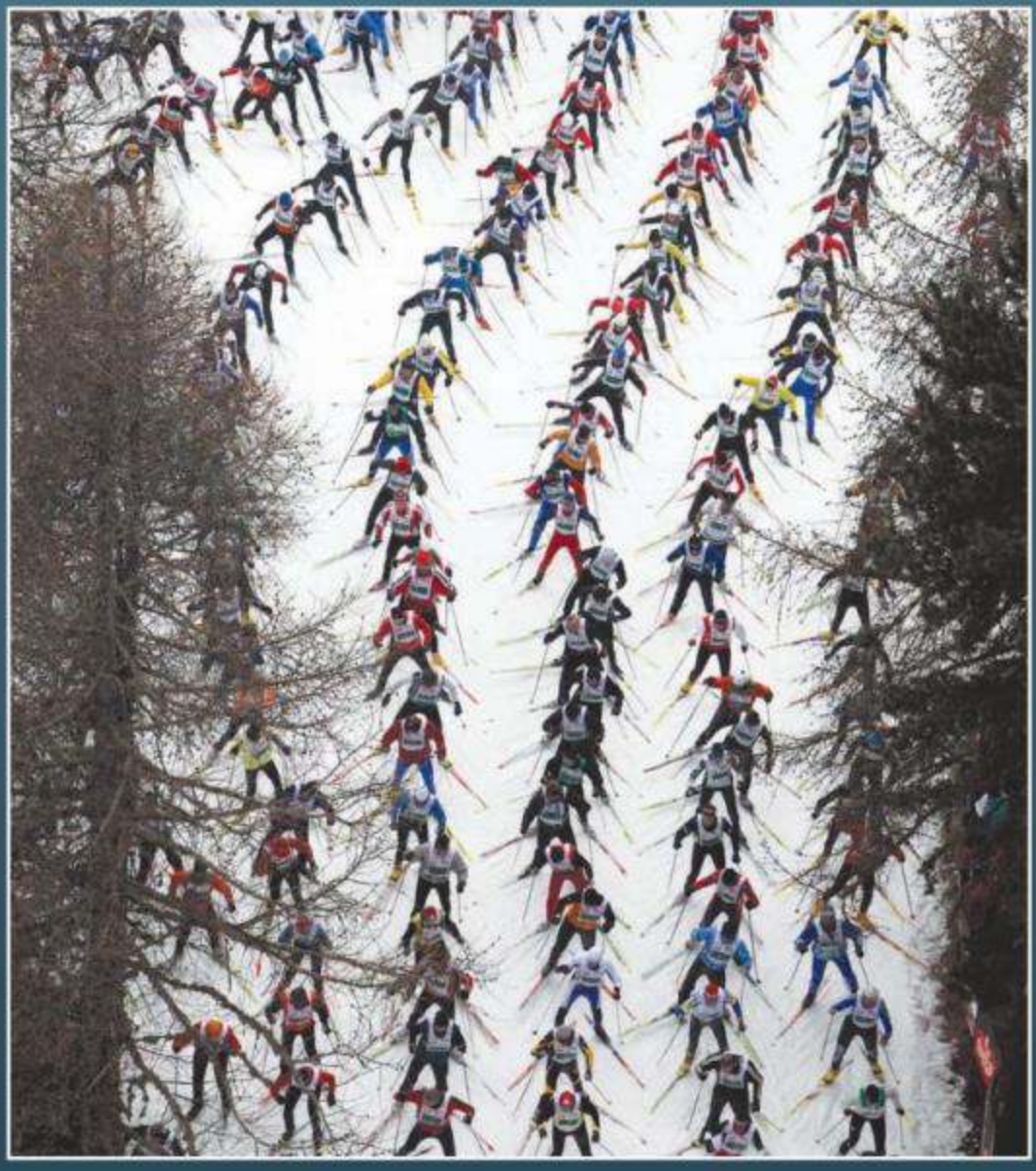
Cálculo Vectorial

Cuarta edición



Susan Jane Colley

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Cálculo vectorial

Cálculo vectorial | CUARTA EDICIÓN

Susan Jane Colley
Oberlin College

Traducción
Javier Enríquez Brito
Traductor profesional, especialista en matemáticas

Revisión técnica
Edmundo Palacios Pastrana
Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Iberoamericana

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

COLLEY, SUSAN JANE

Cálculo vectorial
Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2013

ISBN: 978-607-32-2056-9
Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 624

Authorized translation from the English language edition, entitled *VECTOR CALCULUS 4th Edition*, by *SUSAN JANE COLLEY*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Pearson, Copyright © 2012. All rights reserved.
ISBN 9780321780652

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *VECTOR CALCULUS 4a.* edición, por *SUSAN JANE COLLEY*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Pearson, Copyright © 2012. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Dirección General:	Philip De la Vega
Dirección Educación Superior:	Mario Contreras
Editora sponsor:	Gabriela López Ballesteros
e-mail:	gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo:	Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de Producción:	José Hernández Garduño
Gerencia Editorial Educación Superior Latinoamérica:	Marisa de Anta

CUARTA EDICIÓN, 2013

D.R. © 2013 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto, C. P. 53519
Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-2056-9
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-2057-6
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2058-3

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 16 15 14 13

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

ISBN: 978-607-32-2056-9

A Will y a Diana,
con amor

Sobre la autora
Susan Jane Colley

Susan Colley es profesora de matemáticas en la cátedra Andrew y Pauline Delaney, en Oberlin College, y también Jefa del Departamento, del cual fue directora.

Antes de integrarse en 1983 a Oberlin obtuvo los grados de licenciatura y doctorado en matemáticas del Massachusetts Institute of Technology.

Su investigación se centra en problemas de numeración en geometría algebraica, en particular sobre singularidades en puntos múltiples y contactos de orden superior de curvas planas.

La profesora Colley ha publicado artículos sobre geometría algebraica y álgebra conmutativa, así como acerca de otros temas de matemáticas. Ha dado conferencias sobre sus investigaciones a nivel internacional, y ha impartido cátedra en una muy amplia gama de materias de la licenciatura en matemáticas.

Es miembro de varias asociaciones profesionales y honorarias, entre las cuales se incluyen la American Mathematical Society, la Mathematical Association of America, Phi Beta Kappa y Sigma Xi.

Contenido

Prefacio		ix
Al estudiante: un poco de notación preliminar		xv
1	**Vectores**	1
1.1	Vectores en dos y tres dimensiones	1
1.2	Más acerca de los vectores	8
1.3	El producto punto	18
1.4	El producto cruz	27
1.5	Ecuaciones de planos. Problemas de distancia	40
1.6	Algo sobre geometría *n*-dimensional	48
1.7	Sistemas de nuevas coordenadas	62
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 1	75
	Ejercicios varios para el capítulo 1	75
2	**Diferenciación de varias variables**	82
2.1	Funciones de varias variables. Graficación de superficies	82
2.2	Límites	97
2.3	La derivada	116
2.4	Propiedades. Derivadas parciales de orden superior	134
2.5	La regla de la cadena	142
2.6	Derivadas direccionales y gradientes	158
2.7	Método de Newton (opcional)	176
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 2	182
	Ejercicios varios para el capítulo 2	183
3	**Funciones de variable vectorial**	189
3.1	Curvas paramétricas y las leyes de Kepler	189
3.2	Longitud de arco y geometría diferencial	202
3.3	Campos vectoriales. Una introducción	221
3.4	El gradiente, la divergencia, el rotacional y el operador nabla	227
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 3	237
	Ejercicios varios para el capítulo 3	237
4	**Máximos y mínimos con varias variables**	244
4.1	Las diferenciales y el teorema de Taylor	244
4.2	Extremos de funciones	263
4.3	Multiplicadores de Lagrange	278
4.4	Algunas aplicaciones de los extremos	293
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 4	305
	Ejercicios varios para el capítulo 4	306

5	**Integración múltiple**	310
5.1	Introducción. Áreas y volúmenes	310
5.2	Integrales dobles	314
5.3	Cambio del orden de integración	334
5.4	Integrales triples	337
5.5	Cambio de variables	349
5.6	Aplicaciones de la integración	373
5.7	Aproximaciones numéricas de las integrales múltiples (opcional)	388
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 5	401
	Ejercicios varios para el capítulo 5	403
6	**Integrales de línea**	408
6.1	Integrales de línea escalares y vectoriales	408
6.2	Teorema de Green	429
6.3	Campos vectoriales conservativos	439
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 6	450
	Ejercicios varios para el capítulo 6	451
7	**Integrales de superficie y análisis vectorial**	455
7.1	Superficies parametrizadas	455
7.2	Integrales de superficie	469
7.3	Teoremas de Stokes y de Gauss	490
7.4	Más sobre análisis vectorial; ecuaciones de Maxwell	510
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 7	522
	Ejercicios varios para el capítulo 7	523
8	**Análisis vectorial en dimensiones superiores**	530
8.1	Introducción a las formas diferenciales	530
8.2	Variedades e integrales de formas k	536
8.3	El teorema de Stokes generalizado	553
	Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 8	561
	Ejercicios varios para el capítulo 8	561
	Sugerencias para lecturas adicionales	563
	Respuestas a los ejercicios seleccionados	565
	Índice	599

Prefacio

Los fenómenos físicos y naturales dependen de un conjunto complejo de factores. El sociólogo o psicólogo que estudia el comportamiento de un grupo, el economista que trata de entender los cambios de los ciclos del empleo en un país, el físico que observa la trayectoria de una partícula o un planeta, o cualquiera que intente comprender la geometría en dos, tres o más dimensiones, se da cuenta de la necesidad de analizar cantidades que cambian y que dependen de más de una variable. El cálculo vectorial es la herramienta matemática esencial de dicho análisis. Además, es un tema emocionante y bello por derecho propio: una verdadera aventura en muchas dimensiones.

El único prerrequisito técnico para comprender este libro, que está dirigido a cubrir un curso de cálculo de varias variables de nivel intermedio, es un curso estándar de cálculo de funciones de una variable. En particular, cuando es necesario, se desarrolla la aritmética de matrices y el álgebra (no lineal). Aunque los antecedentes matemáticos que se requieren no son excepcionales, el lector necesitará esforzarse en ciertas partes.

Mis objetivos al escribir este libro son sencillos: desarrollar en los estudiantes la comprensión profunda de los conceptos del cálculo vectorial y ayudarlos a hacer la transición del cálculo de primer año a las técnicas matemáticas más avanzadas. Sostengo que el primer objetivo se puede alcanzar, al menos en parte, utilizando la notación vectorial y matricial, de modo que muchos resultados, en especial los del cálculo diferencial, se pueden plantear con niveles razonables de claridad y generalidad. Si se describen en forma apropiada, los resultados del cálculo con varias variables son muy similares a los del cálculo con una variable, por lo cual el razonamiento con analogías será una herramienta didáctica importante. También creo que los conceptos matemáticos se pueden comprender mediante el desarrollo de una buena intuición geométrica. Aunque muchos resultados están planteados para el caso de n variables (con n arbitraria), reconozco que la mayoría de los ejemplos importantes y motivadores, por lo general, ocurren con funciones de dos y tres variables, por lo que hago énfasis en estas situaciones concretas y visuales para explicar la teoría general. El cálculo vectorial es de muchas formas una materia ideal para que los estudiantes comiencen a explorar las relaciones entre el análisis, la geometría y el álgebra matricial.

Para muchos estudiantes, el cálculo con varias variables representa el comienzo de su madurez matemática profunda, razón por la cual escribí un texto más bien amplio, que les permita ver que detrás de los resultados, las técnicas y los ejemplos hay una historia, es decir, que la materia tiene coherencia y que esto es importante para la solución de problemas. Para ilustrar hasta cierto punto el alcance de los métodos expuestos, se tratan con cierto detalle algunos temas que no siempre se estudian por completo en un primer curso de cálculo con varias variables, como los siguientes:

- la introducción temprana de coordenadas cilíndricas y esféricas (sección 1.7);
- el uso de técnicas vectoriales para obtener las leyes de Kepler del movimiento planetario (Sección 3.1);
- la geometría diferencial elemental de curvas en $\mathbf{R}^3$, incluyendo el análisis de la curvatura, la torsión y las fórmulas de Frenet-Serret para el marco móvil (sección 3.2);
- la fórmula de Taylor para funciones de varias variables (sección 4.1).

- el uso de la matriz hessiana para determinar la naturaleza (como extremos locales) de los puntos críticos de funciones de n variables (secciones 4.2 y 4.3);
- el análisis amplio de la fórmula del cambio de variables en integrales dobles y triples (sección 5.5);
- aplicaciones del análisis vectorial a la Física (sección 7.4);
- la introducción de formas diferenciales y el teorema de Stokes generalizado (capítulo 8).

Se incluye cierto número de demostraciones de resultados importantes. Al final de las secciones apropiadas —y para no perturbar el flujo principal de los conceptos, así como con la finalidad de permitir una mayor flexibilidad en el desempeño, tanto del profesor como del estudiante— se incluye un apéndice de las demostraciones más técnicas. No obstante, algunas demostraciones (o bosquejos de ellas) implican ideas tan importantes que se incluyen en el cuerpo principal del libro.

Lo nuevo en la cuarta edición

He conservado la estructura general y el énfasis de ediciones anteriores. Las características nuevas de esta edición son las siguientes:

- 210 ejercicios adicionales, de todos los niveles;
- una sección nueva y opcional (la 5.7) acerca de métodos numéricos para aproximar integrales múltiples;
- la reorganización, en su propia sección (la 2.7, que es opcional), del material acerca del método de Newton para aproximar soluciones a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas;
- nuevas demostraciones en el capítulo 2 para las propiedades de los límites (en la sección 2.2) y de la regla de la cadena general para variables múltiples (Teorema 5.3 en la sección 2.5);
- en la sección 4.1 aparecen demostraciones del teorema de Taylor en las versiones de una y varias variables;
- varios detalles y aclaraciones adicionales en todo el texto, incluyendo muchos ejemplos y explicaciones nuevos y revisados;
- archivos nuevos de Microsoft® PowerPoint® y Wolfram *Mathematica*® de notas que se coordinan con el texto y que los profesores pueden usar en sus clases (véase más adelante el comentario sobre "Materiales auxiliares").

Cómo usar este libro

En el libro hay más material del que puede cubrirse con holgura en un semestre. Debido a esto, el profesor tal vez desee suprimir algunos temas o subtemas —o abreviar las presentaciones detalladas de límites y diferenciabilidad. Como con frecuencia yo misma me descubro sin el tiempo para tratar con detalle las integrales de superficie separé todo el material acerca de las superficies parametrizadas, integrales de superficie, y los teoremas de Stokes y Gauss (capítulo 7) del que se refiere a las integrales de línea y al teorema de Green (capítulo 6). En particular, en un curso de un semestre dirigido a estudiantes con poca o ninguna experiencia en el trabajo con vectores o matrices, es probable que los profesores puedan cubrir la mayor parte del material en los capítulos 1 a 6, aunque sin duda tendrán que omitir algunas de las subsecciones opcionales y muchas de las demostraciones de los resultados.

El siguiente podría ser el contenido aproximado de un curso, sujeto al criterio del profesor:

Capítulo 1	8 a 9 clases
Capítulo 2	9 clases
Capítulo 3	4 a 5 clases
Capítulo 4	5 a 6 clases
Capítulo 5	8 clases
Capítulo 6	4 clases
	38 a 41 clases

Si los estudiantes tienen una formación tan sólida como para estudiar por su cuenta gran parte del material del capítulo 1, entonces también podrían estudiar solos una buena parte del capítulo 7. Para un curso de dos trimestres o dos semestres, se tendría que estudiar todo el libro con el cuidado y rigor razonables, aunque terminar el capítulo 8 dependerá del grado de dominio que tengan los estudiantes del álgebra lineal básica, la cual se requiere en esa parte del libro.

Los ejercicios de cada sección varían de los cálculos relativamente rutinarios a problemas difíciles y motivadores, por lo general (aunque no invariablemente) de mayor dificultad. En ciertos casos, los grupos de problemas sirven para presentar temas adicionales o aplicaciones nuevas. Cada capítulo concluye con un conjunto de ejercicios diversos que sirven tanto para revisar como para ampliar las ideas presentadas en el capítulo.

Una advertencia sobre el uso de la tecnología. El texto se escribió sin hacer referencia a ningún software particular de computadora o calculadora. La mayoría de los ejercicios pueden resolverse con lápiz y papel, aunque no hay razón para no realizar los cálculos más tediosos en un sistema de cómputo. Aquellos ejercicios que *requieren* equipo electrónico para fines de cálculo o de elaboración de gráficas están marcados con el símbolo y deben realizarse con software como *Mathematica*®, Maple® o MATLAB.

Materiales auxiliares

El **Manual de soluciones del profesor** contiene las soluciones completas para todos los ejercicios, y se encuentra disponible en el Pearson Instructor Resource Center (www.pearsonhighered.com/irc), al igual que muchos archivos y notas en Microsoft PowerPoint® y Wolfram *Mathematica*® que pueden adaptarse para usarlos durante la clase. El lector puede encontrar fe de erratas del texto y de los manuales de soluciones que lo acompañan en la siguiente dirección:
www.oberlin.edu/math/faculty/colley/VCErrata.html

Agradecimientos

Estoy muy agradecida con muchas personas por compartir conmigo sus pensamientos e ideas acerca del cálculo con varias variables. Quiero agradecer especialmente por nuestras conversaciones a mis colegas en Oberlin (pasados y presentes) Bob Geitz, Kevin Hartshorn, Michael Henle (quien, entre otras cosas, leyó con cuidado el borrador del capítulo 8), Gary Kennedy, Dan King, Greg Quenell, Michael Raney, Daniel Steinberg, Daniel Styer, Richard Vale, Jim Walsh y Elizabeth Wilmer. También agradezco a John Alongi, de Northwestern University; Matthew Conner, de la University of California, en Davis; Henry C. King, de la University of Maryland; Stephen B. Maurer, de Swarthmore College; Karen Saxe, de Macalester College; David

Singer, de Case Western Reserve University; y Mark R. Treuden, de la University of Wisconsin en Stevens Point, por sus valiosos comentarios. Varios colegas revisaron las distintas versiones del manuscrito y estoy feliz por haber incluido sus aportaciones y muchas de sus amables sugerencias. Para las tres primeras ediciones, en particular, agradezco a los revisores siguientes:

Raymond J. Cannon, *Baylor University*;
Richard D. Carmichael, *Wake Forest University*;
Stanley Chang, *Wellesley College*;
Marcel A. F. Déruaz, *University of Ottawa (hoy emérito)*;
Krzysztof Galicki, *University of New Mexico (finado)*;
Dmitry Gokhman, *University of Texas at San Antonio*;
Isom H. Herron, *Rensselaer Polytechnic Institute*;
Ashwani K. Kapila, *Rensselaer Polytechnic Institute*;
Christopher C. Leary, *State University of New York, College at Geneseo*;
David C. Minda, *University of Cincinnati*;
Jeffrey Morgan, *University of Houston*;
Monika Nitsche, *University of New Mexico*;
Jeffrey L. Nunemacher, *Ohio Wesleyan University*;
Gabriel Prajitura, *State University of New York, College at Brockport*;
Florin Pop, *Wagner College*;
John T. Scheick, *The Ohio State University (hoy emérito)*;
Mark Schwartz, *Ohio Wesleyan University*;
Leonard M. Smiley, *University of Alaska, Anchorage*;
Theodore B. Stanford, *New Mexico State University*;
James Stasheff, *University of North Carolina at Chapel Hill (hoy emérito)*;
Saleem Watson, *California State University, Long Beach*;
Floyd L. Williams, *University of Massachusetts, Amherst (hoy emérito)*.

Para la cuarta edición agradezco a las siguientes personas:

Justin Corvino, *Lafayette College*;
Carrie Finch, *Washington y Lee University*;
Soomin Kim, *Johns Hopkins University*;
Tanya Leise, *Amherst College*;
Bryan Mosher, *University of Minnesota*.

Muchas personas en Oberlin College brindaron su ayuda invaluable para la producción de todas las ediciones de *Cálculo vectorial*. En especial agradezco a Ben Miller por su arduo trabajo para establecer el formato del manuscrito inicial y a Stephen Kasperick-Postellon por sus diversas contribuciones en la escritura, índice, lectura de pruebas y crítica amistosa del manuscrito. Estoy muy agradecida con Linda Miller y Michael Bastedo por sus muchas contribuciones tipográficas y a Catherine Murillo por su ayuda con varias tareas. También doy las gracias a Joshua Davis y a Joaquin Espinoza Goodman por su ayuda con la lectura de las pruebas. Sin los esfuerzos de estas personas, el proyecto tal vez nunca hubiera llegado a su fin.

Los distintos miembros del equipo editorial y de producción han sido muy amables y de gran ayuda. Para las primeras tres ediciones quiero expresar mi agradecimiento a George Lobell, mi editor, y a Gale Epps, Melanie Van Benthuysen y Jennifer Urban, sus asistentes editoriales; a Nicholas Romanelli, Barbara Mack y Debbie Ryan, los editores de producción de Prentice Hall, y a Lori Hazzard, de Interactive Composition Corporation; a Ron Weickart y al equipo de Network Gra-

phics por su amable revisión de las figuras, y a Tom Benfatti de Prentice Hall por su ayuda adicional con los diagramas, así como a Dennis Kletzing por su trabajo de composición tan cuidadoso y entusiasta. Para esta edición, es un placer extender mi agradecimiento a Caroline Celano, mi editora optimista, y a Brandon Rawnsley, su asistente, quienes hicieron que esta edición se volviera algo divertido. Además, agradezco al máximo a Beth Houston, mi gerente de producción en Pearson, a Jogender Taneja y a Donna Mulder, Roger Lipsett y Thomas Wegleitner, su equipo en Aptara, Inc.

Por último, estoy en gratitud con mis alumnos en Oberlin, que tuvieron la paciencia para escuchar mis clases, y me inspiraron para escribir y mejorar este volumen.

SJC
sjcolley@math.oberlin.edu

Al estudiante: un poco de notación preliminar

A continuación se presentan algunas ideas que necesitará tener presentes cuando lea este libro y aprenda cálculo vectorial:

Dados dos conjuntos A y B, es de suponerse que el lector está familiarizado con la notación $A \cup B$ para la **unión** de A y B, que son los elementos que están en A o en B (o en ambos):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

De manera similar, $A \cap B$ se utiliza para denotar la **intersección** de A y B, los elementos que están tanto en A como en B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La notación $A \subseteq B$, o $A \subset B$, indica que A es un **subconjunto** de B (tal vez vacío o igual a B).

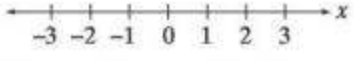


Figura 1 Recta numérica **R**.

El espacio de una dimensión (también llamado **recta numérica** o **R**) tan solo es una línea recta. En ella se escriben números reales como coordenadas: negativos a la izquierda del cero y positivos a la derecha (véase la figura 1).

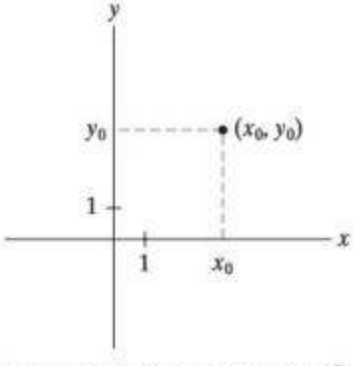


Figura 2 El plano coordenado $\mathbf{R}^2$.

El espacio bidimensional, que se denota con $\mathbf{R}^2$, es el plano cartesiano ya conocido por el lector. Si construimos dos rectas perpendiculares (los **ejes coordenados** x y y), el **origen** se establece en el punto de intersección de los ejes, en los cuales se establecen escalas numéricas, y después se ubica un punto en $\mathbf{R}^2$, dando un par ordenado de números (x, y) como las **coordenadas** del punto. Observe que los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro **cuadrantes** (véase la figura 2).

El espacio tridimensional, que se denota con $\mathbf{R}^3$, requiere tres ejes de coordenadas perpendiculares entre sí (llamados **ejes** x, y y z) que coinciden en un punto (llamado **origen**) y se usan para ubicar un punto arbitrario. De manera similar al caso de $\mathbf{R}^2$, si escribimos escalas en los ejes, localizamos un punto en $\mathbf{R}^3$ dando una tripleta ordenada de números (x, y, z). Los ejes de coordenadas dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**. Se necesita un poco de práctica para adquirir la perspectiva correcta al dibujar puntos en $\mathbf{R}^3$ (véase la figura 3). En ocasiones, dibujamos los ejes de coordenadas en $\mathbf{R}^3$ en orientaciones distintas a fin de tener un mejor punto de vista. Sin embargo, siempre mantendremos los ejes en la **configuración de mano derecha**. Esto significa que si se doblan los dedos de la mano derecha del eje x positivo al eje y positivo, el pulgar apuntará a lo largo del eje z positivo (véase la figura 4).

Aunque es necesario recordar técnicas y métodos particulares del cálculo, que ya aprendió, a continuación se mencionan algunos de los conceptos más importantes a tener en la mente: dada una función $f(x)$, la **derivada** $f'(x)$ es el límite (si existe) del cociente con diferencia de la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

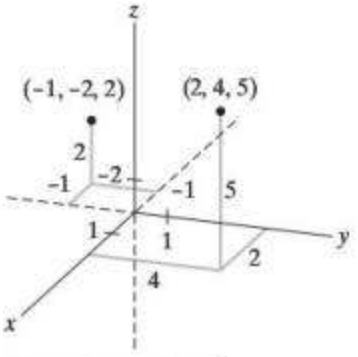


Figura 3 Espacio $\mathbf{R}^3$ tridimensional. Se observan graficados algunos puntos.

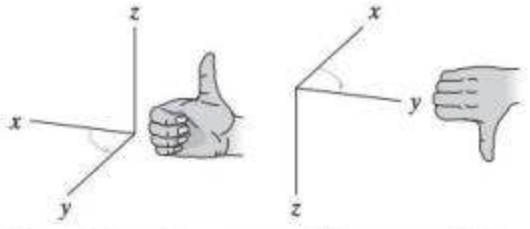


Figura 4 Los ejes x, y y z en $\mathbf{R}^3$ siempre se dibujan en una configuración de mano derecha.

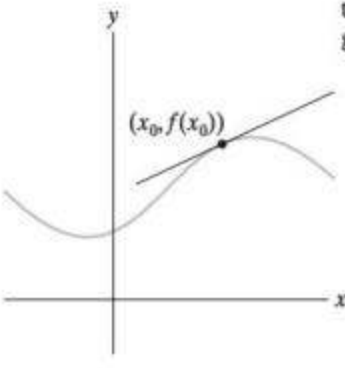


Figura 5 La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

La importancia de la derivada $f'(x_0)$ es que mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. (Véase la figura 5). La derivada también puede considerarse como la tasa instantánea de cambio de f en $x = x_0$. También denotamos la derivada $f'(x)$ mediante df/dx.

La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ de f en el intervalo cerrado $[a, b]$ es el límite (siempre que exista) de las llamadas **sumas de Riemann** de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{toda } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Aquí, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ denota una **partición** de $[a, b]$ en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, el símbolo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (la longitud del subintervalo) y x_i^* denota cualquier punto en $[x_{i-1}, x_i]$. Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces, cada término $f(x_i^*)\Delta x_i$ en la suma de Riemann es el área de un rectángulo relacionado con la gráfica de f. La suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ aproxima así el área total bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ (véase la figura 6).

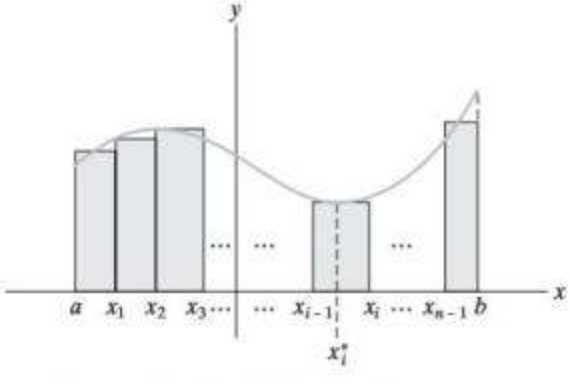


Figura 6 Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces, la suma de Riemann aproxima el área bajo $y = f(x)$ dando la suma de áreas de los rectángulos.

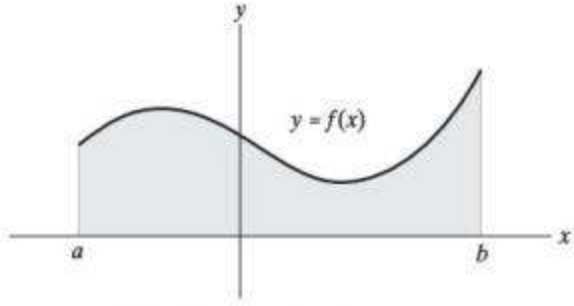


Figura 7 El área bajo la gráfica de $y = f(x)$ es $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se toma a la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, si existe, como la representación del área bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ (véase la figura 7).

La derivada y la integral definida están conectadas por un resultado elegante conocido como **teorema fundamental del cálculo**. Sea $f(x)$ una función continua de una variable, y sea $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ (la función F se llama **antiderivada** de f). Entonces,

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$;
2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Por último, el final de un ejemplo se indica con el símbolo ◆, y el de una demostración con el símbolo ■.

Cálculo vectorial

1 Vectores

1.1 Vectores en dos y tres dimensiones

1.2 Más acerca de los vectores

1.3 El producto punto

1.4 El producto cruz

1.5 Ecuaciones de planos. Problemas de distancia

1.6 Algo sobre geometría *n*-dimensional

1.7 Sistemas de nuevas coordenadas

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 1

Ejercicios varios para el capítulo

1.1 Vectores en dos y tres dimensiones

El concepto de vector es fundamental para el estudio del cálculo con varias variables. Igual que para muchos de los conceptos que estudiaremos, existen dos puntos de vista al respecto: el *algebraico* y el *geométrico*. El lector debiera dominar ambas perspectivas a fin de resolver problemas en forma efectiva, así como para construir su comprensión fundamental del tema.

Vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. El concepto algebraico

DEFINICIÓN 1.1 Un **vector** en $\mathbf{R}^2$ es sencillamente un par ordenado de números reales. Es decir, un vector en $\mathbf{R}^2$ se escribe como sigue:

$$(a_1, a_2) \qquad \text{(por ejemplo } (1, 2) \text{ o } (\pi, 17)\text{)}.$$

De manera similar, un **vector** en $\mathbf{R}^3$ es simplemente una tripleta ordenada de números reales. Es decir, un vector en $\mathbf{R}^3$ se escribe como

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{(por ejemplo } (\pi, e, \sqrt{2})\text{)}.$$

Para hacer énfasis en que deseamos considerar al par o a la tripleta de números como un todo único usaremos letras en **negritas**; de manera que nuestra notación estándar para los vectores en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$ será $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ o $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, respectivamente. A partir del contexto se entenderá si $\mathbf{a}$ se refiere a un vector en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$ (en otro caso no resultará importante para el análisis). Cuando se trabaja con lápiz y papel es difícil usar "negritas", por lo que el lector tal vez preferirá colocar una flecha sobre la letra. Entonces, $\vec{a}$ significará lo mismo que $\mathbf{a}$. Sea cual sea la notación que el lector decida usar, es importante que diferencie el *vector* $\mathbf{a}$ (o $\vec{a}$) del *número real* a. Para diferenciarlos de los vectores también haremos referencia a los números reales como **escalares**.

Con el fin de hacer algo interesante con los vectores es necesario desarrollar algunas operaciones aritméticas para trabajar con ellos. Sin embargo, antes de hacerlo necesitamos saber cuándo dos vectores son iguales.

DEFINICIÓN 1.2 Dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ en $\mathbf{R}^2$ son **iguales** si sus componentes correspondientes son iguales, es decir, si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$. La misma definición se aplica a los vectores en $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son **iguales** si sus componentes correspondientes son iguales, es decir, si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$.

EJEMPLO 1 Los vectores $\mathbf{a} = (1, 2)$ y $\mathbf{b} = (\frac{3}{3}, \frac{6}{3})$ son iguales en $\mathbf{R}^2$, pero $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{d} = (2, 3, 1)$ *no* son iguales en $\mathbf{R}^3$. ◆

A continuación estudiaremos las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar. Haremos esto solo para vectores en $\mathbf{R}^3$; pero las mismas observaciones se podrán aplicar para vectores en $\mathbf{R}^2$ con solo pasar por alto la tercera componente.

DEFINICIÓN 1.3 (SUMA DE VECTORES) Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$. Entonces, la **suma de los vectores** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es el vector en $\mathbf{R}^3$ que se obtiene al sumar las componentes equivalentes: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

EJEMPLO 2 Se tiene $(0, 1, 3) + (7, -2, 10) = (7, -1, 13)$ y (en $\mathbf{R}^2$):

$$(1, 1) + (\pi, \sqrt{2}) = (1 + \pi, 1 + \sqrt{2}).$$

◆

Propiedades de la suma de vectores. Se tiene que

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$ (conmutatividad);
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en $\mathbf{R}^3$ (asociatividad);
3. un vector especial, que se denota con $\mathbf{0}$ (llamado **vector cero**), con la propiedad de que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a}$ en $\mathbf{R}^3$.

