1. mínimo absoluto: $(0, -1)$; máximo absoluto: $(1, 1)$

3. mínimo absoluto: $(\frac{3\pi}{2}, -1)$; máximo absoluto: $(\frac{\pi}{2}, 1)$

5. mínimo absoluto: $(0, 0)$; máximo absoluto: $(-1, 1)$ y $(1, 1)$

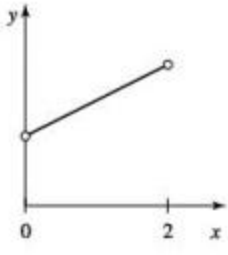
7. mínimo absoluto: $(2, e^{-2})$; máximo absoluto: $(0, 1)$

9.



▲ **Figura 5.1.9**

11.



▲ **Figura 5.1.11**

13. máximo local = máximo global = $(-1, 3)$, no hay máximos locales ni globales

15. mínimo local = mínimo global = $(0, -2)$, máximo local = máximo global = $(-1, -1)$ y $(1, -1)$

17. mínimo local = $(-2, -3)$ y $(1, 0)$, mínimo global = $(-2, -3)$, máximo local = máximo global = $(0, 1)$

19. $f'(0) = 0$; $f(0) < f(x)$ para todo $x \neq 0$

21. $f'(0) = 0$; $f(0) > f(x)$ para todo $x \neq 0$

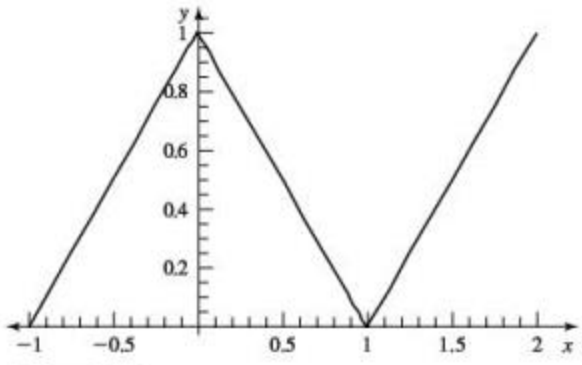
23. $f'(0) = 0$; $f(x) < 0$ para $x < 0$ y $f(x) > 0$ para $x > 0$

25. $f'(-2) = 0$; $f(x) < 0$ para $x < -2$ y $f(x) > 0$ para $x > -2$

27. $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ para $x \neq 0$; $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1$.

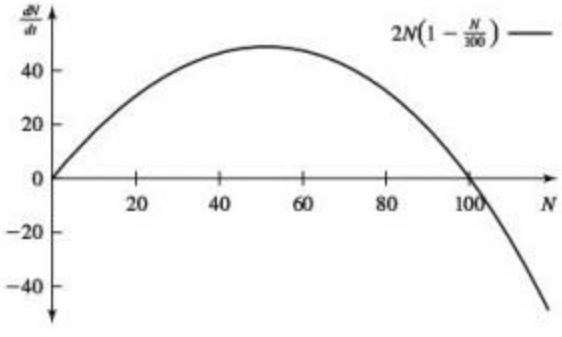
29. $f(1) = f(-1) = 0$ y $f(x) > 0$ para $x \neq 1, -1$;
$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -2 \neq \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2$ y
$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -2 \neq \lim_{x \to -1^+} f'(x) = 2$.

31. mínimo local = máximo global = $(-1, 0)$ y $(1, 0)$; máximo local = máximo global = $(0, 1)$ y $(2, 1)$



▲ **Figura 5.1.31**

33. (a)



▲ **Figura 5.1.33**

$\frac{dN}{dt}$ es máximo para $N = 50$

(b) $f'(N) = r - \frac{2r}{K}N$

35. (a) Pendiente: 2,

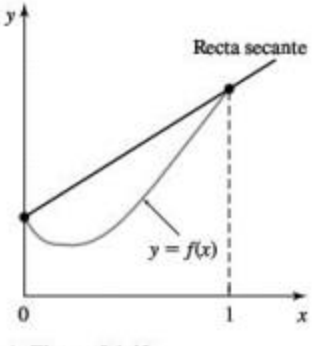
(b) $x = 1$; garantizado por el teorema del valor medio.

37. Pendiente: 0; $c = 0$

39. [0, 1]

41. $f(-1) = 1$, $f(2) = -2$, $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = -1$

43.



▲ **Figura 5.1.43**

El teorema del valor medio garantiza ese punto.

45. (a) Pendiente: $a + b$,

(b) $c = \frac{a+b}{2}$

47. Utilice el teorema del valor medio y argumente que la pendiente de la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$ y la pendiente de la recta secante que une $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$ tienen signos opuestos, siendo $c \in (a, b)$ con $f(c) \neq 0$.

49. (a) 0.25 m/s,

(b) $\frac{3}{100}t^2$, $0 < t < 5$,

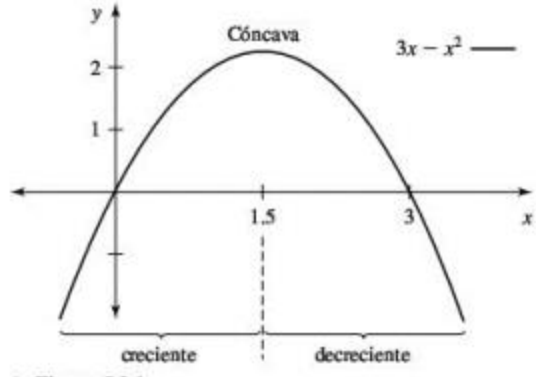
(c) $t = \frac{5}{3}\sqrt{3}$ s

51. $0 \leqslant B(3) \leqslant 3$

53. $f(x) = 3$, $x \in \mathbf{R}$

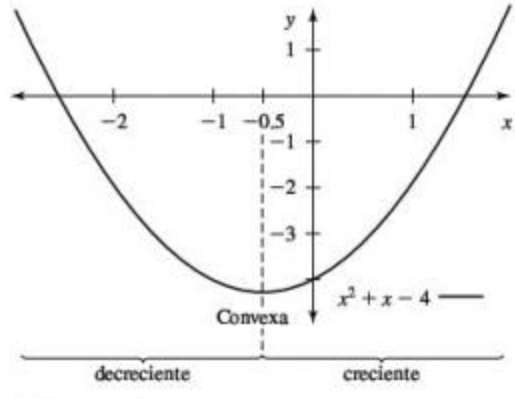
Sección 5.2

1. $y' = 3 - 2x$, $y'' = -2$; $y' > 0$ e y es creciente en $(-\infty, 3/2)$; $y' < 0$ e y es decreciente $(3/2, \infty)$; $y'' < 0$ e y es cóncava.



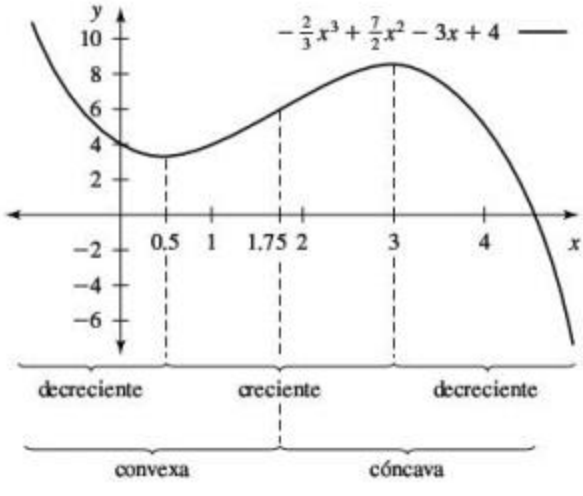
▲ **Figura 5.2.1**

3. $y' = 2x + 1$, $y'' = 2$; $y' > 0$ e y es creciente en $(-1/2, \infty)$; $y' < 0$ e y es decreciente en $(-\infty, -1/2)$; $y'' > 0$ e y es convexa.



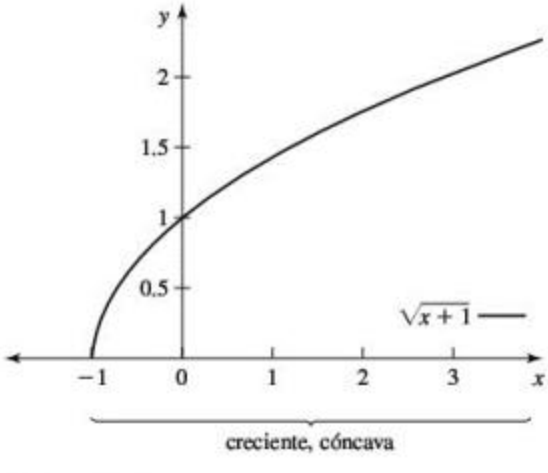
▲ **Figura 5.2.3**

5. $y' = -2x^2 + 7x - 3$, $y'' = -4x + 7$; $y' > 0$ e y es creciente en $(1/2, 3)$; $y' < 0$ e y es decreciente en $(-\infty, 1/2) \cup (3, \infty)$; $y' > 0$ e y es convexa en $(-\infty, 7/4)$; $y'' < 0$ e y es cóncava en $(7/4, \infty)$.



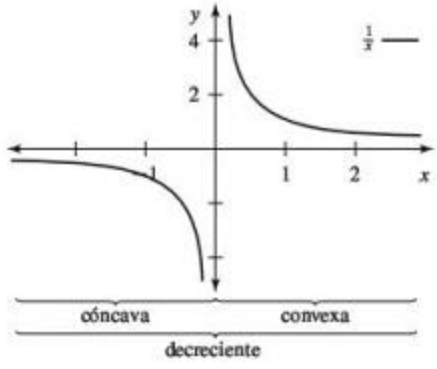
▲ **Figura 5.2.5**

7. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+12}}$, $x > -1$; $y'' = -\frac{1}{4(x-1)^{3/2}}$, $x > -1$; $y' > 0$ e y es creciente; $y'' < 0$ e y es cóncava.



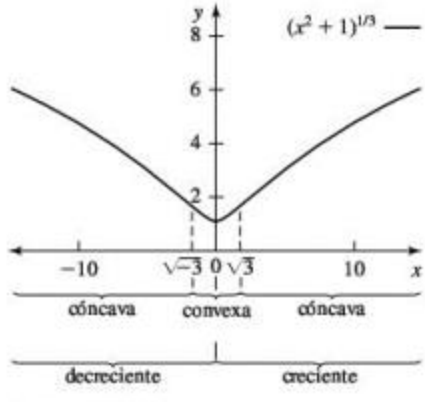
▲ **Figura 5.2.7**

9. $y' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$; $y'' = \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$; $y' < 0$ e y es decreciente para $x \neq 0$; $y'' < 0$ e y es cóncava para $x < 0$; $y'' > 0$ e y es convexa para $x > 0$.



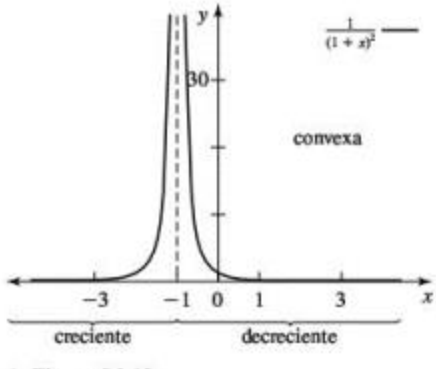
▲ **Figura 5.2.9**

11. $y' = \frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3}2x$, $y'' = \frac{6-2x^2}{9(x^2+1)^{5/3}}$; $y' > 0$ e y es creciente en $(0, \infty)$; $y' < 0$ e y es decreciente en $(-\infty, 0)$; $y'' > 0$ e y es convexa en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$; $y'' < 0$ e y es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.



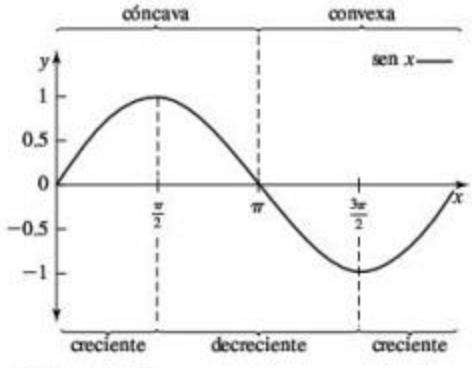
▲ **Figura 5.2.11**

13. $y' = -\frac{2}{(1+x)^3}$, $y'' = \frac{6}{(1+x)^4}$; $y' > 0$ e y es creciente en $(-\infty, -1)$; $y' < 0$ e y es decreciente en $(-1, \infty)$; $y'' > 0$ e y es convexa en $x \neq -1$.



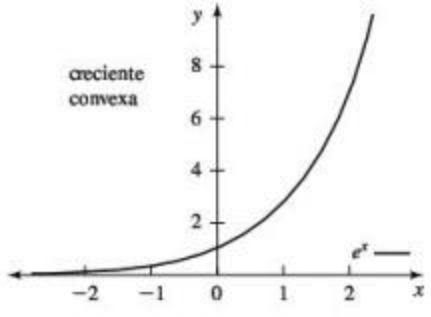
▲ **Figura 5.2.13**

15. $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x$; $y' > 0$ e y es creciente en $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$; $y' < 0$ e y es decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$; $y'' > 0$ e y es convexa en $(\pi, 2\pi)$; $y'' < 0$ e y es cóncava en $(0, \pi)$.



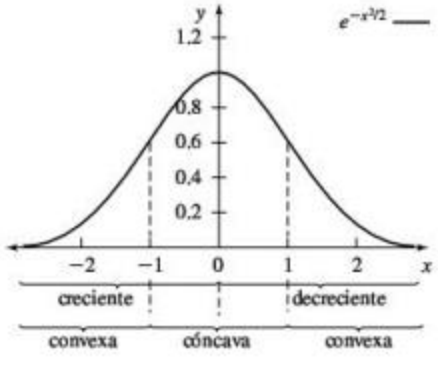
▲ **Figura 5.2.15**

17. $y' = e^x$, $y'' = e^x$; $y' > 0$ e y es creciente para $x \in \mathbf{R}$; $y'' > 0$ e y es convexa para $x \in \mathbf{R}$.



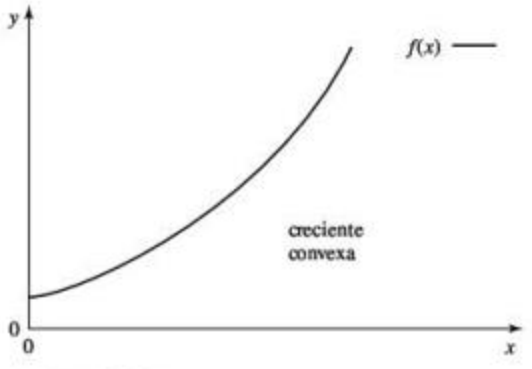
▲ **Figura 5.2.17**

19. $y' = -xe^{-x^2/2}$, $y'' = e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$; $y' > 0$ e y es creciente para $x < 0$; $y' < 0$ e y es decreciente para $x > 0$; $y'' > 0$ e y es cóncava para $x < -1$ y $x > 1$; $y'' < 0$ e y es cóncava para $-1 < x < 1$.



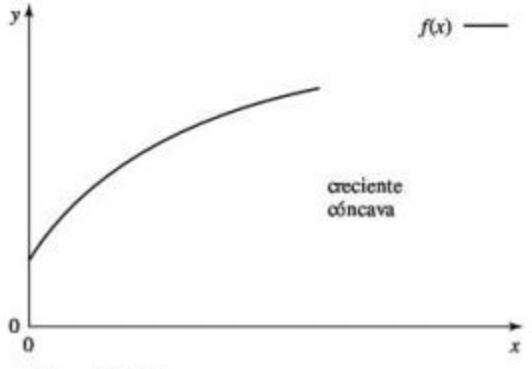
▲ **Figura 5.2.19**

21. (a)



▲ **Figura 5.2.21a**

(b)



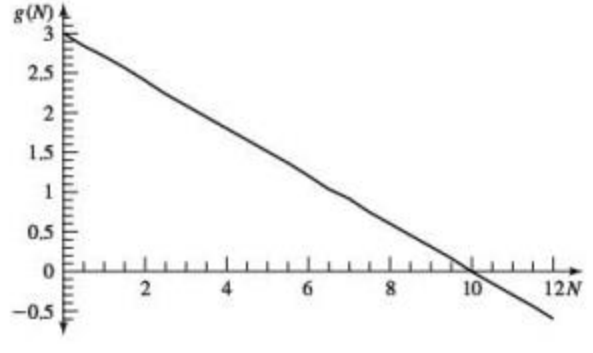
▲ **Figura 5.2.21b**

(c) En (a), $y' > 0$ y $y'' > 0$; en (b), $y' > 0$ y $y' < 0$.

23. (b) $f(-1) > 0$ y $f(1) < 0$

25. $f'(x)$ es decreciente; use la definición de cóncava.

27. (a)



▲ **Figura 5.2.27**

(b) $g'(N) = -\frac{r}{K} < 0$

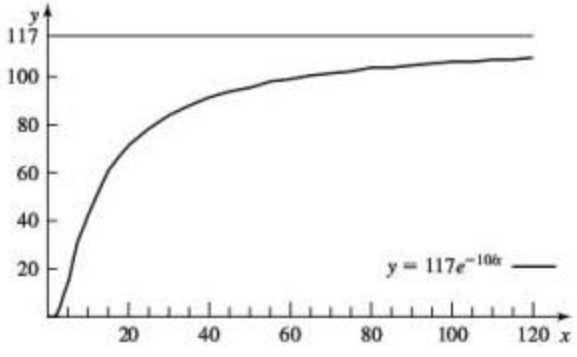
29. $f'(N) = 1 - (\frac{N}{K})^{\theta}(1+\theta)$; $f(N)$ es creciente para $0 < N < N^*$ y decreciente para $N > N^*$ donde $N^* = K(\frac{1}{1+\theta})^{1/\theta}$

31. La probabilidad de escapar disminuye con la densidad de parasitoides.

33. **(a)** $y' = 117e^{-10/x}\frac{10}{x^2} > 0$; la máxima altura alcanzable es 117.

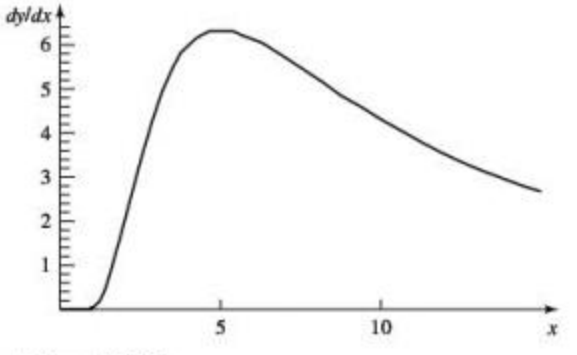
(b) $y(x)$ es convexa en $(0, 5)$; $y(x)$ es cóncava en $(5, \infty)$,

(c)



▲ **Figura 5.2.33c**

(d)



▲ **Figura 5.2.33d**

35. Para $0 < \gamma < 1$, el número medio de visitas de polinizadores crece con el número de flores de las plantas pero con velocidad decreciente.

37. **(a)** $N^* = e^{-aN^*}$, **(b)** $\frac{dN^*}{da} = -N^*e^{-aN^*} < 0$

39. **(a)** $\frac{dA}{dN} = -R[1 + (aN)^b]^{-2}b(aN)^{b-1}a < 0$,

(b) (v) El número de plantas supervivientes el año siguiente es el mismo que el número de plantas este año.

41. Para $0 < a < 1$, Y es una función creciente de X pero $\frac{Y}{X}$ es una función decreciente de X. $Y(X)$ es cóncava,

(b) Los jóvenes tienen cabezas relativamente mayores que los adultos.

43. $y = f(x)$ es convexa para $k > 1$ y cóncava para $0 < k < 1$.

Sección 5.3

1. Máximo local: (0, 4); máximo absoluto: (0,4); mínimo local: $(-2, 0)$ y $(3, -5)$; mínimo absoluto: $(3, -5)$; y es creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 3)$.

3. Máximo local: $(\pi/2, 1)$; máximo absoluto: $(\pi/2, 1)$; mínimo local $(3\pi/2, -1)$; mínimo absoluto: $(3\pi/2, -1)$; y es creciente en $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$ y decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$.

5. Máximo local: (0, 1); máximo absoluto: (0, 1); y es decreciente en $[0, \infty)$.

7. Sin extremos; y es creciente para todo $x \in \mathbf{R}$.

9. Máximo local: (0, 1); máximo absoluto: (0, 1); mínimo local: $(\pi, -1)$; mínimo absoluto: $(\pi, -1)$; y es decreciente en $(0, \pi)$.

11. Máximo local: (0, 1); máximo absoluto: (0, 1); y es creciente en $(-\infty, 0)$, y decreciente en $(0, \infty)$.

13. Mínimo local: $(-3, 15.5)$; mínimo local: $(2, -16/3)$; y es creciente $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; y es decreciente en $(-3, 2)$.

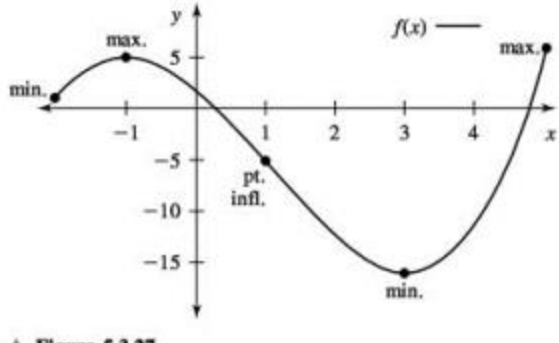
15. Mínimo local: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, y $(1, 0)$; mínimo absoluto: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, y $(1, 0)$; máximo local: $(-\sqrt{2}/2, 1)$ y $(\sqrt{2}/2, 1)$; máximo absoluto: $(-\sqrt{2}/2, 1)$ y $(\sqrt{2}/2, 1)$; y es creciente en $(-1, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$; y es decreciente en $(-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, 1)$.

19. $(0, -2)$

21. $(\sqrt{2}/2, e^{-1/2})$

23. (0, 0)

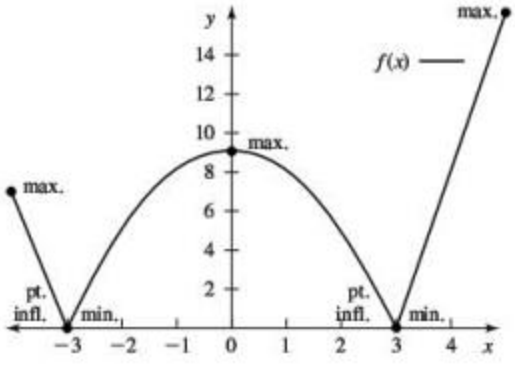
27. Mínimo local: $(-2, 2/3)$, $(3, -16)$; máximo local: $(-1, 16/3)$, $(5, 16/3)$; mínimo absoluto: $(3, -16)$; máximo absoluto: $(-1, 16/3)$, $(15, 16/3)$; punto de inflexión $(1, -16/3)$ y es creciente en $(-2, -1) \cup (3, 5)$; y es decreciente en $(-1, 3)$; y es convexa en $(1, 5)$; y es cóncava en $(-2, 1)$;



▲ **Figura 5.3.27**

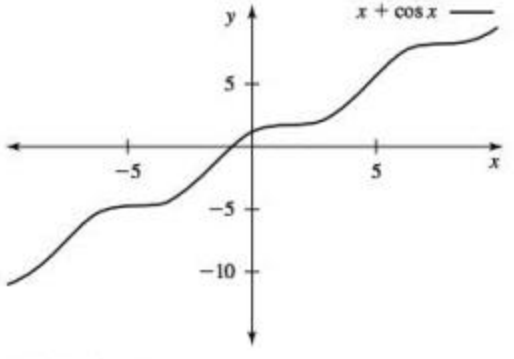
29. Mínimo local: $(-3, 0)$, $(3, 0)$; máximo local: $(-4, 5)$, $(0, 9)$, $(5, 16)$; mínimo absoluto: $(-3, 0)$, $(3, 0)$; máximo absoluto: $(5, 16)$; puntos de inflexión: $(-3, 0)$, $(3, 0)$; y es creciente

en $(-3, 0) \cup (3, 5)$; y es decreciente en $(-4, -3) \cup (0, 3)$; y es cóncava en $(-4, -3) \cup (3, 5)$; y es cóncava en $(-3, 3)$;



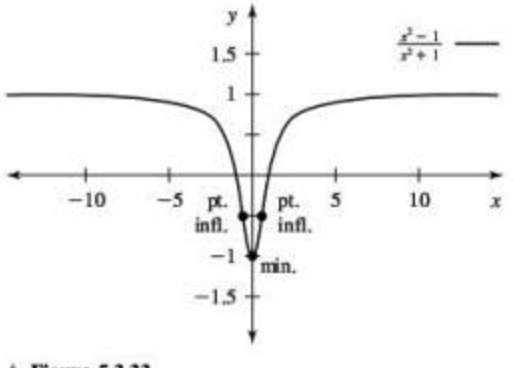
▲ **Figura 5.3.29**

31. Sin extremos; puntos de inflexión: $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; y es creciente en $\mathbf{R}$; y es convexa en $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; y es cóncava en $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$;



▲ **Figura 5.3.31**

33. Mínimo local: $(0, -1)$; mínimo absoluto: $(0, -1)$ punto de inflexión en $x = -1/\sqrt{3}$ y $x = 1/\sqrt{3}$; y es creciente en $(0, \infty)$; y es decreciente en $(-\infty, 0)$; y es convexa en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; y es cóncava en $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$;

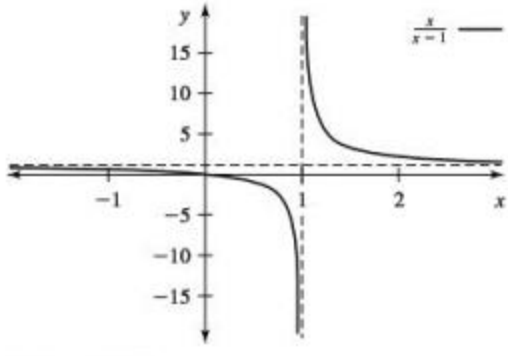


▲ **Figura 5.3.33**

35. **(c)** decreciente para todo $x \neq 1$; sin extremos;

(d) $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$; son puntos de inflexión;

(e)



▲ **Figura 5.3.35**

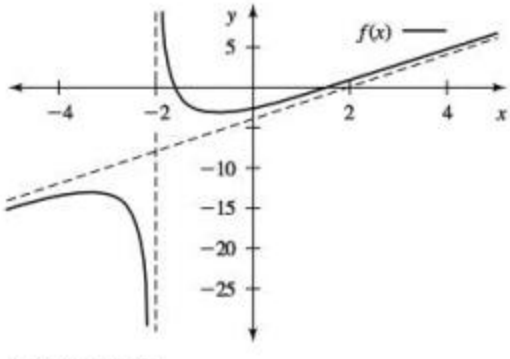
37. **(a)** $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$;

(b) $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2 - \sqrt{6}/2) \cup (-2 + \sqrt{6}/2, \infty)$; $f(x)$ es decreciente en $(-2 - \sqrt{6}/2, -2) \cup (-2, -2 + \sqrt{6}/2)$; máximo local en $x = -2 - \sqrt{6}/2$; mínimo local en $-2 + \sqrt{6}/2$;

(c) $f(x)$ es convexa en $(-2, \infty)$; $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -2)$;

(d) $y = 2x - 4$;

(e)



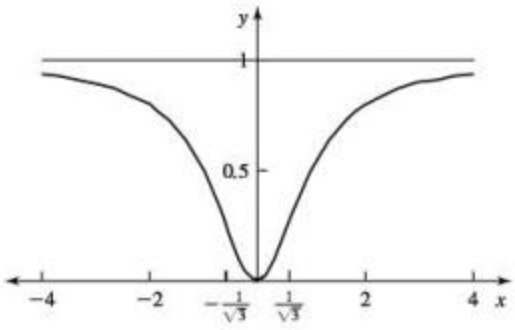
▲ **Figura 5.3.37**

39. **(a)** $f'(x) = \frac{2}{(1 + x^2)^2}$ y $f(x)$ es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$,

(b) $f(x)$ es convexa para $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ y cóncava para $x < -1/\sqrt{3}$ o $x > 1/\sqrt{3}$. $f(x)$ tiene dos puntos de inflexión en $x = \pm 1/\sqrt{3}$,

(c) $\lim_{x \to \infty} = 1$, $\lim_{x \to -\infty} = 1$,

(d)



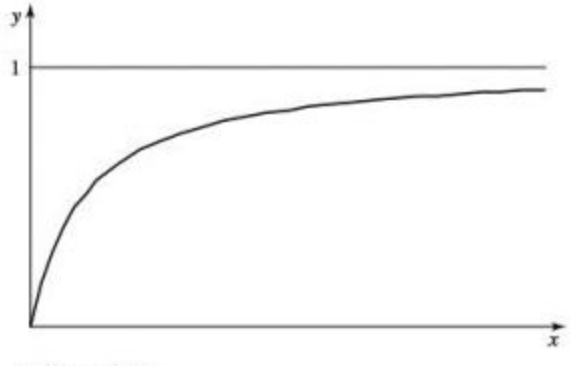
▲ **Figura 5.3.39**

41. **(a)** $f'(x) = \frac{a}{(a+x)^2}$; $f(x)$ es creciente para $x > 0$,

(b) $f''(x) = -\frac{2a}{(a+x)^3}$; no hay punto de inflexión,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{a+x} = 1$; hay una asíntota horizontal en $y = 1$,

(d)



▲ **Figura 5.3.41**

43. La velocidad de crecimiento es máxima para $N = K(\frac{1}{1+\theta})^{1/\theta}$

Sección 5.4

1. 20 in.

3. 4

5. El campo tiene 80 × 160 pies, siendo la longitud junto al río de 160 pies.

7. $5(1 + \sqrt{2})$

9. 4

11. **(b)** (6/5, 2/5) **(c)** mínimo local en $x = 6/5$ como en **(b)**.

13. $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ tiene el mismo cambio de signo que $f'(x)$.

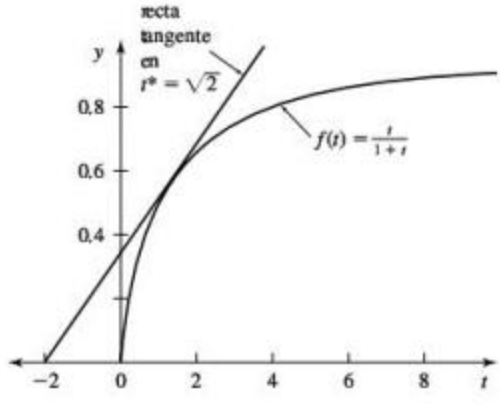
15. La altura es igual al diámetro concretamente $2\,(\frac{500}{\pi})^{1/3}$.

17. **(a)** $r = \sqrt{2}$, $\theta = 2$; **(b)** $r = \sqrt{10}$, $\theta = 2$

19. $r = (\frac{355}{4\pi})^{1/3}$

21. **(a)** El máximo local en t^* cumple $f'(t^*) = \frac{f(t^*)}{C+t^*}$, que es la pendiente de la recta que pasa por $(-C, 0)$ y el punto con $t = t^*$.

(b) $y = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}t + \frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}$



▲ **Figura 5.4.21**

23. **(a)** $-x\frac{dr}{dx} - r(x) - L + \frac{3ke^{-kx}}{1-e^{-kx}} - \frac{r'(x)e^{-(r(x)+L)}}{1-e^{-(r(x)+L)}} = 0$

Sección 5.5

1. 8

3. -7

5. $\frac{1}{2}$

7. 1

9. $\frac{1}{2}$

11. ∞

13. $\frac{\ln 2}{\ln 3}$

15. $\frac{1}{2}$

17. 0

19. ∞

21. 0

23. 0

25. 1

27. 0

29. 0

31. 0

33. 1

35. 1

37. e^3

39. e^{-1}

41. 0

43. ∞

45. 3

47. 0

49. 1

51. $\frac{\ln a}{\ln b}$

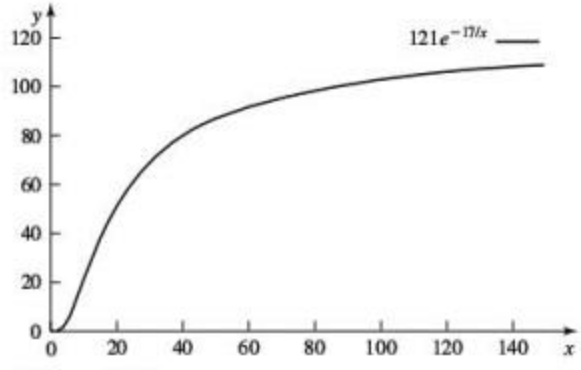
53. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{c}{x^p}) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0<p<1 \\ e^c & \text{si } p=1 \\ 1 & \text{si } p>1 \end{cases}$

57. Sea $y = 121e^{-17/x}$.

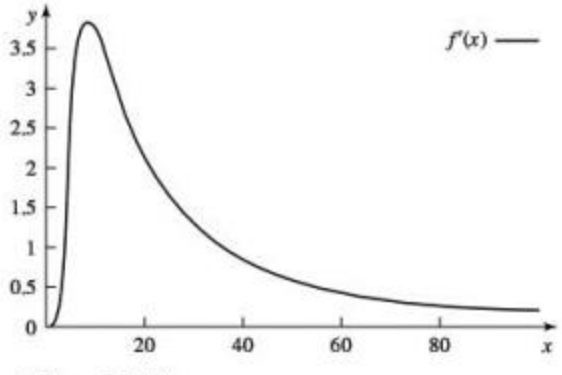
(a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{dy}{dx}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}=0$ **(b)** $\frac{17}{2}$

(c) La altura es creciente con velocidad creciente para $0<x<\frac{17}{6}$ y con velocidad decreciente para $x>\frac{17}{2}$.

(d)



▲ **Figura 5.5.57i**



▲ **Figura 5.5.57ii**

Sección 5.6

1. **(a)** $N_5 = (10)(1.03)^5$, **(b)** $t = \frac{\ln 2}{\ln 1.03}$

3. **(a)** $b = 1.02$, **(b)** $N_{10} = (20)(1.02)^{10}$, **(c)** $t = \frac{\ln 2}{\ln 1.026}$

5. **(a)** $b = 1 + \frac{x}{100}$,

(b) $t = \frac{\ln 2}{\ln(1+x/100)}$; 693.5, 139.0, 70.0, 35.0, 14.2, 7.3

7. **(a)** 0, **(b)** estable

9. **(a)** $x = 1/2$ y $x = -2$,

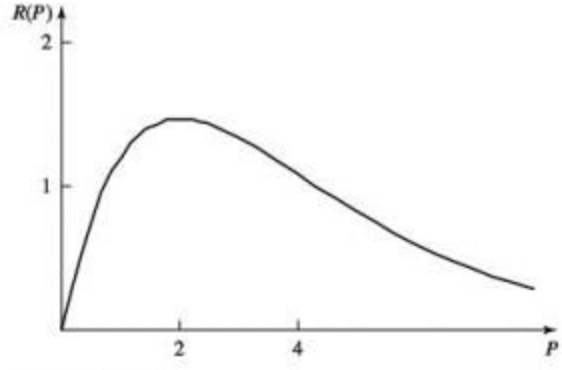
(b) $x = 1/2$ es localmente estable, $x = -2$ es inestable.

11. $x = 0$ es inestable, $x = 0.5$ es localmente estable.

13. **(a)** $x = 0$ es localmente estable, $x = 1$ es inestable, $x = 4$ es localmente estable, **(b)** **(i)** 0, **(ii)** 4

15. **(b)** 0, **(c)** $1/\beta$, **(d)** $P = 2/\beta$ es un punto de inflexión,

(e)



▲ **Figura 5.6.15**

17. **(b)** Para calcular los equilibrios, resolver $N = 10Ne^{-0.01N}$; $N = 0$ es otro equilibrio.

(c) Las oscilaciones parecen presentarse y el sistema no parece converger al equilibrio no trivial.

19. Equilibrio: $N = 0$ y $N = 50$.

(b) Empezando desde $N = 10$, parece que el tamaño límite de la población es 50. $N = 50$ es localmente estable.

Sección 5.7

1. $\sqrt{7} = 2.645751$

3. 0.6529186

5. 1.895494

7. **(a)** $|x_n| = 2^n x_0$, **(b)** ∞

9. **(a)** $x_0 = 3$, $x_1 = 4.166667$, $x_2 = 4.003333$, $x_3 = 4.00001$,

(b) $x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = 4$

Sección 5.8

1. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$

3. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + C$

5. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x + C$

7. $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + C$

9. $F(x) = x + \ln|x| + C$

11. $F(x) = x + \frac{1}{x} + C$

13. $F(x) = \ln|1 + x| + C$

15. $F(x) = x^5 - \frac{5}{3x^3} + C$

17. $F(x) = \ln|2 + x| + C$

19. $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$

21. $F(x) = e^{2x} + C$

23. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

25. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

27. $F(x) = -3\cos(x/3) + C$

29. $F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x/2) - \frac{6}{\pi}\text{sen}(\pi x/2) + C$

31. $F(x) = \frac{1}{2}\tan(2x) + C$

33. $F(x) = 3\tan(x/3) + C$

35. $F(x) = \tan x + x + C$

37. $y = 2\ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + C$

39. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$

41. $y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C$

43. $y = -2e^{-t/2} + C$

45. $y = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi s) + C$

47. $y = 2\tan(x/2) + C$

49. $y = x^3 + 1,\ x \geqslant 0$

51. $y = \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{3}$

53. $N(t) = \ln t + 10,\ t \geqslant 1$

55. $W(t) = e^t,\ t \geqslant 0$

57. $W(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-3t}$

59. $T(t) = 3 + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos(\pi t)$

61. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

63. $L(x) = 25 - 10e^{-0.1x},\ L(0) = 15$

65. $t = 2.5$ s, $v(2.5) = 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

67. **(a)** El primer término del miembro derecho describe la evaporación; el segundo describe el riego.

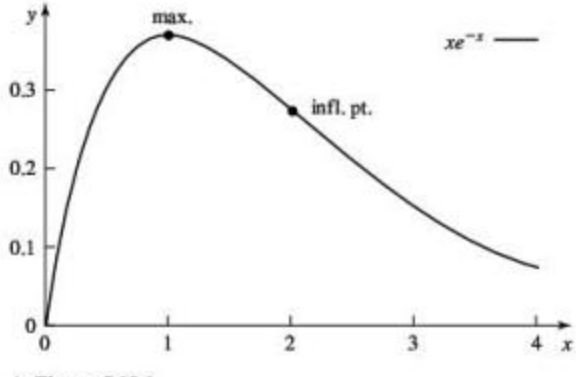
(b) $a \approx 0.0417$

Sección 5.10

1. **(b)** máximo absoluto en $(1, e^{-1})$;

(c) Punto de inflexión en $(2, 2e^{-2})$;

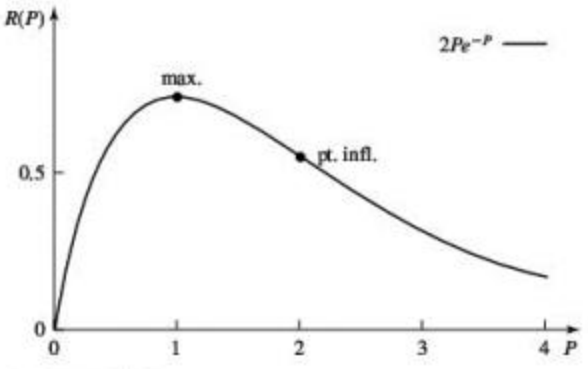
(d)



▲ **Figura 5.10.1**

3. **(a)** $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$, por tanto, $f(x)$ es estrictamente creciente.

5. **(e)**

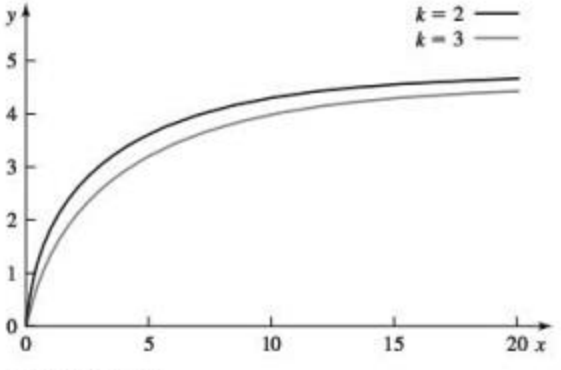


▲ **Figura 5.10.5**

7. **(a)** $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$

(b) $f'(x) = \frac{ck}{(k+x)^2} > 0,\ f''(x) = -\frac{2ck}{(k+x)^3} < 0$ **(c)** $f(k) = \frac{c}{2}$

(d)



▲ **Figura 5.10.7**

9. **(a)** $L(\theta) = (\theta^2)^8(2\theta(1-\theta))^6((1-\theta)^2)^3$

(b) $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{L'(\theta)}{L(\theta)}$ y $L(\theta) > 0$. **(c)** $\hat{\theta} = \frac{11}{17}$

11. **(a)** $c(t) = \frac{1}{3}e^{-0.3t},\ t \geqslant 0$ **(b)** $t = \frac{\ln 2}{0.3}$

13. **(a)** $t = v_0/g$, **(b)** $\frac{v_0^2}{2g}$, **(c)** 0, **(d)** $t = \frac{2v_0}{g}$

Sección 6.1

1. 0.21875

3. 0.46875

5. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$

7. $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

9. $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$

11. $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3$

13. $(\frac{1}{n})^2\frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^2\frac{1}{n} + (\frac{3}{n})^2\frac{1}{n} + \cdots + (\frac{n}{n})^2\frac{1}{n}$

15. $\Sigma_{k=1}^{6} k$

17. $\Sigma_{k=2}^{5} \ln k$

19. $\Sigma_{k=1}^{n} 2k$

21. $\Sigma_{k=1}^{n} q^{k-1}$

23. 670

25. 112

27. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

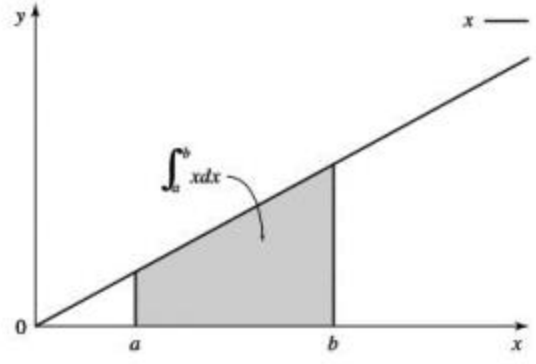
29. 0

33. 1.36

35. 14

37. 0

39. $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$



▲ **Figura 6.1.39**

41. $\int_0^1 x^2\,dx$

43. $\int_{-3}^{2}(2x-1)\,dx$

45. $\int_{-3}^{3}(x-1)(x+2)\,dx$

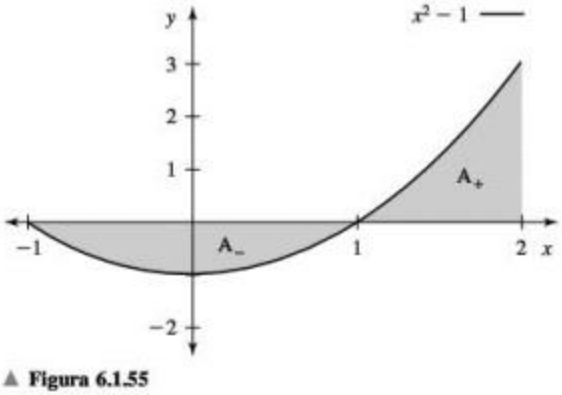
47. $\int_{-5}^{2} e^x\,dx$

49. $\lim_{\|P\|\to 0}\Sigma_{k=1}^{n}\sqrt{c_k+1}\Delta x_k$ siendo $\|P\|$ una partición de $[2,6]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

51. $\lim_{\|P\|\to 0}\Sigma_{k=1}^{n}\ln c_k \Delta x_k$ siendo $\|P\|$ una partición de $[1, e]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

53. $\lim_{\|P\|\to 0}\Sigma_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k$ siendo $\|P\|$ una partición de $[0, 5]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

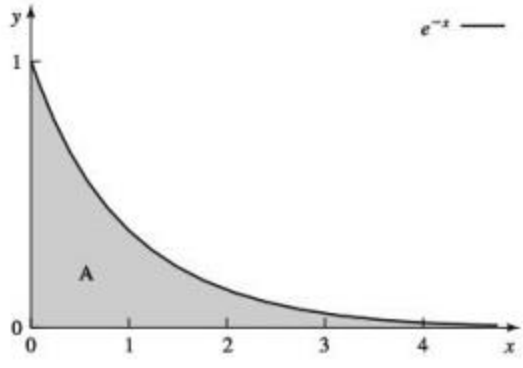
55.



▲ **Figura 6.1.55**

$\int_{-1}^{2}(x^2-1)\,dx = -A_- + A_+$

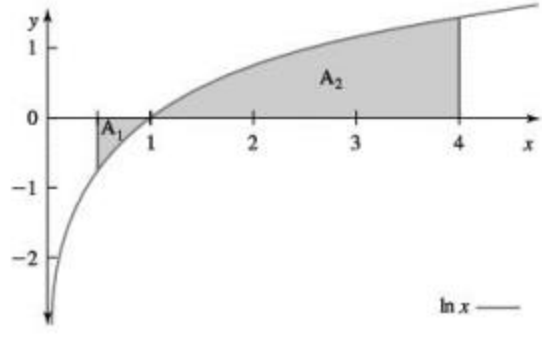
57.



▲ **Figura 6.1.57**

$\int_0^5 e^{-x}\,dx = A$

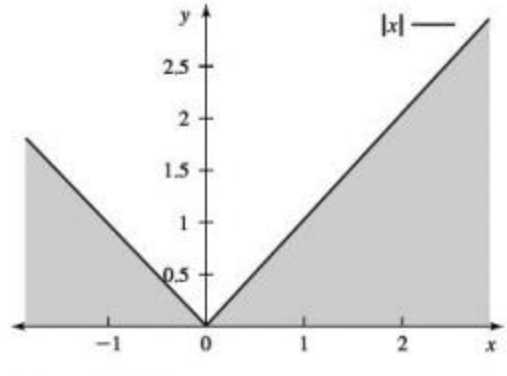
59.



▲ **Figura 6.1.59**

$\int_{1/2}^{4} \ln x\,dx = A_2 - A_1$

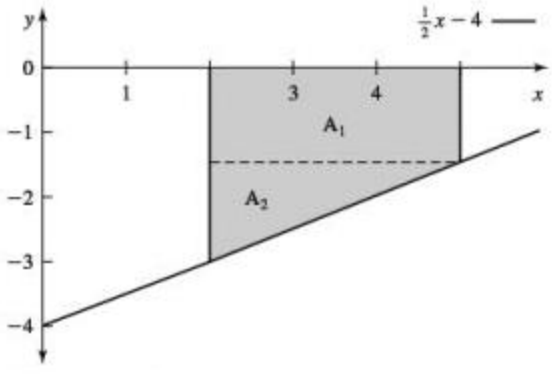
61.



▲ **Figura 6.1.61**

$\int_{-2}^{3}|x|\,dx = \frac{13}{2}$

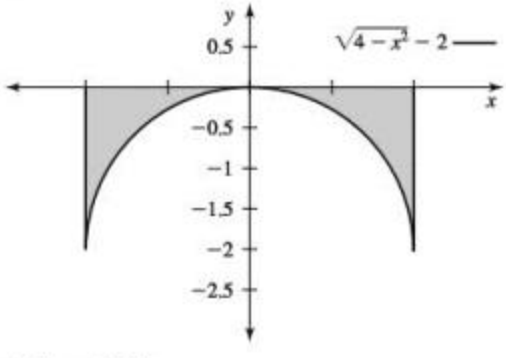
63.



▲ **Figura 6.1.63**

$\int_2^5 (\frac{1}{2}x - 4)\,dx = -\frac{27}{4}$

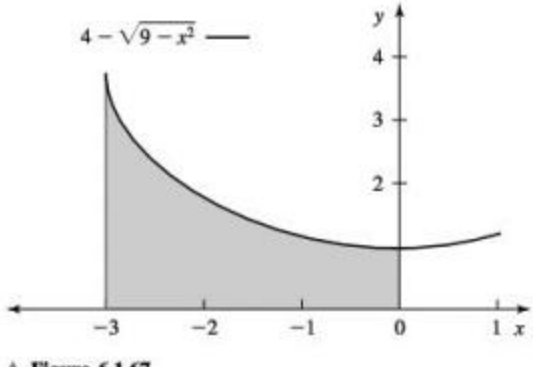
65.



▲ **Figura 6.1.65**

$\int_{-2}^{2} (\sqrt{4 - x^2} - 2)\,dx = 2\pi - 8$

67.



▲ **Figura 6.1.67**

$\int_{-3}^{0} (4 - \sqrt{9 - x^2})\,dx = 12 - \frac{9}{4}\pi$

69. 0

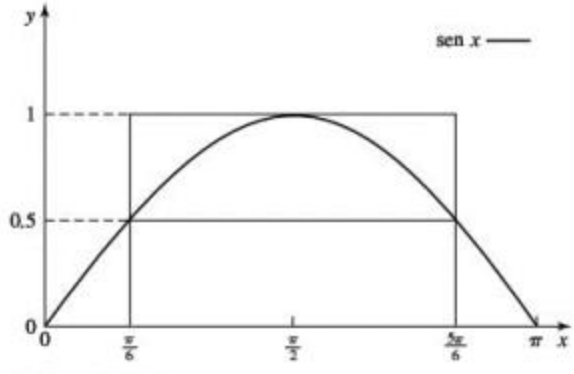
71. 4

73. 0

75. $x \geqslant x^2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$

77. $\sqrt{x} \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$ y $\sqrt{x} \leqslant 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 4$

79.