Estas tres propiedades requieren demostrarse, lo que, al igual que la mayoría de enunciados sobre el álgebra de vectores, puede hacerse explícitamente escribiendo las componentes del vector. Por ejemplo, para la propiedad 1 se tiene que si

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}, \end{aligned}$$

ya que la suma de números reales es conmutativa. Para la propiedad 3 el "vector especial" es aquel cuyas componentes son cero: $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Entonces resulta fácil probar la propiedad 3 con la escritura de sus componentes. Algo similar pasa con la propiedad 2, los detalles se dejan como ejercicio para el lector.

DEFINICIÓN 1.4 (MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR) Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector en $\mathbf{R}^3$, y sea $k \in \mathbf{R}$ un escalar (número real). Entonces el **producto escalar** $k\mathbf{a}$ es el vector en $\mathbf{R}^3$ que se obtiene multiplicando cada componente de $\mathbf{a}$ por k: $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$.

EJEMPLO 3 Si $\mathbf{a} = (2, 0, \sqrt{2})$ y $k = 7$, entonces $k\mathbf{a} = (14, 0, 7\sqrt{2})$. ◆

Los resultados que se presentan a continuación no son difíciles de comprobar —el lector solo tiene que escribir las componentes del vector.

Propiedades de la multiplicación por un escalar. Para todos los vectores **a** y **b** en $\mathbf{R}^3$ (o en $\mathbf{R}^2$), y los escalares k y l en los **R**, se tiene que:

1. $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ (propiedad distributiva);
2. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ (propiedad distributiva);
3. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a} = l(k\mathbf{a})$.

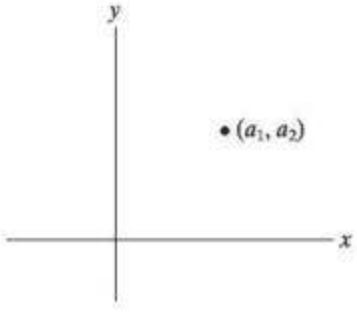


Figura 1.1 Un vector $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$ corresponde a un punto en $\mathbf{R}^2$.

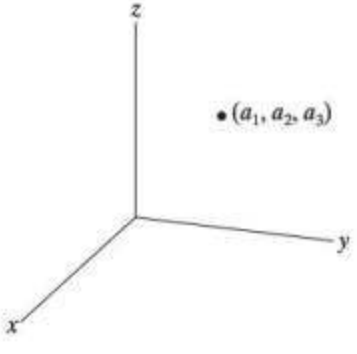


Figura 1.2 Un vector $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ corresponde a un punto en $\mathbf{R}^3$.

Es útil recordar que ninguna de estas definiciones o propiedades depende realmente de la dimensión, es decir, del número de componentes del vector. Por lo tanto, podríamos haber presentado el concepto algebraico de un vector en $\mathbf{R}^n$ como una n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales, y definido la suma y multiplicación por un escalar en una forma análoga a como lo hicimos para $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Piense el lector en el significado de dicha generalización. En la sección 1.6 estudiaremos algunos de los tecnicismos involucrados.

Vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. El concepto geométrico

Aunque es cierto que el álgebra de vectores es importante y el lector debe adquirir habilidad para trabajar con ella, las definiciones y propiedades formales tienden a presentar un panorama estéril de los vectores. La geometría proporciona una mejor motivación para las definiciones que acaban de enunciarse. A continuación se analiza dicha geometría. En primer lugar, el hecho de que un vector **a** en $\mathbf{R}^2$ sea un par de números reales (a_1, a_2) hace pensar en las coordenadas de un punto en $\mathbf{R}^2$ (véase la figura 1.1). De manera similar, si $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$, entonces **a** se escribe como (a_1, a_2, a_3) y esta tripleta de números se puede considerar como las coordenadas de un punto en $\mathbf{R}^3$ (véase la figura 1.2).

Todo esto está muy bien, pero los resultados de efectuar la suma de vectores o la multiplicación por un escalar no tienen una interpretación geométrica interesante o significativa en términos de puntos. Como veremos, es mejor visualizar un vector en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ como una flecha que comienza en el origen y termina en el punto en cuestión (véase la figura 1.3). Es frecuente que se haga referencia a esa visualización como **vector de posición** del punto (a_1, a_2) o (a_1, a_2, a_3).

Si el lector ha estudiado vectores en física, habrá escuchado que se describen como objetos que tienen "magnitud y dirección". La figura 1.3 ilustra este concepto, siempre que "magnitud" signifique "longitud de la flecha" y "dirección" sea la orientación o sentido de la flecha. (Nota: la única excepción para este enfoque es el vector cero. El vector cero tan solo se encuentra en el origen, como un punto, y no tiene magnitud, por lo tanto, tampoco tiene una dirección determinada. Esta excepción no plan-

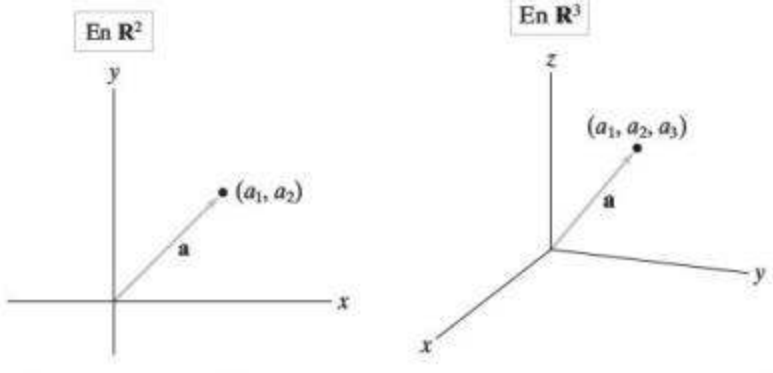


Figura 1.3 Un vector **a** en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$ es representado por una flecha que sale del origen hacia el punto **a**.

tea grandes dificultades). Sin embargo, en física no se requiere que todos los vectores se representen con flechas que salgan del origen. Existe la libertad de "trasladar en forma paralela" a los vectores tanto en $\mathbf{R}^2$ como en $\mathbf{R}^3$. Es decir, el vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se podría representar con una flecha con su inicio en el origen y su punta en (a_1, a_2, a_3) o en cualquier otro punto, siempre y cuando la longitud y sentido de la flecha permanezcan sin cambio (véase la figura 1.4). Por ejemplo, si queremos representar $\mathbf{a}$ con una flecha con su inicio en el punto (x_1, x_2, x_3), entonces la punta de la flecha estaría en el punto $(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$ (véase la figura 1.5).

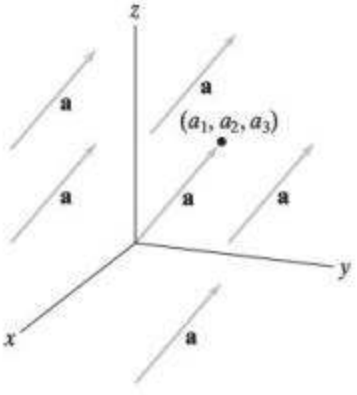


Figura 1.4 Cada flecha es una traslación paralela del vector de posición del punto (a_1, a_2, a_3) y representa el mismo vector.

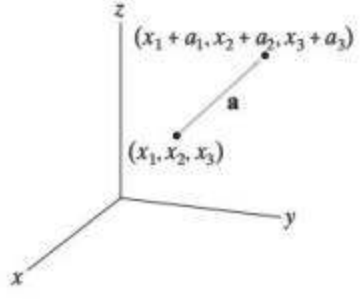


Figura 1.5 El vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ está representado por una flecha con su inicio en el punto (x_1, x_2, x_3).

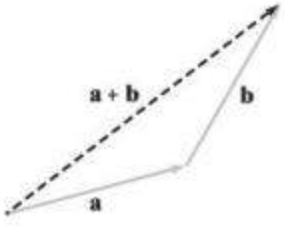


Figura 1.6 El vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ está representado por una flecha con el inicio ubicado en el inicio de $\mathbf{a}$ y la punta en la punta de $\mathbf{b}$.

Con esta descripción geométrica de los vectores, su suma se puede visualizar de dos formas. A la primera se le suele llamar método de la "punta al inicio" para sumar vectores. Se dibujan los dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que se quieren sumar, de modo que el inicio de uno, digamos $\mathbf{b}$, es la punta del otro. Entonces, la suma de vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se representa por una flecha cuyo inicio está en el inicio de $\mathbf{a}$ y su punta en la punta de $\mathbf{b}$ (véase la figura 1.6). ¡Observe que en esta construcción *no* es evidente ni obvio que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$!

La segunda manera de visualizar la suma de vectores es de acuerdo con lo que se conoce como **ley del paralelogramo**. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no paralelos, dibujados con sus inicios ubicados en el mismo punto, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se representa por medio de la flecha (con el inicio en el punto inicial común de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$) que va por la diagonal del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (véase la figura 1.7). La ley del paralelogramo es consistente por completo con el método de la punta al inicio. Para ver la razón de ello traslade $\mathbf{b}$ paralelo al lado opuesto del paralelogramo. Entonces, la diagonal descrita es el resultado de sumar $\mathbf{a}$ más (la traslación de) $\mathbf{b}$ usando el método de la punta al inicio (véase la figura 1.8).

Aún falta verificar que estas construcciones geométricas concuerdan con nuestra definición algebraica. Por sencillez trabajaremos en $\mathbf{R}^2$. Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, como siempre. Entonces, la flecha que se obtiene con la ley del paralelogramo para la suma de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es aquélla con el inicio ubicado en el origen O y la punta en el punto P, como se ilustra en la figura 1.9. Si trasladamos $\mathbf{b}$ en forma paralela de modo que el inicio esté en la punta de $\mathbf{a}$, entonces se aprecia de inmediato que las coordenadas de P deben ser $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, como se pretendía.

La multiplicación por un escalar es más fácil de visualizar: el vector $k\mathbf{a}$ se representa con una flecha cuya longitud es $|k|$ veces la longitud de $\mathbf{a}$ y cuya dirección es la misma que la de $\mathbf{a}$ cuando $k > 0$, y la contraria cuando $k < 0$ (véase la figura 1.10).

Ahora es sencillo obtener un panorama geométrico de la **diferencia** entre dos vectores (véase la figura 1.11). La diferencia $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ no es otra cosa que $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

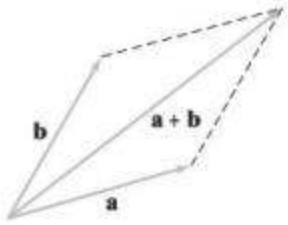


Figura 1.7 El vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se representa con la flecha que va por la diagonal del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

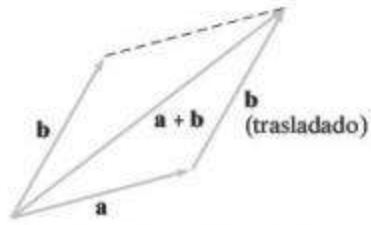


Figura 1.8 La equivalencia de la ley del paralelogramo y el método de la punta al inicio para la suma de vectores.

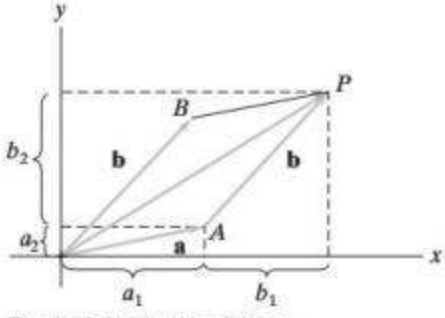


Figura 1.9 El punto P tiene coordenadas $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

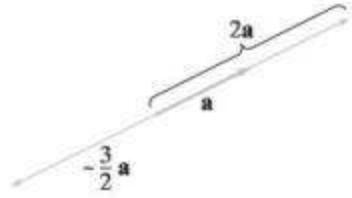


Figura 1.10 Visualización de la multiplicación por un escalar.

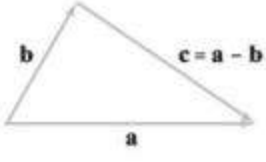


Figura 1.11 Geometría de la resta de vectores. El vector $\mathbf{c}$ es tal que $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$. Entonces, $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

(donde $-\mathbf{b}$ significa el escalar -1 multiplicado por el vector $\mathbf{b}$). El vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ se puede representar con una flecha cuya punta va de la punta de $\mathbf{b}$ hacia el inicio de $\mathbf{a}$; esa flecha también es una diagonal del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (como hemos visto, se puede usar la otra diagonal para representar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$).

Esta construcción será útil en diversas ocasiones.

DEFINICIÓN 1.5 Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbf{R}^3$, el **vector de desplazamiento de** P_1 **a** P_2 es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

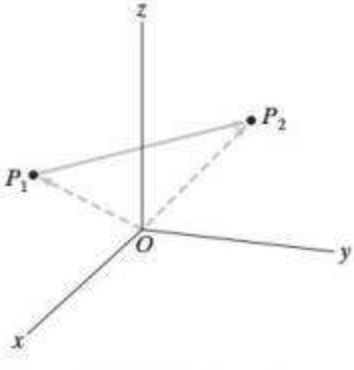


Figura 1.12 El desplazamiento del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, representado por la flecha que va de P_1 a P_2 es la diferencia entre los vectores de posición de estos dos puntos.

Esta construcción no es difícil de entender si consideramos la figura 1.12. Dados los puntos P_1 y P_2, se dibujan sus vectores de posición correspondientes $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. Entonces, se observa que $\overrightarrow{P_1P_2}$ es precisamente $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Se puede hacer una definición análoga para $\mathbf{R}^2$.

Cuando el lector estudió el cálculo de una variable no dudó en usar los conceptos de derivadas e integrales para representar conceptos físicos tales como velocidad, aceleración, fuerza, etc. La desventaja principal de eso era que las técnicas involucradas solo permitían estudiar actividades *rectilíneas*, es decir, que tenían lugar en una línea recta. La intuición dice que el movimiento en el plano o en el espacio es más complicado que el rectilíneo. Los vectores son ideales para resolver problemas de dinámica en dos o tres dimensiones debido a que poseen dirección y magnitud.

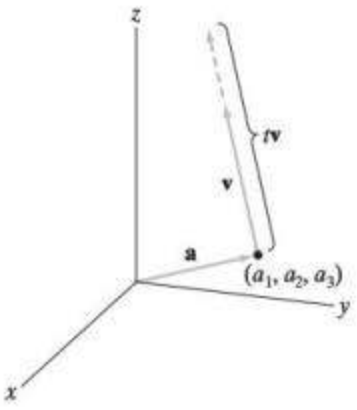


Figura 1.13 Después de t segundos, el punto que inicialmente se encuentra en **a**, se mueve a $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ con velocidad **v**.

Por ejemplo, suponga que una partícula en el espacio está ubicada en el punto (a_1, a_2, a_3) (con respecto de un sistema de coordenadas apropiado). Entonces, tiene como vector de posición $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Si la partícula se mueve con velocidad constante $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ durante t segundos, entonces el desplazamiento de la partícula desde su posición original es $t\mathbf{v}$, y su nueva posición está dada por $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ (véase la figura 1.13).

EJEMPLO 4 Si una nave espacial está en la posición (100, 3, 700) y viaja a una velocidad (7, −10, 25) (lo que significa que se desplaza 7 mi/seg en la dirección x positiva, 10 mi/seg en la dirección y negativa, y 25 mi/seg en la dirección z positiva), entonces, después de 20 segundos, el vehículo estará en la posición

$$(100, 3, 700) + 20(7, -10, 25) = (240, -197, 1200)$$

y el desplazamiento desde la posición inicial es (140, −200, 500). ◆

Figura 1.14 La longitud de $\mathbf{v}_1$ es 15 y la de $\mathbf{v}_2$ es $5\sqrt{2}$.

EJEMPLO 5 La nave S.S. Cálculo debe viajar hacia el sur a una velocidad de 15 nudos (millas náuticas por hora) con respecto al agua en reposo. Sin embargo, también hay una corriente de $5\sqrt{2}$ nudos hacia el sureste. ¿Cuál es la velocidad total de la nave? Si al inicio está en el origen y una trampa de langostas está ubicada en la posición (20, −79), ¿chocará la nave con la trampa?

Como las velocidades son vectores, la velocidad total del barco es $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ es la velocidad de la nave con respecto al agua en reposo, y $\mathbf{v}_2$ es la velocidad hacia el sureste de la corriente. La figura 1.14 facilita mucho el cálculo de dichas velocidades. Tenemos que $\mathbf{v}_1 = (0, -15)$. Como $\mathbf{v}_2$ va hacia el sureste, su dirección debe encontrarse a lo largo de la recta $y = -x$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_2$ se escribe como $\mathbf{v}_2 = (v, -v)$, donde v es un número real positivo. Según el teorema de Pitágoras, si la longitud de $\mathbf{v}_2$ es $5\sqrt{2}$, entonces debemos tener que $v^2 + (-v)^2 = (5\sqrt{2})^2$, o bien, $2v^2 = 50$, por lo que $v = 5$. Entonces, $\mathbf{v}_2 = (5, -5)$, por lo que la velocidad neta es

$$(0, -15) + (5, -5) = (5, -20).$$

Así, después de 4 horas el barco estará en la posición

$$(0, 0) + 4(5, -20) = (20, -80)$$

y pasará rozando la trampa de langostas. ◆

EJEMPLO 6 La teoría en que se basa el venerable arte marcial del judo es un ejemplo excelente de la suma de vectores. Si dos personas, una relativamente fuerte y la otra hasta cierto punto débil, sostienen un combate de exhibición es obvio quién prevalecerá. Por ejemplo, alguien que empuje con una fuerza de 200 libras hacia cierta dirección seguramente vencerá a un oponente que empuje en sentido opuesto con una fuerza de 100 libras. Sin embargo, como se aprecia en la figura 1.15, la fuerza neta será de 100 libras en la dirección en que empuje la persona más fuerte.

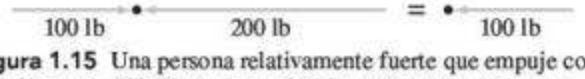


Figura 1.15 Una persona relativamente fuerte que empuje con una fuerza de 200 libras vencerá de inmediato a un oponente más débil que empuje con una fuerza de solo 100 libras.

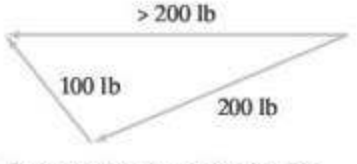


Figura 1.16 Suma de vectores en el judo.

El doctor Jigoro Kano, fundador del judo, se dio cuenta (aunque nunca expresó la idea en estos términos) de que algo parecido a la suma de vectores favorece al fuerte sobre el débil. Pero si el participante más débil aplica su fuerza de 100 libras en una dirección un poco distinta a la del fuerte, efectuará una suma de vectores cuya longitud será lo suficientemente grande para sorprender al oponente (véase la figura 1.16). Esta

es la base de todas las proyecciones esenciales del judo, y la razón por la que se describe como el arte de "usar la fuerza de una persona contra sí misma". La palabra "judo" significa, en realidad, "el camino de la rendición". Uno se "rinde" a la fuerza de otro con solo tratar de redirigirla en lugar de oponerse a ella. ◆

1.1 Ejercicios

1. Dibuje los vectores siguientes en $\mathbf{R}^2$:

a) $(2, 1)$ *b*) $(3, 3)$ *c*) $(-1, 2)$

2. Dibuje los vectores siguientes en $\mathbf{R}^3$:

a) $(1, 2, 3)$ *b*) $(-2, 0, 2)$ *c*) $(2, -3, 1)$

3. Realice las operaciones algebraicas indicadas. Exprese sus respuestas en la forma de un vector único $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbf{R}^2$.

a) $(3, 1) + (-1, 7)$

b) $-2(8, 12)$

c) $(8, 9) + 3(-1, 2)$

d) $(1, 1) + 5(2, 6) - 3(10, 2)$

e) $(8, 10) + 3((8, -2) - 2(4, 5))$

4. Realice las operaciones algebraicas que se indican. Exprese las respuestas en forma de un vector único $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\mathbf{R}^3$.

a) $(2, 1, 2) + (-3, 9, 7)$

b) $\frac{1}{2}(8, 4, 1) + 2(5, -7, \frac{1}{4})$

c) $-2((2, 0, 1) - 6(\frac{1}{2}, -4, 1))$

5. Grafique los vectores $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 5)$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 2) + (-2, 5)$ utilizando en ambos casos la ley del paralelogramo y el método de la punta al inicio.

6. Grafique los vectores $\mathbf{a} = (3, 2)$ y $\mathbf{b} = (-1, 1)$. También calcule y grafique $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

7. Sea A el punto cuyas coordenadas son $(1, 0, 2)$, y B el punto con coordenadas $(-3, 3, 1)$, y sea C el punto cuyas coordenadas son $(2, 1, 5)$.

a) Describa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

b) Describa los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

c) Explique con gráficas por qué $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

8. Grafique $(1, 2, 1)$ y $(0, -2, 3)$, y calcule y grafique $(1, 2, 1) + (0, -2, 3)$, $-1(1, 2, 1)$ y $4(1, 2, 1)$.

9. Si $(-12, 9, z) + (x, 7, -3) = (2, y, 5)$, ¿cuánto valen x, y y z?

10. ¿Cuál es la longitud (magnitud) del vector $(3, 1)$? (Sugerencia: sería útil emplear un diagrama).

11. Dibuje los vectores $\mathbf{a} = (1, 2)$ y $\mathbf{b} = (5, 10)$. Explique por qué $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ apuntan en la misma dirección.

12. Dibuje los vectores $\mathbf{a} = (2, -7, 8)$ y $\mathbf{b} = (-1, \frac{7}{2}, -4)$. Explique por qué ambos apuntan en direcciones opuestas.

13. ¿Cómo sumaría los vectores $(1, 2, 3, 4)$ y $(5, -1, 2, 0)$ en $\mathbf{R}^4$? ¿Cuánto sería $2(7, 6, -3, 1)$? En general, suponga que

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

son dos vectores en $\mathbf{R}^n$ y $k \in \mathbf{R}$ es un escalar. Entonces, ¿cómo definiría $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $k\mathbf{a}$?

14. Encuentre el desplazamiento de los vectores de P_1 a P_2, donde P_1 y P_2 son los puntos dados. Dibuje P_1, P_2 y $\overrightarrow{P_1P_2}$.

a) $P_1(1, 0, 2)$, $P_2(2, 1, 7)$

b) $P_1(1, 6, -1)$, $P_2(0, 4, 2)$

c) $P_1(0, 4, 2)$, $P_2(1, 6, -1)$

d) $P_1(3, 1)$, $P_2(2, -1)$

15. Sea $P_1(2, 5, -1, 6)$ y $P_2(3, 1, -2, 7)$ dos puntos en $\mathbf{R}^4$. ¿Cómo definiría y calcularía el vector de desplazamiento de P_1 a P_2? (Véase el ejercicio 13).

16. Si A es el punto en $\mathbf{R}^3$ con coordenadas $(2, 5, -6)$ y el vector de desplazamiento de A al segundo punto B es $(12, -3, 7)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

17. Suponga que usted y un amigo están en Nueva York hablando por teléfono celular. Usted informa a cada uno sobre sus propios vectores de desplazamiento del edificio Empire State a su posición actual. Explique cómo podría usar esta información para determinar el vector de desplazamiento desde usted hacia su amigo.

18. Proporcione los detalles de las demostraciones de las propiedades 2 y 3 de la suma de vectores dada en esta sección.

19. Demuestre las propiedades de la multiplicación por un escalar que se expusieron en esta sección.

20. *a*) Si $\mathbf{a}$ es un vector en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, ¿cuál es $0\mathbf{a}$? Demuestre su respuesta.

b) Si $\mathbf{a}$ es un vector en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, ¿cuál es $1\mathbf{a}$? Demuestre su respuesta.

21. *a*) Sea $\mathbf{a} = (2, 0)$ y $\mathbf{b} = (1, 1)$. Para $0 \le s \le 1$ y $0 \le t \le 1$, considere el vector $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Explique por qué el vector $\mathbf{x}$ se encuentra en el paralelogramo

determinado por **a** y **b**. (Sugerencia: podría ayudarse dibujando un diagrama).

b) Ahora suponga que $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ y $\mathbf{b} = (0, 3, 2)$. Describa el conjunto de vectores $\{\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$.

22. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores diferentes de cero tales que $\mathbf{b} \neq k\mathbf{a}$. Use vectores para describir el conjunto de puntos dentro del paralelogramo con vértice $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y cuyos lados adyacentes son paralelos a **a** y **b**, y tienen las mismas longitudes que **a** y **b** (véase la figura 1.17). (Sugerencia: si $P(x, y, z)$ es un punto en el paralelogramo, describa $\overrightarrow{OP}$, el vector de posición de P).

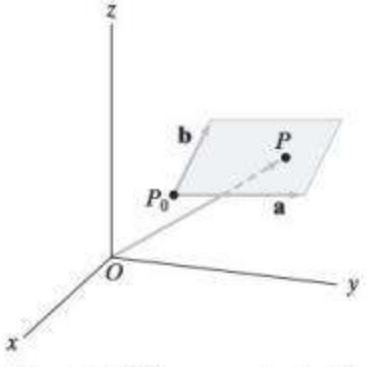


Figura 1.17 Figura para el ejercicio 22.

23. Una mosca desciende en un papel para graficar en el punto (3, 2). Comienza a moverse de ese punto con el vector de velocidad $\mathbf{v} = (-1, -2)$ (es decir, se mueve a una unidad por minuto en la dirección negativa de x y 2 unidades por minuto en la dirección negativa de y.

a) ¿Cuál es la velocidad de la mosca?

b) ¿En dónde estará la mosca después de 3 minutos?

c) ¿Cuánto tiempo le toma a la mosca llegar al punto $(-4, 12)$?

d) ¿Llega la mosca al punto $(-13, -27)$? Justifique su respuesta.

24. Un avión despega de un aeropuerto con un vector de velocidad (50, 100, 4). Suponga que las unidades son millas por hora, que el eje x positivo apunta hacia el este y el eje y positivo apunta hacia el norte.

a) ¿Qué tan rápido asciende verticalmente el avión al despegar?

b) Suponga que el aeropuerto se localiza en el origen y que un rascacielos se ubica 5 millas al oriente y 10 millas al norte del aeropuerto. El rascacielos mide 1,250 pies de altura. ¿Cuándo estará el avión directamente sobre el edificio?

c) Cuando el avión esté sobre el edificio, ¿cuánta separación hay entre la punta del edificio y el avión?

25. Como se mencionó en el texto, las fuerzas físicas (como la gravedad) son cantidades que poseen tanto magnitud como dirección, por lo que pueden representarse con vectores. Si sobre un objeto actúa más de una fuerza, entonces la **fuerza resultante** (o **neta**) se representa con la suma de los vectores individuales de cada fuerza. Suponga que hay dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = (2, 7, -1)$ y $\mathbf{F}_2 = (3, -2, 5)$ que actúan sobre un objeto.

a) ¿Cuál es la fuerza resultante de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$?

b) ¿Cuál es la fuerza $\mathbf{F}_3$ que se necesita para contrarrestar estas fuerzas, es decir, de modo que *no* haya una fuerza neta resultante y el objeto permanezca en reposo?

26. Una bolsa de arena que pesa 50 libras está suspendida de dos cuerdas. Suponga que se introduce un sistema de coordenadas en tres dimensiones de modo que la bolsa se encuentre en el origen y las cuerdas estén ancladas en los puntos $(0, -2, 1)$ y $(0, 2, 1)$.

a) Suponga que la fuerza debida a la gravedad apunta en forma paralela al vector $(0, 0, -1)$, dé un vector **F** que describa dicha fuerza gravitacional.

b) Ahora use vectores para describir las fuerzas a lo largo de cada una de las dos cuerdas. Use consideraciones de simetría y dibuje una figura que represente la situación.

27. Un peso de 10 libras está suspendido en equilibrio de dos cuerdas. Suponga que el peso está en el punto (1, 2, 3) en un sistema de coordenadas en tres dimensiones, donde el eje z positivo apunta hacia arriba, perpendicular al piso, y que las cuerdas están ancladas en los puntos (3, 0, 4) y (0, 3, 5). Dé vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que describan las fuerzas que actúan a lo largo de las cuerdas.

1.2 Más acerca de los vectores

Vectores básicos estándar

En $\mathbf{R}^2$ los vectores $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ desempeñan un papel especial respecto de la notación. Cualquier vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ se puede escribir en términos de **i** y **j** por medio de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar:

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}.$$

(tal vez sea más fácil comprender este argumento si se lee en reversa). En relación con la notación, lo anterior sencillamente establece que es posible escribir, ya sea

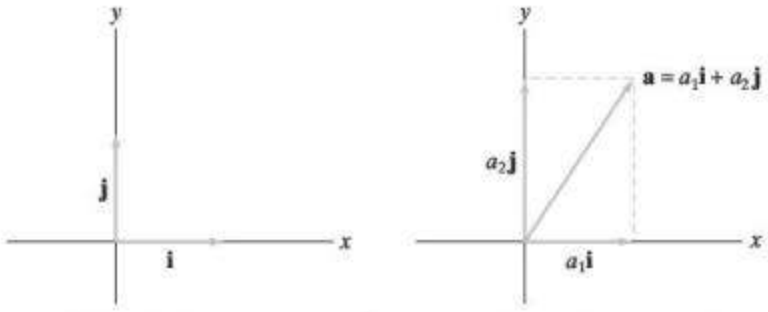


Figura 1.18 Cualquier vector en $\mathbf{R}^2$ se puede escribir en términos de **i** y **j**.

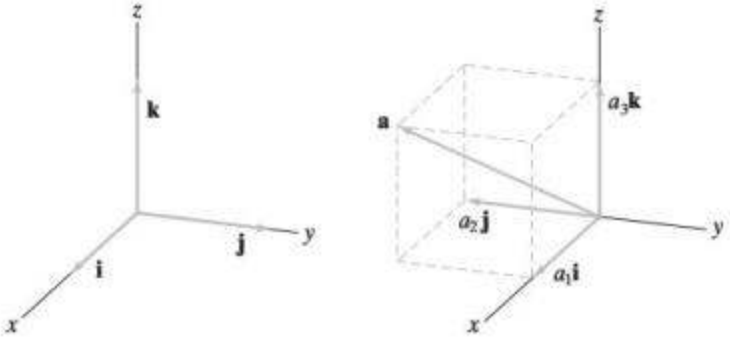


Figura 1.19 Cualquier vector en $\mathbf{R}^3$ se puede escribir en términos de **i**, **j** y **k**.

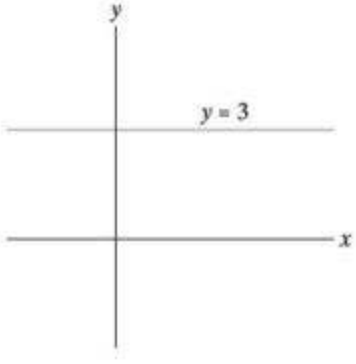


Figura 1.20 En $\mathbf{R}^2$ la ecuación $y = 3$ describe una recta.

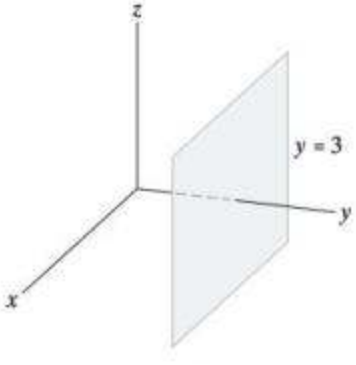


Figura 1.21 En $\mathbf{R}^3$ la ecuación $y = 3$ describe un plano.

(a_1, a_2) o $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ para denotar al vector **a**. Queda a elección del lector cuál notación emplear (mientras sea consistente), pero la notación con **ij** en general es útil para hacer énfasis en la naturaleza "vectorial" de **a**, mientras que la notación con coordenadas es más útil para enfatizar la naturaleza de "punto" de **a** (en el sentido de que el papel de **a** sea el de un posible vector de posición de cierto punto). Geométricamente, la significación de los **vectores básicos estándar i y j** es que un vector arbitrario $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$ se puede descomponer gráficamente en sus **componentes vectoriales** a lo largo de los ejes x y y, como se ilustra en la figura 1.18.

Exactamente la misma situación ocurre en $\mathbf{R}^3$, solo que ahora necesitamos tres vectores, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ para formar la base estándar (véase la figura 1.19). Puede usarse el mismo argumento que se acaba de exponer para demostrar que cualquier vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ también se puede escribir como $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. En este libro usaremos ambos tipos de notación, en coordenadas y una representación en términos de una base estándar.

EJEMPLO 1 El vector $(1, -2)$ se escribe como $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y el vector $(7, \pi, -3)$ como $7\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. ◆

Ecuaciones paramétricas de rectas

En $\mathbf{R}^2$ sabemos que ecuaciones de la forma $y = mx + b$ o $Ax + By = C$ describen líneas rectas (véase la figura 1.20). En consecuencia, sería de esperar que el mismo tipo de ecuación definiera a una recta en $\mathbf{R}^3$. La consideración de uno o dos ejemplos sencillos (como en la figura 1.21) debiera convencer al lector de que una sola ecuación lineal como las mencionadas describe un plano, y no una recta. Para definir una recta se requiere un par de ecuaciones simultáneas en x, y y z.

Pospondremos el estudio de cómo se obtienen las ecuaciones para planos hasta la sección 1.5 y nos centraremos en estudiar cómo se utilizan los vectores para dar conjuntos de ecuaciones paramétricas de rectas en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ (o incluso en $\mathbf{R}^n$).

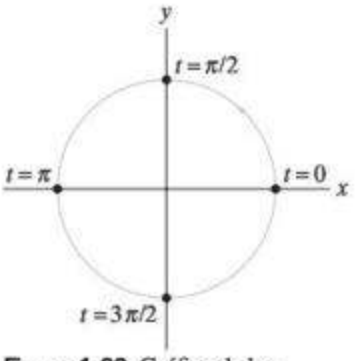


Figura 1.22 Gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $0 \le t < 2\pi$.

En primer lugar se observa que una curva en el plano se describe analíticamente por los puntos (x, y), donde x y y están dadas como funciones de una tercera variable (el **parámetro**) t. Estas funciones dan lugar a las **ecuaciones paramétricas** de la curva

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}.$$

EJEMPLO 2 El conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi$$

describe un círculo de radio 2, ya que se cumple lo siguiente:

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2 \operatorname{sen} t)^2 = 4.$$

(véase la figura 1.22). ◆

Las ecuaciones paramétricas se utilizan con facilidad para describir curvas en $\mathbf{R}^3$; una curva en $\mathbf{R}^3$ es el conjunto de puntos (x, y, z), cuyas coordenadas x, y y z son dadas cada una por una función de t:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}.$$

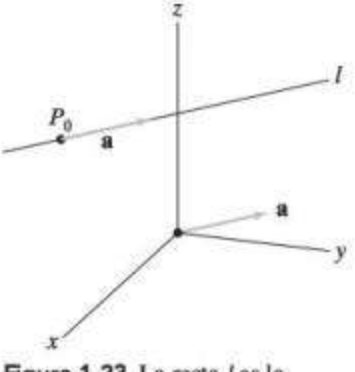


Figura 1.23 La recta l es la única que pasa por P_0 y es paralela al vector **a**.

Las ventajas de usar ecuaciones paramétricas son dos. En primer lugar ofrecen una manera uniforme de describir curvas en cualquier número de dimensiones. (¿Cómo definiría el lector ecuaciones paramétricas para una curva en $\mathbf{R}^4$? ¿Y en $\mathbf{R}^{128}$?) En segundo lugar permiten obtener una percepción dinámica de la curva si se considera que la variable paramétrica t representa al tiempo y se imagina que una partícula se mueve a lo largo de la curva con el tiempo de acuerdo con las ecuaciones paramétricas dadas. Esto se puede representar geométricamente asignando una "dirección" a la curva para representar una t creciente. Observe la flecha en la figura 1.22.

Ahora veremos cómo obtener ecuaciones de rectas. En primer lugar, el lector debe convencerse de que una recta en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$ es determinada únicamente por dos elementos de información geométrica: (1) un vector cuya dirección es paralela a la de la recta, y (2) cualquier punto particular que esté sobre la recta (véase la figura 1.23). En la figura 1.24 se define el vector

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$$

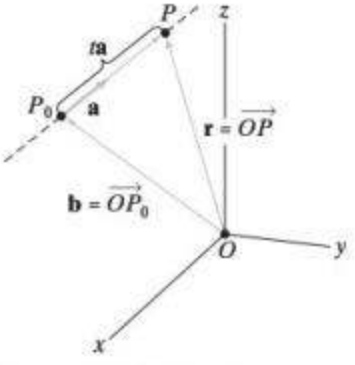


Figura 1.24 Gráfica de una recta en $\mathbf{R}^3$.

entre el origen O y un punto arbitrario P sobre la recta l (es decir, el vector de posición de $P(x, y, z)$). $\overrightarrow{OP}$ es la suma vectorial del vector de posición **b** del punto dado P_0 (es decir, $\overrightarrow{OP_0}$ y un vector paralelo a **a**. Cualquier vector paralelo a **a** debe ser un múltiplo escalar de **a**. Si se hace que este escalar sea la variable paramétrica t, se tiene que

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{a},$$

con lo que se establece la proposición siguiente:

PROPOSICIÓN 2.1 La ecuación paramétrica vectorial para la recta que pasa por el punto $P_0(b_1, b_2, b_3)$, cuyo vector de posición es $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y es paralela a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{a}. \tag{1}$$

Si se expande la fórmula (1),

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} + t(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})$$
$$= (a_1t + b_1)\mathbf{i} + (a_2t + b_2)\mathbf{j} + (a_3t + b_3)\mathbf{k}.$$

A continuación escribimos $\overrightarrow{OP}$ como $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, de manera que P tiene como coordenadas (x, y, z). Entonces, al restar las componentes observamos que las coordenadas de P son $(a_1t + b_1, a_2t + b_2, a_3t + b_3)$, y nuestras ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a_1t + b_1 \\ y = a_2t + b_2 \\ z = a_3t + b_3 \end{cases}, \tag{2}$$

donde t es cualquier número real.

Estas ecuaciones paramétricas también funcionan en $\mathbf{R}^2$ (si se pasa por alto la componente z) o en $\mathbf{R}^n$, donde n es un valor arbitrario. En $\mathbf{R}^n$ la fórmula (1) sigue siendo válida, en donde tomamos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Las ecuaciones paramétricas resultantes son

$$\begin{cases} x_1 = a_1t + b_1 \\ x_2 = a_2t + b_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = a_nt + b_n \end{cases}.$$

EJEMPLO 3 Para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, -2, 3)$ y que es paralela al vector $\pi\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, se tiene que $\mathbf{a} = \pi\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, por lo que la fórmula (1) produce:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(\pi\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$= (1 + \pi t)\mathbf{i} + (-2 - 3t)\mathbf{j} + (3 + t)\mathbf{k}.$$

Las ecuaciones paramétricas se leen como

$$\begin{cases} x = \pi t + 1 \\ y = -3t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 4 De la geometría euclidiana se sabe que dos puntos distintos determinan una recta única en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$. Encontremos las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_0(1, -2, 3)$ y $P_1(0, 5, -1)$. La situación se ilustra en la figura 1.25. Para utilizar la fórmula (1) se necesita encontrar un vector $\mathbf{a}$ paralelo a la recta deseada. Dicho vector es el que tiene el inicio ubicado en P_0 y la punta en P_1. Esto significa que para $\mathbf{a}$ usaremos el vector

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (0 - 1, 5 - (-2), -1 - 3) = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Para $\mathbf{b}$, el vector de posición de un punto particular de la recta, podemos elegir ya sea $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ o $\mathbf{b} = 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Así, las ecuaciones en (2) llevan a las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 7t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 5 + 7t \\ z = -1 - 4t \end{cases}. \quad \blacklozenge$$

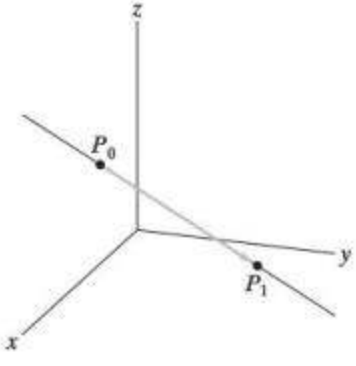


Figura 1.25 Obtención de las ecuaciones para una recta que pase por dos puntos en el ejemplo 4.

En general, dados dos puntos *arbitrarios*

$$P_0(a_1, a_2, a_3) \quad \text{y} \quad P_1(b_1, b_2, b_3),$$

la recta que los une tiene la ecuación vectorial paramétrica siguiente:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{P_0P_1}. \tag{3}$$

La ecuación (3) da las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ z = a_3 + (b_3 - a_3)t \end{cases}. \tag{4}$$

De manera alternativa, en lugar de la ecuación (3) podría utilizarse la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_0P_1}, \tag{5}$$

o tal vez

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_0}, \tag{6}$$

cada una de las cuales da lugar a conjuntos de ecuaciones paramétricas algo diferentes. De nuevo se invita al lector a revisar la figura 1.25 con el fin de que comprenda la geometría de vectores que está involucrada en lo anterior.

En el ejemplo 4 se manifiesta algo importante, el que las ecuaciones paramétricas para una recta (o en general para cualquier curva) *nunca* son únicas. De hecho, los dos conjuntos de ecuaciones obtenidas en dicho ejemplo no son de ninguna manera los únicos, podríamos haber tomado $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_0} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ o cualquier otro múltiplo escalar diferente de cero de $\overrightarrow{P_0P_1}$ para $\mathbf{a}$.

Si las ecuaciones paramétricas no están determinadas en forma única, entonces, ¿cómo podría comprobarse que el resultado es correcto? En general no es fácil hacerlo, pero en el caso de las rectas existen dos caminos. Uno es producir dos puntos que estén sobre la recta especificada por el primer conjunto de ecuaciones paramétricas y ver si quedan sobre la recta dada por el segundo conjunto de ecuaciones paramétricas. El otro enfoque es usar las ecuaciones paramétricas para encontrar lo que se conoce como **forma paramétrica** de una recta en $\mathbf{R}^3$. De las ecuaciones en (2), suponiendo que cada a_i es distinta de cero, se puede eliminar la variable paramétrica t en cada ecuación para obtener:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - b_1}{a_1} \\ t = \dfrac{y - b_2}{a_2} \\ t = \dfrac{z - b_3}{a_3} \end{cases}.$$

La forma simétrica es:

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{z - b_3}{a_3}. \tag{7}$$

En el ejemplo 4, los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas dan lugar a las formas simétricas correspondientes

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-3}{-4} \quad \text{y} \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-5}{7} = \frac{z+1}{-4}.$$

No es difícil ver que si se suma 1 a cada "lado" de la segunda forma simétrica se obtiene la primera. En general las formas simétricas de las rectas difieren solo en un término constante o múltiplos escalares constantes (o en ambos).

La forma simétrica en realidad es un conjunto de dos ecuaciones simultáneas en $\mathbf{R}^3$. Por ejemplo, la información en (7) también se escribe así:

$$\begin{cases} \dfrac{x-b_1}{a_1} = \dfrac{y-b_2}{a_2} \\ \dfrac{x-b_1}{a_1} = \dfrac{z-b_3}{a_3} \end{cases}.$$

Esto ilustra que se requieren dos ecuaciones "escalares" en x, y y z para describir una recta en $\mathbf{R}^3$, aunque una sola ecuación paramétrica vectorial como la de la fórmula (1) es suficiente.

Los dos ejemplos siguientes ilustran la forma de usar ecuaciones paramétricas para rectas a fin de identificar la intersección de una recta con un plano o la de dos rectas.

EJEMPLO 5 Veremos en dónde la recta con las ecuaciones paramétricas siguientes

$$\begin{cases} x = t + 5 \\ y = -2t - 4 \\ z = 3t + 7 \end{cases}$$

interseca al plano $3x + 2y - 7z = 2$.

Para localizar el punto de intersección debemos determinar cuál valor del parámetro t da un punto sobre la recta que también se encuentre en el plano. Esto se logra fácilmente sustituyendo los valores paramétricos para x, y y z de la recta en la ecuación del plano:

$$3(t + 5) + 2(-2t - 4) - 7(3t + 7) = 2. \tag{8}$$

Al resolver la ecuación (8) para t se encuentra que $t = -2$. Al hacer t igual a -2 en las ecuaciones paramétricas de la recta se produce el punto $(3, 0, 1)$, que a su vez se encuentra en el plano. ◆

EJEMPLO 6 Determinaremos si las dos rectas siguientes se intersecan y el lugar en que lo hacen.

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t + 6 \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

Las rectas se intersecan si existe un valor específico de t_1 para el parámetro de la primera recta, y otro valor t_2 para el parámetro de la segunda recta que genere el mismo punto. En otras palabras, se debe encontrar t_1 y t_2 de tal modo que, al igualar las respectivas expresiones paramétricas para x, y y z, se tenga

$$\begin{cases} t_1 + 1 = 3t_2 - 3 \\ 5t_1 + 6 = t_2 \\ -2t_1 = t_2 + 1 \end{cases}. \tag{9}$$

Las últimas dos ecuaciones de (9) producen

$$t_2 = 5t_1 + 6 = -2t_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -1.$$

Al usar $t_1 = -1$ en la segunda ecuación de (9) se encuentra que $t_2 = 1$. Observe que los valores $t_1 = -1$ y $t_2 = 1$ también satisfacen la primera ecuación de (9); por lo tanto, hemos resuelto el sistema. Al hacer $t = -1$ en el primer conjunto de ecuaciones paramétricas de la primera recta se obtiene el punto de intersección que se buscaba (0, 1, 2). ◆

Las ecuaciones paramétricas en general

Con la geometría de vectores es relativamente fácil encontrar las ecuaciones paramétricas de varias curvas. A continuación se dan dos ejemplos.

EJEMPLO 7 Si una rueda gira sobre una superficie plana sin patinar, un punto ubicado en la superficie de la rueda describe una curva llamada **cicloide**, como se muestra en la figura 1.26.

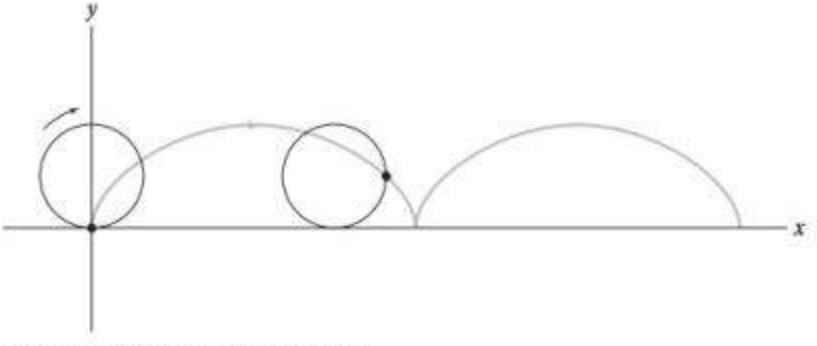


Figura 1.26 Gráfica de una cicloide.

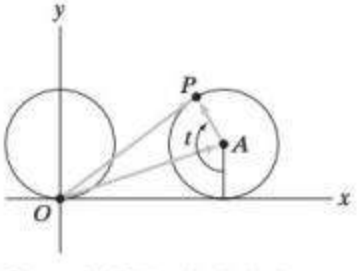


Figura 1.27 Resultado de la rueda de la figura 1.26 girando con un ángulo central de t.

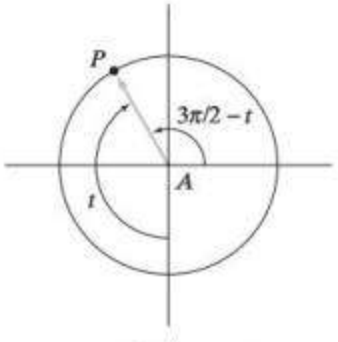


Figura 1.28 $\overrightarrow{AP}$ con el inicio situado en el origen.

Suponga que la rueda tiene un radio a y que las coordenadas en $\mathbf{R}^2$ se escogen de modo que el punto de interés sobre la rueda esté inicialmente en el origen. Después de que la rueda haya girado con un ángulo central de t radianes, la situación será la que se muestra en la figura 1.27. Se busca el vector $\overrightarrow{OP}$, que es el vector de posición de P, en términos del parámetro t. Es evidente que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, donde el punto A es el centro de la rueda. No es difícil determinar el vector $\overrightarrow{OA}$. Su componente $\mathbf{j}$ debe ser a, puesto que el centro de la rueda no varía verticalmente. Su componente $\mathbf{i}$ debe ser igual a la distancia recorrida por la rueda; si t se mide en radianes, entonces la distancia es at, que es la longitud del arco del círculo que tiene al ángulo central t. Es decir, $\overrightarrow{OA} = at\mathbf{i} + a\mathbf{j}$.

Es evidente lo valiosos que resultan los métodos vectoriales cuando se determina $\overrightarrow{AP}$. Traslade el diagrama en forma paralela de modo que $\overrightarrow{AP}$ tenga su inicio en el origen, como se ilustra en la figura 1.28. A partir de las ecuaciones paramétricas de un círculo de radio a,

$$\overrightarrow{AP} = a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\mathbf{i} + a\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\mathbf{j} = -a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} - a\cos t\,\mathbf{j},$$

de las fórmulas para la suma del seno y coseno. Se concluye que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} &= (at\mathbf{i} + a\mathbf{j}) + (-a\,\text{sen}\,t\mathbf{i} - a\cos t\mathbf{j}) \\ &= a(t - \text{sen}\,t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j},\end{aligned}$$

de manera que las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

◆

EJEMPLO 8 Si se desenrolla cinta adhesiva de un dispensador circular no giratorio de modo que la cinta desenrollada se mantenga tensa y tangente a la rueda dispensadora, entonces el extremo de la cinta describe una curva llamada **involuta** del círculo. Encontraremos las ecuaciones paramétricas de esta curva suponiendo que la rueda dispensadora tiene un radio constante a y su centro en el origen (por supuesto, a medida que se desenrolle más y más cinta, el radio de la rueda disminuirá. Supondremos que se retira poca cinta de manera que el radio permanezca constante).

Según la figura 1.29, se observa que el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ del punto P deseado es la suma vectorial $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$. Para determinar $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{BP}$, se usará el ángulo θ entre el eje x positivo y $\overrightarrow{OB}$ como nuestro parámetro. Como B es un punto sobre el círculo,

$$\overrightarrow{OB} = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}.$$

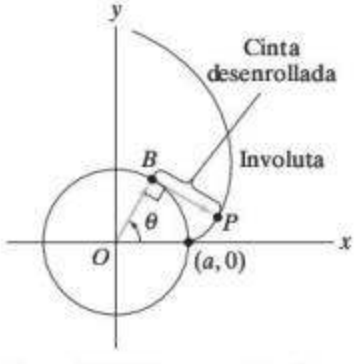


Figura 1.29 Se desenrolla cinta adhesiva como en el ejemplo 8. El punto P describe una curva conocida como **involuta** del círculo.

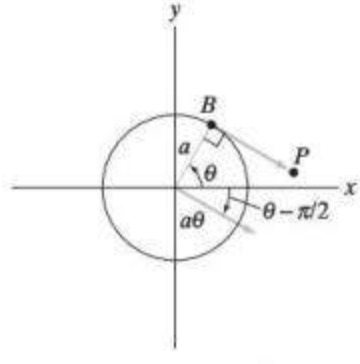


Figura 1.30 El vector $\overrightarrow{BP}$ debe formar un ángulo de $\theta - \pi/2$ con el eje x positivo.

Para encontrar el vector $\overrightarrow{BP}$ se hace una traslación paralela de modo que su inicio quede en el origen. La figura 1.30 muestra que la longitud de $\overrightarrow{BP}$ debe ser $a\theta$, la cantidad de cinta desenrollada, y su dirección debe ser tal que forme un ángulo de $\theta - \pi/2$ con el eje x positivo. De nuestro conocimiento de la geometría del círculo y, tal vez, de las coordenadas polares, observamos que $\overrightarrow{BP}$ se describe por

$$\overrightarrow{BP} = a\theta\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + a\theta\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} = a\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - a\theta\cos\theta\,\mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = a(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{i} + a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)\,\mathbf{j}.$$

Por lo que

$$\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta) \\ y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de la involuta, cuya gráfica aparece en la figura 1.31. ◆

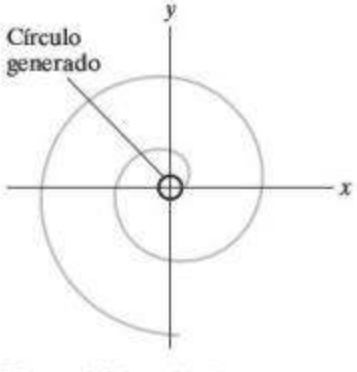


Figura 1.31 La involuta.

1.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 5 escriba el vector dado usando los vectores de la base estándar para $\mathbf{R}^2$ *y* $\mathbf{R}^3$.

1. $(2, 4)$ **2.** $(9, -6)$ **3.** $(3, \pi, -7)$

4. $(-1, 2, 5)$ **5.** $(2, 4, 0)$

En los ejercicios 6 a 10 escriba el vector dado sin utilizar la notación de la base estándar.

6. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

7. $9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$

8. $-3(2\mathbf{i} - 7\mathbf{k})$

9. $\pi\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (Considere que este es un vector en $\mathbf{R}^2$).

10. $\pi\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (Considere que se trata de un vector en $\mathbf{R}^3$).

11. Sean $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{a}_2 = (1, -1)$.

a) Escriba el vector $\mathbf{b} = (3, 1)$ como $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$, donde c_1 y c_2 son escalares apropiados.

b) Repita el inciso anterior para el vector $\mathbf{b} = (3, -5)$.

c) Demuestre que *cualquier* vector $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ en $\mathbf{R}^2$ se puede escribir en la forma $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ si se escogen en forma apropiada de los escalares c_1 y c_2. (Esto demuestra que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ forman una base de $\mathbf{R}^2$ que puede usarse en lugar de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$).

12. Sean $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1)$.

a) Encuentre escalares c_1, c_2, c_3 de modo que el vector $\mathbf{b} = (5, 6, -5)$ se escriba como $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$.

b) Trate de repetir el inciso anterior para el vector $\mathbf{b} = (2, 3, 4)$. ¿Qué sucede?

c) ¿Los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ se pueden usar como una base de $\mathbf{R}^3$ en lugar de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 13 a 18 dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para las rectas que se describen.

13. La recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto $(2, -1, 5)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

14. La recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto $(12, -2, 0)$ y es paralela al vector $5\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

15. La recta en $\mathbf{R}^2$ que pasa por el punto $(2, -1)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

16. La recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por los puntos $(2, 1, 2)$ y $(3, -1, 5)$.

17. La recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por los puntos $(1, 4, 5)$ y $(2, 4, -1)$.

18. La recta en $\mathbf{R}^2$ que pasa por los puntos $(8, 5)$ y $(1, 7)$.

19. Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta en $\mathbf{R}^4$ que pasa por el punto $(1, 2, 0, 4)$ y es paralela al vector $(-2, 5, 3, 7)$.

20. Obtenga un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta en $\mathbf{R}^5$ que pasa por los puntos $(9, \pi, -1, 5, 2)$ y $(-1, 1, \sqrt{2}, 7, 1)$.

21. *a*) Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto $(-1, 7, 3)$ y es paralela al vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

b) Obtenga un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(5, -3, 4)$ y $(0, 1, 9)$.

c) Determine conjuntos distintos (pero igualmente correctos) de las ecuaciones obtenidas en los incisos *a*) y *b*).

d) Encuentre las formas simétricas de sus respuestas para los incisos *a*) a *c*).

22. Dé una forma simétrica para la recta que tiene las ecuaciones paramétricas $x = 5 - 2t, y = 3t + 1, z = 6t - 4$.

23. Dé una forma simétrica para la recta que tiene ecuaciones paramétricas $x = t + 7, y = 3t - 9, z = 6 - 8t$.

24. Cierta recta en $\mathbf{R}^3$ tiene la forma simétrica

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas para ella.

25. Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta con forma simétrica

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+10}{-2}.$$

26. ¿Son iguales las dos rectas que tienen las formas simétricas siguientes?

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{4}$$

y

$$\frac{x-4}{10} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+5}{8}$$

Justifique su respuesta.

27. Demuestre que los dos conjuntos de ecuaciones

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{5} \text{ y } \frac{x+1}{-6} = \frac{y+6}{-14} = \frac{z+5}{-10}$$

en verdad representan a la misma recta en $\mathbf{R}^3$.

28. Determine si las dos rectas l_1 y l_2 definidas por los conjuntos de ecuaciones paramétricas l_1: $x = 2t - 5, y = 3t + 2, z = 1 - 6t$ y l_2: $x = 1 - 2t, y = 11 - 3t, z = 6t - 17$ son iguales. (Sugerencia: primero encuentre dos puntos sobre l_1 y después vea si se encuentran sobre l_2).

29. ¿Las ecuaciones paramétricas siguientes describen a la misma recta? l_1: $x = 3t + 2, y = t - 7, z = 5t + 1$, y l_2: $x = 6t - 1, y = 2t - 8, z = 10t - 3$. Justifique su respuesta.

30. ¿Las ecuaciones paramétricas $x = 3t^3 + 7, y = 2 - t^3, z = 5t^3 + 1$ determinan una recta? Justifique su respuesta.

31. ¿Las ecuaciones paramétricas $x = 5t^2 - 1, y = 2t^2 + 3, z = 1 - t^2$ determinan una recta? Explique su respuesta.

32. Un pájaro vuela en una trayectoria rectilínea dada por $x = 2t + 7, y = t - 2, z = 1 - 3t$, donde t se mide en minutos.

a) ¿En dónde se encuentra el pájaro inicialmente (en $t = 0$)? ¿En dónde está 3 minutos después?

b) Dé un vector que sea paralelo a la trayectoria del pájaro.

c) ¿En qué momento llega el pájaro al punto $(\frac{34}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{11}{2})$?

d) ¿En cuál llega al punto $(17, 4, -14)$?

33. Encuentre el punto en que la recta $x = 3t - 5, y = 2 - t, z = 6$ interseca al plano $x + 3y - z = 19$.

34. ¿En dónde la recta $x = 1 - 4t, y = t - 3/2, z = 2t + 1$ interseca al plano $5x - 2y + z = 1$?

35. Encuentre los puntos de intersección de la recta $x = 2t - 3, y = 3t + 2, z = 5 - t$ con cada uno de los planos coordenados $x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

36. Demuestre que la recta $x = 5 - t, y = 2t - 7, z = t - 3$ está contenida en el plano que tiene la ecuación $2x - y + 4z = 5$.

37. ¿La recta $x = 5 - t, y = 2t - 3, z = 7t + 1$ interseca al plano $x - 3y + z = 1$? Justifique su respuesta.

38. Determine el lugar en que la recta cuya forma simétrica es

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$$

interseca al plano que tiene la ecuación $2x - 5y + 3z + 8 = 0$.

39. Demuestre que la recta con la forma simétrica

$$\frac{x-3}{-2} = y - 5 = \frac{z+2}{3}$$

está contenida totalmente en el plano $3x + 3y + z = 22$.

40. ¿La recta que tiene la forma simétrica

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-9}$$

interseca al plano con ecuación $2x - 3y + z = 7$?

41. Sean a, b y c constantes distintas de cero. Demuestre que la recta con ecuaciones paramétricas $x = at + a, y = b, z = ct + c$ está en la superficie cuya ecuación es $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.

42. Encuentre el punto de intersección de las dos rectas l_1: $x = 2t + 3, y = 3t + 3, z = 2t + 1$ y l_2: $x = 15 - 7t, y = t - 2, z = 3t - 7$.

43. ¿Se intersecan las rectas l_1: $x = 2t + 1, y = -3t, z = t - 1$ y l_2: $x = 3t + 1, y = t + 5, z = 7 - t$? Explique su respuesta.

44. *a*) Encuentre la distancia del punto $(-2, 1, 5)$ a cualquier punto sobre la recta $x = 3t - 5, y = 1 - t, z = 4t + 7$. (Su respuesta debe estar en términos del parámetro t).

b) Ahora calcule la distancia entre el punto $(-2, 1, 5)$ y la recta $x = 3t - 5, y = 1 - t, z = 4t + 7$. (La distancia entre un punto y una recta es la distancia entre el punto dado y el punto *más cercano* de la recta).

45. *a*) Describa la curva dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = 2\cos 3t \\ y = 2\operatorname{sen} 3t \end{cases} \quad 0 \le t < \frac{2\pi}{3}.$$

¿Qué pasa si se permite que t varíe entre 0 y 2π?

b) Describa la curva dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = 5\cos 3t \\ y = 5\operatorname{sen} 3t \end{cases} \quad 0 \le t < \frac{2\pi}{3}.$$

c) Describa la curva que en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = 5\operatorname{sen} 3t \\ y = 5\cos 3t \end{cases} \quad 0 \le t < \frac{2\pi}{3}.$$

d) Describa la curva que en forma paramétrica está dada por

$$\begin{cases} x = 5\cos 3t \\ y = 3\operatorname{sen} 3t \end{cases} \quad 0 \le t < \frac{2\pi}{3}.$$

46. Suponga que una rueda de bicicleta de radio a rueda sobre una superficie plana sin patinar. Si se fija un reflector a un rayo de la bicicleta a una distancia b del centro, la curva resultante trazada por el reflector recibe el nombre de **cicloide ordinaria**. En la figura 1.32 se ilustra dicho cicloide, donde $a = 3$ y $b = 2$.

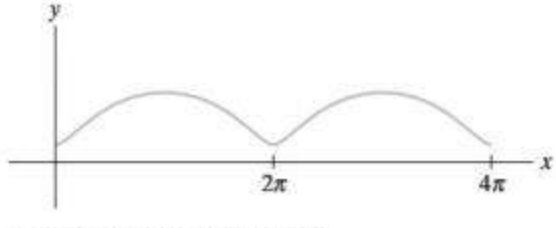


Figura 1.32 Cicloide ordinaria.

Utilice métodos vectoriales o de otro tipo para encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la cicloide ordinaria. La figura 1.33 le será de utilidad.

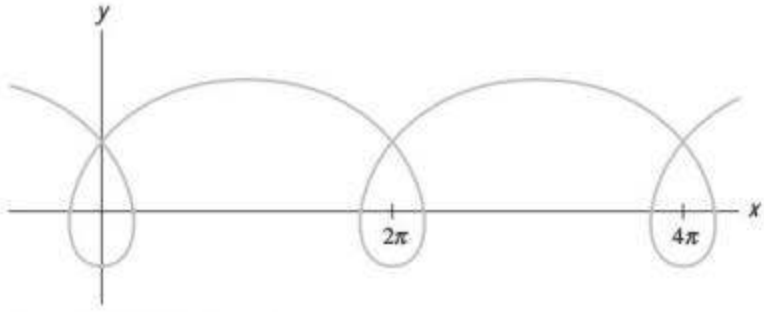


Figura 1.34 Cicloide negativa.

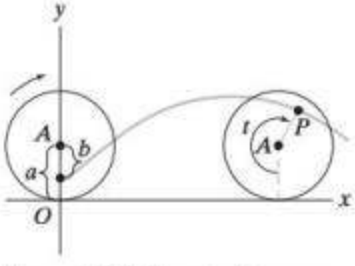


Figura 1.33 El punto P traza una curva cicloide ordinaria.

(Tome un punto de la cicloide que esté sobre el eje y). No existe una razón teórica para que la cicloide descrita no tenga $a < b$, aunque en ese caso la aplicación del reflector fijado a la rueda de la bicicleta deja de ser relevante. (Cuando $a < b$ la curva en forma paramétrica que resulta se llama **cicloide negativa**). Sus ecuaciones paramétricas deben ser tales que las constantes a y b pueden escogerse en forma independiente una de otra. En la figura 1.34 se ilustra una cicloide negativa, con $a = 2$ y $b = 4$. Trate de imaginar una situación física en la que se presentaría una curva como la descrita.

47. Egbert desenrolla cinta adhesiva de un dispensador circular de radio a, lo hace manteniendo la cinta tensa y perpendicular con respecto del dispensador. Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas para la trayectoria trazada por el extremo de la cinta (el punto P en la figura 1.35) a medida que Egbert la desenrolla. Use el ángulo θ entre $\overrightarrow{OP}$ y el eje x positivo para el parámetro. Suponga que se desenrolla poca cinta, de manera que el radio del dispensador permanezca constante.

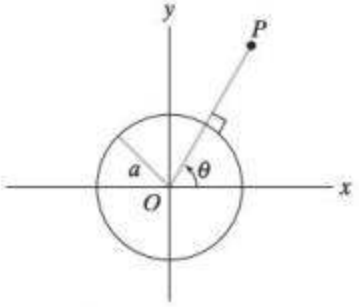


Figura 1.35 Diagrama para el ejercicio 47.

1.3 El producto punto

Cuando se introdujeron los conceptos aritméticos de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, el lector tal vez se preguntó por qué no se definió el producto de dos vectores. Quizá piense que la "multiplicación de vectores" debe definirse de manera análoga a la forma en que se definió la suma de vectores (es decir, mediante la multiplicación de las componentes). Sin embargo, esa definición no es muy útil. En su lugar debemos definir y usar dos conceptos diferentes para el producto de dos vectores: (1) el producto interno euclidiano, o producto "punto", que se define para dos vectores en $\mathbf{R}^n$ (donde n es arbitraria), y (2) el producto "cruz", o vectorial, que se define *solo* para vectores en $\mathbf{R}^3$.