▲ **Figura 6.1.79**

El rectángulo de altura 1/2 desde $\pi/6$ a $5\pi/6$ está contenido en el área bajo $y = \operatorname{sen} x$ entre $\pi/6$ y $5\pi/6$, que a su vez está contenida en el rectángulo de altura 1 desde $\pi/6$ a $5\pi/6$.

81. $a = \pi/2$

83. $a = 3$

Sección 6.2

1. $\frac{dy}{dx} = x^2$

3. $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$

5. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 + x}$

7. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

9. $\frac{dy}{dx} = xe^{4x}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+3}$

13. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$

15. $\frac{dy}{dx} = 3(1 + 3x)$

17. $\frac{dy}{dx} = [2(1 - 4x)^2 + 1](-4)$

19. $\frac{dy}{dx} = 2x^2$

21. $\frac{dy}{dx} = 3(1 + e^{3x})$

23. $\frac{dy}{dx} = (6x + 1)[1 + (3x^2 + x)e^{3x^2 + x}]$

25. $\frac{dy}{dx} = -(1 + x)$

27. $\frac{dy}{dx} = -2[1 - \operatorname{sen}(2x)]$

29. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

31. $\frac{dy}{dx} = -2x \sec(x^2)$

33. $\frac{dy}{dx} = 2[1 + (2x)^2] - (1 + x^2)$

35. $\frac{dy}{dx} = 9x^2 \ln x - 4x \ln x$

37. $\frac{dy}{dx} = (1 + 3x^2)\operatorname{sen}(x + x^3) + 4x\operatorname{sen}(2 - x^2)$

39. $x - \frac{1}{3}x^3 + C$

41. $x^3 - x^2 + C$

43. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + C$

45. $x^{3/2}(\frac{4}{5}x - \frac{2}{3}) + C$

47. $\frac{2}{7}x^{7/2} + C$

49. $\frac{2}{9}x^{9/2} + \frac{7}{9}x^{9/7} + C$

51. $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + C$

53. $\frac{1}{3}x^3 - x + C$

55. $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + C$

57. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$

59. $-3e^{-x} + C$

61. $-e^{-x^2/2} + C$

63. $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

65. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + C$

67. $\frac{1}{3}\tan(3x) + C$

69. $\sec x + C$

71. $\frac{1}{2}\ln|\sec(2x)| + C$

73. $\tan x + \ln|\sec x| + C$

75. $4\tan^{-1}x + C$

77. $\operatorname{sen}^{-1}x + C$

79. $\ln|x + 1| + C$

81. $x - \ln|x| + C$

83. $\ln|x - 3| + C$

85. $-\ln|x + 3| + C$

87. $5(x - \tan^{-1}x) + C$

89. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$

91. $-\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$

93. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$

95. $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2e^{x/2} + C$

97. -6

99. $-\frac{1}{3}$

101. 3

103. $\frac{28}{3}$

105. $\frac{1}{2}$

107. $\frac{1}{2}$

109. $\frac{\pi}{4}$

111. $\frac{\pi}{6}$

113. $\frac{1}{2}\ln 2$

115. $\frac{1}{3}(1 - e^{-3})$

117. 1

119. 1

121. $\ln\frac{3}{2}$

123. $\frac{1}{2}$

125. $f(x) = 4x$

Sección 6.3

1. $e^2 + 1$

3. $\frac{9}{2}$

5. $\frac{4}{3}$

7. $\frac{14}{3} - \ln 4$

9. $2\ln 2 - \ln 3$

11. $\frac{3}{2}$

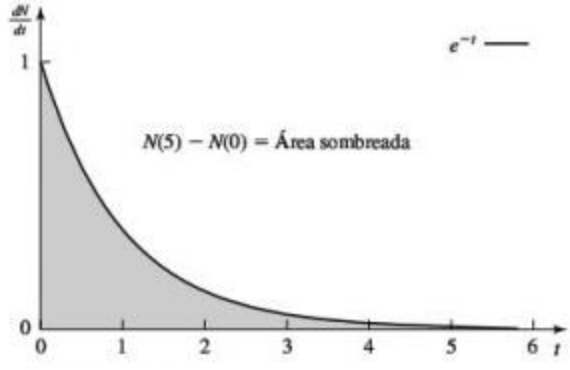
13. $\frac{2}{3}$

15. $\frac{16}{3}$

17. **(a)** $N(t) = 101 - e^{-t}$

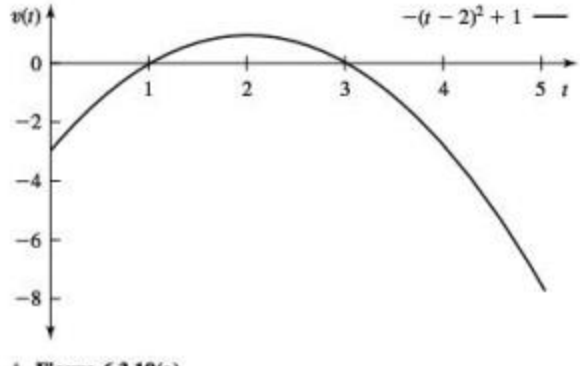
(b) $1 - e^{-5}$

(c) $N(5) - N(0) = \int_0^5 e^{-t}\,dt$; área sombreada.



▲ **Figura 6.3.17**

19. **(a)**

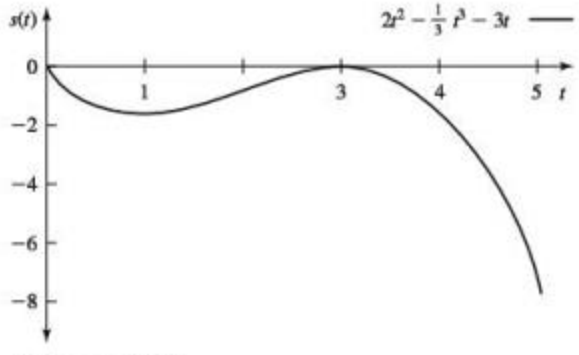


▲ **Figura 6.3.19(a)**

(b) La partícula se mueve a la izquierda para $0 \leqslant t \leqslant 1$ y $3 \leqslant t \leqslant 5$, se mueve a la derecha para $1 \leqslant t \leqslant 3$.

(c) $s(t) = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 3t$; área con signo entre $v(u)$ y el eje horizontal desde 0 a t.

(d)



▲ **Figura 6.3.19(d)**

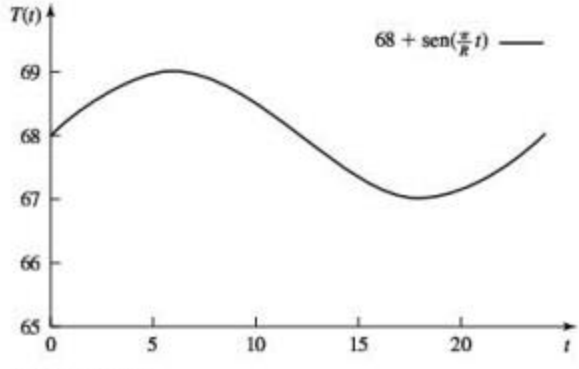
La posición más a la derecha: $s(0) = s(3) = 0$; la posición más a la izquierda: $s(5) = -\frac{20}{3}$.

21. Crecimiento acumulativo entre $t = 2$ y $t = 7$.

23. Crecimiento acumulativo en la biomasa entre $t = 1$ y $t = 6$.

25. $-\frac{2}{3}$

27. (a)



▲ **Figura 6.3.27**

(b) 68

29. $f(x)$ es simétrica respecto al origen.

31. valor medio de $f(x) = 2$; $f(1) = 2$

33. $\frac{1}{3}\pi hr^2$

35. $\frac{256}{15}\pi$

37. 2π

39. $2\pi\sqrt{3}$

41. $\frac{2}{15}\pi$

43. $\frac{\pi}{2}(e^4 + e^{-4} - 2)$

45. $\pi(\frac{\pi}{2} - 1)$

47. $\frac{32}{5}\pi$

49. $\pi \ln 3$

51. $\frac{3}{10}\pi$

53. (a) $2\sqrt{5}$ **(b)** $2\sqrt{5}$

55. $\frac{8}{27}\left[(10)^{3/2} - (\frac{13}{4})^{3/2}\right]$

57. $\frac{14}{3}$

59. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$

61. $\int_{0}^{1}\sqrt{1 + e^{-2x}}\,dx$

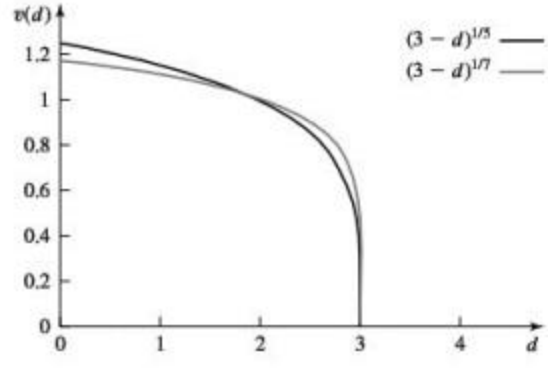
63. (a) $\frac{\pi}{2}$ **(b)** $\frac{\pi}{2}$

65. $f'(a) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$

Sección 6.5

1. $3.38\frac{m^3}{s}$

3. (a)



▲ **Figura 6.5.3**

(b) $v(D) = 0$, $v'(d) < 0$ para $d \in [0, D)$

5. (a) $\bar{v} = v(d_1)$

Sección 7.1

1. $\frac{2}{3}(x^2 + 3)^{3/2} + C$

3. $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$

5. $\frac{5}{3}\operatorname{sen}(3x) + C$

7. $-\frac{7}{12}\cos(4x^3) + C$

9. $\frac{1}{2}e^{2x+3} + C$

11. $-e^{-x^2/2} + C$

13. $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 4x| + C$

15. $3\ln|x + 4| + C$

17. $\frac{2}{3}(x + 3)^{3/2} + C$

19. $\frac{2}{3}(2x^2 - 3x + 2)^{3/2} + C$

21. $-\ln|1 + x - 2x^2| + C$

23. $\frac{1}{4}\ln|1 + 2x^2| + C$

25. $e^{x^2} + C$

27. $e^{1+\ln x} + C$

29. $-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + C$

31. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$

33. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

35. $\frac{2}{5}(5+x)^{5/2} - \frac{10}{3}(5+x)^{3/2} + C$
37. $\ln|ax^2 + bx + c| + C$
39. $\frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1} + C$
41. $-e^{-g(x)} + C$
43. $\frac{1}{3}(10^{3/2} - 1)$
45. $\frac{7}{2025}$
47. $-e^{-9/2} + 1$
49. $\frac{3}{8}$
51. $\frac{1}{2}$
53. $4 + 3\ln 3$
55. $\frac{1}{2}$
57. $2(e^{-1} - e^{-3})$
59. $\ln|\operatorname{sen} x| + C$

Sección 7.2

1. $x\operatorname{sen} x + \cos x + C$
3. $\frac{2}{3}x\operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{9}\cos(3x) + C$
5. $-2x\cos x + 2\operatorname{sen} x + C$
7. $xe^x - e^x + C$
9. $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
11. $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$
13. $\frac{1}{2}x^2\ln(3x) - \frac{1}{4}x^2 + C$
15. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$
17. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$
19. $2\ln 2 - 1$
21. $2\ln 4 - \frac{3}{2}$
23. $1 - 2e^{-1}$
25. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)e^{\pi/3}$
27. $\frac{2e-3x}{36+\pi^2}[\pi\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)] + C$
29. $\frac{1}{2}x[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
31. $\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x + C$
33. **(b)** $\int\operatorname{arcsen} x\,dx = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$
35. **(b)** $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
37. **(b)** $\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$
39. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x})\,2(\sqrt{x}) + C$
41. $-e^{x^2/2}(2 + x^2) + C$
43. $\operatorname{sen} xe^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} x} + C$
45. $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$
47. $(\sqrt{x}+1)^2\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^2 - 2(\sqrt{x}+1)$
$\ln(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) + C$

Sección 7.3

1. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$
3. $\ln|\operatorname{sen} x| + C$
5. $-\cos(x^2) + C$
7. $\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{x}{4}) + C$
9. $x - 3\ln|x+3| + C$
11. $\frac{1}{2}\ln|x^2+3| + C$
13. $\int\ln x\,dx = x\ln x - x + C$
15. $\frac{4}{9}(x-2)^{9/4} + \frac{8}{5}(x-2)^{5/4} + C$
17. $2e^2$
19. $\frac{\pi}{2}$
21. $\frac{1}{2}$
23. **(a)** $\frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}]$
(b) $\frac{1}{2}\ln|\frac{x-2}{x}| + C$
25. $\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{x-2}{3}) + C$
27. $\frac{1}{5}\ln|\frac{x-3}{x+2}| + C$
29. $\frac{1}{6}\ln|\frac{x-3}{x+3}| + C$
31. $\frac{1}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}| + C$
33. $x - 5\ln|x+2| + 2\ln|x+1| + C$
35. $x + 2\ln|\frac{x-2}{x+2}| + C$
37. $2 - \ln 5 + \ln 3$
39. $\frac{1}{2}\ln 2$
41. $-\ln 2$
43. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$
45. $\frac{1}{1+x} + \ln|\frac{x}{x+1}|$
47. $-\frac{2}{x+1} + \ln|\frac{x+1}{x-1}|$
49. $\frac{1}{108}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| - \frac{1}{36}\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}\right) + C$
51. $-\frac{1}{x} - \tan^{-1}x$

Sección 7.4

1. intervalo infinito; 1
3. intervalo infinito; π
5. intervalo infinito; 2
7. intervalo infinito; 2
9. intervalo infinito; 2
11. integrando discontinuo; 6
13. integrando discontinuo; 2
15. integrando discontinuo en $x = 0$; -2
17. integrando discontinuo; $\frac{1}{2}$
19. integrando discontinuo en $x = 0$; integral divergente
21. integrando discontinuo en $x = 1$; 0
23. intervalo infinito; integral divergente

25. integrado infinito; integral divergente
27. integrando discontinuo en $x = \pm 1$; 0
29. integrando discontinuo en $x = \pm 1$; integral divergente
31. $c = 3$
35. (b) $0 \leqslant \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant \lim_{z\to\infty} \int_1^z e^{-x}\,dx = e < \infty$
37. (b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geqslant \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2}\int_1^z \frac{1}{x}\,dx = \infty$; divergente
39. Para $x \geqslant 1$: $0 \leqslant e^{-x^2/2} \leqslant e^{-x}$; convergente
41. Para $x \geqslant 1$: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$; divergente
43. (a) Use la regla de L'Hôpital
(b) Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ y utilice una calculadora gráfica para demostrar que para $x > 74.2$, $2\ln x \leqslant \sqrt{x}$
(c) Utilice para $x > 74.2$ que $e^{-\sqrt{x}} \leqslant e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ y concluya que la integral es convergente.

Sección 7.5

1. 2.328
3. 0.6292
5. $M_4 \approx 0.6912$; error ≈ 0.0019
7. $M_4 \approx 5.3838$; error ≈ 0.0505
9. $T_4 \approx 2.3438$
11. $T_3 \approx 0.6380$
13. $T_5 = 20.32$; error ≈ 0.32
15. $T_4 \approx 1.8195$; error ≈ 0.0661
17. $n = 82$
19. $n = 58$
21. $n = 92$
23. $n = 50$
25. (a) $M_5 = 0.245$; $T_5 = 0.26$; $|\int_0^1 x^3\,dx - M_5| = 0.005$; $|\int_0^1 x^3\,dx - T_5| = 0.01$
(c) $0.6433 \leqslant \int_0^1 \sqrt{x}\,dx \leqslant 0.6730$

Sección 7.6

1. $\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\ln|2x-3| + C$
3. $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-16} - 16\ln|x + \sqrt{x^2-16}|) + C$
5. $6 - 16e^{-1}$
7. $\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$
9. $\frac{1}{2}e^{\pi/6} - \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$
11. $-2e^{-x/2}(x^2+4x+7) + C$
13. $\frac{1}{20}[10x - 6 + \operatorname{sen}(10x-6)] + C$
15. $x\sqrt{\frac{9}{4}+x^2} + \frac{9}{4}\left(\ln|x + \sqrt{\frac{9}{4}+x^2}|\right) + C$
17. $\frac{4e^{2x+1}}{16+\pi^2}[2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)] + C$
19. $2\ln 2$
21. $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln(3x)) + \cos(\ln(3x))) + C$

Sección 7.7

1. $L(x) = 1 + 2x$
3. $L(x) = 1 + x$
5. $L(x) = \ln 2$
7. $P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
9. $P_6(x) = \frac{120}{5!}x^5 = x^5$
11. $P_3(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{16\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}x^3$; $P_3(0.1) \approx 1.4491$; $f(0.1) = \sqrt{2.1}$; $|f(0.1) - P_3(0.1)| \approx 3.34 \times 10^{-7}$
13. $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$; $P_5(1) \approx 0.8417$; $f(1) \approx 0.8415$; $|P_5(1) - f(1)| \approx 1.96 \times 10^{-4}$
15. $P_2(x) = x$; $P_2(0.1) = 0.1$; $f(0.1) \approx 0.10033$; $|P_2(0.1) - f(0.1)| \approx 3.35 \times 10^{-4}$
17. (a) $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{P_3(x)}{x} = 0$ y $P_3(x)$ se aproxima a $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$
19. $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$; $P_3(2) \approx 1.4375$; $f(2) \approx 1.4142$; $|P_3(2) - f(2)| \approx 0.023$
21. $P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{6})^2 + \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3$; $P_3(\frac{\pi}{7}) \approx 0.9010$; $f(\frac{\pi}{7}) \approx 0.9010$; $|P_3(\frac{\pi}{7}) - f(\frac{\pi}{7})| \approx 6.861 \times 10^{-5}$
23. $P_3(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{6}(x-2)^3$; $P_3(2.1) \approx 8.1661$; $f(2.12) \approx 8.1662$; $|P_3(2.1) - f(2.1)| \approx 3.14 \times 10^{-5}$
27. $n = 10$
29. $n = 2$
31. $P_2(x) = 0$; término de error: $f(x) - P_2(x) = f(x)$
33. (b) Use $x = 1$; $\tan^{-1} = \frac{\pi}{4}$

Sección 7.9

1. $-\frac{1}{9}(1-x^3)^3 + C$
3. $-2e^{-x^2} + C$
5. $\frac{6}{7}(1+\sqrt{x})^{7/3} - \frac{3}{2}(1+\sqrt{x})^{4/3} + C$
7. $\frac{1}{6}\tan(3x^2) + C$
9. $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$
11. $\tan x \ln(\tan x) - \tan x + C$
13. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + C$
15. $-\ln|\cos x| + C$
17. $\frac{e^{2x}}{5}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$
19. $2e^{x/2} + C$
21. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{x}{2} + C$
23. $\ln|\frac{x-1}{x}| + C$
25. $x - 5\ln|x+5| + C$
27. $\ln|x+5| + C$

29. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4\ln|x-1| + C$

31. $4 + \ln 3$

33. $1 - e^{-1/2}$

35. $\frac{\pi}{8}$

37. 4

39. $\frac{\pi}{6}$

41. divergente

43. divergente

45. 2

47. $-\frac{1}{4}$

49. $e - e^{1/\sqrt{2}}$

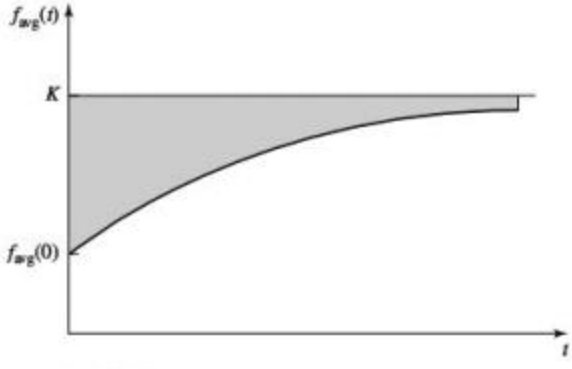
51. (a) $M_4 = 0.625$ (b) $T_4 = 0.75$

53. (a) $M_5 \approx 0.6311$ (b) $T_5 \approx 0.6342$

55. $P_3(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$

57. $P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

59.



▲ **Figura 7.9.59**

Sección 8.1

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + 1$

3. $y = \ln x$ para $x > 0$

5. $x(t) = 2 - \ln(1-t)$ para $t < 1$

7. $s(t) = \frac{2}{9}(3t+1)^{3/2} + \frac{7}{9}$ para $t \geqslant -\frac{1}{3}$

9. $V(t) = \operatorname{sen} t + 5$

11. $y = 2e^{3x}$

13. $x(t) = 5e^{2-2t}$

15. $h(s) = \frac{1}{2}(9e^{2s} - 1)$

17. $N(t) = 20e^{0.3t}$, $N(5) = 20e^{1.5} \approx 90$

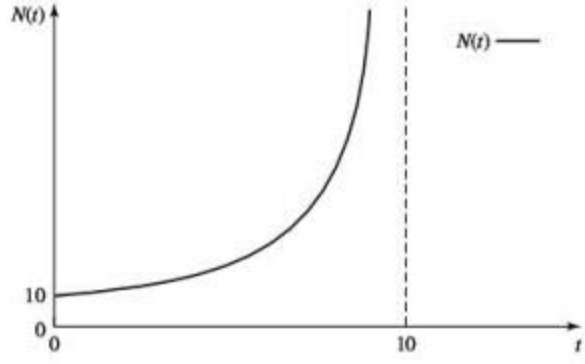
19. (a) $N(t) = Ce^{rt}$

(b) $\log N(t) = \log C + (r \log e)t$; para determinar r, dibuje $N(t)$ en una gráfica semilogarítmica; la pendiente es entonces $r \log e$.

(c) 1. Obtenga datos en varios puntos en el tiempo. 2. Dibújelas en papel semilogarítmico. 3. Determine la pendiente de la recta resultante. 4. Divida la pendiente por $\log e$, obteniendo r.

21. (a) $N(t) = \frac{100}{10-t}$

(b)



▲ **Figura 8.1.21**

$\lim_{t \to 10^-} N(t) = \infty$

23. (a) $L_\infty = 123$; $k = \frac{1}{27}\ln\frac{244}{123} \approx 0.0254$

(b) $L(10) = 123 - 122e^{-0.254} \approx 28.37$ in.

(c) $t = \frac{1}{0.0254}\ln\frac{122}{12.3} \approx 90.33$ meses

25. $y = \frac{2}{3e^{-x}-2}$

27. $y = \frac{5}{1+4e^{5x}}$

29. $y = \frac{3}{1-\frac{2}{5}e^{-6(x-1)}}$

31. $y = \frac{1}{\frac{1}{C}e^{-x}-1}$

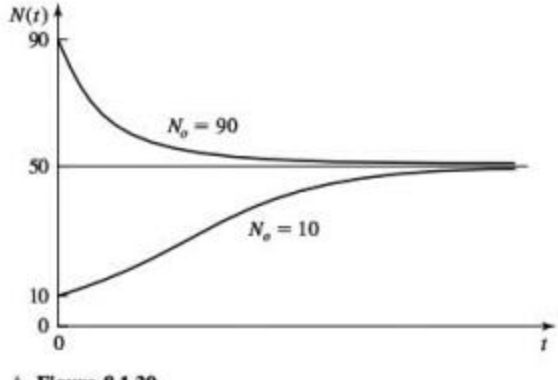
33. $y = 1 \pm (-2(x+C))^{-1/2}$

35. (b) (i) $y = \frac{2-2e^{4x}}{1+e^{4x}}$ (ii) $y = \frac{\frac{2}{3}e^{4x}+2}{1-\frac{1}{3}e^{4x}}$

37. $N(t) = \frac{200}{1+3e^{-0.34t}}$, $\lim_{t\to\infty} N(t) = 200$

39. (a) $N(t) = \frac{50}{1+4e^{-1.5t}}$ (b) $N(t) = \frac{50}{1-\frac{4}{9}e^{-1.5t}}$

(c)

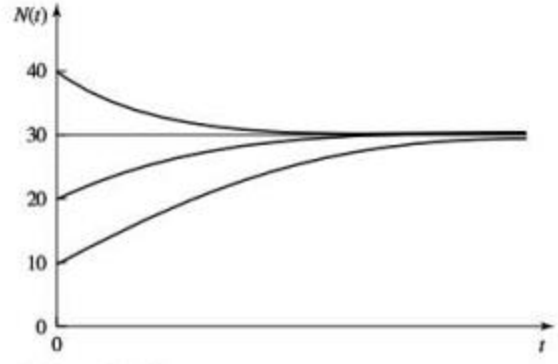


▲ **Figura 8.1.39**

(d) $\lim_{t\to\infty} N(t) = 50$ en ambas (a) y (b)

41. (a) $\frac{dN}{dt} = 5N(1 - \frac{N}{30})$

(b)



▲ **Figura 8.1.41**

43. (a) $p(t) = \frac{1}{\frac{1-p_0}{p_0}e^{-rt/2}+1}, t \geq 0$

(b) $t = \frac{2}{0.01}\ln 9 \approx 439.4$

(c) $\lim_{t\to\infty} p(t) = 1$, lo que significa que finalmente la población solo contará de tipos A_1A_1.

45. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

47. $y = -1 + 3\exp[1 - e^{-x}]$

49. $y = 6x - 7$

51. $r(t) = \exp[1 - e^{-t}]$

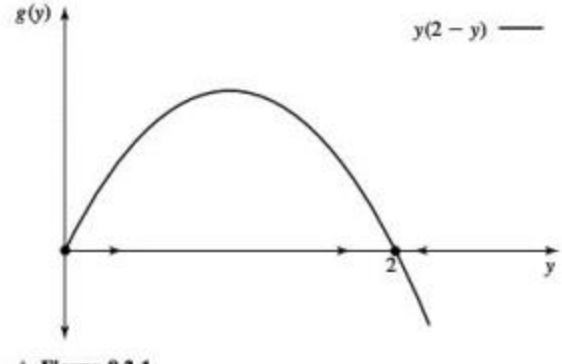
53. $\frac{dc}{c} = k\frac{dm}{m}$

55. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7.7}\frac{y}{x}$

Sección 8.2

1. (a) $y = 0, 2$

(b)



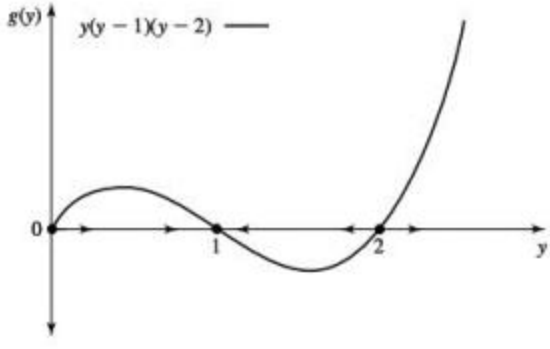
▲ **Figura 8.2.1**

$y = 0$ es inestable; $y = 2$ es localmente estable.

(c) El autovalor asociado con $y = 0$ es $2 > 0$, por lo que $y = 0$ es inestable; el autovalor asociado con $y = 2$ es $-2 < 0$, por lo que $y = 2$ es localmente estable.

3. (a) $y = 0, 1, 2$

(b)



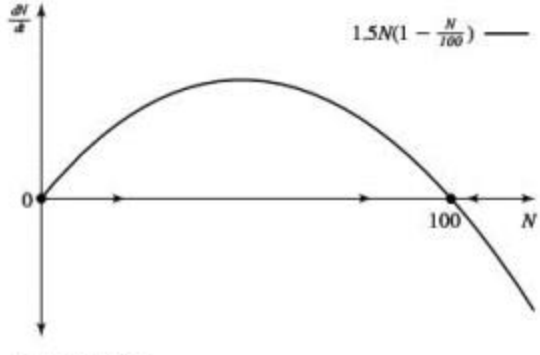
▲ **Figura 8.2.3**

$y = 0$ y $y = 2$ son inestables; $y = 1$ es localmente estable.

(c) El autovalor asociado con $y = 0$ es $2 > 0$, por tanto $y = 0$ es inestable; el autovalor asociado con $y = 1$ es $-1 < 0$, por tanto $y = 1$, es localmente estable; el autovalor asociado con $y = 2$ es $2 > 0$, por tanto $y = 2$ es inestable.

5 (a) $\frac{dN}{dt} = 1.5N(1 - \frac{N}{100})$

(b)



▲ **Figura 8.2.5**

$N = 0$ es inestable; $N = 100$ es estable

(c) El autovalor asociado con $N = 0$ es $1.5 > 0$, por tanto $N = 0$ es inestable; el autovalor asociado con $N = 100$ es $-1.5 < 0$, por lo que $N = 100$ es localmente estable. Los mismos resultados que en **(b)**.

7. (a) $K = 2000$

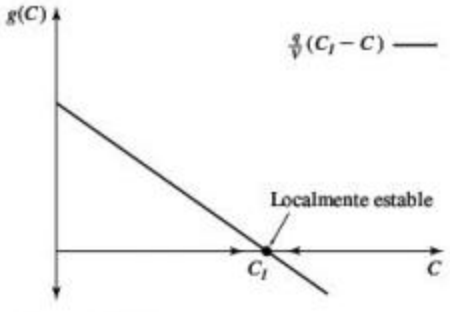
(b) $t = \frac{1}{2}\ln 199 \approx 2.65$

(c) 2000

9. **(a)** $N \approx 52.79$ es inestable; $N \approx 947.21$ es localmente estable

(b) La máxima velocidad de recogida es $rK/4$.

11.



▲ **Figura 8.2.11**

El equilibrio C_I es localmente estable.

13. **(a)** $\frac{dC}{dt} = \frac{0.2}{400}(3 - C)$

(b) $C(t) = 3 - 3e^{-t/2000}$, $t \geq 0$; $\lim_{t\to\infty} C(t) = 3$

(c) $C = 3$ es localmente estable.

15. **(a)** Concentración en equilibrio: $C_I = 254$

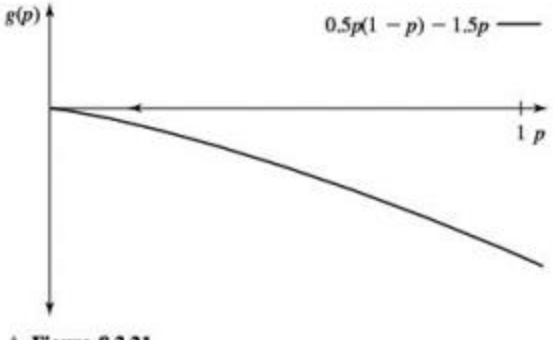
(b) $T_R = \frac{1}{0.37} \approx 2.703$

(c) $T_R = \frac{1}{0.37} \approx 2.703$

(d) Son las mismas.

19. $T_R = \frac{12.3 \times 10^9}{220}$ segundos ≈ 647.1 días; $C(T_R) \approx 0.806 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

21. **(a)**



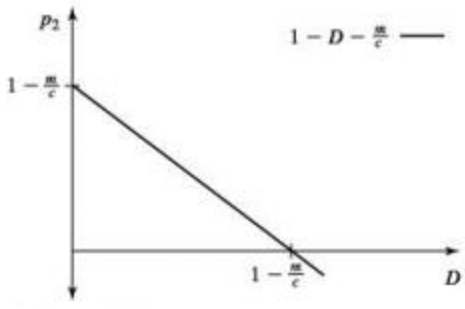
▲ **Figura 8.2.21**

(b) $p = 0$ es localmente estable

(c) $g'(0) = -1 < 0$, lo que implica que 0 es localmente estable.

23. **(a)** $\frac{dp}{dt}$ describe la velocidad de cambio de $p(t)$; $cp(1 - p - D)$ describe la colonización de rutas vacantes no destruidas; $-mp$ describe la extinción.

(b)



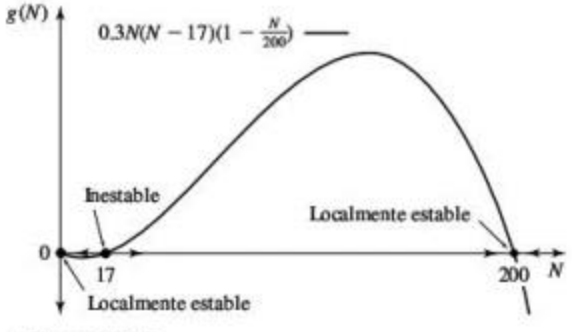
▲ **Figura 8.2.23**

(c) $D < 1 - \frac{m}{c}$; $p_1 = 0$ es inestable; $p_2 = 1 - D - \frac{m}{c}$ es localmente estable.

25. **(a)** $N = 0$, $N = 17$, y $N = 200$

(b) $N = 0$ es localmente estable; $N = 17$ es inestable; $N = 200$ es localmente estable

(c)



▲ **Figura 8.2.25**

Sección 8.3

1. **(a)** $R_0 = 1.5 > 1$, la enfermedad se extenderá

(b) $R_0 = \frac{1}{2} < 1$, la enfermedad no se extenderá

3. $R_0 = 0.9999 < 1$, la enfermedad no se extenderá

5. **(a)**

$$\frac{dN}{dt} = N_I - 5N - 0.02NX + X$$

$$\frac{dX}{dt} = 0.02NX - 2X$$

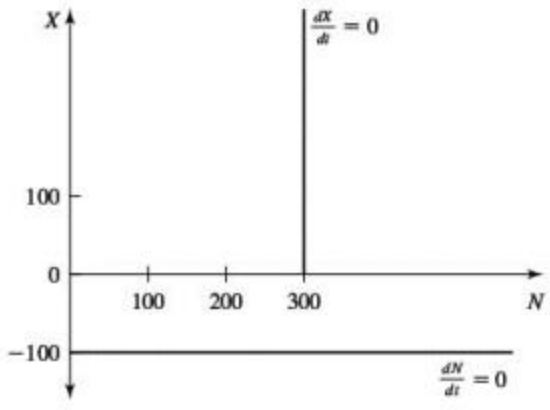
(b) equilibrio: $(\hat{N}, \hat{X}) = (100, N_I - 500)$, es un equilibrio no trivial si $N_I > 500$

7. **(a)**

$$\frac{dN}{dt} = 200 - N - 0.01NX + 2X$$

$$\frac{dX}{dt} = 0.01NX - 3X$$

(b)



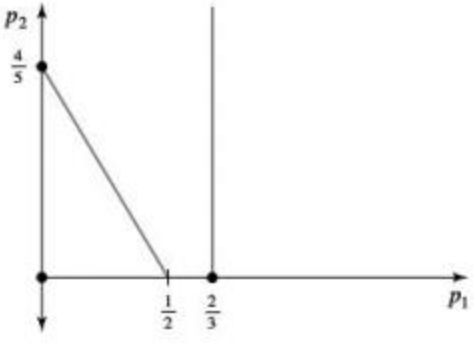
▲ **Figura 8.3.7**

(c) No hay equilibrios no triviales

9. (a) Equilibrio: (0, 0), (0, 2/3), (1/2, 0)

(b) Como $\frac{dp_2}{dt} < 0$ cuando $p_1 = 1/2$ y p_2 es pequeño, la especie 2 no puede invadir.

11. (a)



▲ **Figura 8.3.11**

(b) equilibrio: (0, 0), (2/3, 0), (0, 4/5)

Sección 8.5

1. (a) $\frac{dT}{dt}$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio que le rodea.

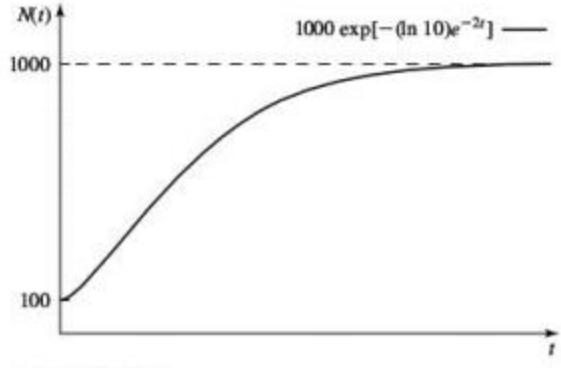
(b) $t = \frac{1}{0.013}\ln\frac{9}{4} \approx 62.38$ minutos

3. (a) $N(t) = N(0)e^{rst}$

(b) $N(t) = \dfrac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}}$

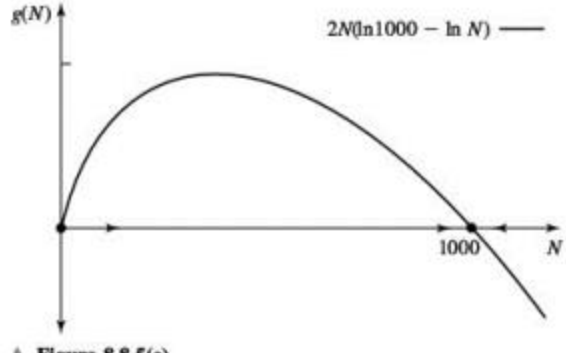
(c) $r_e \approx 0.691$; $K = 1001$; $r_l \approx 1.382$; $K = 10\,000$: $r_l \approx 0.701$

5. (a)



▲ **Figura 8.5.5(a)**

(c)

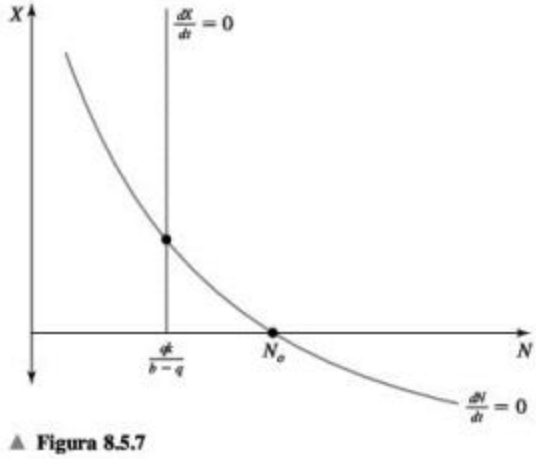


▲ **Figura 8.8.5(c)**

$N = 0$ es inestable; $N = 1000$ es localmente estable

K es la capacidad de alojamiento

7. (b)

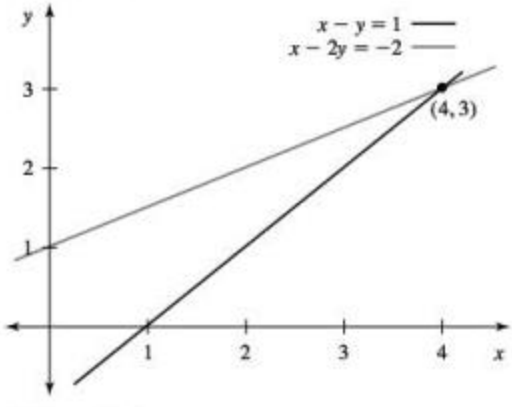


▲ **Figura 8.5.7**

(c) $\hat{N} = \frac{qk}{b-q} > 0$ si $b > q$, $\hat{X} = (k + \frac{qk}{b-q})\frac{q}{b}(\frac{N_0(b-q)}{qk} - 1)$

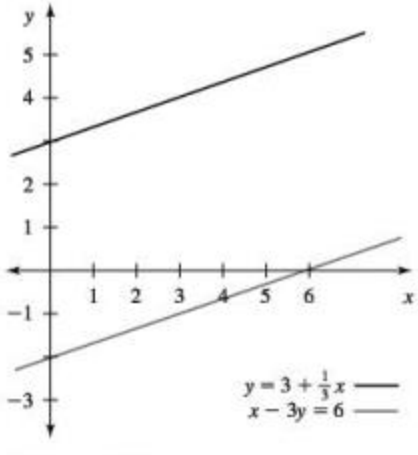
Sección 9.1

1. $\{(4, 3)\}$



▲ **Figura 9.1.1**

3. No hay solución; las rectas son paralelas.



▲ **Figura 9.1.3**

5. (a) $c = 10$ (b) $c \neq 10$ (c) No

7. Zach compró cinco peces y seis plantas.

11. $x = 1, y = -1, z = 0$

13. $x = 2, y = 0, z = -3$

15. $x = 1, y = 1, z = -2$

17. $\{(x, y, z): x = 2 - t, y = 1 + t, z = t, t \in \mathbf{R}\}$

19. subdeterminado; $\{(x, y, z) : x = 7 + t, y = t + 2, z = t, t \in \mathbf{R}\}$

21. sobredeterminado; sin solución

23. 750 g de SL 24-4-8; 1000 g de SL 21-7-12; $\frac{11\,000}{17}$ g de SL 17-0-0.

Sección 9.2

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$

3. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 19 & 3 & 6 \\ 9 & 11 & 4 \\ 3 & -13 & -7 \end{bmatrix}$

9. $D = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -7 \\ -5 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

15. (a) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

17. $AC = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $CA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $AC \neq CA$

19. $(A + B)C = AC + BC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

21. 3×2

23. (a) 1×4 (b) 3×3 (c) 4×3

25. (a) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

27. $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -23 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 11 & 63 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

35. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

39. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$ y demostrar que $(A^{-1})^{-1} = A$

41. C no tiene inversa.

43. **(a)** $x_1 = 2, x_2 = 3$

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$, $x_1 = 2, x_2 = 3$

45. $\det A = 7$, A es invertible

47. $\det A = 0$, A no es invertible

49. **(a)** $\det A = 0$, A no es invertible

(b) $2x + 4y = b_1$

$3x + 6y = b_2$

(c) solución $\{(x, y) : x = \frac{3}{2} - 2t, y = t, t \in \mathbf{R}\}$

(d) El sistema no tiene solución cuando $\frac{b_1}{2} \neq \frac{b_2}{3}$

51. $\det A = 2$, A es invertible

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

53. C^{-1} no existe, $\{(x, y): x = -3t, y = t, t \in \mathbf{R}\}$

55. $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/8 & 3/8 & 1/2 \\ -3/8 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$

57. $\begin{bmatrix} -2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$

59. $L = \begin{bmatrix} 0 & 3.2 & 1.7 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$

$$N(2) = \begin{bmatrix} 2232 \\ 580 \\ 280 \end{bmatrix}$$

61. $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.6 & 3.7 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$

$$N(2) = \begin{bmatrix} 1242 \\ 934 \\ 525 \\ 25 \end{bmatrix}$$

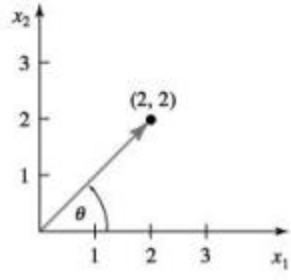
63. Cuatro clases de edad, el 60% de un año de edad sobrevive hasta la siguiente estación reproductiva; 2 es el número medio de descendientes de hembras de 2 años de edad.

65. Cuatro clases de edad; el 20% de un año de edad sobrevive hasta la siguiente estación reproductiva; 2.5 es el número medio de descendientes de hembras de un año de edad.

67. $q_0(t)$ y $q_1(t)$ parecen converger a 2.3; para que el 74% de las hembras será de edad 0 en la distribución de edades estable.

Sección 9.3

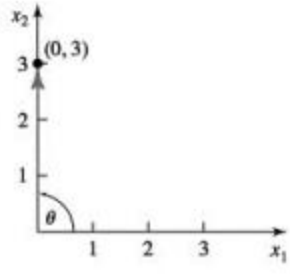
3.



▲ **Figura 9.3.3**

longitud: $2\sqrt{2}$, ángulo $\frac{\pi}{4}$

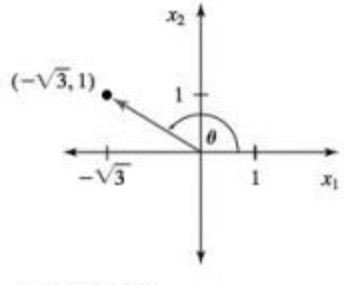
5.



▲ **Figura 9.3.5**

longitud: 3, ángulo $\frac{\pi}{2}$

7.



▲ **Figura 9.3.7**

longitud: 2, ángulo $\frac{5\pi}{62}$

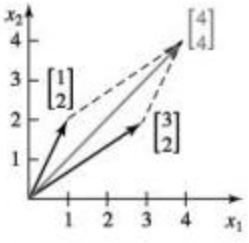
9. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \cos 70^\circ \\ \operatorname{sen} 70^\circ \end{bmatrix}$

13. $x_1 = 3\cos 15^\circ$, $x_2 = -3\operatorname{sen} 15^\circ$

15. $x_1 = 5\cos 115^\circ$, $x_2 = 5\operatorname{sen} 115^\circ$

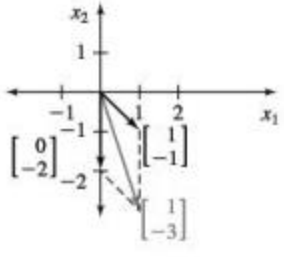
17.



▲ **Figura 9.3.17**

$$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$$

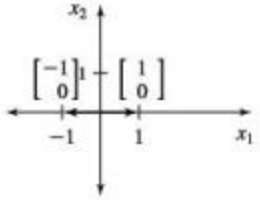
19.



▲ **Figura 9.3.19**

$$\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

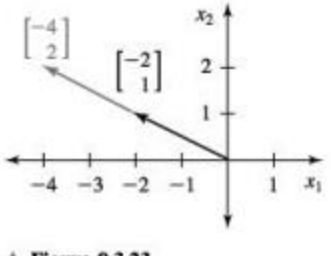
21.



▲ **Figura 9.3.21**

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

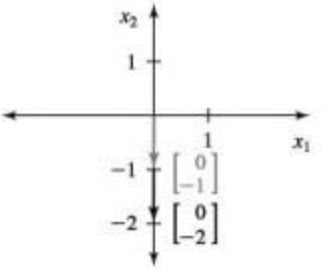
23.



▲ **Figura 9.3.23**

$$\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$$

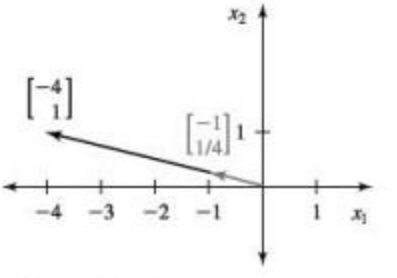
25.



▲ **Figura 9.3.25**

$$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

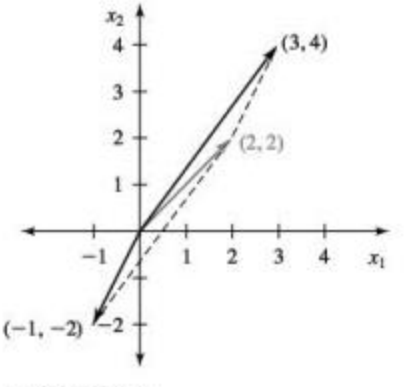
27.



▲ **Figura 9.3.27**

$$\begin{bmatrix}-1\\1/4\end{bmatrix}$$

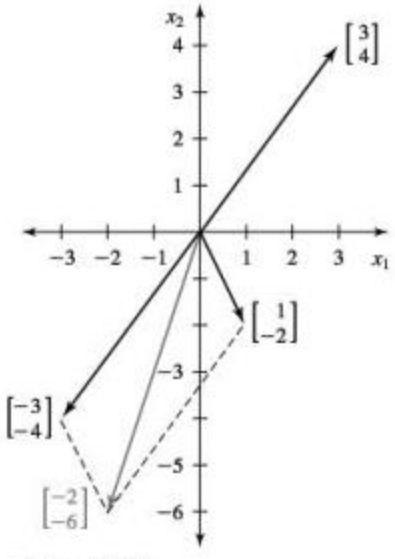
29.



▲ **Figura 9.3.29**

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

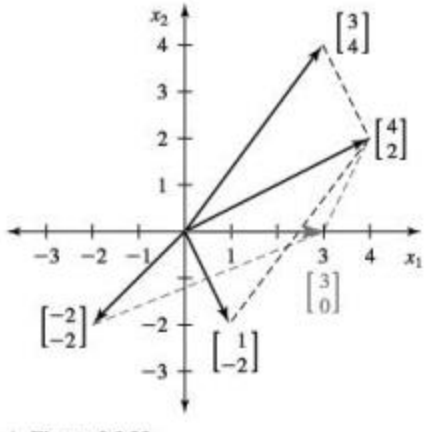
31.



▲ **Figura 9.3.31**

$\begin{bmatrix}-2\\-6\end{bmatrix}$

33.