El producto punto de dos vectores

DEFINICIÓN 3.1 Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$. El **producto punto** (o **interno** o **escalar**) **de a y b** se denota con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, y es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

En $\mathbf{R}^2$ la definición análoga es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2,$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

EJEMPLO 1 En $\mathbf{R}^3$ se tiene lo siguiente:

$$(1, -2, 5) \cdot (2, 1, 3) = (1)(2) + (-2)(1) + (5)(3) = 15.$$
$$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) = (3)(1) + (2)(0) + (-1)(-2) = 5. \quad \blacklozenge$$

Como su nombre lo indica, el producto punto, o escalar, toma dos vectores y produce *un solo número real* (*no* un vector).

Los siguientes enunciados son consecuencias de la definición 3.1:

Las propiedades de los productos punto. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores cualesquiera en $\mathbf{R}^3$ (o $\mathbf{R}^2$) y $k \in \mathbf{R}$ es cualquier escalar, entonces:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ si y solo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
4. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$.

Demostración de la propiedad 1 Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces se tiene que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Es evidente que esta última expresión es no negativa, ya que es una suma de cuadrados de números reales. Además, una expresión como esa es exactamente cero cuando cada uno de los términos es cero, es decir, si y solo si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. ■

Las demostraciones de las propiedades 2, 3 y 4 se dejan al lector como ejercicio.

Hasta este momento hemos presentado el producto punto de dos vectores como una mera construcción algebraica. La que es realmente más interesante es la interpretación geométrica. Para establecerla se comienza con lo siguiente:

DEFINICIÓN 3.2 Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces la **longitud** de $\mathbf{a}$ (también llamada **norma** o **magnitud**) se denota con $\|\mathbf{a}\|$ y es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

La motivación para esta definición es evidente si dibujamos **a** como el vector de posición del punto (a_1, a_2, a_3). Entonces, la longitud de la flecha del origen a (a_1, a_2, a_3) es

$$\sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 + (a_3 - 0)^2},$$

según la fórmula de la distancia, que no es más que una extensión del teorema de Pitágoras en el plano. Como acabamos de ver, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, y se tiene que

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

o, en forma equivalente,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \tag{1}$$

Ahora estamos listos para establecer el resultado principal relacionado con la geometría del producto punto. Si **a** y **b** son dos vectores diferentes de cero en $\mathbf{R}^3$ (o en $\mathbf{R}^2$), dibujados con sus inicios en el mismo punto, sea θ, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre **a** y **b**. Si **a** o **b** es el vector cero, entonces θ es indeterminado, lo cual significa que puede ser cualquier ángulo.

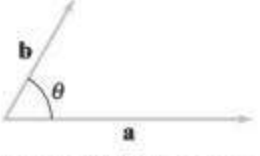


Figura 1.36 El producto punto de **a** y **b** es $\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta$.

TEOREMA 3.3 Si **a** y **b** son dos vectores cualesquiera en $\mathbf{R}^3$ (o en $\mathbf{R}^2$), entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

(Véase la figura 1.36).

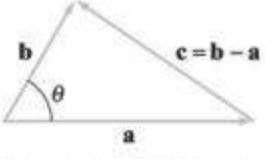


Figura 1.37 El triángulo vectorial usado en la prueba del teorema 3.3.

DEMOSTRACIÓN Si cualquiera de **a** o **b** es el vector cero, digamos que **a** lo es, entonces $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, por lo que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (0)(b_1) + (0)(b_2) + (0)(b_3) = 0.$$

Asimismo, en este caso $\|\mathbf{a}\| = 0$, por lo que se cumple la fórmula del teorema 3.3. En este caso el ángulo θ es indeterminado.

Ahora suponga que ni **a** ni **b** son el vector cero. Sea $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Entonces la ley de los cosenos se puede aplicar al triángulo cuyos lados son **a**, **b** y **c** (véase la figura 1.37) para obtener

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Así,

$$2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{c}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \tag{2}$$

a partir de la ecuación (1). Ahora usaremos las propiedades del producto punto. Como $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \tag{3}$$

según las propiedades 3 y 4 del producto punto. Si usamos la ecuación (3) para sustituir $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ en la ecuación (2), entonces

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ &= 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

mediante la propiedad 2 del producto punto. Al cancelar el factor de 2 en ambos lados se obtiene el resultado deseado. ■

Ángulos entre vectores

El teorema 3.3 se puede utilizar para encontrar el ángulo entre dos vectores **a** y **b** distintos de cero, con solo resolver para θ en la fórmula del teorema 3 se obtiene

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|}. \tag{4}$$

El uso del coseno inverso no es ambiguo, puesto que cuando definimos el ángulo entre vectores tomamos $0 \leq \theta \leq \pi$.

EJEMPLO 2 Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, entonces la fórmula (4) produce

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{k})}{\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\| \, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|} = \cos^{-1} \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})} = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}. \quad \blacklozenge$$

Si **a** y **b** son distintos de cero, entonces queda implícito el teorema 3.3

$$\cos \theta = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Se tiene que $\cos \theta = 0$ solo en el caso en que $\theta = \pi/2$. (Recuerde el lector la restricción impuesta al valor de θ). Por consiguiente, cuando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ tiene sentido decir que **a** y **b** son **perpendiculares** (u **ortogonales**). Si cualquiera de **a** o **b** es el vector cero, entonces no es posible usar la fórmula (4) y el ángulo θ es indefinido. No obstante, como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, si **a** o **b** son cero adoptaremos la convención estándar y diremos que **el vector cero es perpendicular a cualquier vector**.

EJEMPLO 3 El vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es ortogonal al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, ya que

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (1)(1) + (1)(-1) + (0)(1) = 0. \quad \blacklozenge$$

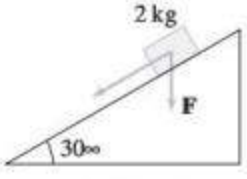


Figura 1.38 Un objeto que se desliza por una rampa. La fuerza debida a la gravedad está dirigida hacia abajo, pero la dirección del recorrido del objeto está inclinada 30° con respecto de la horizontal.

Proyecciones de los vectores

Suponga que un objeto de 2 kg se desliza por una rampa inclinada 30° con respecto de la horizontal, como se ilustra en la figura 1.38. Si se ignora la fricción, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravedad. ¿Cuál es la componente de la fuerza gravitacional en la dirección del movimiento del objeto?

Para responder a preguntas de esta clase se necesita encontrar la proyección de un vector sobre otro. La idea general es la siguiente: dados dos vectores distintos de cero **a** y **b**, imagine trazar una recta perpendicular de la punta de **b** a la recta que pasa por **a**. Entonces, la **proyección de b sobre a**, denotada como $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, es el vector representado por la flecha en la figura 1.39.

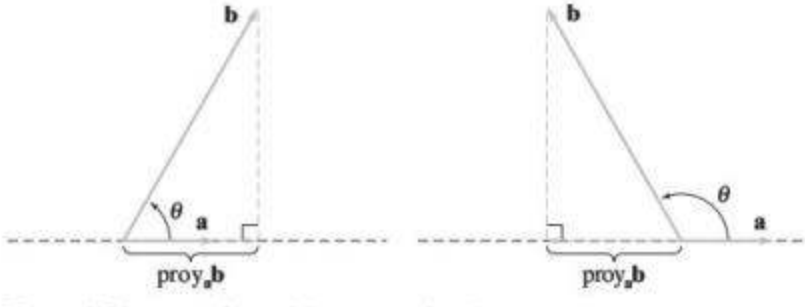


Figura 1.39 Proyecciones del vector **b** sobre el vector **a**.

Dada esta comprensión intuitiva de la proyección, encontraremos una fórmula precisa para ella. Hay que recordar que un vector es determinado por su magnitud (longitud) y dirección. Se sigue, por la definición que la dirección de $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, es la misma que la de $\mathbf{a}$, o bien, la opuesta a $\mathbf{a}$ si el ángulo θ entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es mayor que $\pi/2$. Por trigonometría tenemos que

$$|\cos\theta| = \frac{\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

(El signo de valor absoluto para cos θ es necesario en caso de que $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.) Entonces, con un poco de álgebra tenemos lo siguiente:

$$\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\| = \|\mathbf{b}\|\,|\cos\theta| = \frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,|\cos\theta|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

por medio del teorema 3.3. Así, conocemos la magnitud y dirección de $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Con el fin de obtener una fórmula sencilla para $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ se resalta lo siguiente:

PROPOSICIÓN 3.4 Sea k cualquier escalar y $\mathbf{a}$ cualquier vector. Entonces

1. $\|k\mathbf{a}\| = |k|\,\|k\mathbf{a}\|$.
2. Un **vector unitario** (es decir, un vector cuya longitud es igual a 1) en la dirección de un vector $\mathbf{a}$ distinto de cero es dado por $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$.

DEMOSTRACIÓN La parte 1 se deja al lector como ejercicio (escriba $k\mathbf{a}$ y $\|k\mathbf{a}\|$ en términos de sus componentes). Para la parte 2 debemos comprobar que la longitud de $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ es 1:

$$\left\|\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\|\mathbf{a}\| = 1,$$

según la parte 1 (puesto que $1/\|\mathbf{a}\|$ es un escalar positivo). ■

Ahora, $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ es un vector de longitud $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/\|\mathbf{a}\|$ en la "dirección $\pm\mathbf{a}$". Es decir,

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \pm\underbrace{\left(\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}\right)}_{\substack{\text{longitud de}\\ \text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}}} \times \underbrace{\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}}_{\substack{\text{vector unitario}\\ \text{en dirección de } \mathbf{a}}} = \pm\frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,|\cos\theta|}{\|\mathbf{a}\|}\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Observe que el ángulo θ gobierna el signo apropiado de $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$; es decir, cuando $0 \leq \theta < \pi/2$, el cos θ es positivo y $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ apunta en la dirección de $\mathbf{a}$, y cuando $\pi/2 < \theta \leq \pi$, el cos θ es negativo y $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ apunta en la dirección opuesta a la de $\mathbf{a}$. Por consiguiente, se puede eliminar *tanto* el signo $\pm$ *como* el valor absoluto, y encontrar que:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta}{\|\mathbf{a}\|}\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

según el teorema 3.3, por lo que

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a} \tag{5}$$

según la ecuación (1). La fórmula (5) es concisa y no es difícil recordarla.

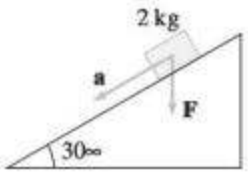


Figura 1.40 El objeto de 2 kg que se desliza por una rampa del que se habla en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Para responder la pregunta planteada al principio de esta subsección se necesita calcular $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$, donde $\mathbf{F}$ es el vector fuerza gravitacional y $\mathbf{a}$ apunta a lo largo de la rampa, como se ilustra en la figura 1.40. Se tiene el sistema de coordenadas que se aprecia en la figura 1.41. A partir de consideraciones trigonométricas, se debe tener $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ de manera que $a_1 = -\|\mathbf{a}\| \cos 30°$ y $a_2 = -\|\mathbf{a}\|$ sen 30°. Como en realidad solo estamos interesados en la *dirección* de $\mathbf{a}$, no hay inconveniente en suponer que $\mathbf{a}$ es un vector unitario.

$$\mathbf{a} = -\cos 30°\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} 30°\,\mathbf{j} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}\mathbf{j}.$$

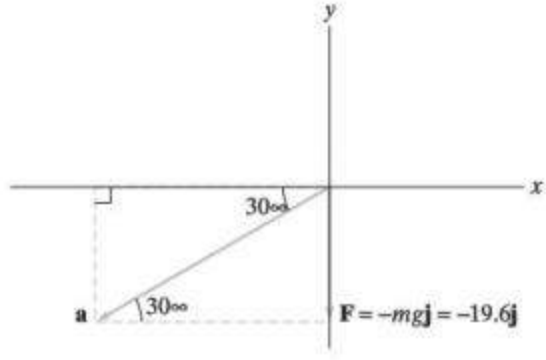


Figura 1.41 Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{F}$ del ejemplo 4 situados en un sistema de coordenadas.

Si se toma $g = 9.8\ \text{m/s}^2$, se tiene que $\mathbf{F} = -2g\mathbf{j} = -19.6\mathbf{j}$. Entonces, la fórmula (5) implica que

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{F}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\cdot(-19.6\,\mathbf{j})}{1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)$$

$$= 9.8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)$$

$$\approx -8.49\,\mathbf{i} - 4.9\,\mathbf{j},$$

y la componente de $\mathbf{F}$ en esta dirección es

$$\|\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{F}\| = \|-8.49\,\mathbf{i} - 4.9\,\mathbf{j}\| = 9.8\ \text{N}. \quad \blacklozenge$$

Los vectores unitarios, es decir, los vectores cuya longitud es igual a 1, son importantes porque incluyen la idea de dirección (ya que todos tienen la misma longitud). La parte 2 de la proposición 3.4 demuestra que todo vector $\mathbf{a}$ distinto de cero puede tener su longitud ajustada para que dé un vector unitario $\mathbf{u} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ que apunta en la misma dirección de $\mathbf{a}$. Esta operación se conoce como **normalización** del vector $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 5 Cierto fluido escurre por una superficie plana con velocidad vectorial uniforme $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario perpendicular a la superficie plana, encontremos (en términos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$) el volumen de fluido que pasa a través de un área unitaria del plano en cada unidad de tiempo (véase la figura 1.42).

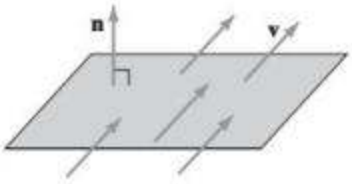


Figura 1.42 Fluido que escurre por una superficie plana.

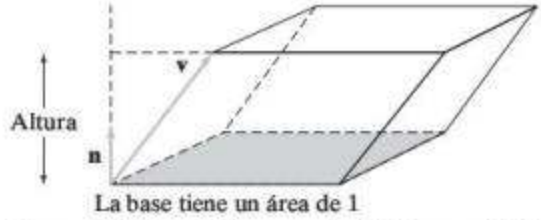


Figura 1.43 Después de una unidad de tiempo, el fluido que pase a través de un cuadrado habrá llenado la caja.

En primer lugar imagine que ha transcurrido una unidad de tiempo. Entonces, al pasar por un área unitaria del plano (digamos por un cuadrado unitario), el fluido habrá llenado una "caja" como la que se ilustra en la figura 1.43. La caja se puede representar con un paralelepípedo (el análogo tridimensional de un paralelogramo). El volumen que buscamos es el de este paralelepípedo, y es

$$\text{Volumen} = (\text{área de la base})(\text{altura}).$$

El área de la base es, por construcción, igual a 1 unidad. La altura es dada por $\|\text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{v}\|$. De la fórmula (5),

$$\text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{n} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n},$$

como $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \|\mathbf{n}\|^2 = 1$. Entonces,

$$\|\text{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}\| = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|\,\|\mathbf{n}\| = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|,$$

según la parte 1 de la proposición 3.4. ◆

Demostraciones con vectores

Concluiremos esta sección con dos ilustraciones de lo apropiados que son los vectores para obtener demostraciones de propiedades geométricas.

EJEMPLO 6 En un triángulo arbitrario demuestre que el segmento rectilíneo que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de la longitud de este (véase la figura 1.44). En otras palabras, si M_1 es el punto medio del lado $\overline{AB}$ y M_2 es el punto medio del lado $\overline{AC}$, queremos demostrar que $\overline{M_1M_2}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y tiene la mitad de su longitud.

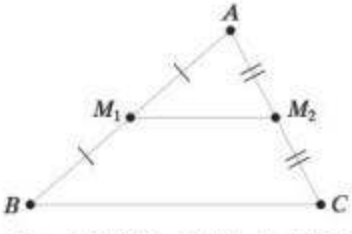


Figura 1.44 En el triángulo ABC, $\overline{M_1M_2}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y tiene la mitad de su longitud.

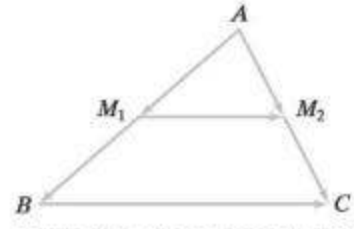


Figura 1.45 Versión vectorial del triángulo ABC del ejemplo 6.

Para la demostración vectorial usaremos el diagrama de la figura 1.45, que es una versión ligeramente modificada de la figura 1.44. Las condiciones del punto medio se traducen a los enunciados siguientes acerca de vectores:

$$\overrightarrow{AM_1} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AM_2} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Ahora,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Pero $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ es precisamente lo que deseamos demostrar: Decir que $\overrightarrow{M_1M_2}$ es un escalar que multiplica a $\overrightarrow{BC}$ significa que los dos vectores son paralelos. Además, de la parte 1 de la proposición 3.4 se tiene que

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\| = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|,$$

por lo que se cumple también la condición de la longitud. ◆

EJEMPLO 7 Demuestre que, como sugiere la figura 1.46, todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

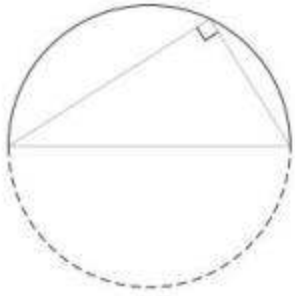


Figura 1.46 Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

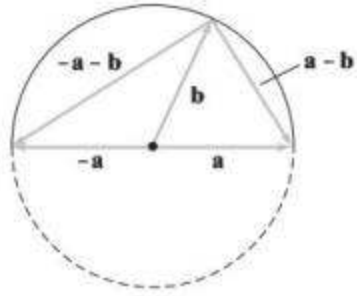


Figura 1.47 **a** y **b** son "radio vectores".

Para demostrar esto utilizaremos la figura 1.47, donde **a** y **b** son "radio vectores" con sus inicios en el centro del círculo. Solo necesitamos demostrar que $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (un vector a lo largo de un rayo del ángulo en cuestión) es perpendicular a $-\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (un vector a lo largo del otro rayo). En otras palabras, queremos demostrar que

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0.$$

Tenemos que

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (-1)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

según la propiedad 4 de los productos punto,

$$\begin{aligned} &= (-1)((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}) \\ &= (-1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \\ &= (-1)(\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2), \end{aligned}$$

según las propiedades 2 y 4,

$$= 0,$$

ya que tanto **a** como **b** son radio vectores (y, por lo tanto, tienen la misma longitud, que es igual al radio del círculo). ◆

Las demostraciones vectoriales de los ejemplos 6 y 7 son elegantes y en ocasiones permiten escribir las pruebas de manera más corta y directa que aquellas que se hacían con los métodos de geometría del bachillerato.

1.3 Ejercicios

Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ *para los vectores listados en los ejercicios 1 a 6.*

1. $\mathbf{a} = (1, 5), \mathbf{b} = (-2, 3)$
2. $\mathbf{a} = (4, -1), \mathbf{b} = (\frac{1}{2}, 2)$
3. $\mathbf{a} = (-1, 0, 7), \mathbf{b} = (2, 4, -6)$
4. $\mathbf{a} = (2, 1, 0), \mathbf{b} = (1, -2, 3)$
5. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = -3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 7 a 11 determine el ángulo entre cada pareja de vectores.

7. $\mathbf{a} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$
8. $\mathbf{a} = (-1, 2), \mathbf{b} = (3, 1)$
9. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
11. $\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (3, -6, -5)$

En los ejercicios 12 a 16 calcule $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

12. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
13. $\mathbf{a} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}, \ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
15. $\mathbf{a} = -3\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
16. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$
17. Dé un vector unitario que apunte en la misma dirección que el vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
18. Proporcione un vector unitario que apunte en dirección opuesta del vector $-\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$.
19. Dé un vector de longitud igual a 3 que apunte en la misma dirección que el vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
20. Encuentre tres vectores no paralelos que sean perpendiculares a $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
21. ¿Siempre se cumple que $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$? Si es así, ¿en qué condiciones lo hace?
22. Demuestre las propiedades 2, 3 y 4 de los productos punto.
23. Demuestre la parte 1 de la proposición 3.4.
24. Suponga que una fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ actúa sobre un objeto que se mueve en forma paralela al vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Descomponga $\mathbf{F}$ en una suma de vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, donde $\mathbf{F}_1$ apunta a lo largo de la dirección del movimiento y $\mathbf{F}_2$ es perpendicular a la dirección de este. (Sugerencia: un diagrama resultará de ayuda).
25. En física, cuando una fuerza constante actúa sobre un objeto a medida que este se desplaza, el **trabajo** hecho por la fuerza es igual al producto de la longitud del desplazamiento y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. La figura 1.48 ilustra un objeto que actúa sometido a una fuerza constante $\mathbf{F}$, que lo desplaza del punto P al punto Q. Sea que θ denote el ángulo entre $\mathbf{F}$ y la dirección del desplazamiento.
    a) Demuestre que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es determinado por la fórmula $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.
    b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza (constante) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ cuando se mueve una partícula del punto $(1, -1, 1)$ al punto $(2, 0, -1)$.

Componente de $\mathbf{F}$ en la dirección del desplazamiento

Figura 1.48 Una fuerza constante $\mathbf{F}$ desplaza al objeto de P a Q (véase el ejercicio 25).

26. Un refrigerador es arrastrado 12 pies sobre una superficie plana por medio de una cuerda a lo largo de la cual se aplican 60 libras de fuerza dirigida. ¿Cuánto trabajo se efectúa si la cuerda forma un ángulo de 20° con respecto de la horizontal?
27. ¿Cuánto trabajo se hace al empujar un carrito cargado con 500 libras de plátanos una distancia de 40 pies por una rampa inclinada 30° con respecto de la horizontal?

Sea $\mathbf{a}$ *un vector distinto de cero en* $\mathbf{R}^3$. *Los* ***cosenos directores*** *de* $\mathbf{a}$ *son los tres números* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *determinados por los ángulos* α, β, γ *entre* $\mathbf{a}$ *y los ejes x-, y- y z- positivos, respectivamente. En los ejercicios 28 y 29 encuentre los cosenos directores de los vectores dados.*

28. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
29. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$
30. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ son las expresiones para los cosenos directores de $\mathbf{a}$ en términos de las componentes de $\mathbf{a}$.
31. Si A, B y C denotan los vértices de un triángulo, y sea $0 < r < 1$. Si P_1 es el punto sobre $\overline{AB}$ localizado r veces la distancia de A a B, y P_2 es el punto sobre $\overline{AC}$ ubicado r veces la distancia de A a C, utilice vectores para demostrar que $\overline{P_1P_2}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y tiene r veces la longitud de $\overline{BC}$. (Este resultado generaliza el del ejemplo 6 de esta sección).

32. Sean A, B, C y D cuatro puntos en $\mathbf{R}^3$ tales que no hay tres de ellos ubicados sobre una recta. Entonces $ABCD$ es un cuadrilátero, aunque no necesariamente esté en un plano. Denote los puntos medios de los cuatro lados $ABCD$ con M_1, M_2, M_3 y M_4. Use vectores para demostrar que, sorprendentemente, $M_1M_2M_3M_4$ siempre es un paralelogramo.

33. Utilice vectores para demostrar que las diagonales de un paralelogramo tienen la misma longitud si y solo si el paralelogramo es un rectángulo. (Sugerencia: sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores a lo largo de dos lados del paralelogramo. Exprese los vectores que vayan por las diagonales en términos de $\mathbf{a}$ y de $\mathbf{b}$. Véase la figura 1.49).

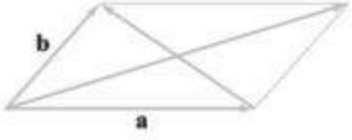


Figura 1.49 Diagrama para el ejercicio 33.

34. Utilice vectores para demostrar que las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares si y solo si el paralelogramo es un rombo. (Nota: un **rombo** es un paralelogramo cuyos cuatro lados tienen la misma longitud).

35. Este problema concierne a tres círculos del mismo radio r que se intersecan en un punto único O (véase la figura 1.50).

a) Sean W_1, W_2 y W_3 los centros de los tres círculos, y sea $\mathbf{w}_i = \overrightarrow{OW_i}$ para $i = 1, 2, 3$. De manera similar, A, B y C denotarán los puntos de intersección restantes de los círculos, y se hará que $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Mediante la numeración de los centros de los círculos en forma apropiada escriba $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en términos de $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$.

b) Demuestre que A, B y C están sobre un círculo del mismo radio r que los tres círculos dados. (Sugerencia: el centro del círculo está en el punto P, donde $\overrightarrow{OB} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$).

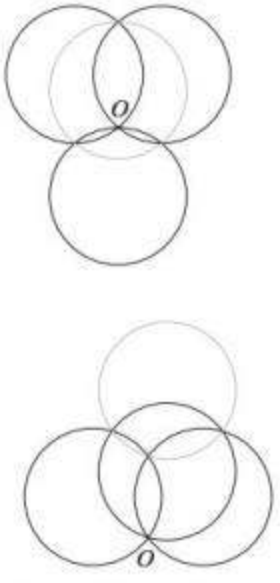


Figura 1.50 Dos ejemplos de tres círculos de igual radio que se intersecan en un punto único O (véase el ejercicio 35).

c) Demuestre que O es el ortocentro del triángulo ABC (el **ortocentro** de un triángulo es el punto de intersección común de las alturas perpendiculares a los lados).

36. *a*) Demuestre que los vectores $\|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b}$ y $\|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b}$ son ortogonales.

b) Demuestre que $\|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b}$ biseca al ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

1.4 El producto cruz

El producto cruz de dos vectores en $\mathbf{R}^3$ es un producto "honesto" en el sentido que toma dos vectores y produce un tercero. Sin embargo, el producto cruz tiene algunas propiedades curiosas (la menor de ellas es que *no es posible* definirlo para vectores en $\mathbf{R}^2$ sin incrustarlas primero en $\mathbf{R}^3$ de alguna manera) que lo hacen menos "natural" de lo que parece a primera vista.

Cuando definimos los conceptos de suma de vectores, multiplicación por un escalar y producto punto, lo hicimos en forma algebraica (es decir, con una fórmula que incluía las componentes del vector) y después vimos el significado geométrico de dichas definiciones. Con el producto cruz haremos lo contrario, comenzaremos por definirlo *geométricamente* y después deduciremos su fórmula algebraica. Esta

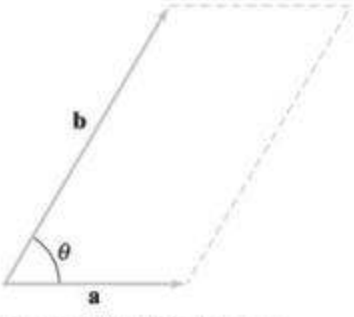


Figura 1.51 El área de este paralelogramo es $\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$ sen θ.

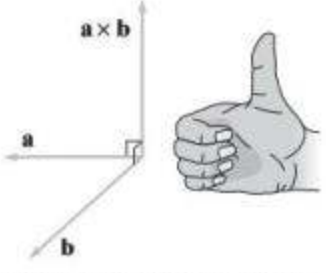


Figura 1.52 Regla de la mano derecha para determinar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Figura 1.53 $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

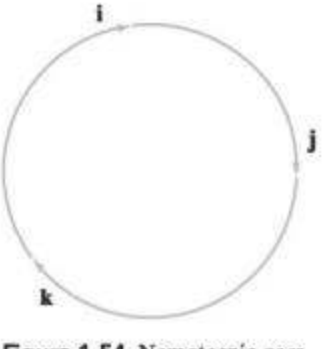


Figura 1.54 Nemotecnia para encontrar el producto cruz de los vectores unitarios básicos.

técnica es más conveniente, ya que la formulación con coordenadas es muy complicada (aunque encontraremos la manera de organizarla para que sea más fácil de recordar).

El producto cruz de dos vectores en $\mathbf{R}^3$

DEFINICIÓN 4.1 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$ (*no* en $\mathbf{R}^2$). El **producto cruz** (o **producto vectorial**) de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se denota $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, y es el vector cuya longitud y dirección son dadas como sigue:

- La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, o es cero si $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b}$ o si $\mathbf{b}$ es el vector $\mathbf{0}$. De manera alternativa, se cumple la siguiente fórmula:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta,$$

  donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (véase la figura 1.51).

- La dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es tal que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$ (cuando $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son distintos de cero) y se toma de manera que la tripleta ordenada $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ es un conjunto de vectores que siguen la regla de la mano derecha, como se ilustra en la figura 1.52 (si $\mathbf{a}$ o $\mathbf{b}$ son $\mathbf{0}$, o si $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, por la condición mencionada sobre la longitud).

Decir que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ siguen la regla de la mano derecha, significa que si el lector cierra los dedos de su mano derecha *de* $\mathbf{a}$ *hacia* $\mathbf{b}$, entonces el pulgar apuntará en dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

EJEMPLO 1 Calculemos el producto cruz de los vectores de la base estándar para $\mathbf{R}^3$. En primer lugar consideremos $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ según se ilustra en la figura 1.53. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ determinan un cuadrado de área unitaria. Entonces, $\|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = 1$. Cualquier vector perpendicular *tanto* a $\mathbf{i}$ *como* a $\mathbf{j}$ debe ser perpendicular al plano en el que se encuentran $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Por consiguiente, $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ debe apuntar en la dirección de $\pm\mathbf{k}$. La "regla de la mano derecha" implica que $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ debe apuntar en la dirección positiva de $\mathbf{k}$. Como $\|\mathbf{k}\| = 1$, se concluye que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. El mismo argumento establece que $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, y que $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Para recordar estas ecuaciones básicas el lector podría dibujar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en un círculo, como se aprecia en la figura 1.54. Entonces, las relaciones

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{1}$$

pueden leerse a partir del círculo comenzando por cualquier vector y después avanzando en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. ◆

Propiedades del producto cruz. Fórmula de las coordenadas

El ejemplo 1 demuestra que el cálculo de productos cruz a partir de la definición geométrica no es del todo rutinario. Lo que en realidad necesitamos es una fórmula basada en las coordenadas, análoga a la del producto punto o a la de las proyecciones de los vectores, que no son difíciles de obtener.

A partir de la definición 4.1 se puede establecer lo siguiente:

Propiedades del producto cruz. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tres vectores cualesquiera en $\mathbf{R}^3$, y sea $k \in \mathbf{R}$ cualquier escalar. Entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (anticonmutatividad);
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributividad);
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (distributividad);
4. $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$.

Al final de esta sección se presentan las demostraciones de estas propiedades, aunque el lector debiera pensar en este momento en las razones por las que se cumplen. Es importante resaltar que estas propiedades son enteramente razonables, son las que se desearía que tuviera un producto. Sin embargo, debe quedar claro que el producto cruz *no* satisface otras propiedades que también se podrían considerar muy razonables. En particular, dado que la propiedad 1 se mantiene, vemos que, en general, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (es decir, el producto cruz *no* es conmutativo). En consecuencia, *se debe tener mucho cuidado en el orden en que se escriban los productos cruz.* Otra propiedad que *no* tiene el producto cruz es la asociatividad. Esto en general significa que,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c},$$

Por ejemplo, sea que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{j}$. Entonces

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j},$$

a partir de las propiedades 1 y 4, pero $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \neq -\mathbf{j}$ (la ecuación $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ se cumple porque, por supuesto, $\mathbf{i}$ es paralelo a $\mathbf{i}$). Asegúrese de *no* tratar de usar la asociatividad cuando resuelva problemas.

Ahora se tienen las herramientas para producir una fórmula basada en las coordenadas para el producto cruz. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times b_1\mathbf{i} + (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times b_2\mathbf{j} \\ &\quad + (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times b_3\mathbf{k},\end{aligned}$$

según la propiedad 2,

$$\begin{aligned}&= a_1b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} \\ &\quad + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_3\mathbf{k} \times \mathbf{k}, \qquad (2)\end{aligned}$$

según las propiedades 3 y 4. Estos nueve términos parecen impresionantes a primera vista, pero se simplifican por medio de la fórmula (1), la anticonmutatividad y el hecho de que $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ (¿a qué se debe esto?). Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -a_2b_1\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_3b_2\mathbf{i} - a_1b_3\mathbf{j} + a_2b_3\mathbf{i} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \qquad (2)\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 La fórmula (2) da

$$\begin{aligned}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) &= (3 \cdot 2 - (-2) \cdot 0)\mathbf{i} + (-2 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\mathbf{j} \\ &\quad + (1 \cdot 0 - 3 \cdot 2)\mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.\end{aligned}$$

◆

La fórmula (2) es más complicada que las de todas las demás operaciones aritméticas con vectores estudiadas hasta el momento. Además, es más difícil de recordar. Por fortuna hay una manera más elegante de entenderla, como se verá a continuación.