▲ **Figura 9.3.33**

$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

35. no modifica **x**

37. rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de $\theta = \frac{\pi}{2}$

39. rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de $\theta = \frac{\pi}{6}$

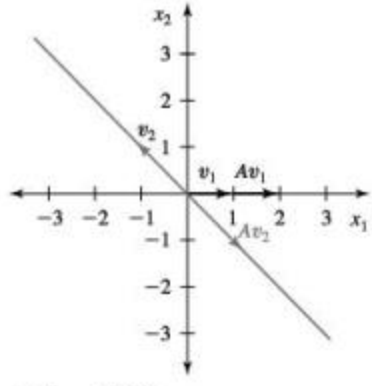
41. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \\ -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 5\cos(\pi/12) - 2\,\text{sen}(\pi/12) \\ 5\,\text{sen}(\pi/12) + 2\cos(\pi/12) \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

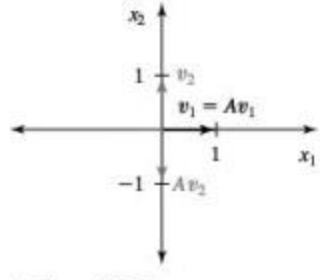
47. $\begin{bmatrix} 5\cos(-\pi/7) - 3\,\text{sen}(-\pi/7) \\ 5\,\text{sen}(-\pi/7) - 3\cos(-\pi/7) \end{bmatrix}$

49. $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$



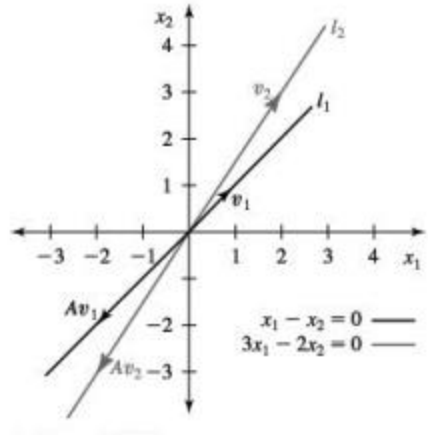
▲ **Figura 9.3.49**

51. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$



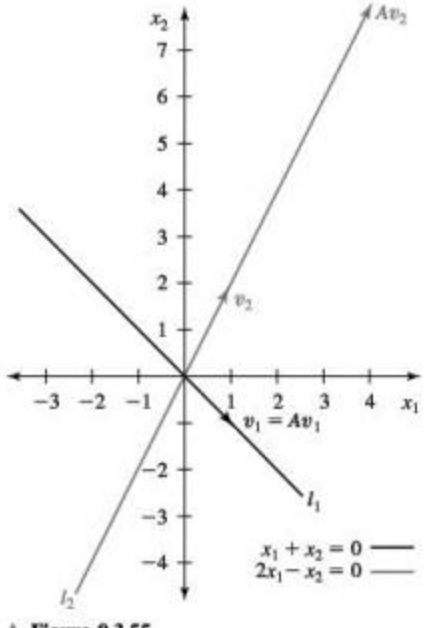
▲ **Figura 9.3.51**

53. $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$



▲ **Figura 9.3.53**

55. $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 4, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



▲ **Figura 9.3.55**

57. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$

59. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

61. $\lambda_1 = -\frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$

63. Las partes reales de los dos autovalores son negativas.

65. Las partes reales de los dos autovalores son no negativas.

67. Las partes reales de los dos autovalores son negativas.

69. **(a)** l_1: $x_2 = 0$; l_2: $-3x_1 + x_2 = 0$; ya que l_1 y l_2 no son idénticas, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes.

(b) $\mathbf{x} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ **(c)** $A^{20}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1048574 \\ -3145728 \end{bmatrix}$

71. $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} (-7)3^{20} + 4(-2)^{20} \\ (2)3^{20} - 4(-2)^{20} \end{bmatrix}$

75. **(a)** $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2.2}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2.2}$

(b) El autovalor mayor corresponde a la velocidad de crecimiento.

(c) 89.2% están en la clase de edad 0, 10.8% están en la clase de edad 1 en la distribución estable de edades.

77. **(a)** $\lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{50.2}), \lambda_2 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{50.2})$

(b) El autovalor mayor corresponde a la velocidad de crecimiento.

(c) 98.6% están en la clase de edad 0, 1.4% están en la clase de edad 1 en la distribución estable de edades.

79. **(a)** $\lambda_1 = \sqrt{0.45}, \lambda_2 = -\sqrt{0.45}$

(b) El autovalor mayor corresponde a la velocidad de crecimiento.

(c) 88.17% están en la clase de edad 0, 11.83% están en la clase de edad 1 en la distribución estable de edades.

Sección 9.4

1. **(a)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

7. $\sqrt{10}$

9. $\sqrt{26}$

11. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. 1

17. 2

19. $\sqrt{5}$

21. $\sqrt{30}$

23. $\cos\theta = 1/\sqrt{50}, \theta \approx 1.429$

25. $\cos\theta = 2/\sqrt{110}, \theta \approx 1.379$

27. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. (a, b) $\overline{PQ} = 4$, $\overline{QR} = 3$, $\overline{PR} = 5$, ángulo $QPR = \tan^{-1} \approx$ $\approx 36.9°$, ángulo $PRQ = 90° - \tan^{-1}(3/4) \approx 53.1°$, ángulo $RQP = 90°$.

33. **(a)** $\overline{PQ} = \sqrt{10}$, $\overline{QR} = \sqrt{2}$, $\overline{PR} = \sqrt{6}$

(b) ángulo $QPR = \cos^{-1}(7/\sqrt{60}) \approx 25.4° = 0.442$, ángulo $PRQ = \cos^{-1}(-1/\sqrt{12}) \approx 106.8° = 1.864$, ángulo $RQP = \cos^{-1}(3/\sqrt{20}) \approx 47.9° = 0.835$.

35. $x + 2y = 4$

37. $4x + y = 2$

39. $-y + z = 1$

41. $x = 0$

43. $x = 1 + 2t$ y $y = -1 + t$ para $t \in \mathbf{R}$

45. $x = -1 + t$ y $y = -2 - 3t$ para $t \in \mathbf{R}$

47. $2y - x - 8 = 8$

49. $y - x + 4 = 0$

51. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

53. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

55. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

57. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

59. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

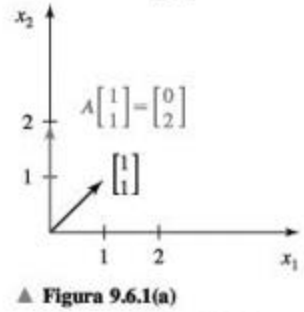
61. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

63. $(-5/2, -1/2, 9/2)$

65. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$

Sección 9.6

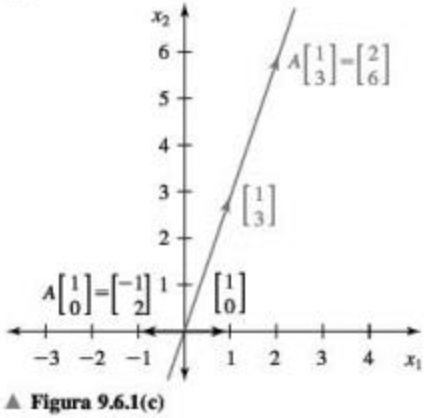
1. (a) $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$



▲ **Figura 9.6.1(a)**

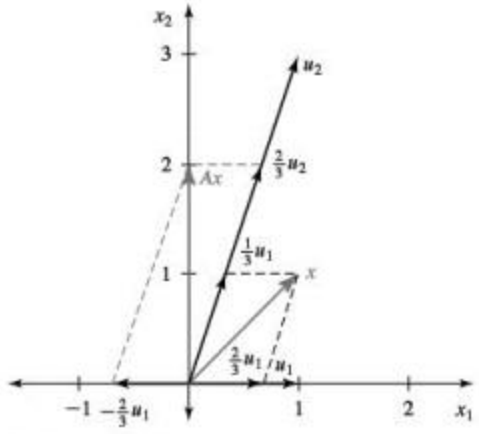
(b) $\lambda_1 = -1, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 2, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c)



▲ **Figura 9.6.1(c)**

(d) $a_1 = 2/3, a_2 = 1/3$



▲ **Figura 6.6.1(d)**

3. Velocidad de crecimiento: $\lambda_1 = 1.75$; una distribución de edades estable: $\begin{bmatrix} 35 \\ 10 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$

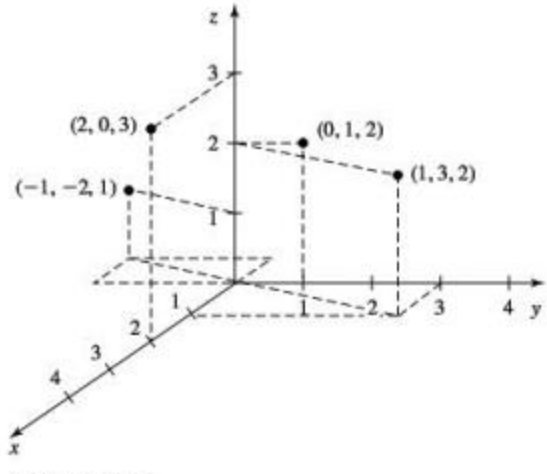
7. Eliminación gaussiana; 2. Escriba en forma matricial $AX = B$ y calcule la inversa de A, después calcule $X = A^{-1}B$

9. $a = -3$

11. Para $\frac{5}{23} < a \leqslant 1$, la población crecerá.

Sección 10.1

1.



▲ **Figura 10.1.1**

3. $\frac{4}{13}$

5. $e^{-1/10}$

7. dominio: $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$; recorrido: $\{z : z \geqslant 0\}$; curvas de nivel: $x^2 + y^2 = c$, círculo de radio $\sqrt{c}$ centrado en (0, 0)

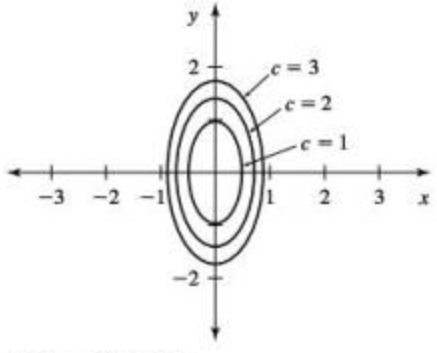
9. dominio: $\{(x, y) : y > x^2, x \in \mathbf{R}\}$; recorrido: $\{z : z \in \mathbf{R}\}$; curvas de nivel: $y = e^c + x^2$, parábolas desplazadas en $y > 0$ dirección por e^c

11. Figura 10.23

13. Figura 10.24

15. curva de nivel: $x^2 + y^2 =$ círculo centrado en el origen de radio $\sqrt{c}$; intersección con plano x-z: $z = x^2$, intersección con plano y-z: $z = y^2$

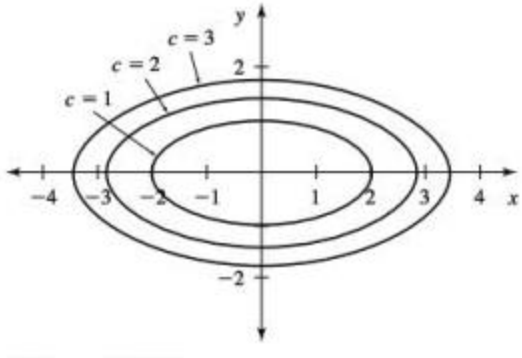
(b)



▲ **Figura 10.1.15(b)**

intersección con plano x-z: $z = 4x^2$, intersección con plano y-z: $z = y^2$

(c)



▲ **Figura 10.1.15(c)**

intersección con plano x-z: $z = \frac{1}{4}x^2$, intersección con plano y-z: $z = y^2$

(d) La intersección con el plano y-z es siempre $z = y^2$. Cuando $a = 1$, la superficie resultante se podría obtener rotando la curva $z = y^2$ alrededor del eje z. Cuando $0 < a < 1$, la superficie resultante es un paraboloide, pero mayor a lo largo del eje x que a lo largo del eje y. Cuando $a > 1$, el paraboloide es mayor a lo largo del eje y que del eje x.

17. Día 180: 22 m; día 200: 18 m; día 220: 14 m.

Sección 10.2

1. 1

3. $-\frac{1}{2}$

5. $-\frac{3}{2}$

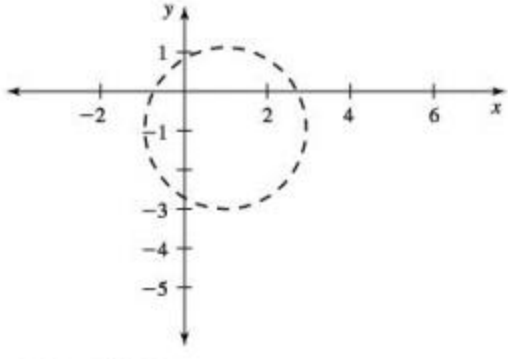
7. $\frac{2}{3}$

9. A lo largo del eje x positivo: 1; a lo largo del eje y positivo: -2

11. A lo largo del eje x: 0; a lo largo del eje y: 0; a lo largo de $y = x$: 2

13. A lo largo de $y = mx$, $m \neq 0$: 2; a lo largo de $y = x^2$: 1; el límite no existe.

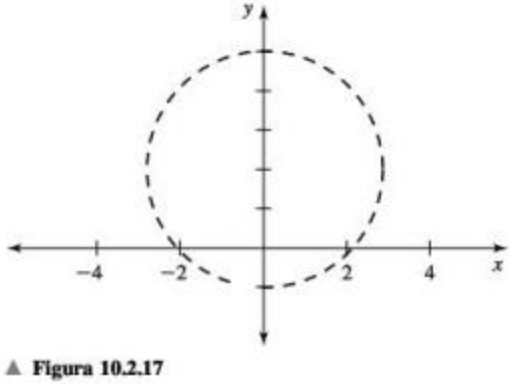
15.



▲ **Figura 10.2.15**

$\{(x, y) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 < 4\}$

17. La frontera es un círculo de radio 3, centrado en (0, 2). La frontera no se incluye.



▲ **Figura 10.2.17**

19. Escoger $2\delta^2 = \varepsilon$.

21. 1. $f(x, y)$ se define en (0, 0). 2. $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2)$ existe. 3. $f(0, 0) = 0 = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2)$

23. En el Problema 11, demostramos que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{4xy}{x^2 + y^2}$ no existe. Por tanto, $f(x, y)$ es discontinua en (0, 0).

25. En el Problema 13, demostramos que $\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^3+yz}$ no existe. Por tanto, $f(x, y)$ es discontinua en $(0, 0)$.

27. **(a)** $h(x, y) = g[f(x, y)]$ con $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(z) = \operatorname{sen} z$;

(b) la función es continua para $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

29. **(a)** $h(x, y) = g[f(x, y)]$ con $f(x, y) = xy$ y $g(z) = e^z$;

(b) la función es continua para $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

Sección 10.3

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{2}y\sqrt{xy} - \frac{2y}{3(xy)^{1/3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{2}x\sqrt{xy} - \frac{2x}{3(xy)^{1/3}}$

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x + y)$

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x\cos(x^2 - 2y)\operatorname{sen}(x^2 - 2y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = 4\cos(x^2 - 2y)\operatorname{sen}(x^2 - 2y)$

9. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sqrt{x+y}}\frac{1}{2\sqrt{x+y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\sqrt{x+y}}\frac{1}{2\sqrt{x+y}}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \operatorname{sen}(xy) + e^x \cos(xy)y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos(xy)x$

13. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2x+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x+y}$

15. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(\ln 3)(y^2-x^2)}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(\ln 3)(y^2-x^2)}$

17. 6

19. $3e^5$

21. 1

23. $\frac{2}{9}$

25. $f_x(1, 1) = -2$, $f_y(1, 1) = -2$

27. $f_x(-2, 1) = -4$, $f_y(-2, 1) = 4$

29. **(a)** $\frac{\partial P_z}{\partial a} > 0$: el número de presas devoradas crece al aumentar la tasa de ataque.

(b) $\frac{\partial P_z 1}{\partial T} > 0$: el número de presas devoradas crece al aumentar T.

31. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = z^2 - x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2yz + x^2$

33. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + \frac{1}{yz}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz - \frac{x}{y^2z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 - \frac{x}{yz^2}$

35. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{x+y+z}$

37. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y+z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z}$

39. $2y$

41. e^y

43. $2\sec^2(u + w)\tan(u + w)$

45. $-6x \operatorname{sen} y$

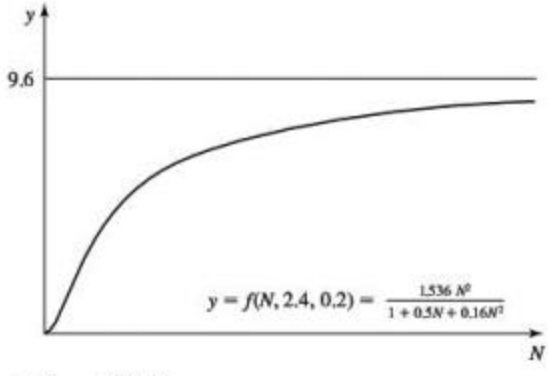
47. $\frac{2}{(x+y)^3}$

49. **(a)** $\frac{\partial f}{\partial N} > 0$: el número de presas encontradas por depredador crece al aumentar la densidad de presas.

(b) $\frac{\partial f}{\partial T} > 0$: la función crece cuando crece el tiempo para búsqueda.

(c) $\frac{\partial f}{\partial T_h} < 0$: la función decrece cuando crece el tiempo de gestión T_h.

(d)



▲ **Figura 10.3.49**

51.

▲ **Figura 10.3.51**

Sección 10.4

1. $7 = 6x + 4y - z$

3. $z - 2ex = -e$

5. $z - y = 0$

7. $f(x, y)$ se define en un disco abierto centrado en $(1, 1)$ y es continua en $(1, 1)$.

9. $f(x, y)$ se define en un disco abierto centrado en $(0, 0)$ y es continua en $(0, 0)$.

11. $f(x, y)$ se define en un disco abierto centrado en $(-1, 2)$ y es continua en $(-1, 2)$.

13. $L(x, y) = \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{2}$

15. $L(x, y) = x + y$

17. $L(x, y) = x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} + \ln 2$

19. $L(x, y) = 1 + x + y$, $L(0.1, 0.05) = 1.15$, $f(0.1, 0.05) \approx 1.1618$

21. $L(x, y) = 2x - 3y - 2$, $L(1.1, 0.1) = -0.1$, $f(1.1, 0.1) \approx -0.0943$

23. $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$

25. $Df(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}$

27. $Df(x, y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(x-y) & \operatorname{sen}(x-y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \end{bmatrix}$

29. $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 4xy + 1 & 2x^2 - 3 \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}$

31. $L(x, y) = \begin{bmatrix} 4x + 2y - 4 \\ -x - y + 3 \end{bmatrix}$

33. $L(x, y) = \begin{bmatrix} e(2x - y) \\ 2x - y - 1 \end{bmatrix}$

35. $L(x, y) = \begin{bmatrix} x - y + 1 \\ y - x + 1 \end{bmatrix}$

37. $L(1.1, 1.9) = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 9.8 \end{bmatrix}$, $f(1.1, 1.9) \approx \begin{bmatrix} -0.88 \\ 9.83 \end{bmatrix}$

39. $L(1.9, -3.1) = \begin{bmatrix} 25 \\ -22.4 \end{bmatrix}$, $f(1.9, -3.1) \approx \begin{bmatrix} 25 \\ -22.382 \end{bmatrix}$

Sección 10.5

1. $18 \ln 2 + 8$

3. $\dfrac{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{9} + \frac{3}{4}}}$

5. 0

7. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} u'(t) = \frac{\partial f}{\partial y} v'(t)$

9. $-\frac{2x}{2y + x^2 + y^2}$

11. $-\frac{2x - 3y(x^2 + y^2)}{2y - 3x(x^2 + y^2)}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ para $0 \leqslant y \leqslant \pi$ y $-1 \leqslant x \leqslant 1$

15. La velocidad de crecimiento disminuye con el tiempo.

17. $\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{bmatrix}$

19. $\operatorname{grad} f = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 3xy}} \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y \\ -3x \end{bmatrix}$

21. $\operatorname{grad} f = \frac{\exp[\sqrt{x^2 + y^2}]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

23. $\operatorname{grad} f = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{y} \end{bmatrix}$

25. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

27. $-\sqrt{2}$

29. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

31. $D_{\mathbf{u}} f(2, 1) = \frac{13}{2\sqrt{2}}$

33. $D_{\mathbf{u}} f(1, 6) = \frac{1}{4\sqrt{29}}$

35. $f(x, y)$ crece más rápidamente en la dirección de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ en el punto $(-1, 1)$.

37. $f(x, y)$ crece más rápidamente en la dirección de $\begin{bmatrix} 5/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$ en el punto $(5, 3)$.

39. $\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$

41. $\frac{1}{\sqrt{733}} \begin{bmatrix} 2 \\ -27 \end{bmatrix}$

43. La ameba se moverá en la dirección de $\begin{bmatrix} -4/25 \\ -4/25 \end{bmatrix}$

Sección 10.6

1. $f(x, y)$ tiene un mínimo local en $(1, 0)$

3. $f(x, y)$ tiene punto de ensilladura en $(2, 4)$ y $(-2, 4)$

5. $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $(0, 3)$

7. $f(x, y)$ tiene un máximo local en $(0, 0)$.

9. $f(x, y)$ tiene puntos de ensilladura en $(0, \pi/2 + k\pi)$ para $k \in \mathbf{Z}$

11. (c) Figura 10.65: $f(x, y)$ es constante para x fijo. No hay máximo ni mínimo en $(0, 0)$. Figura 10.66: punto de ensilladura en $(0, 0)$. Figura 10.67; mínimo local en $(0, 0)$.

13. Máximo absoluto: $(1, -1)$; mínimo absoluto: $(-1, 1)$

15. Máximos absolutos: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$; mínimos absolutos: $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

17. Máximos absolutos: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -2)$ y $(0, -2)$; mínimo absoluto: $(1/2, -1)$

19. Máximo absoluto en $(2/3, 2/3)$; los mínimos absolutos están en todos los puntos de la frontera del dominio.

21. Mínimo absoluto: $(-2, 0)$; máximo absoluto: $(3, 0)$

23. Mínimo absoluto: $(-1/2, 1/2)$; máximo absoluto $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

25. Sí.

27. Máximo absoluto en $(N, P) = (1, 1)$.

29. El volumen máximo es 64 m^3.

31. El área mínimo de la superficie es 216 m^2.

33. La distancia mínima es $1/\sqrt{3}$.

37. Máximos absolutos: $(-\sqrt{35}/6, 1/6)$, $(\sqrt{35}/6, 1/6)$; mínimo absoluto: $(0, -1)$.

39. Mínimo absoluto: $(1/4, -1/8)$; sin máximos.

41. Mínimo absoluto: $(12, -8/3)$; sin mínimo absoluto; máximo absoluto: $(1/\sqrt{2}, 1/6)$, $(-1/\sqrt{2}, 1/6)$.

45. Mínimos absolutos: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$; sin máximos.

49. La longitud total de la valla es 4 pies.

51. La máxima área posible es 4.

53. El perímetro mínimo es 4.

55. $r = \sqrt{A}$, $\theta = 2$, el perímetro es $4\sqrt{A}$

57. Mínimo local en (2, 2); sin extremos absolutos.

61. **(a)** $3x_1 + 3x_2 = 10$,

(b) máximo absoluto en $\left(\frac{65-40\sqrt{2}}{3}, \frac{40\sqrt{2}-55}{3}\right)$

Sección 10.7

1. $N_t = 5, 7.5, 11.25, 16.875, 25.31, 37.97, 56.95, 85.43, 128.14, 192.22, 288.33$; $P_t = 0$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$

3. $N_t = b^t N_0$

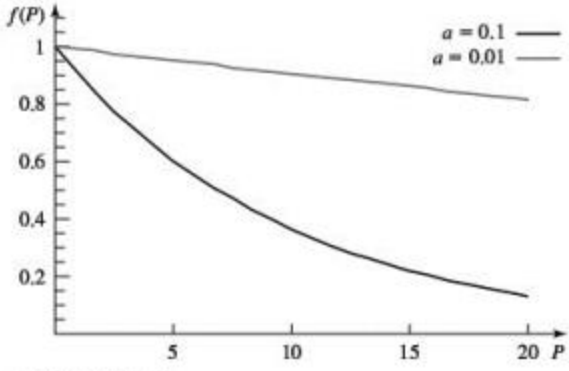
5. $N_t = 5, 6.79, 9.89, 14.67, 21.86, 32.59, 48.51, 71.67, 102.92, 128.47, 68.40, 0.71, 0.02, 0.03, 0.04, 0.06$; $P_t = 5, 1.43, 0.57, 0.34, 0.30, 0,39, 0,76, 2.18, 9.18, 51.81, 248.67, 203.69, 2.09, 0.0022, 0, 0$

7. $N_t = 5, 7.5, 11.25, 16.88, 25.31, 37.97, 56.95, 85.43, 128.14, 192.22, 288.33$; $P_t = 0$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$

9. $N_t = b^t N_0$

11. (redondeando al entero más cercano) $N_t = 100, 79, 37, 16, 10, 10, 13, 17, 24, 34, 47, 61, 67, 54, 32, 18, 13, 13, 16, 20, 27, 36, 45, 51, 48, 36$; $P_t = 50, 141, 164, 80, 27, 10, 5, 3, 3, 4, 8, 19, 49, 94, 99, 59, 27, 13, 8, 6, 7, 10, 17, 33, 58, 72$

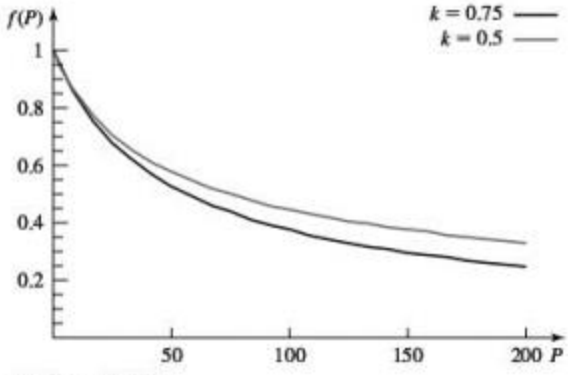
13. **(a)**



▲ **Figura 10.7.13**

(b) Al aumentar a, aumentan las posibilidades de escapar al parasitismo.