Matrices y determinantes. Una introducción

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números. Algunos ejemplos de matrices son los siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si una matriz tiene m renglones y n columnas decimos que es de orden "$m \times n$" (se lee "m por n"). De modo que las matrices anteriores son, respectivamente, de 2×3, de 3×2 y de 4×4. Hasta cierto punto las matrices se comportan en cuanto a su álgebra como los vectores. En la sección 1.6 se estudia el álgebra elemental de las matrices. Por ahora lo que más nos interesa es el concepto de **determinante**, que es un número real asociado con una matriz de $n \times n$ (cuadrada, ya que no existe el determinante de una matriz que no sea cuadrada). En realidad, para el propósito de entender el producto cruz solo necesitamos estudiar determinantes de 2×2 y de 3×3.

DEFINICIÓN 4.2 Sea A una matriz de 2×2 o de 3×3. Entonces, el **determinante** de A se denota con $\det A$ o con $|A|$, y es el número real que se calcula con los elementos individuales de A como sigue:

- Caso de 2×2:

  Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

- Caso de 3×3

  Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

  en términos de determinantes de 2×2.

Quizá la manera más fácil de recordar y calcular determinantes de 2×2 y de 3×3 (pero **no** de un orden mayor) es por medio del "enfoque diagonal". Trazamos (o imaginamos) diagonales que pasan por los elementos de la matriz. El determinante es la suma de los productos de los elementos que están en la misma diagonal,

donde se insertan signos negativos antes de los productos que están surgiendo de las diagonales que van de abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha:

- caso de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

y

$$|A| = ad - bc.$$

- caso de 3×3 (para que el método funcione es necesario repetir las dos primeras columnas)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Se escribe

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} - & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

Entonces,

$$|A| = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

PRECAUCIÓN IMPORTANTE Este truco de nemotecnia *no* se generaliza para determinantes de orden superior a 3×3.

Ahora estableceremos la relación entre los determinantes y el producto cruz.

Hecho fundamental. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Los determinantes surgen con solo reescribir la fórmula (2). Observe que el determinante de 3×3 en la fórmula (3) necesita interpretarse utilizando los determinantes de 2×2 que aparecen en la fórmula (3). (El determinante de 3×3 en ocasiones se denomina "determinante simbólico").

EJEMPLO 3

$$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

También se puede calcular la determinante 3×3 como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k} - 2\mathbf{k} - \mathbf{i} - 3\mathbf{j} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

(− − − / + + +)

◆

Áreas y volúmenes

Los productos cruz se utilizan fácilmente para calcular áreas y volúmenes de ciertos objetos. En los siguientes dos ejemplos se ilustran las ideas involucradas.

EJEMPLO 4 Usaremos vectores para calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A(3, 1)$, $B(2, -1)$ y $C(0, 2)$, como se ilustra en la figura 1.55.

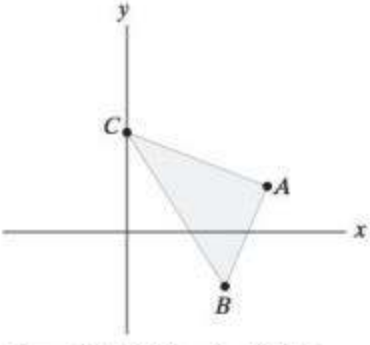


Figura 1.55 Triángulo ABC del ejemplo 4.

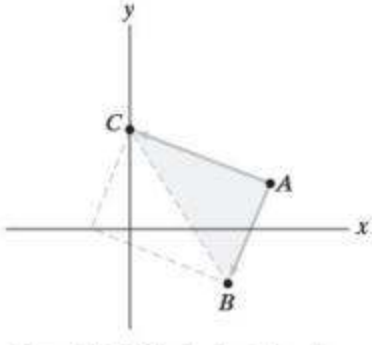


Figura 1.56 Cualquier triángulo puede considerarse como la mitad de un paralelogramo.

El truco es reconocer que cualquier triángulo puede tomarse como la mitad de un paralelogramo (véase la figura 1.56) y que el área de un paralelogramo se obtiene con el producto cruz. En otras palabras, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es un vector cuya longitud mide el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, por lo que

$$\text{El área de } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Para usar el producto cruz se debe considerar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son vectores en $\mathbf{R}^3$. Esto es directo: tan solo se considera que las componentes $\mathbf{k}$ son cero. Entonces,

$$\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 0\mathbf{k},$$

y

$$\overrightarrow{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7\mathbf{k}.$$

De donde,

$$\text{Área de } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\|-7\mathbf{k}\| = \tfrac{7}{2}.$$

◆

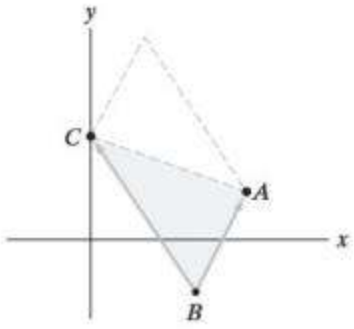


Figura 1.57 El área de ΔABC es 7/2.

No se comete ningún error si se usa A como el vértice común. También se podría haber empleado B o C, como se aprecia en la figura 1.57. Entonces,

$$\text{Área de } \Delta ABC = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\| = \tfrac{1}{2}\|(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\| = \tfrac{1}{2}\|7\mathbf{k}\| = \tfrac{7}{2}.$$

EJEMPLO 5 Encuentre la fórmula para obtener el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** (véase la figura 1.58).

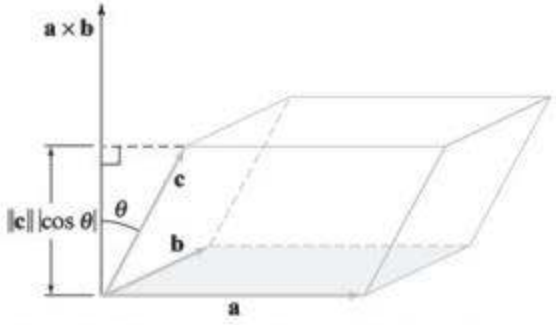


Figura 1.58 Paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c**.

Como se explicó en la sección 1.3, el volumen de un paralelepípedo es igual al producto del área de la base por la altura. En la figura 1.58 la base es el paralelogramo determinado por **a** y **b**. Por consiguiente, su área es $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a este paralelogramo; la altura del paralelepípedo es $\|\mathbf{c}\|\,|\cos\theta|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y **c** (el valor absoluto se necesita en el caso en que $\theta > \pi/2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Volumen del paralelepípedo} &= (\text{área de la base})(\text{altura})\\ &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\cos\theta|\\ &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.\end{aligned}$$

(La aparición del término cos θ debe avisar al lector que en algún lado intervienen productos punto).

Por ejemplo, el paralelepípedo determinado por los vectores

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

tiene un volumen igual a

$$\begin{aligned}|((\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \times (-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j})) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k})| &= |\,22\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k})|\\ &= |\,22(6)|\\ &= 132.\end{aligned}$$

◆

El número real $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ que aparece en el ejemplo 5 se conoce como el **triple producto escalar** de los vectores **a**, **b** y **c**. Como $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ representa el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**, se deduce de inmediato que

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}| = |(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}|.$$

De hecho, si tiene presente la regla de la mano derecha, el lector llegará al convencimiento de que los signos de valor absoluto no son necesarios; es decir,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \tag{4}$$

Este es un buen ejemplo de la manera en que la significancia geométrica de una cantidad puede aportar una demostración muy breve de una propiedad algebraica que la cantidad debe satisfacer (se invita al lector a demostrarla escribiendo las expresiones en términos de las componentes para apreciar el valor del enfoque geométrico).

Dejamos como ejercicio para el lector la comprobación de la siguiente bella (y útil) fórmula para calcular triples productos escalares:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

donde $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

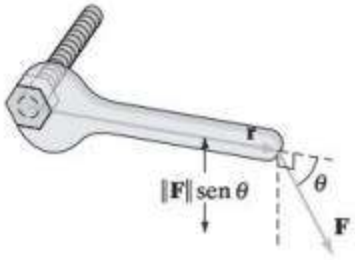


Figura 1.59 Extracción de una tuerca con una llave. El par que actúa sobre la tuerca es el vector $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Par

Suponga que utiliza una llave para extraer una tuerca. Lo que pasa es lo siguiente: se aplica cierta fuerza al final del mango de la llave, lo más lejos posible de la tuerca, y eso hace que la tuerca gire en dirección perpendicular al plano determinado por el mango y la dirección de la fuerza aplicada (suponiendo que existe dicho plano). Para medir con exactitud cuánto se mueve la tuerca se necesita el concepto de **par** (o fuerza giratoria).

En particular, si $\mathbf{F}$ denota la fuerza que se aplica a la llave, se tiene que

$$\text{Cantidad de par} = (\text{longitud de la llave})(\text{componente de } \mathbf{F} \perp \text{ a la llave}).$$

Sea $\mathbf{r}$ el vector que va del centro de la punta de la tuerca al final del mango de la llave. Entonces

$$\text{Cantidad de par} = \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{F}\| \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ (véase la figura 1.59). Es decir, la cantidad de par es $\|\mathbf{r} \times \mathbf{F}\|$, y es fácil comprobar que la dirección de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es la misma que la dirección en que se mueve la tuerca (suponiendo que la tuerca tiene rosca derecha). Entonces, es natural *definir* el **vector T del par** como $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. El vector del par $\mathbf{T}$ es una manera concisa de conceptualizar la física de esta situación.

Observe que si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\mathbf{r}$, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Esto se corresponde correctamente con el hecho de que, si se trata de empujar o jalar la llave, la tuerca no girará.

Figura 1.60 Giro de una papa alrededor de un eje.

Rotación de un cuerpo rígido

En la figura 1.60 se ilustra el giro de un objeto (un cuerpo rígido) alrededor de un eje. ¿Cuál es la relación entre la velocidad (lineal) de un punto del objeto y la velocidad rotacional? Los vectores dan una buena respuesta.

En primer lugar se necesita definir un vector $\boldsymbol{\omega}$, el vector de la velocidad angular de la rotación. Este vector apunta a lo largo del eje de rotación y su dirección es determinada por la regla de la mano derecha. La magnitud de $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular (medida en radianes por unidad de tiempo) a la que gira el objeto. Para fines de este análisis suponga que la velocidad angular es constante. A continuación se fija un punto O (el origen) sobre el eje de rotación, y $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ es el vector de posición de un punto P del cuerpo, medido como función del tiempo, como se ilustra en la figura 1.61. La velocidad $\mathbf{v}$ de P se define por medio de

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

Figura 1.61 Velocidad angular del vector $\boldsymbol{\omega}$.

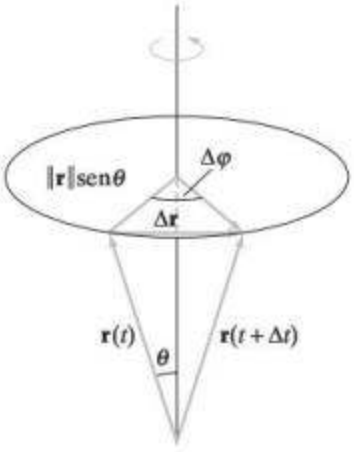


Figura 1.62 Giro de un cuerpo rígido.

donde $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ (es decir, el cambio vectorial de la posición entre el momento t y el momento $t + \Delta t$). Nuestro objetivo es obtener una relación entre $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\omega}$.

A medida que el cuerpo gira, el punto P (en la punta del vector $\mathbf{r}$) se mueve en un círculo cuyo plano es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ (véase la figura 1.62, que ilustra el movimiento de dicho punto del cuerpo). El radio de este círculo es $\|\mathbf{r}(t)\| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}$. Tanto $\|\mathbf{r}(t)\|$ como θ deben ser constantes para esta rotación (sin embargo, la dirección de $\mathbf{r}(t)$ puede cambiar con t). Si $\Delta t \approx 0$, entonces $\|\Delta\mathbf{r}\|$ es aproximadamente la longitud del arco del círculo descrito por P entre t y $t + \Delta t$. Es decir,

$$\begin{aligned}\|\Delta\mathbf{r}\| &\approx (\text{radio del círculo})\,(\text{ángulo extendido por todo } P)\\ &= (\|\mathbf{r}\| \operatorname{sen}\theta)(\Delta\phi)\end{aligned}$$

de los comentarios precedentes. Por consiguiente,

$$\left\|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right\| \approx \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen}\theta \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Ahora, sea $\Delta t \to 0$. Entonces $\Delta\mathbf{r}/\Delta t \to \mathbf{v}$ y $\Delta\varphi/\Delta t \to \|\boldsymbol{\omega}\|$ según la definición del vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y se tiene que

$$\|\mathbf{v}\| = \|\boldsymbol{\omega}\|\,\|\mathbf{r}\| \operatorname{sen}\theta = \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\|. \tag{5}$$

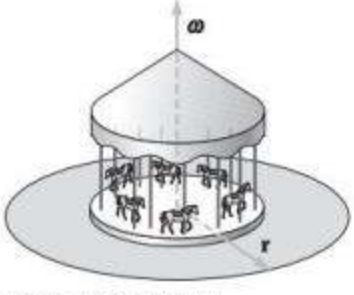


Figura 1.63 Carrusel.

No es difícil ver de manera intuitiva que $\mathbf{v}$ debe ser perpendicular tanto a $\boldsymbol{\omega}$ como a $\mathbf{r}$. Un poco de reflexión sobre la regla de la mano derecha permitirá establecer la ecuación vectorial,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{6}$$

Si se aplica la fórmula (5) a un carrusel, se dice que la velocidad de un punto situado en el borde de la rueda es igual al producto del radio de esta por la velocidad angular (en este caso θ es $\pi/2$). Entonces, si la velocidad de rotación se mantiene constante, un punto en el borde de una rueda grande irá más rápido que otro en el borde de una pequeña. En el caso de un carrusel, este resultado dice que si se desea un viaje más emocionante hay que sentarse en uno de los caballitos exteriores (véase la figura 1.63).

Resumen de productos que involucran vectores

A continuación se presenta la información básica acerca de la multiplicación de vectores por un escalar, el producto punto y el producto cruz:

Multiplicación por un escalar: $k\mathbf{a}$

El resultado es un vector en la dirección de $\mathbf{a}$.
La magnitud es $\|k\mathbf{a}\| = |k|\,\|\mathbf{a}\|$.
Es cero si $k = 0$ o $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
Es conmutativo: $k\mathbf{a} = \mathbf{a}k$.
Es asociativo: $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$.
Es distributivo: $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$; $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$.

Producto punto: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

El resultado es un escalar.
Su magnitud es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta$; θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
Su magnitud es máxima si $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.
Es igual a cero si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Es conmutativo: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.
La asociatividad es irrelevante, ya que $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ carece de sentido.
Es distributivo: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
Si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$.

Producto cruz: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

El resultado es un vector perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.
Su magnitud es $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta$; θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
Su magnitud es máxima si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
Es igual a cero si $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Es anticonmutativo: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
No es asociativo: en general, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
Es distributivo: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ y
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
Si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, entonces $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$.

Adenda. Demostración de las propiedades del producto cruz

Demostración de la propiedad 1 Para demostrar la anticonmutatividad se usa la regla de la mano derecha. Como

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta,$$

es obvio que se tiene $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} \times \mathbf{a}\|$. Entonces, solo se requiere comprender la relación entre la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y la de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Para determinar la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ imagine el lector que curva los dedos de su mano derecha de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$. Entonces, su pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Si en vez de curvar sus dedos de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$, lo hace de $\mathbf{b}$ hacia $\mathbf{a}$, su pulgar apuntará en la dirección opuesta. Esta es la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, de modo que concluimos que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (véase la figura 1.64). ■

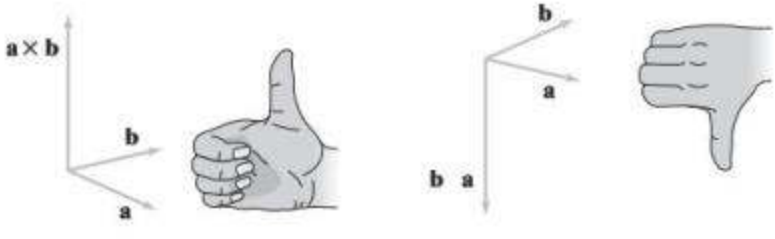


Figura 1.64 La regla de la mano derecha indica por qué $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Demostración de la propiedad 2 Comience por advertir el siguiente hecho general:

PROPOSICIÓN 4.3 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores en $\mathbf{R}^3$. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$ para todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^3$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Para establecer la proposición 4.3 se escribe $\mathbf{a}$ como $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}$ como $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{x}$ se iguala a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. La proposición 4.3 es válida para vectores en $\mathbf{R}^2$ así como para vectores en $\mathbf{R}^3$.

Con el fin de demostrar la ley distributiva para los productos cruz (propiedad 2) demostramos que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}.$$

Mediante la proposición 4.3 se infiere la propiedad 2.

De las ecuaciones en (4),

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})) \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c},\end{aligned}$$

a partir de la ley distributiva para productos punto,

$$\begin{aligned}&= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x},\end{aligned}$$

utilizando de nuevo (4) y la ley distributiva para productos punto. ■

Demostración de la propiedad 3 La propiedad 3 se infiere de las propiedades 1 y 2. Se dejan los detalles como ejercicio para el lector. ■

Demostración de la propiedad 4 La segunda igualdad de la propiedad 4 se infiere de la primera igualdad y de la propiedad 1:

$$\begin{aligned}k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= -k(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) && \text{según la propiedad 1} \\ &= -(k\mathbf{b}) \times \mathbf{a} && \text{según la primera igualdad de la propiedad 4} \\ &= \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) && \text{según la propiedad 1.}\end{aligned}$$

En consecuencia, solo se necesita demostrar la primera igualdad.

Ya sea que $\mathbf{a}$ sea el vector cero o lo sea $\mathbf{b}$, o si $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b}$, entonces es evidente que se cumple la primera igualdad. De otro modo, dividimos tres casos: (1) $k = 0$, (2) $k > 0$ y (3) $k < 0$. Si $k = 0$, entonces, tanto $k\mathbf{a}$ como $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ son iguales al vector cero y se llega al resultado deseado. Si $k > 0$, la dirección de $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ es la misma que la de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, que también es la misma que $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Además, el ángulo entre $k\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el mismo que entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Si llamamos θ a este ángulo, observamos que

$$\begin{aligned}\|(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b}\| &= \|k\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta \\ &= k\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta && \text{según la parte 1 de la proposición 3.4} \\ &= k\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| && \text{según la definición 4.1} \\ &= \|k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\| && \text{según la parte 1 de la proposición 3.4.}\end{aligned}$$

Se concluye que en este caso $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

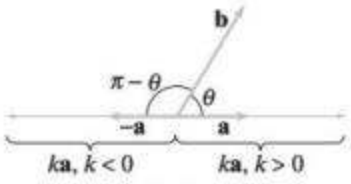


Figura 1.65 Si el ángulo entre **a** y **b** es θ, entonces el ángulo entre $k\mathbf{a}$ y **b** es θ (si $k > 0$) o $\pi - \theta$ (si $k < 0$).

Si $k < 0$, entonces la dirección de $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ es la misma que la de $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, que se ve es la misma que la de $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, y por ello la misma que la de $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. El ángulo entre $k\mathbf{a}$ y **b** es, entonces, $\pi - \theta$, donde θ es el ángulo entre **a** y **b** (véase la figura 1.65). Así,

$$\|(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b}\| = \|k\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}(\pi - \theta) = |k| \, \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta = \|k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\|.$$

Entonces, de nuevo se infiere que $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. ■

1.4 Ejercicios

Evalúe los determinantes que aparecen en los ejercicios 1 a 4.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 5 a 7 calcule los productos cruz que se indican utilizando las fórmulas (2) y (3).

5. $(1, 3, -2) \times (-1, 5, 7)$

6. $(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

7. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$

8. Utilice las propiedades 1 y 2 para demostrar la propiedad 3 de los productos cruz.

9. Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, ¿cuál es $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$?

10. Calcule el área del paralelogramo que tiene como vértices (1, 1), (3, 2), (1, 3) y (−1, 2).

11. Calcule el área del paralelogramo con vértices en (1, 2, 3), (4, −2, 1), (−3, 1, 0) y (0, −3, −2).

12. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular tanto a $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ como a $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

13. Si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, ¿qué se puede decir sobre la relación geométrica entre **a**, **b** y **c**?

Calcule el área de los triángulos descritos en los ejercicios 14 a 17.

14. El triángulo determinado por los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

15. El triángulo determinado por los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

16. El triángulo que tiene vértices en (1, 1), (−1, 2) y (−2, −1).

17. El triángulo cuyos vértices están en (1, 0, 1), (0, 2, 3) y (−1, 5, −2).

18. Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

19. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con vértices en (3, 0, −1), (4, 2, −1), (−1, 1, 0), (3, 1, 5), (0, 3, 0), (4, 3, 5), (−1, 2, 6) y (0, 4, 6)?

20. Verifique que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

21. Utilice el ejercicio 20 para demostrar que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

22. Use la geometría para demostrar que $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})|$.

23. *a*) Demuestre que el área del triángulo cuyos vértices están en $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ es dada por el valor absoluto de la expresión

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

b) Use el inciso *a*) para calcular el área del triángulo con vértices en los puntos (1, 2), (2, 3) y (−4, −4).

24. Suponga que **a**, **b** y **c** son vectores no coplanares en $\mathbf{R}^3$, de modo que determinan un tetraedro como el que se ilustra en la figura 1.66.

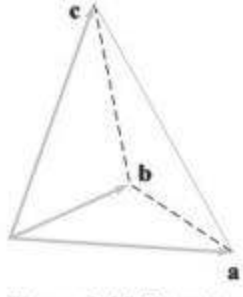


Figura 1.66 Tetraedro del ejercicio 24.

Dé una fórmula para el área de la superficie del tetraedro en términos de **a**, **b** y **c**. (Nota: observe que es posible encontrar más de una fórmula).

25. Suponga que se le dan vectores distintos de cero **a**, **b** y **c** en $\mathbf{R}^3$. Use los productos punto y cruz para dar expresiones de vectores que satisfagan las siguientes descripciones geométricas:

a) Un vector ortogonal a **a** y **b**.

b) Un vector de longitud 2, ortogonal a **a** y **b**.

c) La proyección del vector **b** sobre **a**.

d) Un vector con la longitud de **b** y la dirección de **a**.

e) Un vector ortogonal a **a** y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

f) Un vector en el plano determinado por **a** y **b**, y perpendicular a **c**.

26. Suponga que **a**, **b**, **c** y **d** son vectores en $\mathbf{R}^3$. Indique cuáles de las siguientes expresiones son vectores, cuáles escalares y cuáles carecen de sentido (es decir, que no son ni vector ni escalar).

a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ *b*) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

c) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ *d*) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ *f*) $\mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}]$

g) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ *h*) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Los ejercicios 27 a 32 conciernen a varias identidades para los vectores **a**, **b**, **c** *y* **d** *en* $\mathbf{R}^3$. *Cada uno de ellos se puede comprobar con lápiz y papel escribiendo los vectores en términos de sus componentes y empleando la fórmula (2) para el producto cruz y la definición 3.1 para el producto punto. Sin embargo, esto sería muy tedioso. En vez de ello use algún sistema de álgebra por computadora para definir los vectores* **a**, **b**, **c** *y* **d**, *en general, y para verificar las identidades.*

27. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$

28. $$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\end{aligned}$$

29. $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

30. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (esta se conoce como **identidad de Jacobi**).

31. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{b} - [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{a}$

32. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$

33. Establezca la identidad

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

del ejercicio 29 *sin* recurrir a un sistema de álgebra por computadora y utilizando los resultados de los ejercicios 27 y 28.

34. Egbert aplica una fuerza de 20 libras en el borde de una puerta de 4 pies de ancho que está entreabierta con el fin de cerrarla (véase la figura 1.67). Suponga que la dirección de la fuerza es perpendicular al plano de la puerta. ¿Cuál es el par que actúa sobre la bisagra de la puerta?

35. Gertrude está cambiando una llanta ponchada con una llave. La llave está situada en una de las tuercas

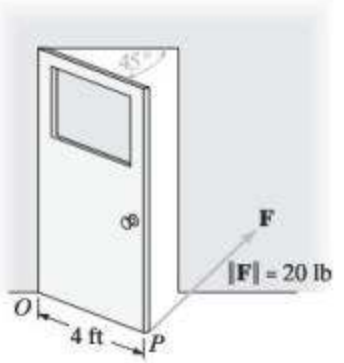


Figura 1.67 Figura para el ejercicio 34.

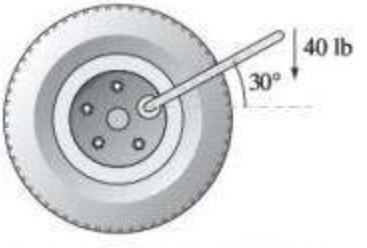


Figura 1.68 Configuración para el ejercicio 35.

de la llanta de modo que forma un ángulo de 30° con respecto de la horizontal (véase la figura 1.68). Gertrude ejerce una fuerza de 40 libras en forma vertical hacia abajo para hacer que la tuerca gire.

a) Si la longitud del mango de la llave es de 1 pie, ¿cuál es el par que Gertrude ejerce sobre la tuerca?

b) ¿Qué pasaría si usara una segunda llave cuya longitud fuera de 18 pulgadas?

36. Egbert está tratando de abrir un frasco de mermelada. El radio de la tapa del frasco es de 2 pulgadas. Si para lograrlo Egbert imparte una fuerza de 15 libras en forma tangencial al borde de la tapa, ¿de cuántos pies libras y en qué dirección está el par que resulta?

37. Una niña de 50 libras está sentada en un sube y baja, a 3 pies del punto de apoyo (véase la figura 1.69).

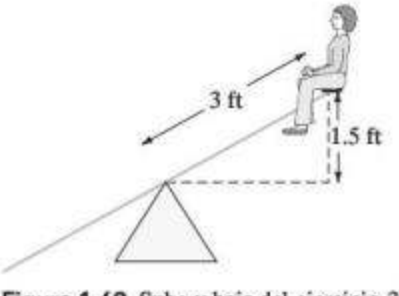


Figura 1.69 Sube y baja del ejercicio 37.

Cuando está a 1.5 pies por arriba de la posición horizontal, ¿cuál es la cantidad de par que ejerce sobre el sube y baja?

38. Para este problema considere que el radio de la Tierra es aproximadamente de 3960 millas.

a) Suponga el lector que se encuentra a 45° latitud norte. Dado que la Tierra gira alrededor de su eje, ¿qué tan rápido se mueve usted?

b) ¿Qué tan rápido estaría usted moviéndose si estuviera en un punto ubicado sobre el ecuador?

39. Archie, la cucaracha, y Anni, la hormiga, están sobre un disco LP. Archie se encuentra en el borde (aproximadamente a 6 pulgadas del centro) y Annie está 2 pulgadas más cerca del centro. ¿Con qué rapidez Archie se está acercando a Annie? (Nota: un disco LP gira a razón de $33\frac{1}{3}$ revoluciones por minuto).

40. Una cubierta gira con velocidad angular constante de 12 radianes/segundo. Suponga que la cubierta gira alrededor de su eje de simetría y hacemos que este sea el eje z, y que la cubierta gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

a) Si en cierto momento un punto P de la cubierta tiene coordenadas $(2, -1, 3)$, ¿cuál es la velocidad del punto en ese instante?

b) ¿Cuáles son las coordenadas (aproximadas) de P un segundo después?

41. Hay una dificultad involucrada en nuestra definición de vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y es que no podemos considerar que este sea "libre" en el sentido de poderlo trasladar a voluntad en forma paralela. Considere las rotaciones de un cuerpo rígido con respecto de cada uno de dos ejes paralelos. Entonces $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$, los vectores correspondientes de velocidad angular, son paralelos. Explique, tal vez con una figura, que incluso si $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ son iguales como "vectores libres", los movimientos rotacionales correspondientes que resultaran serían diferentes (por lo tanto, cuando se considere más de una velocidad angular, debe suponerse siempre que los ejes de rotación pasan a través de un punto en común).

1.5 Ecuaciones de planos. Problemas de distancia

En esta sección usaremos vectores para hacer descripciones analíticas de planos en $\mathbf{R}^3$. También mostraremos la forma de resolver varios tipos de problemas de distancia que involucran "objetos planos" (por ejemplo, puntos, rectas y planos).

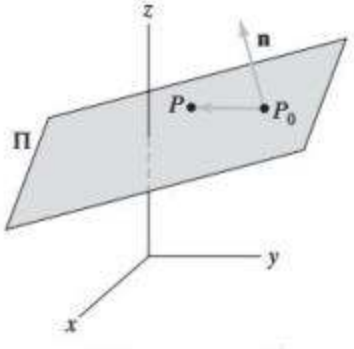


Figura 1.70 El plano en $\mathbf{R}^3$ que contiene al punto P_0 y es perpendicular al vector $\mathbf{n}$.

Ecuaciones en coordenadas de planos

Un plano Π en $\mathbf{R}^3$ es determinado únicamente por la información geométrica siguiente: un punto particular $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano, y un vector particular $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ que es normal (perpendicular) al plano. En otras palabras, Π es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ en el espacio, tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$ (véase la figura 1.70). Esto significa que Π está definido por la ecuación vectorial

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0. \tag{1}$$

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$, la ecuación (1) se escribe así:

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot ((x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}) = 0$$

o bien,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Esto es equivalente a

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

EJEMPLO 1 El plano que contiene al punto (3, 2, 1) y es normal al vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ tiene la ecuación

$$\begin{aligned}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot ((x-3)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}) &= 0 \\ \iff 2(x-3) - (y-2) + 4(z-1) &= 0 \\ \iff 2x - y + 4z &= 8.\end{aligned}$$

◆

No solo hace un plano en $\mathbf{R}^3$ tener una ecuación de la forma dada por la ecuación (2), más bien, por el contrario, cualquier ecuación que tenga esta forma debe describir a un plano. Además, a partir de una ecuación como esa es fácil leer las componentes de un vector normal al plano. Son los coeficientes de x, y y z.

EJEMPLO 2 Dado el plano con ecuación $7x + 2y - 3z = 1$, encuentre un vector normal al plano e identifique tres puntos que estén contenidos en este.

Un posible vector normal es $\mathbf{n} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. No obstante, cualquier múltiplo escalar de $\mathbf{n}$ distinto de cero funcionará también. Algebraicamente, el efecto de usar un múltiplo escalar de $\mathbf{n}$ como normal es multiplicar la ecuación (2) por dicho escalar.

No es difícil encontrar tres puntos en el plano. En primer lugar, sean $y = z = 0$ en la ecuación de definición, la cual se resuelve para x:

$$7x + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 1 \iff 7x = 1 \iff x = \tfrac{1}{7}.$$

Por consiguiente, $(\frac{1}{7}, 0, 0)$ es un punto sobre el plano. A continuación hacemos $x = z = 0$ y resolvemos para y:

$$7 \cdot 0 + 2y - 3 \cdot 0 = 1 \iff y = \tfrac{1}{2}.$$

Así $(0, \frac{1}{2}, 0)$ es otro punto sobre el plano. Finalmente, se hace que $x = y = 0$ y se resuelve para z. Se debe encontrar que $(0, 0, -\frac{1}{3})$ está sobre el plano. ◆

EJEMPLO 3 Se colocan los ejes coordenados en $\mathbf{R}^3$ de modo que el eje z apunte verticalmente. Entonces, un plano en $\mathbf{R}^3$ es vertical si su vector normal $\mathbf{n}$ es horizontal (es decir, si $\mathbf{n}$ es paralelo al plano xy). Esto significa que $\mathbf{n}$ no tiene componente $\mathbf{k}$, por lo que $\mathbf{n}$ se puede escribir en la forma $A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$. De la ecuación (2) se sigue que un plano vertical tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

En consecuencia, un plano no vertical tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

donde $C \neq 0$. ◆

EJEMPLO 4 De la geometría del bachillerato el lector tal vez recuerde que un plano es determinado por tres puntos (no colineales). Encontremos una ecuación del plano que contiene los puntos $P_0(1, 2, 0)$, $P_1(3, 1, 2)$ y $P_2(0, 1, 1)$.

Hay dos formas de resolver este problema. El primer enfoque es algebraico y poco profundo. A partir de lo antes mencionado cualquier plano debe tener una ecuación de la forma $Ax + By + Cz = D$ para constantes adecuadas A, B, C y D. Por consiguiente, solo es necesario sustituir las coordenadas de P_0, P_1 y P_2 en ella y resolver para A, B, C y D. Tenemos que

- la sustitución de P_0 da $A + 2B = D$;
- la sustitución de P_1 da $3A + B + 2C = D$; y
- la sustitución de P_2 da $B + C = D$.