15. **(a)**



▲ **Figura 10.7.15**

(b) Si aumenta k, aumentan las posibilidades de escupar el parasitismo.

17. Estable

19. Inestable

21. Inestable

23. Estable

25. Inestable

27. Autovalores: $1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$

29. Autovalores: $0.5 + i0.5$, $0.5 - i0.5$

31. Para $0 < a < 1/2$, (0, 0) es localmente estable.

33. (0, 0) es inestable; (1/6, 1/6) es localmente estable.

35. (0, 0) es localmente estable si $-1 < a < 1$.

37. **(a)** Si $r > 1/2$, entonces $(r - 1/2, r - 1/2)$ es un equilibrio.

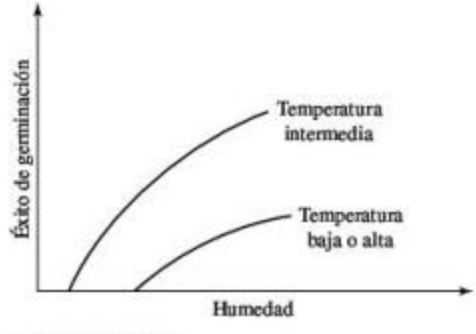
(b) Para $1/2 < r < 3/2$, el equilibrio $(r - 1/2, r - 1/2)$ es localmente estable.

39. (0, 0) es inestable; $((40 \ln 4)/3, 10 \ln 4)$ es inestable.

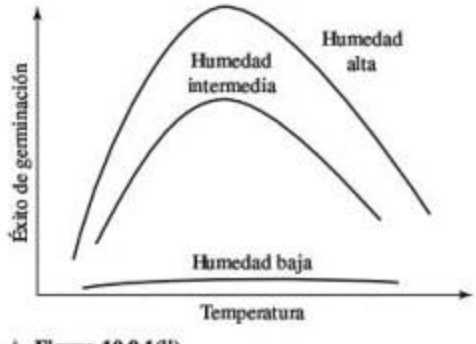
41. (0, 0) es inestable; (1000, 750) es localmente estable.

Sección 10.9

1.



▲ **Figura 10.9.1(i)**



▲ **Figura 10.9.1(ii)**

3. **(a)** $\frac{\partial A_i}{\partial F} > 0$, $\frac{\partial A_i}{\partial D} < 0$

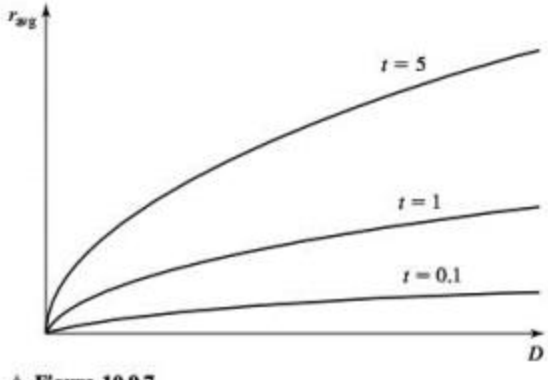
(b) $\frac{\partial A_x}{\partial F} > 0$: el área cubierta por la especie introducida crece con la cantidad de fertilizante añadida.

$\frac{\partial A_x}{\partial D} > 0$: el área cubierta por las especies introducidas crece con la intensidad de la perturbación (nótese que es lo contrario que en **(a)**).

(c) La fertilización tuvo un efecto positivo en ambos casos. Es decir, la fertilización aumentó el área cubierta por la especie autóctona y por la introducida. La intensidad de las perturbaciones tuvo un efecto negativo en la especie autóctona y un efecto positivo en la especie introducida.

5. $D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 3x^2 & -2y \end{bmatrix}$

7. (a)



▲ **Figura 10.9.7**

(b) Usar **(a)**: $r_{avg}^2 = \pi Dt$ y despejar D

(c) r_{avg} = promedio aritmético = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i$ y use la fórmula de D en **(b)**

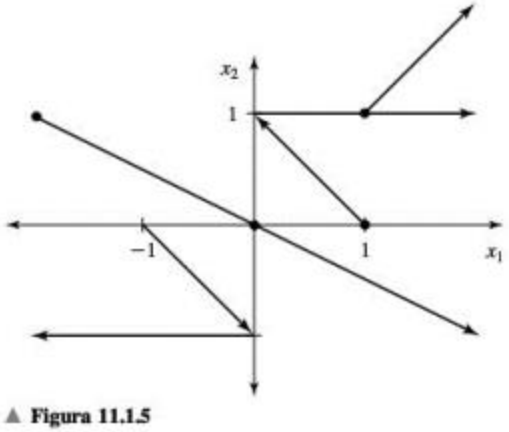
Sección 11.1

1. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

3. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

5. (1, 0): $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (0, 1): $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (−1, 0): $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

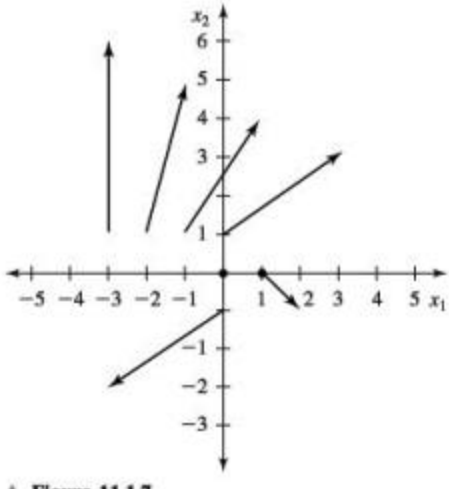
(0, −1): $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (1, 1): $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (0, 0): $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; (−2, 1): $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$;



▲ **Figura 11.1.5**

7. (1, 0): $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; (0, 1): $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; (−1, 1): $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; (0, −1): $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$;

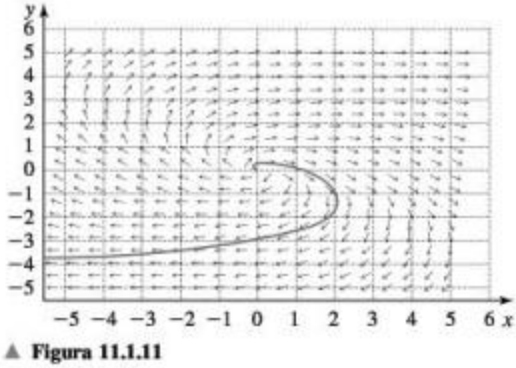
(−3, 1): $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$; (0, 0): $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; (−2, 1): $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$;



▲ **Figura 11.1.7**

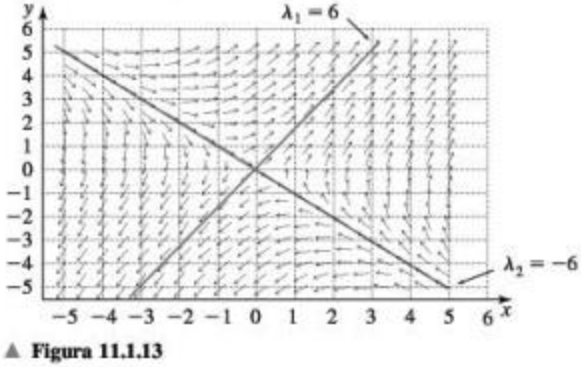
9. Figura 11.18: (a); Figura 11.19: (b); Figura 11.20: (c); Figura 11.21: (d)

11.



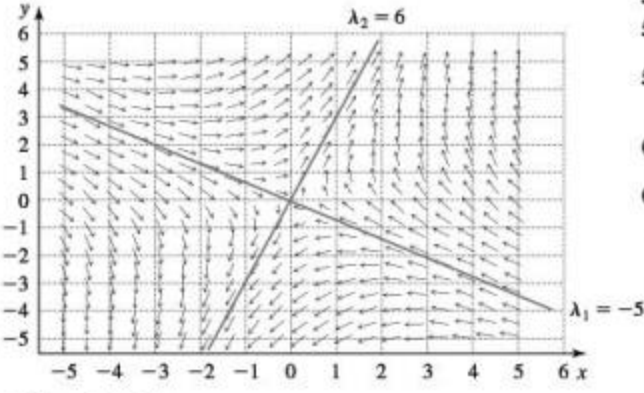
▲ **Figura 11.1.11**

13. $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



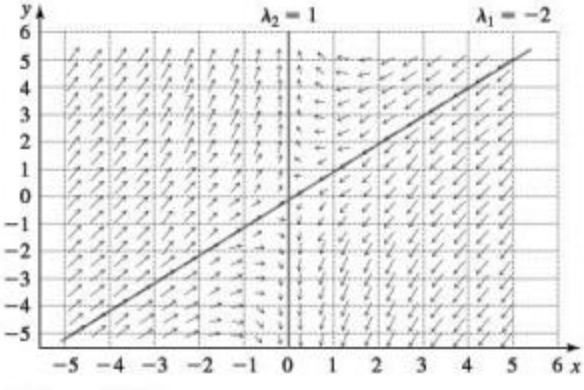
▲ **Figura 11.1.13**

15. $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-5t}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$



▲ **Figura 11.1.15**

17. $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



▲ **Figura 11.1.17**

19. $\mathbf{x}(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

21. $\mathbf{x}(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

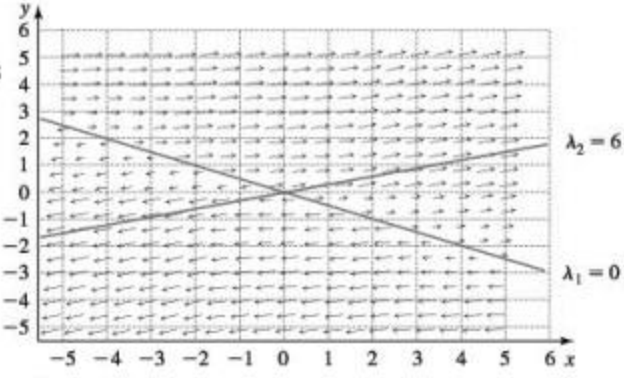
23. $\mathbf{x}(t) = \frac{13}{8}e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{8}e^{5t}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

27. ensilladura
29. Nodo inestable
31. Nodo estable
33. ensilladura
35. ensilladura
37. espiral estable
39. espiral inestable
41. espiral neutra
43. espiral neutra
45. espiral estable
47. ensilladura
49. espiral estable
51. ensilladura
53. nodo estable
55. espiral inestable

57. **(a)** $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 6$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c)



▲ **Figura 11.1.57**

Todos los vectores direccionales son paralelos. Las soluciones se mueven paralelamente al autovector correspondiente a $\lambda_2 = 6$.

Sección 11.2

1.

$$\frac{dx_1}{dt} = -0.55x_1 + 0.1x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0.5x_1 - 0.12x_2$$

(0, 0) es un nodo estable.

3.

$$\frac{dx_1}{dt} = -2.5x_1 + 0.7x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2.5x_1 - 0.8x_2$$

(0, 0) es un nodo estable.

5.

$$\frac{dx_1}{dt} = -0.1x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -0.5x_2$$

(0, 0) es un nodo estable.

7. $a = 0.1$, $b = 0.3$, $c = 0.3$, $d = 0.2$
9. $a = 0.3$, $b = 0$, $c = 0.9$, $d = 0.2$
11. $a = 0$, $b = 0$, $c = 0.2$, $d = 0.3$
13. $x_1(t) = 4e^{-0.3t}$, $x_2(t) = 4(1 - e^{-0.3t})$

15. **(a)** $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 0$, $d = 0$

(b) La constante es el área total.

(d) $x_2(t) = 20 - x_1(t) = \frac{40}{3} + \frac{14}{3}e^{-0.3t}$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{20}{3}$, $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = \frac{40}{3}$

17. $x(t) = 3\,\text{sen}\,(2t)$

19. $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = 3x$

21. $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = x - v$

Sección 11.3

1. ensilladura

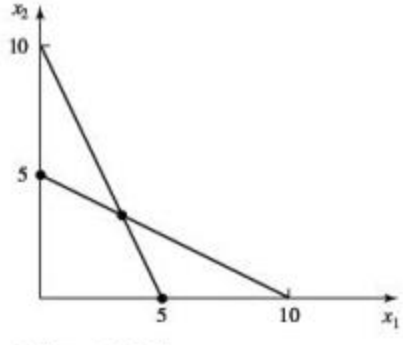
3. ensilladura

5. (0, 0: nodo inestable; (0, 4/5): ensilladura; (1/2, 0): ensilladura; (0.5, 0.3): nodo estable

7. (0, 0): nodo inestable; (0, 1): ensilladura; (1, 0): nodo inestable; (1/2, 1) ensilladura

9. (0, 0): ensilladura; (1, 1): espiral inestable

11. **(a)**



▲ **Figura 11.3.11**

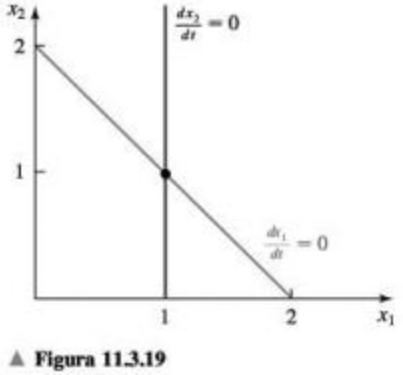
(b) (10/3, 10/3) es un nodo estable.

13. tr < 0, det = ?

15. tr = ?, det < 0

17. tr < 0, det > 0; el equilibrio es localmente estable

19. **(a)**



▲ **Figura 11.3.19**

(b) tr < 0, det > 0: (1, 1) es localmente estable

Sección 11.4

1.

$$\frac{dN_1}{dt} = 2N_1\left(1 - \frac{N_1}{20} - \frac{N_2}{100}\right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 3N_2\left(1 - \frac{N_2}{15} - \frac{N_1}{75}\right)$$

3. La especie 2 desplaza a la especie 1.

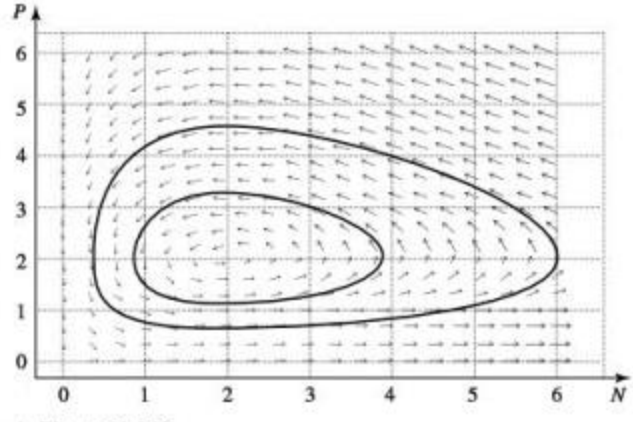
5. Control por fundadores.

7. (0, 0): inestable (fuente); (18, 0): inestable (ensilladura); (0, 20): estable (sumidero).

9. (0, 0): inestable (fuente); (35, 0): inestable (sumidero); (0, 40): estable (sumidero); (85/11, 100/11): inestable (centro)

11. $(\alpha_{12}, \alpha_{21}) = (1/4, 7/18)$

13.



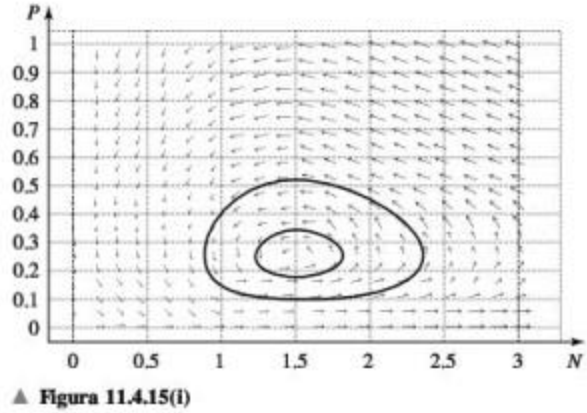
▲ **Figura 11.4.13**

15. **(a)** equilibrio trivial: (0, 0); equilibrio no trivial: (3/2, 1/4)

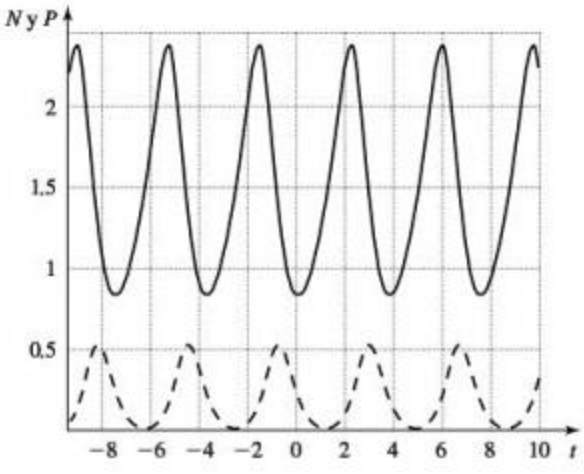
(b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$: (0, 0) es una ensilladura inestable

(c) $\lambda_1 = i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$: autovalores imaginarios puros, la estabilidad lineal no se puede usar para deducir la estabilidad del equilibrio.

(d)



▲ **Figura 11.4.15(i)**

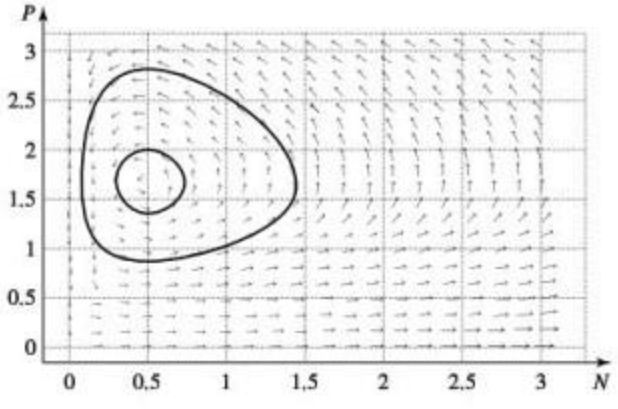


▲ **Figura 11.4.15(ii)**

17. **(a)** $\frac{dN}{dt} = 5N$, $N(t) = N(0)e^{5t}$; en ausencia de depredadores, la especie de insecto crece con velocidad exponencial.

(b) Si $P(t) > 0$, entonces $N(t)$ permanece acotada.

(c)



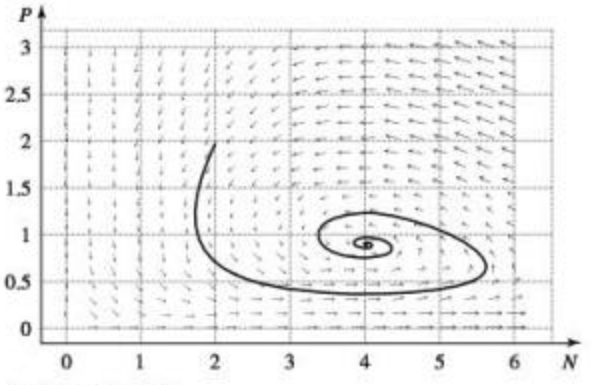
▲ **Figura 11.4.17**

Al fumigar el cuerpo, la solución se desplaza a un ciclo diferente; esto produce un brote mucho mayor de insectos más tarde en el año comparado con antes de la fumigación.

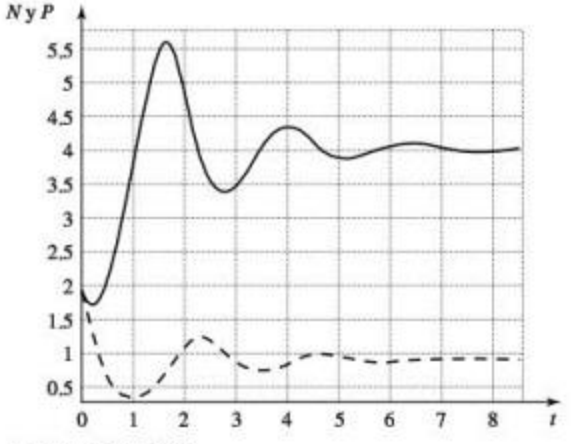
19. **(a)** Cuando $P = 0$, entonces $\frac{dN}{dt} = 3N(1 - \frac{N}{10})$; equilibrios: $\hat{N} = 0$ (inestable) y $\hat{N} = 10$ (localmente estable). Si $N(0) > 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} N(t) = 10$

(b) (0, 0): inestable (ensilladura); (10, 0): inestable (ensilladura); (4, 0.9): espiral estable

(c)

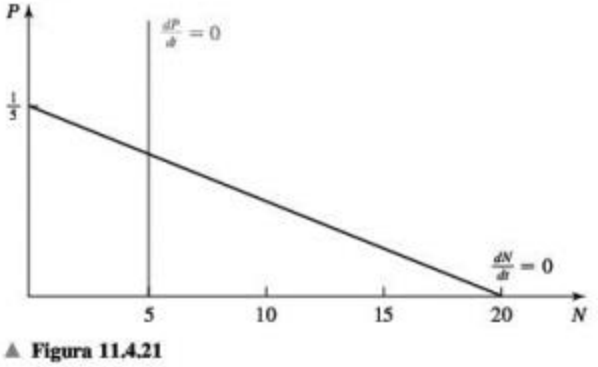


▲ **Figura 11.4.19(i)**



▲ **Figura 11.4.19(ii)**

21. **(a)**



▲ **Figura 11.4.21**

(b) $\text{tr}\, Df(\hat{N}, \hat{P}) < 0$ y $\det Df(\hat{N}, \hat{P}) > 0$; el equilibrio no trivial es linealmente estable.

23. $\hat{N} = \frac{d}{c}$ no depende de a; por tanto, no cambia cuando cambia a. $\hat{P} = \frac{a}{b}(1 - \frac{d/c}{K})$ es una función creciendo con a; por tanto, el equilibrio del depredador aumenta cuando a crece.

25. $\hat{N} = \frac{d}{c}$ es una función decreciente *de c*; por tanto, la abundancia de presas disminuye. $\hat{P} = \frac{a}{b}(1 - \frac{d/c}{K})$ es una función creciente con c; por tanto, la abundacia de depredadores crece cuando c crece .

27. depredación; localmente estable

29. mutualismo; localmente estable

31. mutualismo; inestable

33. competencia; inestable

35. $\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$; traza negativa; determinante indeterminado

37. $\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$; traza negativa; determinante indeterminado

39. $\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$; traza negativa; determinante indeterminado

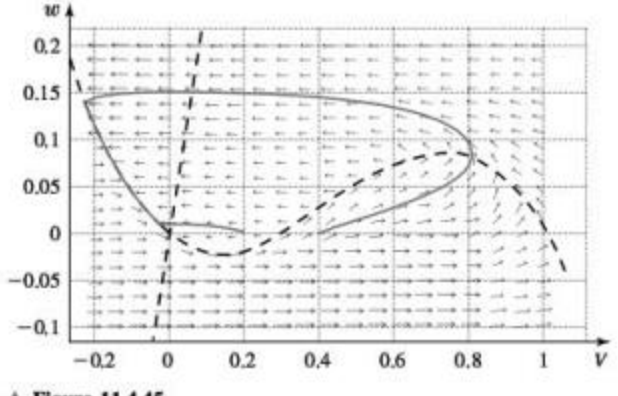
41. Si $a_{ii} < 0$, entonces la velocidad de crecimiento de la especie i resulta afectada negativamente por un incremento en la densidad de la especie i. Esto se conoce como autorregulación.

43. **(a)** $(\hat{N}, \hat{P}) = (\frac{d}{c}\frac{a}{b})$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -b\frac{d}{c} \\ c\frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix}$

(c) $a_{11} = a_{22} = 0$: ninguna especie tiene efecto sobre sí misma; $a_{12} = -b\frac{d}{c} < 0$: la presa es efectuada negativamente por los depredadores; $a_{21} = c\frac{a}{b} > 0$; los depredadores son afectados positivamente por sus presas.

45.