Entonces, se debe resolver un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} A + 2B = D \\ 3A + B + 2C = D \\ B + C = D \end{cases}. \tag{3}$$

En general, un sistema como ese no tiene solución o tiene un número infinito de ellas. Debe tratarse de este último caso, ya que sabemos que los tres puntos P_0, P_1 y P_2 están en algún plano (es decir, que debe existir algún conjunto de constantes A, B, C y D). Además, la existencia de una infinidad de soluciones corresponde al hecho de que cualquier ecuación particular para un plano se puede multiplicar por una constante distinta de cero sin que se altere el plano definido. En otras palabras, podemos escoger un valor para uno de los coeficientes A, B, C o D, y luego determinar los valores restantes. Así, al multiplicar la primera de las ecuaciones (3) por 3, y restarla de la segunda, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} A + 2B = D \\ -5B + 2C = -2D \\ B + C = D \end{cases}. \tag{4}$$

Ahora multiplicamos la tercera ecuación de (4) por 5 y la sumamos a la segunda:

$$\begin{cases} A + 2B = D \\ 7C = 3D \\ B + C = D \end{cases}. \tag{5}$$

Multiplicamos la tercera ecuación de (5) por 2 y la restamos de la primera:

$$\begin{cases} A - 2C = -D \\ 7C = 3D \\ B + C = D \end{cases}. \tag{6}$$

Al sumar múltiplos apropiados de la segunda ecuación tanto a la primera como a la tercera ecuaciones de (6) se encuentra que

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{7}D \\ 7C = 3D \\ B = \frac{4}{7}D \end{cases}. \tag{7}$$

Entonces, si en (7) se toma $D = -7$ (por ejemplo), entonces $A = 1$, $B = -4$, $C = -3$ y la ecuación del plano deseado es

$$x - 4y - 3z = -7.$$

El segundo método de solución es más sencillo y geométrico. La idea es usar la ecuación (1). Por lo tanto, se necesita conocer las coordenadas de un punto particular del plano (no hay problema porque se dan tres de tales puntos) y un vector $\mathbf{n}$ normal al plano. Los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ están en el plano (véase la figura 1.71). En particular, el vector normal $\mathbf{n}$ debe ser perpendicular a ambos. En consecuencia, el producto cruz da lo que necesitamos. Es decir, tomamos

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

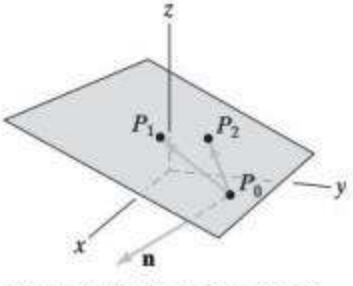


Figura 1.71 Plano determinado por los puntos P_0, P_1 y P_2 del ejemplo 4.

Si tomamos $P_0(1, 2, 0)$ como el punto particular en la ecuación (1), encontramos que la ecuación buscada es:

$$(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot ((x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$$

o bien,

$$(x - 1) - 4(y - 2) - 3z = 0.$$

Esta es la misma ecuación que la que se obtuvo con el primer método. ◆

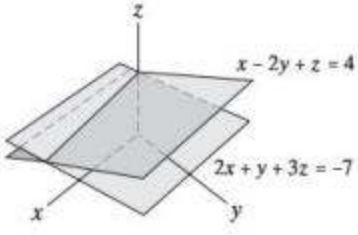


Figura 1.72 Recta de intersección de los planos $x - 2y + z = 4$ y $2x + y + 3z = -7$ del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Considere los dos planos que tienen las ecuaciones $x - 2y + z = 4$ y $2x + y + 3z = -7$. Determinamos un conjunto de ecuaciones paramétricas para su recta de intersección (véase la figura 1.72). Usamos la proposición 2.1, por consiguiente, necesitamos encontrar un punto sobre la recta y un vector paralelo a esta. Para encontrar el punto sobre la recta, observemos que las coordenadas (x, y, z) de cualquiera de tales puntos deben satisfacer el sistema de ecuaciones simultáneas dado por los dos planos

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = -7 \end{cases}. \tag{8}$$

A partir de las ecuaciones dadas en (8) no es muy difícil obtener una solución única (x, y, z). Por ejemplo, si hacemos $z = 0$ en (8), obtenemos el sistema más sencillo

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = -7 \end{cases}. \tag{9}$$

La solución del sistema de ecuaciones (9) se obtiene fácilmente; $x = -2$, $y = -3$. Entonces, las coordenadas de un punto sobre la recta son $(-2, -3, 0)$.

Para encontrar un vector paralelo a la recta de intersección observe que dicho vector debe ser perpendicular a los dos vectores normales a los planos. Estos vectores son $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Por lo tanto, un vector paralelo a la recta de intersección es dado por

$$(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Así, la proposición 2.1 implica que una ecuación vectorial paramétrica para la recta es

$$\mathbf{r}(t) = (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) + t(-7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}),$$

y un conjunto estándar de ecuaciones paramétricas es

$$\begin{cases} x = -7t - 2 \\ y = -t - 3 \\ z = 5t \end{cases}.$$

◆

Ecuaciones paramétricas de planos

Otra manera de describir un plano en $\mathbf{R}^3$ es por medio de un conjunto de ecuaciones paramétricas. En primer lugar, suponga que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son dos vectores distintos de cero y no paralelos en $\mathbf{R}^3$. Entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ determinan un plano en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen (véase la figura 1.73). Para encontrar las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ en este plano se dibuja un paralelogramo cuyos lados sean paralelos a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y que tenga dos vértices opuestos en el origen y en P, como se

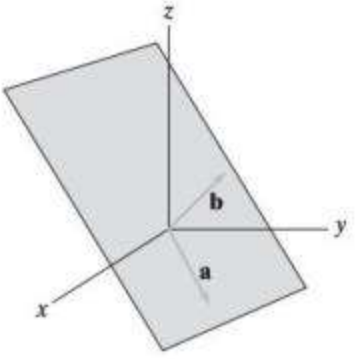


Figura 1.73 El plano que contiene al origen determinado por los vectores **a** y **b**.

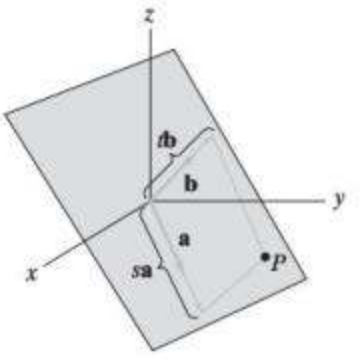


Figura 1.74 Para el punto P en el plano mostrado, $\overrightarrow{OP} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para escalares apropiados s y t.

ilustra en la figura 1.74. Entonces, deben existir escalares s y t tales que el vector de posición de P es $\overrightarrow{OP} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. El plano puede describirse así:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}; s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Ahora supongamos que se busca describir un plano general Π (es decir, uno que no necesariamente pase por el origen). Sea que

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = \overrightarrow{OP_0}$$

denote el vector de posición de un punto particular P_0 en Π, y sean **a** y **b** dos vectores (distintos de cero y no paralelos) que determinen al plano que contiene al origen y que es paralelo a Π. Mediante una traslación paralela de **a** y **b** de modo que sus inicios estén en la punta de **c** (como en la figura 1.75), adaptamos el análisis anterior para resaltar que el vector de posición de cualquier punto $P(x, y, z)$ en Π se puede describir como

$$\overrightarrow{OP} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

En resumen, hemos demostrado lo siguiente:

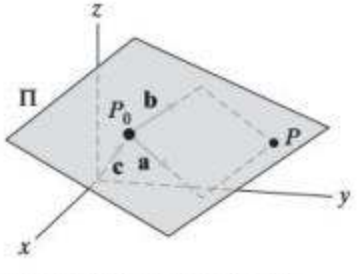


Figura 1.75 Plano que pasa por $P_0(c_1, c_2, c_3)$ y es paralelo a **a** y **b**.

PROPOSICIÓN 5.1 Una ecuación vectorial paramétrica para el plano Π que contiene al punto $P_0(c_1, c_2, c_3)$ (cuyo vector de posición es $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{c}$) y es paralelo a los vectores distintos de cero, y no paralelo **a** y **b**, es:

$$\mathbf{x}(s, t) = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c}. \tag{10}$$

Al tomar las componentes en la fórmula (10) se obtiene con facilidad un conjunto de ecuaciones paramétricas para Π:

$$\begin{cases} x = sa_1 + tb_1 + c_1 \\ y = sa_2 + tb_2 + c_2 \\ z = sa_3 + tb_3 + c_3 \end{cases}. \tag{11}$$

Comparemos la fórmula (10) con la de la ecuación (1) de la proposición 2.1. Necesitamos usar dos parámetros s y t para describir un plano (en vez de un solo parámetro t que aparezca en la ecuación vectorial paramétrica de una recta) porque un plano es un objeto en dos dimensiones.

EJEMPLO 6 Encontremos un conjunto de ecuaciones paramétricas para el plano que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y es paralelo a los vectores $3\mathbf{i} - \mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

A partir de la fórmula (10) cualquier punto sobre el plano es especificado por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s, t) &= s(3\mathbf{i} - \mathbf{k}) + t(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + (\mathbf{i} - \mathbf{k}) \\ &= (3s + 2t + 1)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + (2t - s - 1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

La ecuación paramétrica individual se puede leer como

$$\begin{cases} x = 3s + 2t + 1 \\ y = 5t \\ z = 2t - s - 1 \end{cases}.$$

◆

Problemas de distancia

Los productos cruz y las proyecciones vectoriales dan formas convenientes para entender una variedad de problemas de distancia que involucran rectas y planos: a continuación se presentan varios ejemplos. Lo que es importante sobre estos ejemplos son las técnicas vectoriales para resolver los problemas geométricos que plantean, no las fórmulas generales que se obtienen con ellas.

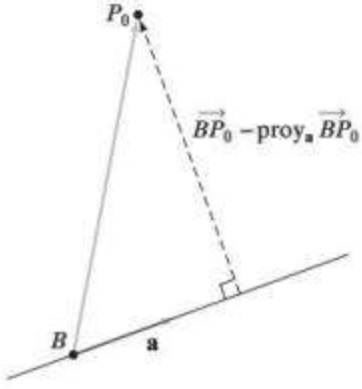


Figura 1.76 Configuración general para encontrar la distancia entre un punto y una recta utilizando proyecciones vectoriales.

EJEMPLO 7 **(Distancia entre un punto y una recta)** Encontremos la distancia entre el punto $P_0(2, 1, 3)$ y la recta $\mathbf{l}(t) = t(-1, 1, -2) + (2, 3, -2)$ de dos maneras.

Método 1. A partir de las ecuaciones vectoriales paramétricas de la recta dada se obtiene un punto B sobre la recta, digamos $(2, 3, -2)$ y un vector $\mathbf{a}$ paralelo a ella, por ejemplo $\mathbf{a} = (-1, 1, -2)$. Según la figura 1.76, la longitud del vector $\overrightarrow{BP_0} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\overrightarrow{BP_0}$ proporciona la distancia buscada entre P_0 y la recta. Por consiguiente, calculamos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP_0} &= (2, 1, 3) - (2, 3, -2) \\ &= (0, -2, 5); \\ \text{proy}_{\mathbf{a}}\overrightarrow{BP_0} &= \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{BP_0}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right)\mathbf{a} \\ &= \left(\frac{(-1, 1, -2) \cdot (0, -2, 5)}{(-1, 1, -2) \cdot (-1, 1, -2)}\right)(-1, 1, -2) \\ &= (2, -2, 4).\end{aligned}$$

La distancia deseada es:

$$\|\overrightarrow{BP_0} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\overrightarrow{BP_0}\| = \|(0, -2, 5) - (2, -2, 4)\| = \|(-2, 0, 1)\| = \sqrt{5}.$$

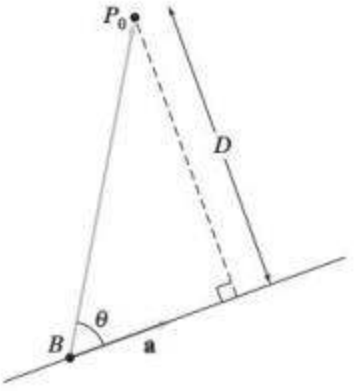


Figura 1.77 Otra configuración general para calcular la distancia entre un punto y una recta.

Método 2. En este caso, se empleará un poco de trigonometría. Si θ denota el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\overrightarrow{BP_0}$, como se aprecia en la figura 1.77, entonces,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{D}{\|\overrightarrow{BP_0}\|},$$

donde D denota la distancia entre P_0 y la recta. En consecuencia,

$$D = \|\overrightarrow{BP_0}\| \,\text{sen}\,\theta = \frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\overrightarrow{BP_0}\|\,\text{sen}\,\theta}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\mathbf{a} \times \overrightarrow{BP_0}\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Por lo tanto, calculamos

$$\mathbf{a} \times \overrightarrow{BP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

de modo que la distancia buscada es

$$D = \frac{\|\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\|}{\|-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}\|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5},$$

lo cual concuerda con la respuesta obtenida con el método 1. ◆

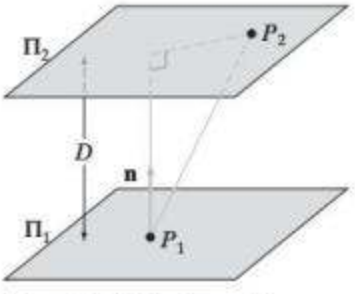


Figura 1.78 Configuración general para encontrar la distancia D entre dos planos paralelos.

EJEMPLO 8 **(Distancia entre planos paralelos)** Los planos

$$\Pi_1\colon\ 2x - 2y + z = 5 \quad \text{y} \quad \Pi_2\colon\ 2x - 2y + z = 20$$

son paralelos (explique por qué). Veremos cómo calcular la distancia entre ellos.

Si usamos la figura 1.78 como guía, observamos que la distancia deseada D es dada por $\|\text{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_2}\|$, donde P_1 es un punto sobre Π_1, P_2 es un punto sobre Π_2, y $\mathbf{n}$ es un vector normal a ambos planos.

En primer lugar, el vector $\mathbf{n}$, que es normal a los dos planos, se puede leer directamente de la ecuación de Π_1 o Π_2 como $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. No es difícil encontrar un punto P_1 sobre Π_1: usaremos el punto $P_1(0, 0, 5)$. De manera similar, tomaremos $P_2(0, 0, 20)$ para un punto sobre Π_2. Entonces,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 0, 15),$$

y calculamos

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_2} &= \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} = \left(\frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 0, 15)}{(2, -2, 1) \cdot (2, -2, 1)} \right) (2, -2, 1) \\ &= -\tfrac{15}{9}(2, -2, 1) \\ &= -\tfrac{5}{3}(2, -2, 1). \end{aligned}$$

Así, la distancia D buscada es

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_2}\| = \tfrac{5}{3}\sqrt{9} = 5. \quad ◆$$

EJEMPLO 9 **(Distancia entre dos líneas oblicuas)** Encuentre la distancia entre las dos líneas oblicuas

$$\mathbf{l}_1(t) = t(2, 1, 3) + (0, 5, -1) \quad \text{y} \quad \mathbf{l}_2(t) = t(1, -1, 0) + (-1, 2, 0).$$

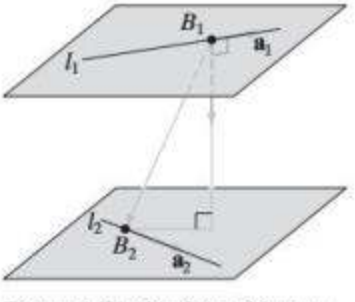


Figura 1.79 Configuración para determinar la distancia entre dos rectas oblicuas del ejemplo 9.

(Se dice que dos líneas en $\mathbf{R}^3$ son **oblicuas** si no se intersecan ni son paralelas. Se sigue que las rectas deben estar contenidas en planos paralelos y que la distancia entre ellas es igual a la distancia entre los planos).

Para resolver este problema necesitamos encontrar $\|\text{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{B_1B_2}\|$, la longitud de la proyección del vector entre un punto de cada recta sobre un vector $\mathbf{n}$ que sea perpendicular a ambas rectas y, por ello, también perpendicular a los planos paralelos que las contienen (véase la figura 1.79).

A partir de las ecuaciones vectoriales paramétricas de las rectas se lee que el punto $B_1(0, 5, -1)$ está en la primera recta y $B_2(-1, 2, 0)$ está en la segunda. En consecuencia,

$$\overrightarrow{B_1B_2} = (-1, 2, 0) - (0, 5, -1) = (-1, -3, 1).$$

Para un vector $\mathbf{n}$ que sea perpendicular a ambas rectas debemos usar $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, donde $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3)$ es un vector paralelo a la primera recta, y $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 0)$ es paralelo a la segunda (estos vectores se pueden leer a partir de las ecuaciones paramétricas). Por consiguiente,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{B_1 B_2} &= \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1 B_2}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} = \left(\frac{(-1, -3, 1) \cdot (3, 3, -3)}{(3, 3, -3) \cdot (3, 3, -3)} \right) (3, 3, -3) \\ &= -\tfrac{15}{27}(3, 3, -3) \\ &= -\tfrac{5}{3}(1, 1, -1). \end{aligned}$$

La distancia buscada es $\|\text{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{B_1 B_2}\| = \frac{5}{3}\sqrt{3}$. ◆

1.5 Ejercicios

1. Calcule una ecuación para el plano que contiene al punto $(3, -1, 2)$ y es perpendicular a $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
2. Encuentre una ecuación para el plano que contiene al punto $(9, 5, -1)$ y es perpendicular al $\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.
3. Determine una ecuación para el plano que contiene a los puntos $(3, -1, 2)$, $(2, 0, 5)$ y $(1, -2, 4)$.
4. Encuentre una ecuación para el plano que contiene a los puntos $(A, 0, 0)$, $(0, B, 0)$ y $(0, 0, C)$. Suponga que al menos dos de A, B y C son distintos de cero.
5. Dé una ecuación del plano que es paralelo al plano $5x - 4y + z = 1$ y que pasa por el punto $(2, -1, -2)$.
6. Dé una ecuación para el plano paralelo al plano $2x - 3y + z = 5$ que pasa por el punto $(-1, 1, 2)$.
7. Determine una ecuación para el plano paralelo al plano $x - y + 7z = 10$ y que pasa por el punto $(-2, 0, 1)$.
8. Dé una ecuación para el plano paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$ y que contiene a la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 - t, y = 2t + 1, z = 3 - 2t$.
9. Explique por qué *no* hay un plano paralelo al plano $5x - 3y + 2z = 10$ que contenga a la recta con ecuaciones paramétricas $x = t + 4, y = 3t - 2, z = 5 - 2t$.
10. Encuentre una ecuación para el plano que contiene a la recta $x = 2t - 1, y = 3t + 4, z = 7 - t$ y al punto $(2, 5, 0)$.
11. Determine una ecuación para el plano que es perpendicular a la recta $x = 3t - 5, y = 7 - 2t, z = 8 - t$ y que pasa por el punto $(1, -1, 2)$.
12. Encuentre una ecuación para el plano que contiene a las dos rectas l_1: $x = t + 2, y = 3t - 5, z = 5t + 1$ y l_2: $x = 5 - t, y = 3t - 10, z = 9 - 2t$.
13. Proporcione un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos $x + 2y - 3z = 5$ y $5x + 5y - z = 1$.
14. Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(5, 0, 6)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + 5z = -1$.
15. Encuentre un valor para A de modo que los planos $8x - 6y + 9Az = 6$ y $Ax + y + 2z = 3$ sean paralelos.
16. Determine valores para A de modo que los planos $Ax - y + z = 1$ y $3Ax + Ay - 2z = 5$ sean perpendiculares.

Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para cada uno de los planos descritos en los ejercicios 17 a 22.

17. El plano que pasa por el punto $(-1, 2, 7)$ y es paralelo a los vectores $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$.
18. El plano que pasa por el punto $(2, 9, -4)$ y es paralelo a los vectores $-8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
19. El plano que contiene a las rectas l_1: $x = 2t + 5, y = -3t - 6, z = 4t + 10$ y l_2: $x = 5t - 1, y = 10t + 3, z = 7t - 2$.
20. El plano que pasa por los tres puntos $(0, 2, 1)$, $(7, -1, 5)$ y $(-1, 3, 0)$.
21. El plano que contiene a la recta l: $x = 3t - 5, y = 10 - 3t, z = 2t + 9$ y el punto $(-2, 4, 7)$.

22. El plano determinado por la ecuación $2x - 3y + 5z = 30$.

23. Encuentre una sola ecuación de la forma $Ax + By + Cz = D$ que describa al plano dado en forma paramétrica como $x = 3s - t + 2$, $y = 4s + t$, $z = s + 5t + 3$. (Sugerencia: comience por escribir las ecuaciones paramétricas en forma vectorial y luego encuentre un vector normal al plano).

24. Calcule la distancia entre el punto $(1, -2, 3)$ y la recta l: $x = 2t - 5$, $y = 3 - t$, $z = 4$.

25. Determine la distancia entre el punto $(2, -1)$ y la recta l: $x = 3t + 7$, $y = 5t - 3$.

26. Calcule la distancia entre el punto $(-11, 10, 20)$ y la recta l: $x = 5 - t$, $y = 3$, $z = 7t + 8$.

27. Determine la distancia entre las dos rectas $\mathbf{l}_1(t) = t(8, -1, 0) + (-1, 3, 5)$ y $\mathbf{l}_2(t) = t(0, 3, 1) + (0, 3, 4)$.

28. Calcule la distancia entre las rectas $\mathbf{l}_1(t) = (t - 7)\mathbf{i} + (5t + 1)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$ y $\mathbf{l}_2(t) = 4t\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j} + (8t + 1)\mathbf{k}$.

29. *a*) Encuentre la distancia entre las dos rectas $\mathbf{l}_1(t) = t(3, 1, 2) + (4, 0, 2)$ y $\mathbf{l}_2(t) = t(1, 2, 3) + (2, 1, 3)$.

b) ¿Qué dice al lector la respuesta encontrada en el inciso anterior acerca de las posiciones relativas de las rectas?

30. *a*) Las rectas $\mathbf{l}_1(t) = t(1, -1, 5) + (2, 0, -4)$ y $\mathbf{l}_2(t) = t(1, -1, 5) + (1, 3, -5)$ son paralelas. Explique por qué no se puede usar el método del ejemplo 9 para calcular la distancia entre ellas.

b) Encuentre otra forma de calcular la distancia. (Sugerencia: intente utilizar algunos cálculos).

31. Encuentre la distancia entre los dos planos dados por las ecuaciones $x - 3y + 2z = 1$ y $x - 3y + 2z = 8$.

32. Calcule la distancia entre los dos planos

$$5x - 2y + 2z = 12 \quad \text{y} \quad -10x + 4y - 4z = 8.$$

33. Demuestre que la distancia d entre los dos planos paralelos determinados por las ecuaciones $Ax + By + Cz = D_1$ y $Ax + By + Cz = D_2$ es

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

34. Dos planos están dados en forma paramétrica por las ecuaciones vectoriales

$$\mathbf{x}_1(s, t) = (-3, 4, -9) + s(9, -5, 9) + t(3, -2, 3)$$
$$\mathbf{x}_2(s, t) = (5, 0, 3) + s(-9, 2, -9) + t(-4, 7, -4).$$

a) Dé una explicación convincente de por qué estos planos son paralelos.

b) Calcule la distancia entre los planos.

35. Escriba ecuaciones para los planos que sean paralelos a $x + 3y - 5z = 2$ y estén a tres unidades de distancia de él.

36. Suponga que $\mathbf{l}_1(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}_1$ y $\mathbf{l}_2(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}_2$ son rectas paralelas en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$. Demuestre que la distancia D entre ellas es dada por

$$D = \frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

(Sugerencia: considere el ejemplo 7).

37. Sea Π el plano en $\mathbf{R}^3$ con vector normal $\mathbf{n}$ que pasa por el punto A con vector de posición $\mathbf{a}$. Si $\mathbf{b}$ es el vector de posición de un punto B en $\mathbf{R}^3$, demuestre que la distancia D entre B y Π es dada por

$$D = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

38. Demuestre que la distancia D entre planos paralelos con vector normal $\mathbf{n}$ es dada por

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)|}{\|\mathbf{n}\|},$$

donde $\mathbf{x}_1$ es el vector de posición de un punto sobre uno de los planos y $\mathbf{x}_2$ es el vector de posición de un punto sobre el otro plano.

39. Suponga que $\mathbf{l}_1(t) = t\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$ y $\mathbf{l}_2(t) = t\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ son rectas oblicuas en $\mathbf{R}^3$. Use el razonamiento geométrico del ejemplo 9 para demostrar que la distancia D entre las rectas es dada por

$$D = \frac{|(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}.$$

1.6 Algo sobre geometría *n*-dimensional

Vectores en $\mathbf{R}^n$

La idea algebraica de un vector en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$ se definió en la sección 1.1, en la que se pidió al lector considerar lo que ocurriría si se generalizaran las operaciones de suma de vectores, multiplicación por un escalar, etc., a vectores n-dimensionales, donde n puede ser arbitraria. A continuación se estudian algunos de los detalles de dicha generalización.

DEFINICIÓN 6.1 Un **vector** en $\mathbf{R}^n$ es una tupla n de números reales. Usaremos la notación $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ como estándar para un vector en $\mathbf{R}^n$.

EJEMPLO 1 El arreglo de 5 números (2, 4, 6, 8, 10) es un vector en $\mathbf{R}^5$. La tupla $n + 1$ $(2n, 2n - 2, 2n - 4, \ldots, 2, 0)$ es un vector en $\mathbf{R}^{n+1}$, donde n es arbitrario. ◆

Exactamente como en el caso de $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, decimos que dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son **iguales** solo en el caso en que $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. La suma de vectores y la multiplicación por un escalar se definen de manera por completo análoga con las definiciones 1.3 y 1.4: Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son dos vectores en $\mathbf{R}^n$ y $k \in \mathbf{R}$ es un escalar cualquiera, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

y

$$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

Las propiedades de la suma de vectores y multiplicación por un escalar dadas en la sección 1.1 se sostienen (con demostraciones que no son diferentes de las empleadas en los casos de dos y tres dimensiones). De manera similar, el producto punto de dos vectores en $\mathbf{R}^n$ se define con facilidad:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Las propiedades del producto punto dadas en la sección 1.3 se siguen cumpliendo también para n dimensiones; se invita al lector a que compruebe que así es.

Lo que *no* se puede hacer en dimensiones mayores que tres es representar gráficamente a los vectores como flechas. No obstante, el poder de nuestra álgebra y analogía nos permite definir cierto número de ideas geométricas. Definimos la **longitud** de un vector en $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ utilizando el producto punto:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

La **distancia** entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^n$ es

$$\text{Distancia entre } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

Incluso podemos definir el **ángulo** entre dos vectores distintos de cero utilizando una versión generalizada de la ecuación (4) de la sección 1.3:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|}.$$

Aquí, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ y θ se toma de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$. (Nota: en este momento del análisis no es evidente que tenemos

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} \leq 1,$$

que es una condición necesaria para que nuestra definición del ángulo θ tenga algún sentido. Por fortuna, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la fórmula 1 que sigue, se aplica en este caso). Así, aun cuando no es posible dibujar vectores en $\mathbf{R}^n$, sí se puede hablar de lo que significa decir que dos vectores son perpendiculares o paralelos, o de qué tan separados pueden estar dos vectores. (Se debe tener cuidado al hacerlo, pues estamos *definiendo* conceptos de longitud, distancia y ángulo totalmente en

términos del producto punto. Los resultados como el teorema 3.3 no tienen significado en $\mathbf{R}^n$, ya que las ideas de ángulos entre vectores y productos punto no son independientes).

No hay una generalización sencilla del producto cruz. Sin embargo, vea los ejercicios 39 a 42 al final de esta sección para que se entere de lo mejor que se puede hacer utilizando la analogía.

Podemos crear una **base estándar** de vectores en $\mathbf{R}^n$ que generalicen la base **i**, **j**, **k** en $\mathbf{R}^3$. Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\ &\vdots\\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1).\end{aligned}$$

Entonces no es difícil ver que (se invita al lector a comprobarlo):

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

A continuación se presentan dos desigualdades famosas (y con frecuencia útiles):

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para todos los vectores **a** y **b** en $\mathbf{R}^n$ se tiene que

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN Si $n = 2$ o 3, este resultado es virtualmente inmediato al considerar el teorema 3.3. Sin embargo, en dimensiones mayores que tres no hay conceptos independientes de productos internos y ángulos, por lo que se requiere una demostración distinta.

En primer lugar, observe que la desigualdad se cumple, ya sea que **a** o **b** sean **0**. Por lo tanto, suponga que **a** y **b** son distintos de cero. Entonces la proyección de **b** sobre **a** se define igual que en la sección 1.3:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right)\mathbf{a} = k\mathbf{a}.$$

Por supuesto, aquí k es el escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Sea $\mathbf{c} = \mathbf{b} - k\mathbf{a}$ (de modo que $\mathbf{b} = k\mathbf{a} + \mathbf{c}$). Entonces, tenemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, puesto que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - k\mathbf{a})\\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - k\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right)\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Se deja al lector la comprobación de que se cumple el "teorema de Pitágoras", es decir, que la ecuación siguiente es verdadera:

$$\|\mathbf{b}\|^2 = k^2 \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2.$$

Al multiplicar esta ecuación por $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 k^2 \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2\\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right)^2 \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2\end{aligned}$$

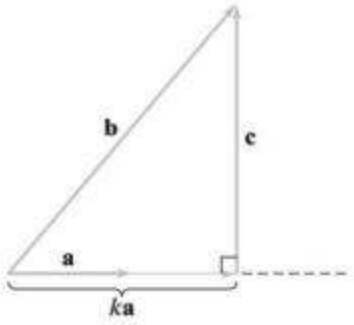


Figura 1.80 La geometría tras la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) + \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{c}\|^2$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{c}\|^2.$$

Ahora, la cantidad $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{c}\|^2$ es no negativa. Por lo tanto,

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 \geq (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2.$$

Al sacar la raíz cuadrada en esta última desigualdad se obtiene el resultado deseado. ■

La motivación geométrica de esta demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz proviene de la figura 1.80.[1]

Desigualdad del triángulo. Para todos los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ se tiene que

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN El uso estratégico de la desigualdad de Cauchy-Schwarz produce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&\leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{según (1)} \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el resultado deseado se obtiene sacando la raíz cuadrada, ya que las cantidades en ambos lados de la desigualdad son no negativas. ■

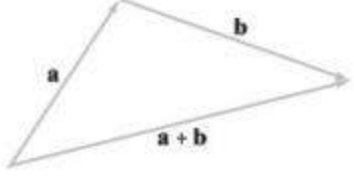


Figura 1.81 Ilustración de la desigualdad del triángulo.

En dos o tres dimensiones la desigualdad del triángulo tiene la demostración obvia siguiente, de la que toma su nombre: Puesto que $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$ pueden considerarse las longitudes de los lados de un triángulo, la desigualdad (2) no dice nada más que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo debe ser al menos tan grande como la longitud del tercer lado, como se demuestra en la figura 1.81.

Matrices

En la sección 1.4 hicimos una breve introducción de las matrices y determinantes en relación con el cálculo de productos cruz. Ahora es tiempo de profundizar en el tema.

En la sección mencionada se definió a una matriz como un arreglo rectangular de números. Para ampliar el análisis se necesita contar con una buena notación para las matrices y sus elementos individuales. Antes usamos el alfabeto latino de letras mayúsculas para denotar las matrices completas y seguiremos haciéndolo. También adoptaremos la convención estándar, y usaremos las minúsculas de ese alfabeto y dos conjuntos de índices (uno para los renglones y otro para las columnas) para identificar los elementos individuales. Entonces, la matriz general de $m \times n$ se escribe como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \text{(abreviado) } (a_{ij}).$$

[1] Véase J. W. Cannon, *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), núm. 7, 630-631.

El primer índice *siempre* representa la posición del renglón y el segundo la de la columna.

También se puede pensar en los vectores en $\mathbf{R}^n$ como matrices. Tendremos ocasión de escribir el vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ como un **vector fila** (matriz de $1 \times n$),

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

o, más comúnmente, como un **vector columna** (una matriz de $n \times 1$),

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

No usamos dos índices, puesto que solo hay un renglón o una sola columna. A partir del contexto será evidente (o se indicará en forma explícita) la forma en la que se debe visualizar un vector $\mathbf{a}$. Una matriz A de $m \times n$ se puede considerar como un "vector de vectores" de dos maneras: (1) como m vectores fila en $\mathbf{R}^n$,

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

o (2) como n vectores columna en $\mathbf{R}^m$,

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Ahora se definirán las operaciones básicas de las matrices. En realidad, la suma de matrices y la multiplicación por un escalar no son diferentes de las operaciones correspondientes para los vectores (y, además, en esencia satisfacen las mismas propiedades).

DEFINICIÓN 6.2 (SUMA DE MATRICES) Sean A y B dos matrices de $m \times n$. Entonces la **suma de las matrices** $A + B$ es la matriz de $m \times n$ que se obtiene sumando los elementos correspondientes. Es decir, el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna de $A + B$ es $a_{ij} + b_{ij}$, donde a_{ij} y b_{ij} son los elementos ij-ésimos de A y B, respectivamente.

EJEMPLO 2 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, si $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $A + B$ no está definida, ya que B no tiene las mismas dimensiones que A. ◆

Propiedades de la suma de matrices. Para todas las matrices de $m \times n$, A, B y C tenemos que

1. $A + B = B + A$ (conmutatividad);
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociatividad);
3. Una matriz O de $m \times n$ (la **matriz cero**) con la propiedad de que $A + O = A$ para todas las matrices A de $m \times n$.

DEFINICIÓN 6.3 (MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR) Si A es una matriz de $m \times n$ y $k \in \mathbf{R}$ es un escalar, entonces el **producto** kA del escalar k y la matriz A se obtiene multiplicando cada elemento de A por k. Es decir, el ij-ésimo elemento de kA es ka_{ij} (donde a_{ij} es el elemento ij-ésimo de A).

EJEMPLO 3 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$. ◆

Propiedades de la multiplicación por un escalar. Si A y B son matrices de $m \times n$, y k y l son escalares cualesquiera, entonces

1. $(k + l)A = kA + lA$ (distributividad);
2. $k(A + B) = kA + kB$ (distributividad);
3. $k(lA) = (kl)A = l(kA)$.

Se invita al lector a realizar las demostraciones de estas propiedades de la suma y multiplicación por un escalar.

Tal como la definición del producto de vectores necesitaba ser "inesperada" para ser útil, ocurre con la definición del producto de matrices. En cierto grado la multiplicación de matrices es una generalización del producto punto de dos vectores.

DEFINICIÓN 6.4 (MULTIPLICACIÓN DE MATRICES) Sea A una matriz de $m \times n$ y B una de $n \times p$, entonces el **producto de las matrices** AB es la matriz de $m \times p$ cuyo ij-ésimo elemento es el producto punto del renglón i-ésimo de A y la columna número j-ésima de B (considerados como vectores en $\mathbf{R}^n$). Es decir, el ij-ésimo elemento de

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ [a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}] \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & & & & b_{2p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

es

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \text{(de manera abreviada)} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

EJEMPLO 4 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces el elemento (2, 1) de AB es el producto punto del segundo renglón de A y la primera columna de B:

$$\text{elemento } (2, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = (4)(0) + (5)(7) + (6)(2) = 47.$$

El producto completo AB es la matriz de 2×2

$$\begin{bmatrix} 20 & 13 \\ 47 & 28 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, el producto BA es la matriz de 3×3

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 14 & 21 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}.$$

◆

El orden sí importa en la multiplicación de matrices. Para multiplicar dos matrices debe cumplirse que

$$\begin{matrix} \text{Número de columnas de la matriz} \\ \text{izquierda} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Número de renglones de la matriz} \\ \text{derecha.} \end{matrix}$$

En el ejemplo 4, los productos AB y BA son matrices de diferentes dimensiones; pero hubieran podido no serlo. Una situación peor ocurre cuando el producto de matrices se define en un orden y no en otro. Por ejemplo, si A es de 2×3 y B es de 3×3, entonces AB sí está definido (es una matriz de 2×3), pero BA no lo está. Sin embargo, aun si ambos productos AB y BA estuvieran definidos y fueran de las mismas dimensiones (como es el caso si A y B son de $n \times n$, por ejemplo), en general se cumple que

$$AB \neq BA.$$

A pesar de estas malas noticias, la multiplicación de matrices se comporta bien en varios aspectos, como se indica en los siguientes resultados:

Propiedades de la multiplicación de matrices Suponga que A, B y C son matrices de las dimensiones adecuadas (lo cual significa que están definidas todas las expresiones que siguen) y que k es un escalar. Entonces

1. $A(BC) = (AB)C$;
2. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
3. $A(B + C) = AB + AC$;
4. $(A + B)C = AC + BC$.

Las demostraciones de estas propiedades involucran un poco más que la definición 6.4, aunque la notación resulta involucrada, como en la demostración de la propiedad 1.

Una operación sencilla de matrices que no tiene un análogo en el sistema de números reales es la **transpuesta**. La transpuesta de una matriz A de $m \times n$ es la

matriz $n \times m$, que se denota como A^T, y que se obtiene escribiendo los renglones de A como columnas. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

De manera más abstracta, el elemento ij-ésimo de A^T es a_{ji}, el elemento ji-ésimo de A.

La operación de la transpuesta convierte vectores fila en vectores columna y viceversa. También se tienen los resultados siguientes:

$$(A^T)^T = A, \qquad \text{para cualquier matriz } A. \tag{3}$$

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad \text{donde } A \text{ es de } m \times n \text{ y } B \text{ es de } n \times p. \tag{4}$$

La transpuesta funciona en gran medida como una notación conveniente para nosotros. Por ejemplo, considere que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ son vectores columna. Entonces el producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

EJEMPLO 5 La multiplicación de matrices se define como se ha visto, de modo que, en términos aproximados, el trabajo con vectores o cantidades que involucren varias variables se vea tanto como sea posible como si se trabajara con una sola variable. Esta idea quedará más clara a lo largo del libro, pero ahora podemos dar un ejemplo importante. Una **función lineal** en una sola variable es una función de la forma $f(x) = ax$, donde a es una constante. La generalización natural de esto a dimensiones mayores es un **mapeo lineal** $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz (constante) de $m \times n$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. De manera más explícita, $\mathbf{F}$ es una función que toma un vector en $\mathbf{R}^n$ (escrito como un vector columna) y devuelve un vector en $\mathbf{R}^m$ (también escrito como una columna). Esto es,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

La función $\mathbf{F}$ tiene las propiedades de que $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{y})$ para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, y $\mathbf{F}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{F}(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{R}$. Estas propiedades, por supuesto, también se satisfacen para $f(x) = ax$. Sin embargo, tal vez lo más importante sea el hecho de que los mapeos lineales se comportan bien con respecto de la composición. Suponga que $\mathbf{F}$ es como se definió y $\mathbf{G}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ es otro mapeo lineal definido por $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, donde B es una matriz de orden $p \times m$. Entonces hay una función compuesta $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ definida por

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathbf{G}(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}$$

por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices. Observe que BA está definida y es una matriz de $p \times n$. En consecuencia, se observa que la composición de dos mapeos lineales es de nuevo un mapeo lineal. Parte de la razón de haber definido la multiplicación de matrices en la manera que lo hicimos es para que este fuera el caso. ◆

EJEMPLO 6 Vimos que con la interpretación de la ecuación (1) de la sección 1.2 en n dimensiones se obtienen ecuaciones paramétricas de una recta en $\mathbf{R}^n$. La

ecuación (2) de la sección 1.5, que es la de un plano en $\mathbf{R}^3$ que pasa por un punto determinado (x_0, y_0, z_0) con un vector normal dado $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ también se puede generalizar a n dimensiones:

$$A_1(x_1 - b_1) + A_2(x_2 - b_2) + \cdots + A_n(x_n - b_n) = 0.$$

Si $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ (vectores "constantes") y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (un vector "variable"), entonces la ecuación mencionada se reescribe como

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

o bien, considerando $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{x}$ como matrices de $n \times 1$, también como:

$$A^T(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0.$$

Esta es la ecuación de un **hiperplano** en $\mathbf{R}^n$ que pasa por el punto $\mathbf{b}$ con un vector normal $\mathbf{A}$. Los puntos $\mathbf{x}$ que satisfacen esta ecuación llenan un subconjunto $(n - 1)$ dimensional de $\mathbf{R}^n$. ◆

En este momento es fácil pensar que la aritmética matricial y la geometría vectorial de $\mathbf{R}^n$, si bien son elegantes, son tan abstractas y formales que tendrían poco uso práctico. Sin embargo, el ejemplo siguiente, que proviene de la economía,[2] muestra que no es así.

EJEMPLO 7 Suponga que tenemos n artículos. Si el precio por unidad del i-ésimo artículo es p_i, entonces el costo de comprar x_i (>0) unidades del artículo i es $p_i x_i$. Si $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ es el vector de precios de todos los artículos y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es el vector del **conjunto de artículos**, entonces

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

representa el costo total del conjunto de artículos.

Ahora suponga que tenemos una economía de intercambio, de modo que podemos comprar y vender bienes. Si se tiene un vector de abasto $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, donde w_i es la cantidad del artículo i que se puede vender (intercambiar), entonces, con los precios dados por el vector de precios $\mathbf{p}$, se puede determinar cualquier conjunto de artículos $\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}.$$

Esta última ecuación se reescribe como

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{w}) \leq 0.$$

En otras palabras, se puede determinar cualquier conjunto de artículos $\mathbf{x}$ en el presupuesto establecido $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{w}) \leq 0\}$. La ecuación $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{w}) = 0$ define un **hiperplano presupuestal** que pasa por $\mathbf{w}$ con el vector normal $\mathbf{p}$. ◆

Determinantes

Ya definimos los determinantes de matrices de 2×2 y de 3×3 (véase la sección 1.4). Ahora definiremos los determinantes de cualquier matriz de $n \times n$ (cuadrada) en términos de determinantes de matrices de $(n - 1) \times (n - 1)$. Al "iterar la definición" se puede calcular cualquier determinante.

[2] Véase D. Saari, "Mathematical complexity of simple economics", *Notices of the American Mathematical Society* **42** (1995), núm. 2, 222-230.

DEFINICIÓN 6.5 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. El **determinante** de A es el número real dado por

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}|,$$

donde A_{ij} es la submatriz de $(n-1) \times (n-1)$ de A que se obtiene al eliminar el renglón i-ésimo y la columna j-ésima de A.

EJEMPLO 8 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & \cancel{2} & -1 & 0 \\ 3 & \cancel{-2} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con la definición 6.5,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}(1)\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2}(2)\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}(1)\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4}(3)\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(1)(-1) + (-1)(2)(37) + (1)(1)(-78) + (-1)(3)(-7)$$

$$= -132. \quad \blacklozenge$$

El determinante de la submatriz A_{ij} de A se llama el ij-ésimo **menor** de A, y la cantidad $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ se denomina el *ij-ésimo* **cofactor**. La definición 6.5 se conoce como **expansión en cofactores** del determinante a lo largo del primer renglón, ya que el det A se escribe como la suma de los productos de cada elemento del primer renglón y el cofactor correspondiente (es decir, la suma de los términos a_{1j} por $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

Es natural preguntar si es posible calcular determinantes mediante la expansión en cofactores a lo largo de otros renglones o columnas de A. Afortunadamente la respuesta es *sí* (aunque no se hará la demostración de esto).

Un hecho conveniente. El determinante de A se calcula mediante expansión en cofactores a lo largo de cualquier renglón o columna, es decir,

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

(expansión a lo largo del renglón i-ésimo),

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

(expansión a lo largo de la columna j-ésima).

EJEMPLO 9 Calcular la expansión del determinante de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a lo largo del primer renglón implica más cálculos de los necesarios. En particular, se necesitaría calcular determinantes de 4×4 para encontrar los determinantes que se buscan, los de 5×5 (para empeorar las cosas estos determinantes de 4×4, a su vez, también tendrían que expandirse). Sin embargo, si se expanden a lo largo de la tercera columna, se encuentra que

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+3}(0)\det A_{13} + (-1)^{2+3}(0)\det A_{23} + (-1)^{3+3}(1)\det A_{33} \\ &\quad + (-1)^{4+3}(0)\det A_{43} + (-1)^{5+3}(0)\det A_{53} \\ &= \det A_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Existen varias buenas razones para evaluar estos determinantes de 4×4. Realizaremos la expansión sobre el renglón inferior:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{4+1}(3)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}(1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(3)(-54) + (1)(1)(2) \\ &= 164. \end{aligned}$$

◆

Por supuesto, no todas las matrices contienen ceros bien distribuidos como en el ejemplo 9, así que no siempre existe una opción obvia de expansión que se pueda elegir para evitar cálculos excesivos. En realidad, no se calculan determinantes de matrices grandes por medio de su expansión en cofactores. En vez de ello se emplean ciertas propiedades de los determinantes para que sea factible realizar los cálculos. Como es raro que se requiera considerar determinantes de orden superior a 3×3 dejaremos dichas propiedades y su significado para los ejercicios (véase en particular los ejercicios 26 y 27).

1.6 Ejercicios

1. Reescriba en términos de la base estándar para $\mathbf{R}^n$:

a) $(1, 2, 3, \ldots, n)$

b) $(1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots, 1, 0, -1)$ (suponga que n es un múltiplo de 3).

En los ejercicios 2 a 4 escriba los vectores dados sin recurrir a la notación básica estándar.

2. $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_n$

3. $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_4 + \cdots + (-1)^{n+1} n\mathbf{e}_n$

4. $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_n$

5. Calcule lo siguiente, donde $\mathbf{a} = (1, 3, 5, \ldots, 2n - 1)$ y $\mathbf{b} = (2, -4, 6, \ldots, (-1)^{n+1} 2n)$:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *c*) $-3\mathbf{a}$

d) $\|\mathbf{a}\|$ *e*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

6. Sea n un número par, compruebe la desigualdad del triángulo en $\mathbf{R}^n$ para $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, \ldots, 1)$.

7. Compruebe que se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz para los vectores $\mathbf{a} = (1, 2, \ldots, n)$ y $\mathbf{b} = (1, 1, \ldots, 1)$.

8. Si $\mathbf{a} = (1, -1, 7, 3, 2)$ y $\mathbf{b} = (2, 5, 0, 9, -1)$ calcule la proyección $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

9. Demuestre para todos los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| + \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|.$$

10. Demuestre el teorema de Pitágoras. Es decir, si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en $\mathbf{R}^n$, tales que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{c}\|^2.$$

¿Por qué se llama *teorema de Pitágoras*?

11. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores en $\mathbf{R}^n$. Demuestre que si $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales.

12. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores en $\mathbf{R}^n$. Demuestre que si $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| > \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, entonces el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es obtuso (es decir, mide más que $\pi/2$).

13. Describa "geométricamente" el conjunto de puntos en $\mathbf{R}^5$ que satisface la ecuación

$$2(x_1 - 1) + 3(x_2 + 2) - 7x_3 + x_4 - 4 - 5(x_5 + 1) = 0.$$

14. Para obtener algún dinero adicional, el lector decide imprimir cuatro tipos de playeras en serigrafía que venderá a distintos precios. Tiene un inventario de 20 playeras que puede vender a \$8 cada una, 30 playeras a \$10 cada una, 24 playeras a \$12 cada una y 20 playeras a \$15 cada una. Un amigo suyo opera un negocio de gorras de béisbol y tiene un inventario de 30 que puede vender a \$10 cada una, 16 gorras que puede vender a \$10 cada una, 20 a \$12 cada una y 28 a \$15 cada una. Usted le sugiere intercambiar la mitad del inventario de cada tipo de playera por la mitad de cada tipo de gorras. ¿Es probable que su amigo acepte la propuesta? Justifique su respuesta.

15. Suponga que usted opera una plantación que produce seis tipos de granos a precios de \$200, \$250, \$300, \$375, \$450 y \$500 por tonelada.

a) Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6)$ es el vector del abasto (lo que significa que x_i es el número de toneladas del grano i por comprar), exprese el costo total del abasto como el producto punto de dos vectores en $\mathbf{R}^6$.

b) Un cliente tiene un presupuesto de \$100,000 que usará para comprar sus granos. Exprese el conjunto de posibles vectores de abasto que el cliente puede adquirir. También describa el hiperplano de presupuesto que sea relevante en $\mathbf{R}^6$.

En los ejercicios 16 a 19 calcule las cantidades matriciales que se indican, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

16. $3A - 2B$ **17.** AC

18. DB **19.** $B^T D$

20. La **matriz identidad de** $n \times n$, que se denota como I o I_n, es la matriz cuyo ii-ésimo elemento es 1, y cuyos demás elementos son cero. Es decir,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Escriba en forma explícita I_2, I_3 e I_4.

b) La razón por la que I se llama matriz identidad es que se comporta como sigue: Sea A cualquier matriz de $m \times n$. Entonces

i. $AI_n = A$.

ii. $I_m A = A$.

Demuestre estos resultados. (Sugerencia: ¿cuáles son los elementos ij-ésimos de los productos en los incisos (i) e (ii)?).

Evalúe los determinantes dados en los ejercicios 21 a 23.

21. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 6 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

24. Demuestre que una matriz que tiene un renglón o una columna compuesta por completo de ceros tiene un determinante igual a cero.

25. Una matriz **triangular superior** es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son todos iguales a cero. (Nota: la **diagonal principal** es aquella que va de la parte superior izquierda a la inferior derecha). Por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

es una triangular superior.

a) Dé una definición análoga de matriz **triangular inferior** y un ejemplo.

b) Use la expansión en cofactores para demostrar que el determinante de una matriz triangular A superior o inferior de $n \times n$ es el producto de los elementos en la diagonal principal. Es decir, $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

26. Algunas propiedades de los determinantes. Los ejercicios 24 y 25 ilustran que no es difícil calcular determinantes incluso de matrices grandes, siempre que tengan una forma adecuada. Las operaciones siguientes (llamadas **operaciones elementales en un renglón**) se usan para transformar una matriz de $n \times n$ en una de forma triangular superior:

I. Intercambiar renglones i y j.

II. Multiplicar el renglón i por un escalar distinto de cero.

III. Sumar un múltiplo del renglón i a otro renglón j (el renglón i permanece sin cambio).

Por ejemplo, se puede transformar la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

en una de forma triangular superior en tres pasos:

Paso 1. Intercambiar los renglones 1 y 2 (esto deja un elemento distinto de cero en la esquina superior izquierda):

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Paso 2. Sumar el renglón 1 multiplicado por -1 al renglón 3 (esto elimina los elementos distintos de cero por debajo del elemento en la esquina superior izquierda):

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Paso 3. Sumar 2 al renglón 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

La pregunta es, ¿cómo afectan estas operaciones al determinante?

a) Por medio de ejemplos establezca una conjetura sobre el efecto que una operación elemental del tipo I tiene en el determinante (es decir, si la matriz B resulta de la matriz A porque se ejecuta una sola operación elemental del tipo I, ¿cómo se relacionan el $\det A$ y el $\det B$?) No necesita demostrar que sus resultados son correctos.

b) Repita el inciso anterior para el caso de una operación elemental del tipo III.

c) Demuestre que si B resulta de A al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de A por el escalar c (operación tipo II), entonces $\det B = c \cdot \det A$.

27. Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

utilizando operaciones elementales para transformar A en una matriz triangular superior y los resultados del ejercicio 26 para deducir cómo se relacionan el determinante de A y el de la matriz final.

28. *a*) ¿Es $\det(A + B) = \det A + \det B$? Justifique su respuesta.

b) Calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3+2 & 1-1 & 5+1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

y compare sus resultados.

c) Calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2+3 \\ 0 & 4 & -1+5 \\ -1 & 0 & 0-2 \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

y compare sus resultados.

d) Establezca una conjetura y demuestre un resultado acerca de las sumas de determinantes (tal vez el lector desee construir más ejemplos como los de los incisos *b*) y *c*)).

29. Es un hecho que si A y B son cualesquiera matrices de $n \times n$, entonces

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Use este hecho para demostrar que $\det(AB) = \det(BA)$ (Recuerde que en general $AB \neq \det BA$).

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es ***invertible*** *(o* ***no singular****) si existe otra matriz de $n \times n$ con la propiedad de que*

$$AB = BA = I_n,$$

donde I_n denota la matriz identidad de $n \times n$ (véase el ejercicio 20). La matriz B se llama ***inversa*** *de la matriz A. Los ejercicios 30 a 38 conciernen a varios aspectos de las matrices y sus inversas.*

30. *a*) Verifique que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es una inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Compruebe que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ es una inversa de $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

31. Utilice la definición de matriz inversa para encontrar una inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

32. Trate de encontrar una matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Qué pasa?

33. Demuestre que si una matriz A de $n \times n$ es invertible, entonces A puede tener solo una matriz inversa. Entonces escribimos A^{-1} para denotar la inversa única de una matriz A no singular. (Sugerencia: suponga que A tiene dos inversas B y C. Considere $B(AC)$).

34. Suponga que A y B son matrices invertibles de $n \times n$. Demuestre que la matriz producto AB es invertible mediante la comprobación de que su inversa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

35. *a*) Demuestre que si A es invertible, entonces el $\det A \neq 0$. (De hecho, lo contrario también es cierto).

b) Demuestre que si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

36. *a*) Demuestre que si $ad - bc \neq 0$, entonces una matriz general de $2 \times 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tiene la matriz

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

como inversa.

b) Use esta fórmula para encontrar una inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

37. Si A es una matriz de 3×3 y el $\det A \neq 0$, entonces hay una fórmula (algo complicada) para obtener A^{-1}. En particular,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix},$$

donde A_{ij} denota la submatriz de A obtenida mediante la eliminación del i-ésimo renglón y la j-ésima columna (véase la definición 6.5). Utilice esta fórmula para encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

De manera más general, si A es cualquier matriz de $n \times n$ y $\det A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A,$$

donde adj A es la **matriz adjunta** de A, es decir, la matriz cuyo ij-ésimo elemento es $(-1)^{i+j}|A_{ji}|$. (Nota: la fórmula para la matriz inversa que usa las adjuntas tiene más interés teórico que práctico, ya que existen métodos de cálculo más eficientes para obtener la inversa, cuando esta existe).

38. Repita el ejercicio 37 con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El producto cruz en $\mathbf{R}^n$. *Aunque no es posible definir un producto cruz de dos vectores en $\mathbf{R}^n$ como se hizo para dos vectores en $\mathbf{R}^3$, se puede construir un "producto cruz" de $n-1$ vectores en $\mathbf{R}^n$ que se comporte de manera análoga al producto*

cruz en tres dimensiones. Para ser específicos, si

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots,$$
$$\mathbf{a}_{n-1} = (a_{n-11}, a_{n-12}, \ldots, a_{n-1n})$$

son $n-1$ vectores en $\mathbf{R}^n$, definimos a $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ como el vector en $\mathbf{R}^n$ dado por el determinante simbólico

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}.$$

(Aquí $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ son los vectores básicos estándar para $\mathbf{R}^n$). Los ejercicios 39 a 42 se refieren a este concepto generalizado del producto cruz.

39. Calcule el siguiente producto cruz en $\mathbf{R}^4$:

$$(1, 2, -1, 3) \times (0, 2, -3, 1) \times (-5, 1, 6, 0).$$

40. Use el resultado de los ejercicios 26 y 28 para demostrar que

a) $\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$
$= -(\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1})$,
$1 \le i \le n-1, 1 \le j \le n-1$

b) $\mathbf{a}_1 \times \cdots \times k\mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$
$= k(\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1})$,
$1 \le i \le n-1$,

c) $\mathbf{a}_1 \times \cdots \times (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}) \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$
$= \mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} +$
$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{b} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$,
$1 \le i \le n-1$, toda $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$.

d) Demuestre que si $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ es cualquier vector en $\mathbf{R}^n$, entonces

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1})$$

es dado por el determinante

$$\begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}.$$

41. Demuestre que el vector $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ es ortogonal a $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

42. Use el concepto generalizado de producto cruz para encontrar una ecuación del hiperplano (tetradimensional) en $\mathbf{R}^5$ que pasa por los cinco puntos $P_0(1, 0, 3, 0, 4)$, $P_1(2, -1, 0, 0, 5)$, $P_2(7, 0, 0, 2, 0)$, $P_3(2, 0, 3, 0, 4)$ y $P_4(1, -1, 3, 0, 4)$.

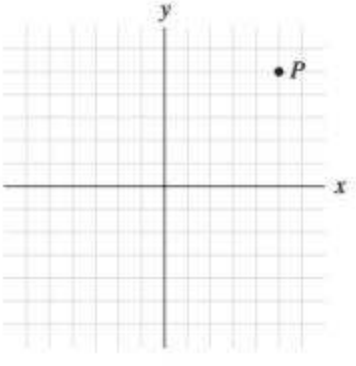


Figura 1.82 Sistema de coordenadas cartesianas.

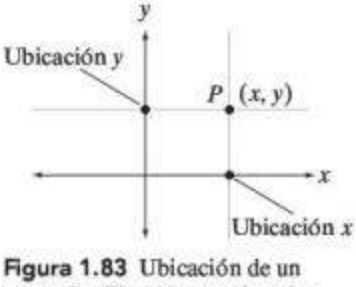


Figura 1.83 Ubicación de un punto P utilizando coordenadas cartesianas.

1.7 Sistemas de nuevas coordenadas

Esperamos que se sienta cómodo con las coordenadas cartesianas (o rectangulares) para $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$. El sistema de coordenadas cartesianas continuará siendo de importancia primordial para nosotros, pero de vez en vez encontraremos que tiene ventajas emplear otros sistemas de coordenadas. En $\mathbf{R}^2$ son útiles las coordenadas polares para describir figuras con simetría circular. En $\mathbf{R}^3$ hay dos sistemas de coordenadas que son particularmente valiosas, además de las cartesianas: las cilíndricas y las esféricas. Como veremos, las coordenadas cilíndricas y esféricas son una forma de adaptar las coordenadas polares del plano para usarlas en tres dimensiones.

Coordenadas cartesianas y polares en $\mathbf{R}^2$

El lector puede entender las **coordenadas cartesianas** (o **rectangulares**) (x, y) de un punto P en $\mathbf{R}^2$ del modo siguiente: imagine que todo el plano está cubierto por líneas horizontales y verticales, como se aprecia en la figura 1.82. Entonces, el punto P se encuentra en el cruce exacto de una línea vertical y una horizontal. La coordenada x de P está donde la línea vertical interseca al eje x, y la coordenada y está donde la línea horizontal interseca al eje y (véase la figura 1.83) (por supuesto, ya se han asignado coordenadas a lo largo de los ejes, así que el punto cero de cada eje está en el punto en donde estos se intersecan. También es normal que se marque la misma unidad de distancia en cada eje). Observe que, debido a esta geometría, cada punto en $\mathbf{R}^2$ tiene un conjunto único de coordenadas cartesianas.

Las **coordenadas polares** se definen considerando diferente información geométrica. Ahora imagine que el plano está cubierto por círculos concéntricos con

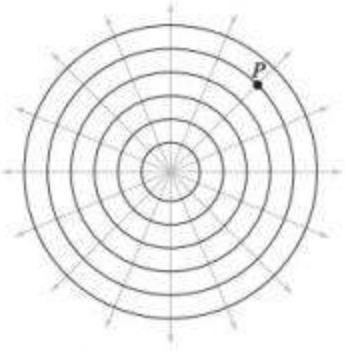


Figura 1.84 Sistema de coordenadas polares.

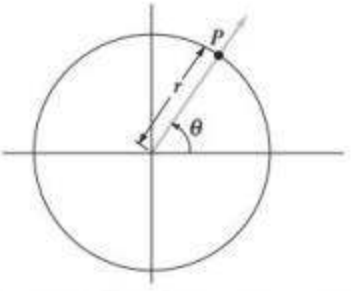


Figura 1.85 Ubicación de un punto P utilizando coordenadas polares.

centro en el origen y que de este emanan rayos. Entonces cada punto, excepto el origen, se encuentra exactamente en uno de dichos círculos y en uno de tales rayos.

El origen en sí es especial: ningún círculo pasa por él y todos los rayos comienzan ahí (véase la figura 1.84). Para los puntos P distintos del origen se asignan a P las coordenadas polares (r, θ), donde r es el radio del círculo en el que se halla P y θ es el ángulo entre el eje positivo de las x y el rayo en el que se ubica P. (θ se mide como abriéndose en sentido contrario al de las manecillas del reloj). El origen es una excepción: se le asignan las coordenadas polares $(0, \theta)$, donde θ puede ser cualquier ángulo (véase la figura 1.85). Como hemos descrito las coordenadas polares, $r \geq 0$ porque r es el radio de un círculo. También tiene sentido requerir que $0 \leq \theta < 2\pi$, para que todo punto del plano, excepto el origen, tenga un solo par determinado de coordenadas polares. Sin embargo, ocasionalmente resulta útil *no* restringir r a ser no negativo y a θ entre 0 y 2π. En tal caso, *ningún* punto de $\mathbf{R}^2$ será descrito por un par único de coordenadas polares. Si P tiene coordenadas polares (r, θ), entonces también tiene $(r, \theta + 2n\pi)$ y $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$ como coordenadas, donde n puede ser cualquier entero. (Para ubicar el punto con las coordenadas (r, θ), donde $r < 0$, construya el rayo haciendo un ángulo θ con respecto del eje positivo de las x, y en vez de avanzar $|r|$ unidades hacia fuera del origen a lo largo de este rayo, hay que ir $|r|$ unidades en la dirección *opuesta*, como se ilustra en la figura 1.86).

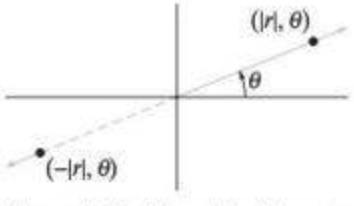


Figura 1.86 Ubicación del punto con coordenadas polares (r, θ), donde $r < 0$.

EJEMPLO 1 Tal vez el lector ya esté familiarizado con las coordenadas polares. No obstante, debe asegurarse de comprender que los puntos dibujados en la figura 1.87 tienen las coordenadas que se indican. ◆

θ	$r = 6\cos\theta$
0	6
$\pi/6$	$3\sqrt{3}$
$\pi/4$	$3\sqrt{2}$
$\pi/3$	3
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-3
$3\pi/4$	$-3\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-3\sqrt{3}$
π	-6
$7\pi/6$	$-3\sqrt{3}$
$5\pi/4$	$-3\sqrt{2}$
$4\pi/3$	-3
$3\pi/2$	0
$5\pi/3$	3
$7\pi/4$	$3\sqrt{2}$

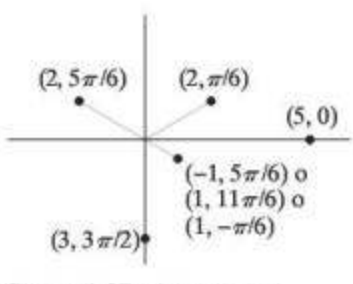


Figura 1.87 Figura para el ejemplo 1.

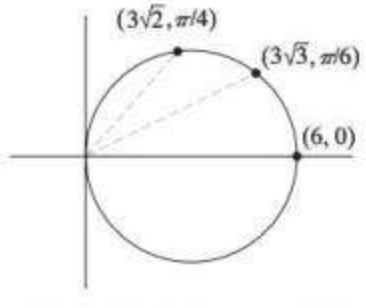


Figura 1.88 Gráfica de $r = 6\cos\theta$ en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Grafiquemos la curva dada por la ecuación polar $r = 6\cos\theta$ (véase la figura 1.88). Podemos comenzar a adquirir una sensación de la gráfica mediante la compilación de valores, como los que aparecen en la tabla adyacente.

Por consiguiente, r disminuye de 6 a 0 a medida que θ aumenta de 0 a $\pi/2$; r disminuye de 0 a -6 (o no está definida, si se considera que r es no negativa) a medida que θ varía de $\pi/2$ a π; r aumenta de -6 a 0 a medida que θ varía de π a $3\pi/2$; y r aumenta de 0 a 6 a medida que θ varía de $3\pi/2$ a 2π. Para graficar la curva resultante imagine una pantalla de radar: a medida que θ se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj de 0 a 2π, el punto (r, θ) de la gráfica es dibujado como el "pestañeo" apropiado en la pantalla de radar. Observe que la curva en realidad se dibuja dos veces: una vez que θ varía de 0 a π, y otra cuando θ varía de π a 2π. De manera alternativa, la curva se dibuja solo una vez si solo se permiten valores de θ que generen valores de r no negativos. La gráfica resultante parece ser un círculo de radio 3 (no centrado en el origen) y, de hecho, se puede ver (como en el ejemplo 3) que la gráfica es en verdad dicho círculo. ◆

Las conversiones básicas entre las coordenadas polares y las cartesianas son dadas por las relaciones siguientes:

$$\text{Polar a cartesiana:} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}; \tag{1}$$

$$\text{Cartesiana a polar:} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = y/x \end{cases}. \tag{2}$$

Observe que las ecuaciones (2) no solo determinan r y θ en términos de x y y. Esto es muy aceptable porque no siempre queremos insistir en que r sea no negativa y θ esté entre 0 y 2π. Sin embargo, si restringimos r y θ, entonces son dadas en términos de x y y mediante las fórmulas siguientes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} y/x & \text{si } x > 0,\ y \geq 0 \\ \tan^{-1} y/x + 2\pi & \text{si } x > 0,\ y < 0 \\ \tan^{-1} y/x + \pi & \text{si } x < 0,\ y \geq 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } x = 0,\ y < 0 \\ \text{indeterminado} & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$

La fórmula complicada para θ surge porque se requiere que $0 \leq \theta < 2\pi$, mientras que la función inversa de la tangente devuelva valores solo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. ¡Ahora el lector ve por qué las ecuaciones dadas en (2) son una mejor opción!