▲ **Figura 11.4.45**

47. $V(0) > 0.3$

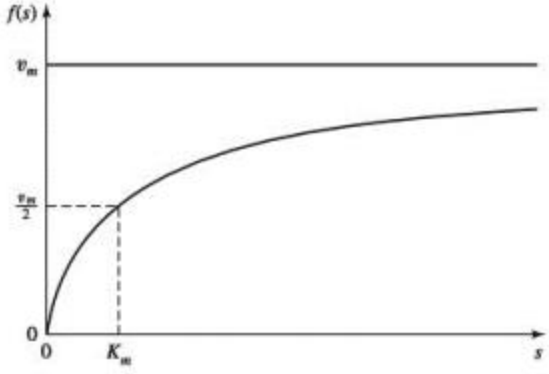
49. $\frac{dc}{dt} = kab$

51. $e = [E]$, $s = [S]$, $c = [ES]$, $p = [P]$, $\frac{de}{dt} = -k_1es + k_2c$, $\frac{ds}{dt} = -k_1es$, $\frac{dc}{dt} = k_1es - k_2c$, $\frac{dp}{dt} = k_2c$

53. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$, $x(t) + y(t)$ es constante.

55. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0$, $x(t) + y(t) + z(t)$ es constante

57. **(c)**

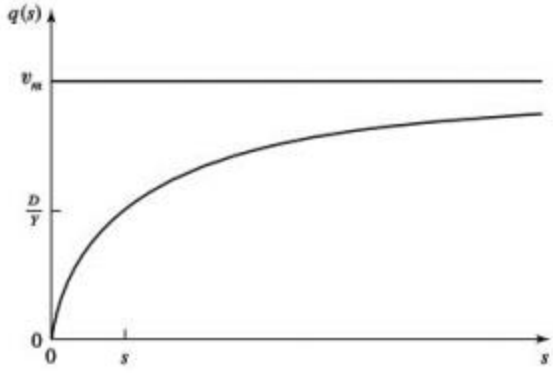


▲ **Figura 11.4.57**

(d) Como $\frac{dp}{dt} = f(s)$, la velocidad de reacción es función de s y por tanto, la disponibilidad de s determina la velocidad de reacción.

59. **(a)** $\hat{s} = \frac{DK_m}{Yv_m - D}$; es una función creciente con D.

(b)



▲ **Figura 11.4.59**

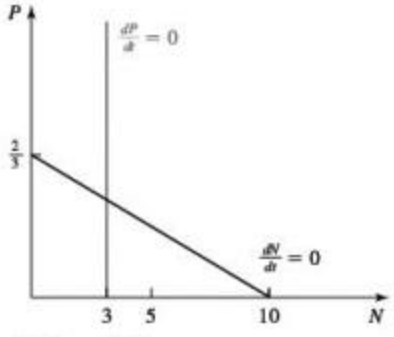
La coordenada s del punto de intersección de la gráfica de $q(s)$ con la recta horizontal $f(s) = D/Y$ es el equilibrio.

61. (4, 0): inestable; (2, 2): estable

Sección 11.6

1. $Z(t) = Z(0)e^{(r_1 - r_2)t}$

3. (a)



▲ **Figura 11.6.3**

(b) El equilibrio no trivial es localmente estable.

5. (a) Si $c_1 > m_1$, entonces existe un equilibrio no trivial en el que la especie 1 tiene densidad positiva y la especie 2 está ausente.

7. (a) $\hat{x} = Y(s_0 - \hat{s}) > 0$ cuando $\hat{s} < s_0$

(b) $\frac{\partial \hat{s}}{\partial D} > 0$; $\frac{\partial \hat{s}}{\partial Y} < 0$

Sección 12.1

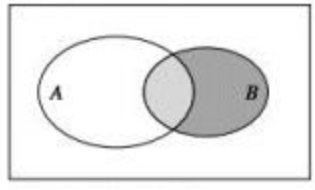
1. 40
3. 120
5. 84
7. 120
9. 5040
11. 358, 800
13. 2730
15. 120
17. 120
19. 1365
21. 126
23. (a) exactamente dos bolas rojas: 10; exactamente dos bolas azules: 6; una de cada: 20

(b) total: 36

25. 168, 168
27. ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$; para formar un subconjunto, es necesario decidir si cada elemento debe estar en el subconjunto. Hay $2^3 = 8$ posibilidades.
29. 12
31. 30
33. 31
35. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
37. $\binom{26}{4}\binom{26}{5}$
39. $4\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}$
41. $\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1}$
43. 3!

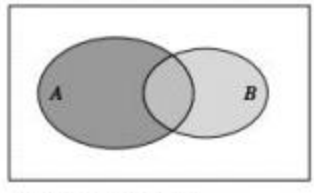
Sección 12.2

1. $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$
3. $\Omega = \{(i, j) : 1 \leqslant i < j \leqslant 5\}$
5. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$
7. $\{4, 6\}$
9. 0.6
11. 0.25
13. 0.5
15. (a)



▲ **Figura 12.2.15(a)**

(b)



▲ **Figura 12.2.15(b)**

17. $\frac{3}{4}$
19. $\frac{5}{36}$
21. $\frac{5}{12}$
23. $\frac{1}{4}$
25. $\frac{1}{2}$
27. $\frac{1}{8}$
29. (a) $\frac{\binom{N-100}{7}\binom{100}{3}}{\binom{N}{10}}$

(b) 333

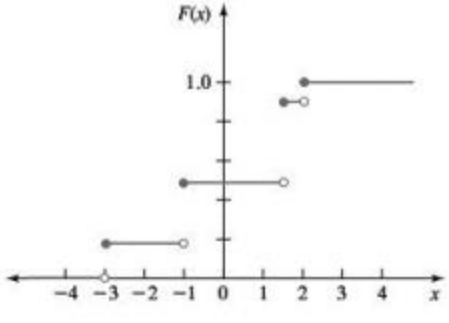
31. $\frac{1}{17}$
33. $\frac{12}{55}$
35. $1 - \frac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}}$
37. $\frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}}$
39. $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

Sección 12.3

1. $\frac{12}{51}$
3. $\frac{3}{5}$
5. $\frac{1}{2}$
7. $\frac{1}{6}$
9. $\frac{4}{7}$
11. 0.8425
13. $\frac{1}{2}$
15. P (la primera carta sea un as) = P(la segunda carte sea un as) = $\frac{1}{13}$
17. 0.3
19. $\frac{3}{4}$
21. A y B son independientes.
23. A y B no son independientes.
25. **(a)** $\frac{1}{8}$ **(b)** $\frac{7}{8}$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** $\frac{7}{8}$
27. $(\frac{1}{4})^{10}$
29. $1 - (0.9)^{10}$
31. 0.1624
33. $\frac{1}{3}$
35. $\frac{1}{3}$
37. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{1}{3}$

Sección 12.4

1. $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$
3. $P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$, $P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}$, $P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}}$
5. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 0.2, & -3 \leqslant x < -1 \\ 0.5, & -1 \leqslant x < 1.5 \\ 0.9, & 1.5 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$



▲ **Figura 12.4.5**

7. $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 0) = 0.1$, $P(X = 1) = 0.4$, $P(X = 2) = 0.3$
9. **(a)** $N = 55$ **(b)** $\frac{28}{55}$
11. **(a)**

k	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
p_k	1/25	4/25	5/25	3/25	1/25	5/25	2/25	1/25	2/25	1/25

(b) valor medio: $\frac{396}{25} = 15.84$

13. **(a)**

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	1/25	1/25	2/25	3/25	4/25	2/25	6/25	3/25	3/25

(b) valor medio: $\frac{171}{25} = 6.84$

15. (a) -0.4 **(b)** 1.0 **(c)** 1.4
17. $EX = -0.1$, $\text{var}(X) = 3.39$, d.c. $= \sqrt{3.39}$
19. **(a)** $EX = \frac{55}{10}$ **(b)** $\text{var}(X) = 8.25$
23. **(a)** 0.1 **(b)** 0.5 **(c)** 0.4 **(d)** 0.2
25. **(a)** $EX = 0.75$, $EY = 0.3$ **(b)** $E(X + Y) = 1.05$

(c) $\text{var}(X) = 1.7875$, $\text{var}(Y) = 3.01$

(d) $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) = 4.7975$

27. **(a)** Como $(X - EX)^2 \geqslant 0$, se deduce que $E(X - EX)^2 \geqslant 0$; por tanto, $\text{var}(X) \geqslant 0$

(b) Como $\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 \geqslant 0$, se deduce que $EX^2 \geqslant (EX)^2$

29. **(a)** $\binom{10}{5}(0.5)^{10}$ **(b)** $(0.5)^{10}\left[\binom{10}{8} + \binom{10}{9}\binom{10}{10}\right]$

(c) $1 - (0.5)^{10}$

31. $P(X = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$
33. $(0.8)^{20}$
35. **(a)** 1 **(b)** $(10)(0.9)^{10}$
37. 12.5
39. **(a)** $\frac{\binom{24}{6}\binom{12}{4}}{\binom{36}{10}}$ **(b)** $\binom{10}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^4$
41. $\frac{30!}{10!14!6!}(0.2)^{10}(0.35)^{14}(0.45)^6$
43. $\frac{40!}{20!10!8!2!}\left(\frac{9}{16}\right)^{20}\left(\frac{3}{16}\right)^{10}\left(\frac{3}{16}\right)^8\left(\frac{1}{16}\right)^2$
45. $\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{6}{24}\right)^2\left(\frac{8}{24}\right)^2\left(\frac{10}{24}\right)^2$
47. $\frac{23!}{5!12!6!}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\left(\frac{1}{4}\right)^6$
49. 1/2, 1/4, 1/8
51. 1/8
53. 15/16
55. $\left(\frac{14}{15}\right)^{19}$
57. $ET = 6$, $\text{var}(T) = 30$
59. **(a)** $\left(\frac{9}{10}\right)^5\frac{1}{10}$ **(b)** $\frac{9}{10}\frac{8}{9}\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5}$

61. (a) $(1-p)^{k-1}p$ (b) $\binom{k-1}{1}p^2(1-p)^{k-2}$

63.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	e^{-2}	$2e^{-2}$	$2e^{-2}$	$\frac{4}{3}e^{-2}$

65. (a) $1-2e^{-1}$ (b) $e^{-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$

67. $1-e^{-1.5}\left[1+1.5+\frac{(1.5)^2}{2}+\frac{(1.5)^3}{6}\right]$

69. $1-3e^{-2}$

71. e^{-7}

73. $1-3e^{-0.5}$

75. $1-4e^{-3}$

77. (a) e^{-4} (b) $13e^{-4}$ (c) $32e^{-8}$ (d) $\frac{1}{4}$

79. (a) $18e^{-6}$ (b) 1/4, 1/2, 1/4

81. $P(X=0)\approx e^{-0.5}$

83. (a) $1-\left(\frac{699}{700}\right)^{1000}$ (b) $1-e^{-1000/700}$

85. $e^{-1.5}$

Sección 12.5

1. función de distribucioín: $F(x)=1-e^{-3x}$ para $x\geqslant 0$, $F(x)=0$ para $x\leqslant 0$

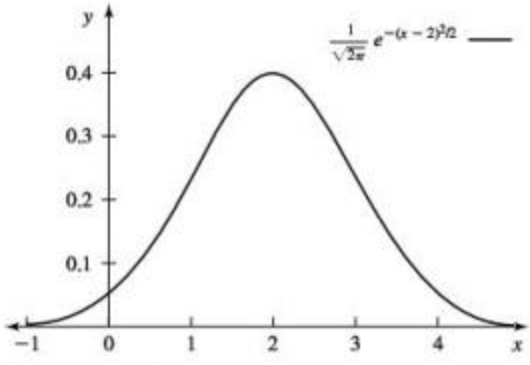
3. $c=\frac{1}{\pi}$

5. $EX=\frac{1}{2}$, $\operatorname{var}(X)=\frac{1}{4}$

7. $EX=\frac{3}{2}$, $\operatorname{var}(X)=\frac{3}{4}$

9. (b) $EX=\frac{a-1}{a-2}$

11. (d)



▲ **Figura 12.5.11**

13. 95%: (7.4, 18.2), 99%: (4.7, 20.9)

15. 50%

17. 99.5%

19. 2.5%

21. (a) 0.6915 (b) 0.383 (c) 0.1587 (d) 0.0668

23. (a) $x=3.56$ (b) $x=1.5$ (c) $x=0.5$ (d) $x=1.34$

25. (a) 0.0228 (b) $x=628$

27. 0.76%

29. 0.8185

33. $E[X]=2$

35. (a) 0.0735 (b) 0.6068 (c) 88 (d) 56

37. 0.1

39. $a=a$, $b=7$

41. $EY=\frac{3}{4}$

43. *CCXCCXCCCX*

45. (a) $(1-x)^n$

(b) Use la regla de L'Hôpital en $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n$

47. $EX=\frac{1}{\lambda}$

49. $e^{-4/3}$

51. (a) $e^{-20/27}$ (b) $e^{-20/27}$

53. (a) $1-e^{-3/5}$ (b) $e^{-1/5}$

55. (a) años (b) ln 2/0.2 años

57. (a) $\exp[-(1.5+10e^{0.05}-10)]$

(b) $\exp[-(2.1+10e^{0.07}-10)]-\exp[-(3+10e^{0.1}-10)]$

59. La solución de $1.2x+(0.6)e^{0.5x}-0.6-\ln 2=0$ es aproximadamente 0.451.

61. (a) $\exp\left[-(2\times 10^{-5})\frac{(50)^{2.5}}{2.5}\right]$ (b) 0.1477

63. $x_m\approx 30.4$

Sección 12.6

1. Probabilidad exacta: $e^{-3/2}$; desigualdad de Markov: $P(X\geqslant 3)\leqslant\frac{2}{3}$

5. Exacta: $P(|X|\geqslant 1)=0$; desigualdad de Chebyshev: $P(|X|\geqslant 1)\geqslant\frac{1}{3}$

7. $\frac{9}{25}$

9. $\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}X_i$ converge a 3/2 a $n\to\infty$

11. Cuando $E[X_i]=\infty$, no se puede aplicar la ley de los grandes números definida en la Sección 12.6.

13. El tamaño de la muestra debe ser al menos 380.

15. 0.1587

17. (a) 0.0023 (b) 0.83

19. (a) 0.1192 (b) 0.182 (c) 0.1521

21. (a) −11.2 (b) 0.579

23. 69

25. 385

27. (a) 0.3660 (b) 0.3679 (c)0.0582

29. (a) 0.1849 (b) 0.1775 (c) 0.1896

31. Probablemente no.

33. (a) 0.6065, 0.3033, 0.0758 (b) 0.8461

35. 0.1429

37. 0.0485

Sección 12.7

1. mediana: 15; mediana muestral: 16.2; varianza muestral: 180.2

3. $\bar{X} = 11.93$; $S^2 = 3.389$

5. $\bar{X} = 5.69$; $S^2 = 3.465$

11. (c) valores verdaderos: $\mu = 0.5$, $\sigma^2 = \frac{1}{12}$

13. $\bar{X} = 16.2$; *S.E.* = 4.245

15. $[-0.3993, 0.5213]$

19. $\hat{p} = 0.72$; $[0.651, 0.789]$

21. $y = 1.92x - 0.92$; $r^2 = 0.9521$

25. $y = 0.201x + 0.481$; $r^2 = 0.841$

Sección 12.9

1. (a) 0.431

4. 168, 168, 000

5. (a) $EX = 4.2$ (b) 0.0043 (c) 0.0215 (d) $1 - (0.0043)^5$

7. (a) 0.16 (b) 0.2

9. (a) $\mu = 170$, $\sigma = 6.098$ (b) 0.4013

11. 20%

13. (b) $EV = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

REFERENCIAS

W. C. Allee (1931) *Animal Aggregations. A Study in General Sociology*. University of Chicago Press, Chicago.

H. G. Andrewartha and L.C. Birch (1954) *The Distribution and Abundance of Animals*. University of Chicago Press, Chicago.

M. Begon and G. A. Parker (1986) Should egg size and clutch size decrease with age? *Oikos* **47**: 293-302.

T. S. Jr. Bellows (1981) The descriptive properties of some models for density dependence. *Journal of Animal Ecology* **50**: 139-156.

M. J. Benton (1997) Models for the Diversification of Life. *TREE* **12**: 490-495.

M. Benton and D. Harper (1997) *Basic Paleontology*. Addison Wesley and Longman.

P. J. Bohlen, P. M. Groffman, C. T. Driscoll, T. J. Fahey, and T. G. Siccama (2001) Plant-soil-microbial interactions in a northern hardwood forest. *Ecology* **82**: 965-78.

R. Borchert (1994) Soil and stem water storage determine phenology and distribution of tropical dry forest trees. *Ecology* **75**: 1437-49.

T. Boulinier, J. D. Nichols, and J. E. Hines (2001) Forest fragmentation and bird community dynamics: inference at regional scales. *Ecology* **82**: 1159-69.

G. E. Briggs and J. B. S. Haldane (1925) A note on the kinematics of enzyme actions. *Biochemical Journal* **19**: 338-339.

J. L. Brooks and S. I. Dodson (1965) Predation, body-size and composition of plankton. *Science* **150**: 28-35.

M. J. W. Burke and J. P. Grime (1996) An experimental study of plant community invasibility. *Ecology* **77**: 776-790.

CRC Standard Probability and Statistics Tables and Formulae (1991). Editor, W. H. Beyer. CRC Press.

M. L. Cain, S. W. Pacala, J. A. Silander, Jr., and M. J. Fortin (1995) Neighborhood models of clonal growth in the white clover *Trifolium repens*. *The American Naturalist* **145**: 888-917.

G. S. Campbell (1986) *An Introduction to Environmental Biophysics*. Springer, New York.

M. J. Crawley (1997) Plant-Herbivore Dynamics. In *Plant Ecology*, ed. M. J. Crawley, pp. 401-474. Blackwell Science.

J. W. Dalling, K. Winter, and J. D. Nason (2001) The unusual life history of *Alseis blackiana*: a shade-persistent pioneer tree? *Ecology* **82**: 933-45.

C. Darwin (1859) *On the Origin of Species by Means of Natural Selection*. John Murray, London.

C. Darwin (1959) *The Origin of Species*. Reprinted in Penguin Classics 1985. Penguin Books, Ltd., England.

D. L. DeAngelis (1992) *Dynamics of Nutrient Cycling and Food Webs*. Chapman and Hall.

W. R. DeMott, R. D. Gulati, and K. Siewertsen (1998) Effects of phosphorus-deficient diets on the carbon and phosphorus balance of *Daphnia magna*. *Limnol. Oceanogr.* **43**: 1147-1161.

A. M. de Roos (1996) A gentle introduction to physiologically structured population models. In *Structured-Population Models in Marine, Terrestrial, and Freshwater Systems*, eds. S. Tuljapurkar and H. Caswell. Chapman & Hall.

R. H. Dott, Jr., and R. L. Batten (1976) *Evolution of the Earth*. Second edition. McGraw-Hill Book Company.

J. E. Dowd and D. S. Riggs (1965) A comparison of estimates of Michaelis-Menten kinetic constants from various linear transformations. *The Journal of Biological Chemistry* **240**: 863-869.

C. M. Duarte and S. Agustí (1998) The CO_2 balance of unproductive aquatic ecosystems. *Science* **281**: 234-236.

R. Fitzhugh (1961) Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysics Journal* **1**: 445-466.

D. S. Falconer (1989) *Introduction to Quantitative Genetics*. Logmans, New York.

D. S. Falconer and T. F. C. Mackay (1996) *Introduction to Quantitative Genetics*. Fourth Edition, Longman.

D. J. Futuyama (1995) *Science on Trial*. Second edition. Sinauer.

P. Gaastra (1959) Mededelinger van de Landbouwhogeschool Te Wageningen, The Netherlands. In F. B. Salisbury and C. W. Ross (1978) *Plant Physiology*. Wadsworth.

L. A. Gavrilov and N. S. Gavrilova (2001) The reliability theory of aging and longevity. *Journal of Theoretical Biology* **213**: 527-545.

G. F. Gause (1934) *The Struggle for Existence*. Williams & Wilkins, Baltimore (reprinted 1964 by Hafner, New York).

Z. M. Gliwicz (1990) Food treshold and body size in caldocerans. *Nature* **343**: 683-40.

P. R. Grant (1982) Variation in the size and shape of Darwin's finch eggs. *Auk* **99**: 15-23.

P. R. Grant, I. Abbott, D. Schluter, R. L. Curry, and L. K. Abbott (1985) Variation in the size and shape of Darwin's finches. *Biological Journal of the Linnean Society* **25**: 1-39.

K. J. Griffiths (1969) The importance of coincidence in the functional and numerical responses of two parasites of the European pine sawfly, *Neodiprion sertifer*. *Canadian Entomologist*, **101**: 673-713.

J. B. S. Haldane (1957) The cost of natural selection. *J. Genet.* **55**: 511-524.

D. J. Hall (1964) An experimental approach to the dynamics of a natural population of *Daphnia galeata mendota*. *Ecology* **45**: 94-111.

D. L. Hartl and A. G. Clark (1989) *Principles of Population Genetics*. Second Edition. Sinauer.

R. W. Herschy (1995) *Streamflow Measurements*. 2nd edition. E&FN Spon.

L. Holdridge, W. Grenke, W. Hatheway, T. Liang, and J. Tosi, Jr. (1971) *Forest environments in tropical life zones: A pilot study*. Oxford: Pergamon Press.

C. S. Holling (1959) Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *Can. Ent.* **91**: 385-398.

H. S. Horn (1971) *The adaptive geometry of trees*. Monographs in Population Biology 3. Princeton University Press. Princeton, NJ.

C. E. Iselin, J. E. Robertson, and D. F. Paulson (1999) Radical perineal prostatectomy: oncological outcome during a 20-year period. *The Journal of Urology* **161**: 163-168.

Y. Iwasa, T. J. de Jong and P. G. L. Klinkhamer (1995). Why pollinators visit only a fraction of the open flowers on a plant and its consequence for fitness curves of plants. *Journal of Evolutionary Biology* **8**: 439-453.

T. H. Jukes and C. R. Cantor (1969) Evolution of protein molecules. pp. 21-132. *In* H. N. Munro (ed.), *Mammalian Protein Metabolism III*. Academic Press, New York.

P. M. Kareiva (1983) Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecologia* **57**: 322-327.

W. O. Kermack and A. G. McKendrick: Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Roy. Soc.* **A 115**: 700-721 (1927); **138**: 55-83 (1932); **141**: 94-122 (1933).

K. B. Krauskopf and D. K. Bird (1995) *Introduction to Geochemistry*. Page 268. McGraw-Hill, Inc., New York.

H. E. Landsberg (1969) *Weather and Health, an Introduction to Biometerology*. Garden City, New Jersey. Doubleday.

A. C. Leopold and P. E. Kriedemann (1975) *Plant growth and development*. McGraw Hill, New York.

P. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**: 183-212.

R. Levins (1969). Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. *Bull. Entomol. Soc. Am.* **15**: 237-240.

R. Levins (1970) Community equilibria and stability, and an extension of the competitive exclusion principle. *Am. Nat.* **104**: 413-423.

D. C. Lloyd (1987) Selection of offspring size at independence and other size-versus-number strategies. *American Naturalist* **129**: 800-817.

A. J. Lotka (1932) The growth of mixed populations: two species competing for a common food supply. *Journal of the Washington Academy of Sciences* **22**: 461-469.

R. H. MacArthur and E. O. Wilson (1963). An equilibrium theory of insular zoogeography. *Evolution* **17**: 373-387.

T. F. C. Mackay (1984) Jumping genes meet abdominal bristles: Hybrid dysgenesis-induced quantitative variation in *Drosophila melanogaster*. *Genet. Res.* **44**: 231-237.

R. M. May (1975) *Stability and Complexity in Model Ecosystems* Princeton, Princeton University Press.

R. M. May (1976) Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261**: 459-461.

R. M. May (1978) Host-parasitoid systems in patchy environments: a phenomenological model. *Journal of Animal Ecology*, **47**: 833-843.

L. Michaelis and M. I. Menten (1913) Die Kinetik der Invertinwirkung. *Biochem. Z.* **49**: 333-369

J. L. Monod (1942) *Recherches sur la Croissance des Cultures Bacteriennes*. Hermann, Paris.

J. L. Monod (1950) La technique de culture continué: theorie et applications. *Ann. Instit. Pasteur* **79**: 390-410.

B. Moss (1980) *Ecology of Freshwaters*. Blackwell Scientific Publication.

J. S. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa (1962) An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE.* **50**: 2061-2071.

S. Nee and R. M. May (1992) Dynamics of metapopulation: habitat destruction and competitive coexistence. *Journal of Animal Ecology* **61**: 37-40.

A. J. Nicholson (1933) The balance of animal populations. *Journal of Animal Ecology* **2**: 131-178

A. J. Nicholson and V. A. Bailey (1935) The balance of animal populations. *Proceedings of the Zoological Society of London* **3**: 551-598.

K. J. Niklas (1994) *Plant Allometry. The Scaling of Form and Process*. The University of Chicago Press. Chicago.

R. T. Oglesby (1977) Relationships of fish yield to lake phytoplankton, standing crop, production, and morphoedaphic factors. *J. Fish. Res. Bd. Can.* **34**: 2271-2279.

J. G. Owen (1988) On productivity as a predictor of rodent and carnivore density. *Ecology* **69**: 1161-65.

S. W. Pacala and M. Rees (1998) Models suggesting field experiments to test two hypotheses explaining successional diversity. *American Naturalist* **152**: 729-737.

R. Pearl and L. J. Reed (1920) On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **6**: 275-288.

G. W. Pierce (1949) *The Songs of Insects*. Cambridge, Mass. Harvard University Press.

A. Pisek, W. Larcher, W. Moser and I. Pack (1969) Kardinale Temperatur-bereiche der Photosynthese und Grenztemperaturen des Lebens der Blätter verschiedener Spermatophyten. III. Temperaturabhängigkeit und optimaler Temperaturbereich der Netto-Photosynthese. *Flora, Jena* **158**: 608-630.

S. D. Pletcher (1998) Mutation and the evolution of age-specific mortality rates: experimental results and statistical developments. Thesis (Ph. D.)–University of Minnesota.

F. W. Preston (1962) The canonical distribution of commonness and rarity. *Ecology* **43**: 185-215, 410-431.

M. J. Reiss (1989) *The Allometry of Growth and Reproduction.* Cambridge University Press.

D. A. Roff (1992) *The Evolution of Life Histories.* Chapman & Hall.

M. L. Rosenzweig (1971) Paradox of Enrichment: Destabilization of Exploitation Ecosystems in Ecological Time. *Science* **171**: 385-387.

M. L. Rosenzweig and Z. Abramsky (1993) How are diversity and productivity related? pp. 52-65. *In* R. E. Ricklefs and D. Schluter (eds.) *Species Diversity in Ecological Communities.* University of Chicago Press, Chicago.

J. Roughgarden (1996) *Theory of Population Genetics and Evolutionary Ecology.* 2nd edition. Prentice Hall.

S. M. Stanley (1979) Macroevolution: Pattern and Process. San Francisco: W. H. Freeman & Co, 332.

Statistical Abstract of the United States 1994, U.S. Bureau of the Census, 14th edition. Washington, DC, 1994.

R. W. Sterner (1997) Modeling interactions between food quality and quantity in homeostatic consumers. *Freshwater Biology* **38**: 473 -482.

R. W. Sterner and J. J. Elser (2002) *Ecological Stoichiometry: The Biology of Elements from Molecules to the Biosphere.* Princeton University Press. Princeton, NJ.

C. R. Taylor, G. M. 0. Maloiy, E. R. Weibel, U. A. Langman, J. M. Z. Kaman, H. J. Seeherman, and B. N. C. Heglund (1980). Design of the mammalian respiratory system. III. Scaling maximum aerobic capacity to body mass: wild and domestic mammals. *Respir. Physiol* **44**: 25-37.

W. R. Thompson (1924) La théorie Mathématique de l'action des parasites entomophages et le facteur dy hasard. *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille* **2**: 69-89.

D. Tilman (1982) *Resource Competition and Community Structure.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

D. Tilman (1994) Competition and biodiversity in spatially structured habitats. *Ecology* **75**: 2-16.

M. M. Tilzer, W. Geller, U. Sommer, and H. H. Stable (1982) Kohlenstoffkreislauf und Nahrungsketten in der Freiwasserzone des Bodensees. *Konstanzer Blätter für Hochschulfragen* **73**: 51.

J. W. Valentine (1985) Biotic diversity and clade diversity. In *Phanerozoic Diversity Patterns: Profiles in Macroevolution*, Valentine, J. W., ed., pp. 419-424. Princeton University.

P. M. Vitousek and H. Farrington (1997) Nutrient limitation and soil development: Experimental test of a biogeochemical theory. *Biogeochemistry* **37**: 63-75.

V. Volterra (1926) Fluctuations in the abundance of species considered mathematically. *Nature* **118**: 558-560.

T. D. Walker (1985) Diversification functions and the rate of taxonomic evolution. In *Phanerozoic Diversity Patterns: Profiles in Macroevolution*, Valentine, J. W., ed., pp. 311-334. Princeton University Press.

T. D. Walker and J. W. Valentine (1984) Equilibrium models of evolutionary species diversity and the number of empty niches. *American Naturalist* **124**: 887-899.

P. D. Ward (1992) *On Methuselah's Trail-Living Fossils and the Great Extinctions* by P. D. Ward, Freeman.

S. Wright (1968) *Evolution of Populations, Vol 1. Genetics and Biometrik Foundation.* University of Chicago Press, Chicago.

E. K. Yeargers, R. W. Shonkwiler and J. V. Herod (1996) *An Introduction to the Mathematics of Biology: with Computer Algebra Models.* Birkhäuser, Boston.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

absorción de luz, 63
aceleración, 210
algebraico, 43
alometría, 27, 72, 205, 240, 242, 244, 272, 489
alométrico, 490
amensalismo, 766
amplitud, 42
ángulo, 7
  grados, 7
  radianes, 7
aplicación
  identidad, 568
  iterativa, 102
  lineal, 564, 568
  rotación, 568
apropiado, 419
aproximación de Poisson, 845
aproximación lineal, 459
área, 1, 337
asíntota, 283
  horizontal, 283
  oblicua, 284
  vertical, 283
astroide, 210
autónomo, 704
autótrofo, 514
autovalor, 498, 570
autovector, 570
  interpretación geométrica, 574

B

Barrow, Isaac, 360
base exponencial natural, 30
Bernouilli, Johann, 299
biogeografía de isla, 522

C

caída libre, 330
cambio de variable
  en integración, 398
  en integral es definidas, 402
camino, 619
campo
  de pendientes, 706
  direccional, 705
Candidatos extremos locales, 273
caótico, 107
capacidad de alojamiento, 103, 104, 142, 488
carácter cuantitativo, 863
carbono, 13, 14, 30, 46, 79
carga de entrada, 502
catenaria, 162
Cauchy, Augustin-Louis, 153, 336
Cavalieri, Bonaventura, 336
centro, 722
cerrado, 620, 630
  abierto, 620, 630
cilindro recto, 386
círculo, 7
  centro, 7
  radio, 7
  unidad, 7
cociente de diferencias, 165
codominio, 18
coeficiente
  binomial, 790
  de determinación, 913
coexistencia, 757
Coleomegilla maculata, 837
combinación, 790
  lineal, 580
combinatoria, 786
comensalismo, 766
competencia, 754, 766
complemento, 797
comportamiento a largo plazo, 91
composición, 20
compromiso colonización-competencia, 519
cóncava, 265
concavidad, 265
  criterio de la derivada, 267
  definición, 266
condición inicial, 326, 480
conservación de la masa, 502
constante
  de crecimiento, 84
  de difusión, 681
  de proporcionalidad, 6
  de semisaturación, 25
continua, 129, 175
  en un intervalo, 134
  por la derecha, 131
  por la izquierda, 131
continuidad
  bidimensional, 622
  reglas básicas, 133
  unilateral, 131
contrapunto, 795
control por fundadores, 757
convergencia en probabilidad, 890
convergente, 93
convexa, 265
corrección del histograma, 894
coste de sustitución de genes, 473
crecimiento
  alométrico, 490
  de Gompertz, 521
  dependiente de la densidad, 102
  exponencial, 28, 29, 46, 71, 77, 78, 178, 238, 480, 521
  independiente de la densidad, 102
  intrínseco, velocidad de, 481
  logarítmico, 77
  logístico, 141, 142, 178, 487, 521
  restringido, 482
Cretácico, 72
curva
  área-especie, 71
  de crecimiento de Gompertz, 334
  de crecimiento de Monod, 334
  de nivel, 610

de reclutamiento de Beverton-Holt, 78, 103
de Ricker, 319, 334
longitud de, 391
rectificación, 391

D

Daphnia, 613
Darwin, Charles, 78
decaimiento exponencial, 29
decrecimiento sin límite, 121
densidad gausiana, 683
dentrita, 768
depredación, 766
derivabilidad, 636
condición suficiente, 638
continuidad, 637
derivable, 165, 175
derivación
función exponencial, 219
natural, 218
función inversa, 224
implícita, 200, 646
logarítmica, 231
logaritmo, 229
de una función, 230
regla de la cadena, 195
regla de la potencia, 180, 190, 191
regla del cociente, 189
regla del producto, 186, 409
reglas básicas, 182
tan inversa, 228
forma general de, 233
derivada, 164
de orden superior, 206
definición, 165
direccional, 648
parcial, 625
interpretación geométrica, 626
orden superior, 630
segunda, 206
tercera, 206
descarga de un río, 396
Descartes, René, 588
descomposición en fracciones simples, 419
desigualdad
de Bernstein, 898
de Chebyshev, 889
de Markov, 888
desintegración radioactiva, 30, 46, 62, 220, 222
destrucción de hábitat, 522
desviación típica, 827
muestral, 905
determinante, 549
Devónico, 79
diagrama de árbol, 810
diagramas de Venn, 797
difusión, 680
disco
de Secchi, 80
discontinua, 129
discriminante, 14
disjunto, 798
dispersión de semillas, 859, 878
distribución
normal, 863
desviación típica, 864
función de densidad, 864
media, 864
binomial, 833
aproximación de Poisson, 845, 897
aproximación por normal, 897
de edades estable, 584
de Poisson, 843
de probabilidad conjunta, 830
exponencial, 876
no envejecimiento, 878
geométrica, 838, 849
hipergeométrica, 836
marginal, 830
multinomial, 837
uniforme, 873
divergencia por oscilación, 122
divergente, 93
diversificación de la vida, 521
dominio, 18, 605, 606

E

e, 10, 30, 43, 218
ecuación
de difusión, 681
de Lineweaver-Burk, 72
de Michaelis-Menten, 72, 79
de von Betalanffy, 261, 482
del disco de Holling, 628
diferencial, 173, 474
análisis de equilibrios, 742
autónoma, 478, 511
de primer orden, 474
equilibrio, 515, 705
estabilidad, 498
método gráfico, 749
puramente temporal, 476
separable, 474
sistema, 511
sistema de primer orden lineal, 704
solución, 475, 705
solución de separable, 475
solución general, 712
en diferencias, 102
de segundo orden, 110
solución, 86
lineal, 5
forma estándar, 5, 524
forma pendiente-ordenada en el origen, 5
forma punto-pendiente, 5
representación material de sistemas de, 544
resolución del sistema de, 525
sistema, 524
logística, 260, 270, 487, 497
logística de Ricker, 109
paramétrica, 598, 649
raíz, 320
ecuaciones lineales
inconsistentes, 531
efecto Allee, 507
El Origen de las Especies, 78
eliminación gausiana, 530
ensilladura, 719, 743
envejecimiento, 79, 881, 882
epilimnio, 616
equilibrio, 84, 174, 489, 690, 693, 716, 742
estabilidad, 495
estable, 310, 314, 690
inestable, 310, 314, 690
neutro, 310
trivial, 489
error
absoluto, 239
en porcentaje, 239
estándar, 905
relativo, 239
escala logarítmica, 52
escalar, 539
espacio
bidimensional, 588
muestral, 795
tridimensional, 588
espiral, 744
estable, 720
inestable, 722
neutra, 722
estabilidad, 312, 717
estable, 690
estadístico, 900
estimador
de máxima verosimilitud, 804
insesgado, 903
Euclides, 77
Eudoxo, 336
Euler, Leonhard, 17
exclusión competitiva, 756
exhaustivo, 336
experimento aleatorio, 795
exponencial, 9
base, 9
exponente, 9

extremo, 1, 273
absoluto, 273
global, 245, 273
local, 248, 273
relativo, 248
test de la segunda derivada, 277

F

factor de proporcionalidad, 27
Fermat, Pierre de, 336, 359, 588
flujo, 680
forma triangular superior, 530
fórmula
de Bayes, 814
de Euler, 723
de reducción, 416
de Taylor, 467
cota de error, 468
fotosíntesis, 521
fraccionamiento isotópico, 79
frecuencia relativa, 824
distribución, 825
fuente, 719
función, 18
compuesta, 20
concavidad, 265
de crecimiento de Monod, 25, 45, 174, 189
constante de semisaturación, 45
nivel de saturación, 45
de densidad, 856
empírica, 860
de distribución, 821
acumulativa, 821
de dos variables, 606
de masa de probabilidad, 821
de Michaelis-Menten, 25
de sobrevivientes, 79
de supervivencia, 881
dominio, 18
exponencial, 29
reglas, 30, 38
hipérbola, 161
igual, 18
imagen, 18
impar, 19
inversa, 33, 223
logaritmo, 35
logística, 73
par, 19
polinomio, 21
grado de, 21
primer coeficiente, 21
potencia, 25
racional, 24
propia, 419
real, 606
recorrido, 18
suelo, 130
trigonométrica, 7, 39
integral, 401
inversa de, 227
vectorial, 640
funciones
hiperbólicas, 161
trigonométricas
derivadas, 211

G

Gauss, Kart Friederich, 342
genética
cuantitativa, 863
geometría analítica, 588
globalmente estable, 503
gradiente, 650
gráfica
logarítmica, 58
log-lineal, 56
semilogarítmica, 56
Gregory, James, 360

H

Hawai, 30
hipérbola, 24
hipolimnio, 616
histograma, 862
historia de vida, 555
homeotérmico, 616
homogéneo, 704

I

Ictiosaurio, 72, 205, 244
igualdades trigonométricas, 8
incremento
a velocidad decreciente, 269
sin cota, 121
independencia por parejas, 813
independiente, 18, 807
definición, 811
de la densidad, 87
e idénticamente distribuida, 889, 899
índice de suma, 341
inestable, 495, 498, 690
infección
extensión, 512
integrable en el sentido de Riemann, 344
integración
aproximación numérica, 445
Montecarlo, 892
por cambio de variable, 398, 399
por cambio de variable en integral definidas, 402
por descomposición en fracciones simples, 419
por partes, 409
estrategia, 414
fórmula de reducción, 416
regla del punto medio, 446
regla del trapecio, 450
tabla ampliada, 454
uso de tablas, 454
integral
área, 346, 375
cambio acumulativo, 381
definida, 344, 375, 381, 384
impropia, 426
convergencia, 430
divergencia, 430
integrando discontinuo, 435
intervalo no acotado, 427
indefinidas, 365
límite inferior de integración, 345
límite superior de integración, 345
propiedades, 350
propiedades de orden, 353
teorema del valor medio, 384
valor medio, 383
volumen, 386, 387
integrando, 345
intensidad de luz, 63
intersección, 797
intervalo, 2
abierto, 2
cerrado, 2
de confianza, 906
semiabierto, 2
invasión, 518
invertible, 545
inyectiva, 32
isoclina, 614
isoterma, 614
iteróparo, 299

K

kampila de Eudoxo, 210
Kauai, 30
Kelp, 680

L

L'Hôpital, Guillaume François, 299
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1, 17, 153, 299, 360
lemniscata, 210
Leslie, Patrick, 555
ley de acción de masas, 23
ley de enfriamiento de Newton, 520
ley de escalado, 72
ley de Fick, 681
ley de Gompertz, 883

ley de la probabilidad total, 810
ley de los grandes números, 888
débil, 890
ley de Weibull, 883
ley débil de los grandes números, 890
ley del paralelogramo, 566
Leyes de Morgan, 797
límite, 93, 117
bidimensional, 621
convergente, 117
definición formal, 154, 157, 158, 621
definición informal, 117
divergencia por oscilación, 122
divergente, 117
existencia, 117
infinito, 138
ley, 617
leyes, 124
por la derecha, 119
por la izquierda, 119
trigonométrico, 146
unilateral, 119
línea
de contorno, 610
de mínimos cuadrados, 909
linealización, 235, 638
linealmente independientes, 579
localmente estable, 495, 498
logaritmo, 9, 35
natural, 10, 37
reglas, 10, 37, 38
Long Lake, Minnesota, 613
longitud
asintótica, 483
lluvia ácida, 80

M

Macrocentrus grandii, 264
matriz, 534
ampliada, 534
comparación, 538
comunitaria, 764
cuadrada, 534
de coeficientes, 534
de derivadas, 642
de Jacobi, 642
de Leslie, 557, 581
parámetro de crecimiento, 584
diagonal, 534
elemento, 534
forma triangular superior, 535
identidad, 543
inversa, 545
invertible, 545
multiplicación, 540
multiplicación por un escalar, 539
no singular, 545
singular, 545
suma, 538
traspuesta, 539
máximo, 1
absoluto, 245
criterio, 276
global, 245
local, 248
media, 823
dorada, 111
muestral, 900
mediana muestral, 900
Mendel, Gregor, 802
metalimnio, 616
método
de agotamiento, 336
de la bisección, 150
de las fracciones simples, 419
de marca-recaptura, 803
de máxima verosimilitud, 335
de mínimos cuadrados, 909
de Newton-Raphson, 320
de profundidad 0.2, 0.6 y 0.8, 396
del disco, 387
del lavado, 389
en telaraña, 311
mínimo, 1
absoluto, 245
criterio, 276
global, 245
local, 248
modelo
de Blackman, 80
de compartimientos, 514, 732
de competición jerárquico, 517
de crecimiento de Gompertz, 521
de crecimiento de von Betalanffy, 222
de Fitzhugh-Nagumo, 769
de Hodgkin-Huxley, 768
de isla, 178
de Kermack-McKendrick, 511
de Levins, 504
de Lotka Volterra
competencia, 753
depredador-presa, 761
de Nicholson-Bailey, 633
de Tilman
recursos, 173, 178, 242
de un solo compartimiento, 502
de Weibull, 79
depredador-presa, 161
epidémico, 511
estructurado por edades, 555
infinitesimal, 894
modelo matricial, 555
monocárpico, 271
monotonía
criterio de la derivada, 263
mortalidad
dependiente de la densidad, 78
independiente de la densidad, 78
muestra aleatoria, 899
muestreo, 871
multiplicación por 1, 411
mutualismo, 766

N

neurona, 768
Newton, Isaac, 1, 153, 360
nivel de saturación, 25
no dimensionalización, 105
no envejecimiento, 881
no singular, 545
nodo, 743
estable, 717
inestable, 719
norma, 343
notación
de Leibniz, 166, 182, 206
derivada de la inversa, 225
sigma, 340
número complejo, 12
números reales, 2
recta de los números reales, 2

O

optimización, 290
orden de magnitud, 53
Ordoviciano, 78
origen, 2
oscilador armónico, 737
Ostrinia nubilis, 264

P

paraboloide, 613
parámetro, 598
de crecimiento, 104
parte
imaginaria, 12
real, 12
partición, 343, 809
Pascal, Blaise, 336
pendiente, 5
periódico, 39
periodo, 39
permutación, 789
perturbación, 312
pequeña, 312
perturbado, 716
plano tangente, 633
policárpico, 271
polinomio de Taylor, 460
alrededor de $x = 0$, 460
alrededor de $x = a$, 465

error de aproximación, 466
potencial de acción, 769
primera derivada, 206
primitiva, 327, 365
general, 327
tabla, 329
principio
de multiplicación, 787
de superposición, 711
probabilidad
condicional, 807
definición, 798
problema de valor inicial, 326
solución, 326
producto escalar, 593
promedio, 889
propagación del error, 239
proporcional, 6, 26
prueba de Bernouilli, 833
punto
crítico, 273
de equilibrio, 494
de inflexión, 281
criterio, 281
fijo, 84, 97
no trivial, 104
trivial, 104

Q

quimiostato, 522, 775
quimiotaxis, 682

R

raíces de ecuaciones, 150
reacción
enzimática, 72, 772
química, 23, 44, 77, 172, 179, 242, 290
recorrido, 18, 605, 606
recta, 5
de regresión lineal, 909
ecuación de, 5
ecuación escalar, 597
ecuaciones escalares, 596
en el espacio, 597
en el plano, 596
forma estándar, 5
forma pendiente-ordenada en el origen, 5
forma punto-pendiente, 5
horizontal, 6
paralela, 6
perpendicular, 6
representación vectorial, 596, 597
secante, 163
tangente, 1, 77, 163, 216
vertical, 6
rectángulo dorado, 112
rectificación, 391
recursión, 85
primer orden, 91
reflexión respecto al eje x, 49
reflexión respecto al eje y, 49
Regla de l'Hôpital, 301
regla de la cadena, 195, 398, 645
demostración de, 199
regla de la potencia, 180
exponente entero negativo, 190
exponente nacional
demostración, 203
forma general, 191
regla de Leibniz, 364
regla del cociente, 189
demostración de, 196
regla del producto, 186
regla del punto medio, 446
cota de error, 448
regla del trapecio, 450
cota de error, 451
relación
autocatalítica, 44
de escalado, 26
representación vectorial, 590
residuo, 909
respuesta funcional, 65
resultados equiprobables, 800
retorno en disminución, 45, 269
Riemann, Georg Bernhard, 336
Roberval, Guilles Persone de, 336

S

secuencia de Fibonacci, 110
selección por viabilidad, 298
semelparous, 299
serie geométrica, 839
signo integral, 345
simétrico respecto al eje x, 19
simétrico respecto al eje y, 19
simétrico respecto al origen, 19
sinapsis, 768
singular, 545
sistema
de coordenadas cartesianas, 565
orientado a la derecha, 588
de coordenadas polares, 565
sobredeterminado, 535
sólido de revolución, 387
volumen, 387
solución
no trivial, 550
trivial, 550
St. Vincent, Gregory de, 359
subdeterminado, 535
subtangente, 216
sucesión, 89
convergente, 93
divergente, 93
suceso, 796
suma
de Riemann, 343
notación sigma, 340
reglas algebraicas, 342
telescópica, 357
sumidero, 717
superficie, 608

T

tamaño de la muestra
estimación, 896
tasa
de fallos, 881
de riesgo, 881
temperatura fría, 604
teorema
binomial, 181
central del límite, 872, 892
de Fermat, 251
de la derivada mixta, 631
de los valores extremos, 246
de Rolle, 256
del sándwich, 143
del valor intermedio, 149
del valor medio, 254
demostración, 385
para integrales definidas, 384
fundamental del cálculo, 1
fundamental del cálculo (parte I), 361
demostración, 364
fundamental del cálculo (parte II), 369
test
de la derivada segunda para extremos locales, 277
de la línea horizontal, 32
TFC, 361
primitiva, 365
tiempo
de retorno al equilibrio, 504
medio de residencia, 504
Toricelli, Evangelista, 336
transformación logística, 73
trascendente, 43
traslación
horizontal, 49
vertical, 48
trasposición, 539
traza, 577
Triásico, 72
Trifolium repens, 520

U

unidad imaginaria, 12
unión, 797

V

valor absoluto
  ecuaciones que contienen, 3
  inecuaciones, 4
valor
  esperado, 823
  promedio, 383, 824
valores trigonométricos, 9
  exactos, 9
variable
  aleatoria, 819
  binomial, 834
  continua, 820, 854
    función de densidad, 856
    función de distribución, 854
  discreta, 820
  independencia, 831
  dependiente, 18, 182
  independiente, 182
variaciones relacionadas, 203
varianza, 826
  muestral, 900
vector, 565, 589
  columna, 534, 565
  componente, 589
  dirección, 565
  direccional, 706
  fila, 534
  longitud, 565, 591
  multiplicación por un escalar, 567, 590
  n-dimensional, 589
  normalización, 592
  perpendicular, 595
  suma, 567, 589
  unidad, 592
velocidad, 172
  de cambio
    específica, 173
    instantánea, 171
    promedio, 171
  de corriente, 396
  de crecimiento, 24
    específica, 25
    instantáneo, 116, 172
    intrínseca, 46
    per cápita, 25, 172
    promedio, 116, 163
  de desintegración, 30
  instantánea, 171
  media, 171
  reproductiva básica, 512
  reproductiva neta, 78
Verhulst, 73
vida media, 31
volumen
  sólido, 386

W

Weierstrass, Kart, 153
Wells, J., 79

Z

zona eufótica, 73

Matemáticas para Ciencias

2ª Edición

Neuhauser

El libro *Matemáticas para Ciencias* es un excelente texto que cubre el contenido necesario de un curso universitario inicial de primer ciclo en matemáticas.

Está claramente orientado hacia las matemáticas necesarias en las ciencias de la vida, lo que se manifiesta en aspectos claros de su contenido:

- La presentación es sumamente clara, sencilla y completa, sin por ello perder el rigor necesario en la presentación de los conceptos y las aplicaciones.
- Se incluyen numerosos ejemplos, muchos de los cuales están basados en aplicaciones en ciencias de la vida.
- El apartado de problemas se encuentra especialmente cuidado: al final de cada sección se incluye una serie de problemas, y al final de cada capítulo, un conjunto general de problemas de repaso. Los problemas tratan todos los aspectos que se han expuesto en la teoría. Al final del texto se proporciona la solución de los problemas con numeración impar.

El contenido y la secuencia de los temas son adecuados, y facilitan la lógica progresión que debe seguirse en la asimilación de los conceptos.
Por su contenido, orientación y tratamiento de los temas, este texto es muy adecuado para un primer curso de matemáticas en las carreras de ciencias de la vida: Medicina, Biología, Veterinaria, Farmacia, Química, etc.

PEARSON
Educación

www.pearsoneducacion.com

ISBN 978-84-205-4253-9

9 788420 542539