EJEMPLO 3 Se podrían usar las fórmulas en (1) y (2) para demostrar que la curva en el ejemplo 2 en realidad es un círculo. Convertir la ecuación polar $r = 6\cos\theta$ que define la curva en la ecuación cartesiana correspondiente requiere un poco de ingenio. El truco consiste en multiplicar ambos lados de la ecuación por r. Al hacerlo se obtiene

$$r^2 = 6r\cos\theta.$$

Ahora (1) y (2) dan inmediatamente

$$x^2 + y^2 = 6x.$$

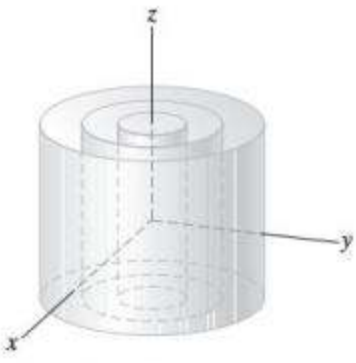


Figura 1.89 Sistema de coordenadas cilíndricas.

Completamos el cuadrado en x para encontrar que esta ecuación se puede reescribir como

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9,$$

que es en verdad un círculo de radio 3 con centro en (3, 0). ◆

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas en $\mathbf{R}^3$ son una forma "ingenua" de generalizar las coordenadas polares a tres dimensiones, en el sentido que no son nada más que coordenadas polares usadas en lugar de las coordenadas x y y (la coordenada z queda sin cambio). La geometría es la siguiente: excepto para el eje z, se llena todo el espacio con cilindros extendidos al infinito, con ejes a lo largo del eje z, como se ilustra en la figura 1.89. Entonces, cualquier punto P en $\mathbf{R}^3$ que no esté en el eje z se encuentra exactamente en uno de dichos cilindros. Entonces, para localizar dicho punto basta dar el radio del cilindro, el ángulo θ de la circunferencia alrededor del cilindro y la posición vertical z a lo largo de este. Las **coordenadas cilíndricas** de P son (r, θ, z), como se muestra en la figura 1.90. Algebraicamente, las ecuaciones en (1) y (2) se pueden extender para producir las conversiones básicas entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas.

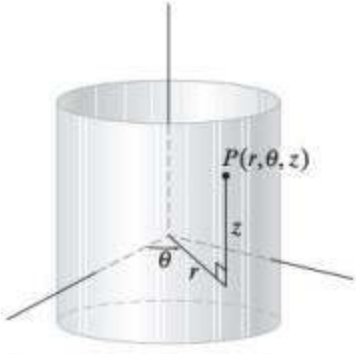


Figura 1.90 Ubicación de un punto P utilizando coordenadas cilíndricas.

Las conversiones básicas entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas son dadas por las siguientes relaciones:

$$\text{Cilíndricas a cartesianas:} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}; \tag{3}$$

$$\text{Cartesianas a cilíndricas:} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = y/x \\ z = z \end{cases}. \tag{4}$$

Igual que con las coordenadas polares, si se establecen las restricciones de que $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces todos los puntos de $\mathbf{R}^3$, excepto el eje z, tienen un conjunto único de coordenadas cilíndricas. Un punto sobre el eje z con coordenadas cartesianas $(0, 0, z_0)$ tiene coordenadas cilíndricas $(0, \theta, z_0)$, donde θ puede ser cualquier ángulo.

Figura 1.91 Gráfica de la ecuación cilíndrica $r = r_0$.

Las coordenadas cilíndricas son útiles para estudiar objetos que poseen un eje de simetría. Antes de explorar algunos ejemplos entendamos las tres superficies "coordenadas constantes".

- La superficie $r = r_0$ es, por supuesto, solo un cilindro de radio r_0 que tiene como eje al eje z (véase la figura 1.91).
- La superficie $\theta = \theta_0$ es un plano vertical que contiene solo al eje z (o un medio plano con borde en el eje z si se considera que $r \geq 0$ (véase la figura 1.92).
- La superficie $z = z_0$ es un plano horizontal (véase la figura 1.93).

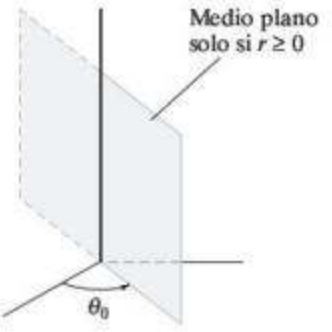


Figura 1.92 Gráfica de $\theta = \theta_0$.

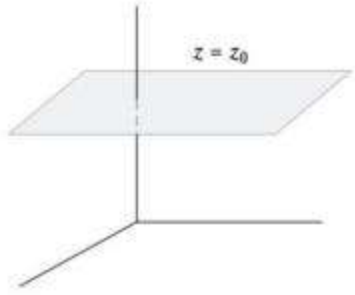


Figura 1.93 Gráfica de $z = z_0$.

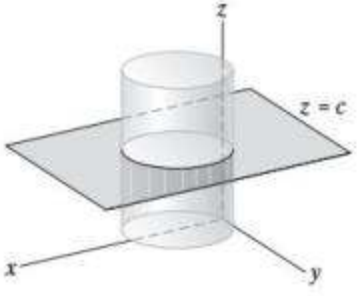


Figura 1.94 Gráfica de $r = 6\cos\theta$ en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 4 Grafique la superficie que tiene la ecuación cilíndrica $r = 6\cos\theta$ (esta ecuación es idéntica a la del ejemplo 2). En particular, z no aparece en esta ecuación. Lo que esto significa es que si la superficie es cortada por el plano horizontal $z = c$, donde c es una constante, veremos el círculo que aparece en el ejemplo 2, no importa cuál sea el valor de c. Si apilamos esas secciones circulares, entonces toda la superficie es un cilindro circular de radio 3 con eje paralelo al eje z (y que pasa por el punto (3, 0, 0) en coordenadas cilíndricas). Esta superficie es la que se muestra en la figura 1.94. ◆

EJEMPLO 5 Grafique la superficie cuya ecuación es $z = 2r$ en coordenadas cilíndricas.

Aquí, la variable θ no aparece en la ecuación, lo que significa que la superficie en cuestión será simétrica circularmente con respecto del eje z. En otras palabras, si se corta la superficie con cualquier plano de la forma $\theta =$ constante (o medio plano si se hace que $r \geq 0$), veremos la misma curva, es decir, una recta (respectivamente, una media recta) de pendiente 2. A medida que varíe el plano constante θ, esta línea genera un cono, como se aprecia en la figura 1.95. El cono consta solo de la mitad superior (**napa**) cuando establecemos la restricción de que el valor de r sea no negativo.

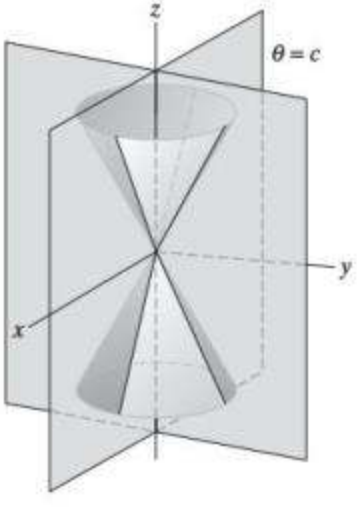


Figura 1.95 Gráfica de $z = 2r$ en coordenadas cilíndricas.

La ecuación cartesiana de este cono se determina con facilidad. Si utilizamos las fórmulas (4), tenemos que

$$z = 2r \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 = 4(x^2 + y^2).$$

Como z puede ser positiva o negativa, esta última ecuación cartesiana describe al cono con ambas napas. Si queremos solo la napa superior, entonces la ecuación $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ la describe. De manera similar, $z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$ describe la napa inferior. ◆

Coordenadas esféricas

Se llena todo el espacio con esferas con centro en el origen, como se ilustra en la figura 1.96. Entonces, cada punto $P \in \mathbf{R}^3$, excepto el origen, está solo en una de dichas esferas. En términos aproximados, las **coordenadas esféricas** de P se dan por medio de especificar el radio ρ de la esfera que contiene a P y la "latitud y longitud" de P a lo largo de dicha esfera. Con más precisión, las coordenadas esféricas (ρ, φ, θ) de P están definidas como sigue: ρ es la distancia de P al origen, φ es el ángulo entre el eje z positivo y el rayo que une al origen con P; y θ es el ángulo entre el eje x positivo y el rayo que se forma al trazar una perpendicular de P hacia el plano xy (véase la figura 1.97). La coordenada θ es exactamente la misma que la coordenada θ usada en las coordenadas cilíndricas. (**Precaución:** es común que los físicos prefieran invertir los roles de φ y θ en ciertos paquetes de software para gráficas).

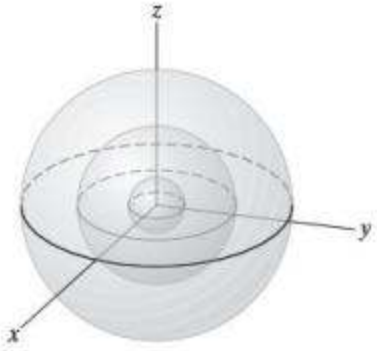


Figura 1.96 Sistema de coordenadas esféricas.

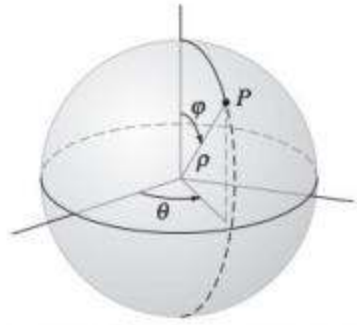


Figura 1.97 Ubicación del punto P utilizando coordenadas esféricas.

Es una práctica estándar imponer las restricciones siguientes en el rango de valores de las coordenadas individuales:

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{5}$$

Con dichas restricciones, todos los puntos de $\mathbf{R}^3$, excepto aquellos sobre el eje z, tienen un conjunto único de coordenadas esféricas. Los puntos a lo largo del eje z, excepto el origen, tienen coordenadas de la forma $(\rho_0, 0, \theta)$ o (ρ_0, π, θ), donde ρ_0 es una constante positiva y θ es arbitrario. El origen tiene coordenadas esféricas $(0, \varphi, \theta)$, donde tanto φ como θ son arbitrarias.

EJEMPLO 6 En la figura 1.98 se muestran varios puntos y sus correspondientes coordenadas esféricas. ◆

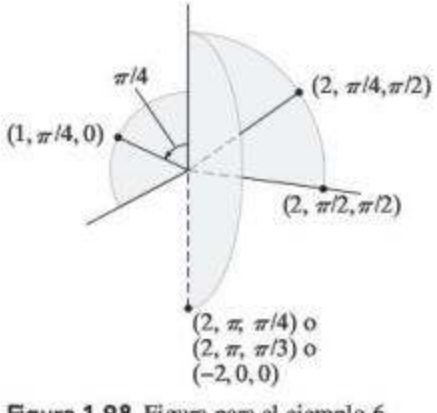


Figura 1.98 Figura para el ejemplo 6.

Figura 1.99 Gráfica de $\rho = \rho_0$ (> 0).

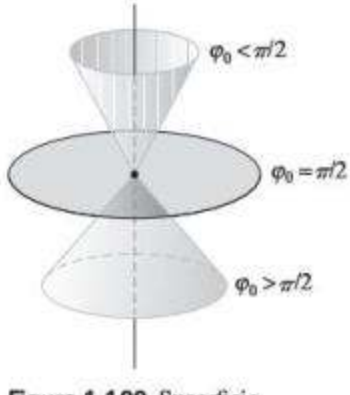


Figura 1.100 Superficie esférica $\varphi = \varphi_0$, dibujada para distintos valores de φ_0.

Las coordenadas esféricas son útiles especialmente para describir objetos que tienen un centro de simetría. Con las restricciones dadas por las desigualdades (5), la superficie coordenada constante $\rho = \rho_0$ $(\rho_0 > 0)$ es, por supuesto, una esfera de radio ρ_0, como se aprecia en la figura 1.99. La superficie dada por $\theta = \theta_0$ es un medio plano igual que en el caso cilíndrico. La superficie $\varphi = \varphi_0$ es un cono aplanado único si $\varphi_0 \neq \pi/2$ y es el plano xy si $\varphi_0 = \pi/2$ (y es el eje z positivo o negativo si $\varphi_0 = 0$ o π) (véase la figura 1.100). Si no se requiere que ρ sea no negativo, entonces los conos incluirían ambas napas.

Las ecuaciones básicas que relacionan las coordenadas esféricas con las cilíndricas y cartesianas son las siguientes:

Esféricas/cilíndricas:

$$\begin{cases} r = \rho \operatorname{sen}\varphi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 = r^2 + z^2 \\ \tan\varphi = r/z \\ \theta = \theta \end{cases} . \tag{6}$$

Esféricas/cartesianas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}/z \\ \tan\theta = y/x \end{cases} . \tag{7}$$

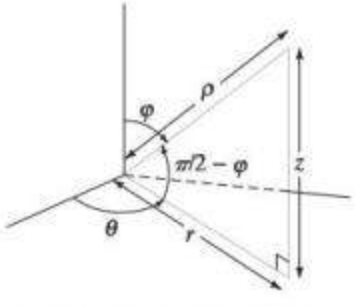


Figura 1.101 Conversión de coordenadas esféricas a cilíndricas cuando $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

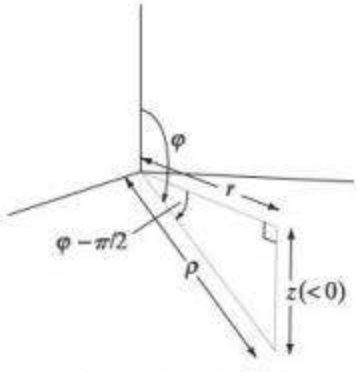


Figura 1.102 Conversión de coordenadas esféricas a cilíndricas cuando $\pi/2 < \varphi < \pi$.

Si utilizamos trigonometría básica, no es difícil establecer las conversiones en (6). Del triángulo rectángulo que aparece en la figura 1.101 se tiene

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{r}{\rho}.$$

Entonces,

$$r = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \rho \operatorname{sen}\varphi.$$

De manera similar,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{z}{\rho},$$

por lo que

$$z = \rho \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \rho \cos\varphi.$$

Por consiguiente, las fórmulas (6) rigen cuando $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Si $\pi/2 < \varphi \leq \pi$, entonces se emplea la figura 1.102. Así,

$$r = \rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \rho \operatorname{sen}\varphi,$$

y

$$z = -\rho \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \rho \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \rho \cos\varphi.$$

Por lo tanto, las relaciones (6) se cumplen en general. Las ecuaciones en (7) se obtienen sustituyendo las de (3) y (4) en (6).

EJEMPLO 7 La ecuación cilíndrica $z = 2r$ del ejemplo 5 se convierte por medio de (6) en la ecuación esférica

$$\rho \cos \varphi = 2\rho \operatorname{sen} \varphi.$$

Por lo tanto,

$$\tan \varphi = \frac{1}{2} \iff \varphi = \tan^{-1} \frac{1}{2} \approx 26°.$$

Así, la ecuación define un cono (como se vio). La ecuación esférica es en especial sencilla en el sentido que involucra una sola coordenada. ◆

EJEMPLO 8 No todas las ecuaciones esféricas son mejoras de sus homólogas cilíndricas o cartesianas. Por ejemplo, la ecuación cartesiana $6x = x^2 + y^2$ (cuyo equivalente cilíndrico polar es $r = 6 \cos \theta$) se convierte en

$$6\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta$$

a partir de las fórmulas (7). Se simplifica,

$$\begin{aligned} & 6\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ \iff \quad & 6\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \\ \iff \quad & 6 \cos\theta = \rho \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}$$

Esta ecuación esférica es *más* complicada que la ecuación cartesiana original, en cuanto a que están involucradas tres coordenadas esféricas. Por lo tanto, no es del todo obvio que la ecuación esférica describa un cilindro. ◆

φ	$\rho = 2a \cos \varphi$
0	$2a$
$\pi/6$	$\sqrt{3}a$
$\pi/4$	$\sqrt{2}a$
$\pi/3$	a
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	$-a$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}a$
π	$-2a$

EJEMPLO 9 Hagamos una gráfica de la superficie con ecuación esférica $\rho = 2a \cos \varphi$, donde $a > 0$. Igual que con la gráfica del cono con ecuación cilíndrica $z = 2r$, observe que la ecuación es independiente de θ. Por consiguiente, todas las secciones de esta superficie que se hacen cortando el medio plano $\theta = c$ deben ser iguales. Si se compilan los valores que aparecen en la tabla adyacente, entonces la sección de la superficie en el medio plano $\theta = 0$ es la que aparece en la figura 1.103. Como esta sección debe ser idéntica en todo a los demás medios planos constantes θ, vemos que la superficie parece una esfera de radio a tangente al plano xy, como se observa en la figura 1.104.

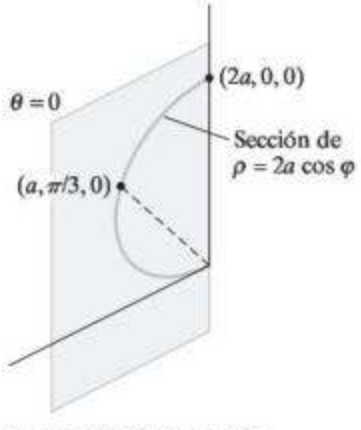


Figura 1.103 La sección transversal de $\rho = 2a \cos \varphi$ en el medio plano $\theta = 0$.

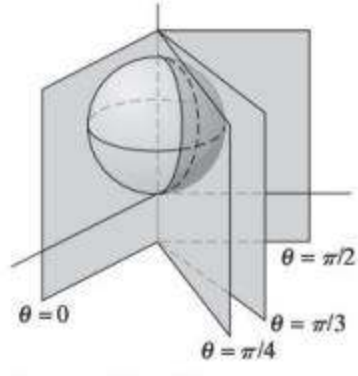


Figura 1.104 Gráfica de $\rho = 2a \cos \varphi$.

La ecuación cartesiana de la superficie se determina multiplicando ambos lados de la ecuación esférica por ρ y utilizando las ecuaciones de conversión en (7):

$$\begin{aligned} \rho = 2a\cos\varphi &\Longrightarrow \rho^2 = 2a\rho\cos\varphi \\ &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2az \\ &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \end{aligned}$$

al completar el cuadrado en z. Esta última ecuación se reconoce como la de una esfera de radio a y centro en $(0, 0, a)$ en coordenadas cartesianas. ◆

EJEMPLO 10 La NASA lanza una sonda espacial de 10 pies de diámetro. Por desgracia, una tormenta de meteoritos empuja al vehículo fuera de su curso y hace que se incruste parcialmente en la superficie de Venus, a una profundidad de un cuarto de su diámetro. Para tratar de reprogramar la computadora a bordo de la sonda con el fin de desincrustarla de Venus, es necesario describir la parte incrustada de la sonda en coordenadas esféricas. Encontremos la descripción deseada suponiendo que la superficie de Venus es esencialmente plana en relación con la sonda y que el origen de nuestro sistema de coordenadas está en el centro de la sonda.

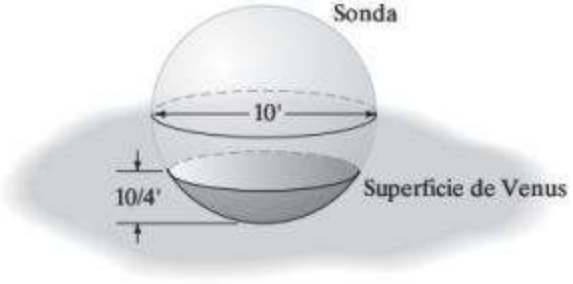


Figura 1.105 La sonda espacial del ejemplo 10.

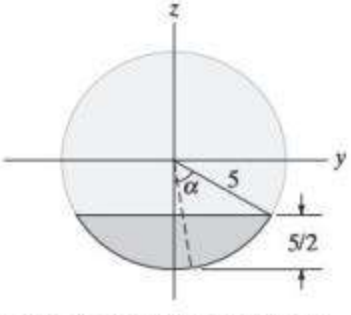


Figura 1.106 Una sección de la sonda del ejemplo 10.

La situación se ilustra en la figura 1.105. La parte sepultada de la sonda tiene una simetría evidente con respecto del eje z. Es decir, cualquier sección hecha por el medio plano θ = constante parece igual que cualquier otra. Entonces, θ varía entre 0 y 2π. En la figura 1.106 se ilustra una sección común de la sonda. La trigonometría elemental indica que para el ángulo α en la figura 1.106,

$$\cos\alpha = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \pi/3$. Así, el ángulo esférico φ (que se abre a partir del eje z *positivo*) varía de $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$ a π a medida que genera la parte sepultada de la sonda. Finalmente, observe que para un valor dado de φ entre $2\pi/3$ y π, el valor de ρ es limitado por la superficie de Venus (el plano $z = -\frac{5}{2}$ en coordenadas cartesianas) y la superficie esférica de la sonda (cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\rho = 5$). Véase la figura 1.107. A partir de las fórmulas en (7), la ecuación $z = -\frac{5}{2}$ corresponde a la ecuación esférica $\rho\cos\varphi = -\frac{5}{2}$ o, en forma equivalente, a $\rho = -\frac{5}{2}\sec\varphi$. Por lo tanto, la parte incrustada de la sonda se puede definir por el conjunto

$$\left\{(\rho, \varphi, \theta) \;\middle|\; -\frac{5}{2}\sec\varphi \le \rho \le 5,\ \frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi\right\}.$$ ◆

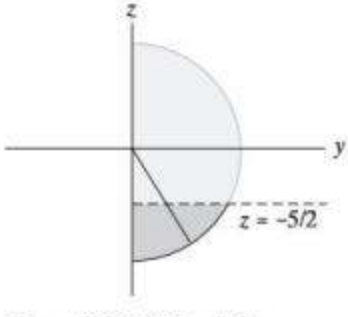


Figura 1.107 Vista de las coordenadas de la sección transversal de la sonda del ejemplo 10.

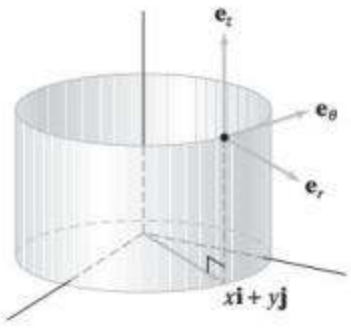


Figura 1.108 Vectores básicos estándar para el sistema de coordenadas cilíndricas.

Bases estándar para las coordenadas cilíndricas y esféricas

En coordenadas cartesianas hay tres vectores unitarios especiales, **i**, **j** y **k** que apuntan en las direcciones en que aumentan las coordenadas x, y y z, respectivamente. Encontramos conjuntos correspondientes de vectores para coordenadas cilíndricas y esféricas. Es decir, en cada conjunto de coordenadas buscamos vectores unitarios mutuamente ortogonales que señalen en las direcciones en que aumentan los valores de las coordenadas.

En coordenadas cilíndricas, la situación es la que se observa en la figura 1.108. Los vectores $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ que forman la **base estándar** de las coordenadas cilíndricas son vectores unitarios que apuntan en la dirección en la que solo aumenta la coordenada indicada por el subíndice. Hay una diferencia importante entre los vectores básicos estándar en coordenadas cartesianas y aquellos en coordenadas cilíndricas y cartesianas. En el primer caso, **i**, **j** y **k** no varían de un punto a otro. Sin embargo, los vectores $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ *sí* cambian a medida que nos movemos de uno a otro punto.

Ahora se darán expresiones para $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$. Como la coordenada cilíndrica z es la misma que la coordenada cartesiana z, debemos tener $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$. El vector $\mathbf{e}_r$ debe apuntar radialmente hacia fuera del eje z sin componente **k**. En un punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ (coordenadas cartesianas), el vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ tiene esta propiedad. Al normalizar para obtener un vector unitario (véase la proposición 3.4 de la sección 1.3) se obtiene

$$\mathbf{e}_r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Con $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_z$, ahora es sencillo definir $\mathbf{e}_\theta$, puesto que debe ser perpendicular tanto a $\mathbf{e}_r$ como a $\mathbf{e}_z$. Se toma

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(La razón de esta elección de producto cruz como opuesta a $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z$ es que $\mathbf{e}_\theta$ apunta en la dirección en que se *incrementa* θ). Para resumir y utilizar las conversiones de coordenadas cilíndricas a cartesianas dadas en (3),

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j};\\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j};\\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{8}$$

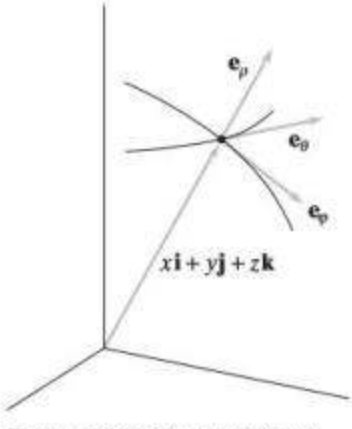


Figura 1.109 Vectores básicos estándar para el sistema de coordenadas esféricas.

En coordenadas esféricas, la situación es la que se ilustra en la figura 1.109. En particular hay tres vectores unitarios $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\theta$ que forman la **base estándar** para las coordenadas esféricas. Estos vectores cambian de dirección a medida que nos movemos de un punto a otro.

Se dan expresiones para $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\theta$. Como las coordenadas θ significan lo mismo tanto en el sistema esférico como en el cilíndrico, $\mathbf{e}_\theta$ en las esféricas es determinada por el valor de $\mathbf{e}_\theta$ en (8). En un punto (x, y, z), el vector $\mathbf{e}_\rho$ debe apuntar del

origen directamente a (x, y, z). Así, $\mathbf{e}_\rho$ se puede obtener normalizando $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Finalmente, $\mathbf{e}_\varphi$ no es otra cosa que $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\rho$. Si los cálculos que acabamos de describir se ejecutan en forma explícita y se emplean las fórmulas de conversión en (7), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\varphi\,\mathbf{k};\\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\
&= \cos\varphi\,\cos\theta\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{k};\\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Aunque los resultados de (8) y (9) no se usan con frecuencia, en ocasiones demuestran ser de utilidad.

Coordenadas hiperesféricas (opcional)

Hay una forma de dar un conjunto de coordenadas para $\mathbf{R}^n$ que generaliza las coordenadas esféricas sobre $\mathbf{R}^3$. Para $n \geq 3$ las **coordenadas hiperesféricas** de un punto $P \in \mathbf{R}^n$ son $(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ y están definidas por sus relaciones con las coordenadas cartesianas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de P como

$$\begin{cases}
x_1 = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\cdots\operatorname{sen}\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\\
x_2 = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\cdots\operatorname{sen}\varphi_{n-2}\operatorname{sen}\varphi_{n-1}\\
x_3 = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\cdots\operatorname{sen}\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\\
x_4 = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\cdots\operatorname{sen}\varphi_{n-4}\cos\varphi_{n-3}\\
\quad\vdots\\
x_n = \rho\cos\varphi_1
\end{cases}. \tag{10}$$

Para ser más explícitos, en la ecuación (10) anterior se toma

$$x_k = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\cdots\operatorname{sen}\varphi_{n-k}\cos\varphi_{n-k+1} \quad \text{para } k = 3, \ldots, n.$$

Observe que cuando $n = 3$, las relaciones en (10) se convierten en

$$\begin{cases}
x_1 = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2\\
x_2 = \rho\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2\\
x_3 = \rho\cos\varphi_1
\end{cases}.$$

Estas relaciones son iguales que aquellas dadas en (7), por lo que las coordenadas hiperesféricas son iguales que las esféricas cuando $n = 3$.

Por analogía con (5), es práctica estándar establecer las restricciones siguientes en el rango de valores de las coordenadas:

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \varphi_k \leq \pi \text{ para } k = 1, \ldots, n-2, \qquad 0 \leq \varphi_{n-1} < 2\pi. \tag{11}$$

Entonces, con estas restricciones podemos convertir las coordenadas hiperesféricas en cartesianas por medio de las fórmulas siguientes:

$$\begin{cases} \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ \tan\varphi_1 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}/x_n \\ \tan\varphi_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2}/x_{n-1} \\ \quad\vdots \\ \tan\varphi_{n-2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3 \\ \tan\varphi_{n-1} = x_2/x_1 \end{cases} \tag{12}$$

Las coordenadas hiperesféricas toman su nombre del hecho de que la **hipersuperficie** $(n-1)$ dimensional en $\mathbf{R}^n$ definida por la ecuación $\rho = \rho_0$, donde ρ_0 es una constante positiva, consta de puntos sobre la **hiperesfera** de radio ρ_0 definida en coordenadas cartesianas mediante la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \rho_0^2.$$

1.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 3 encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos de los cuales se dan las coordenadas polares.

1. $(\sqrt{2}, \pi/4)$

2. $(\sqrt{3}, 5\pi/6)$

3. $(3, 0)$

En los ejercicios 4 a 6 dé un conjunto de coordenadas polares para el punto del cual se dan las coordenadas cartesianas.

4. $(2\sqrt{3}, 2)$

5. $(-2, 2)$

6. $(-1, -2)$

En los ejercicios 7 a 9 determine las coordenadas cartesianas de los puntos de los cuales se dan las coordenadas cilíndricas.

7. $(2, 2, 2)$

8. $(\pi, \pi/2, 1)$

9. $(1, 2\pi/3, -2)$

En los ejercicios 10 a 13 calcule las coordenadas rectangulares de los puntos de los cuales se dan las coordenadas esféricas.

10. $(4, \pi/2, \pi/3)$

11. $(3, \pi/3, \pi/2)$

12. $(1, 3\pi/4, 2\pi/3)$

13. $(2, \pi, \pi/4)$

En los ejercicios 14 a 16 obtenga un conjunto de coordenadas cilíndricas de los puntos de los cuales se dan las coordenadas cartesianas.

14. $(-1, 0, 2)$

15. $(-1, \sqrt{3}, 13)$

16. $(5, 6, 3)$

En los ejercicios 17 y 18 encuentre un conjunto de coordenadas esféricas del punto del cual se dan las coordenadas cartesianas.

17. $(1, -1, \sqrt{6})$

18. $(0, \sqrt{3}, 1)$

19. Este problema se refiere a la superficie descrita por la ecuación $(r-2)^2 + z^2 = 1$ en coordenadas cilíndricas (suponga que $r \geq 0$).

a) Dibuje la intersección de esta superficie con el medio plano $\theta = \pi/2$.

b) Dibuje toda la superficie.

20. *a*) Grafique la curva en $\mathbf{R}^2$ que tiene la ecuación polar $r = 2a \operatorname{sen}\theta$, donde a es una constante positiva.

b) Haga la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene la ecuación esférica $\rho = 2a \operatorname{sen}\varphi$.

21. Construya la gráfica de la superficie cuya ecuación esférica es $\rho = 1 - \cos\varphi$.

22. Grafique la superficie cuya ecuación esférica es $\rho = 1 - \operatorname{sen}\varphi$.

En los ejercicios 23 a 25 traslade las ecuaciones siguientes del sistema de coordenadas que se da (por ejemplo, cartesiano, ci-

líndrico o esférico) a las ecuaciones de los otros dos sistemas. Además, identifique las superficies descritas por medio de los dibujos apropiados.

23. $\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta = 2$

24. $z^2 = 2x^2 + 2y^2$

25. $r = 0$

En los ejercicios 26 a 29 dibuje el sólido cuyas coordenadas cilíndricas (r, θ, z) satisfacen las desigualdades dadas.

26. $0 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le \pi/2, \quad -1 \le z \le 2$

27. $r \le z \le 5, \quad 0 \le \theta \le \pi$

28. $2r \le z \le 5 - 3r$

29. $r^2 - 1 \le z \le 5 - r^2$

En los ejercicios 30 a 35 dibuje el sólido cuyas coordenadas esféricas (ρ, φ, θ) satisfacen las desigualdades que se dan.

30. $1 \le \rho \le 2$

31. $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2$

32. $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

33. $0 \le \varphi \le \pi/4, \quad 0 \le \rho \le 2$

34. $0 \le \rho \le 2/\cos \varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/4$

35. $2 \cos \varphi \le \rho \le 3$

36. *a*) ¿Cuáles puntos P en $\mathbf{R}^2$ tienen las mismas coordenadas rectangulares y polares?

b) ¿Cuáles puntos P en $\mathbf{R}^3$ tienen las mismas coordenadas rectangulares y cilíndricas?

c) ¿Cuáles puntos P en $\mathbf{R}^3$ tienen las mismas coordenadas rectangulares y esféricas?

37. *a*) ¿Cómo están relacionadas las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = -f(\theta)$?

b) ¿Como están relacionadas las gráficas de las ecuaciones esféricas $\rho = f(\varphi, \theta)$ y $\rho = -f(\varphi, \theta)$?

c) Repita el inciso *a*) para las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = 3f(\theta)$.

d) Repita el inciso *b*) para las gráficas de $\rho = f(\varphi, \theta)$ y $\rho = 3f(\varphi, \theta)$.

38. Suponga que una superficie tiene una ecuación en coordenadas cilíndricas de la forma $z = f(r)$. Explique por qué debe ser una superficie de revolución.

39. *a*) Verifique que los vectores básicos $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ para las coordenadas cilíndricas son los vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

b) Compruebe que los vectores básicos $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\theta$ para las coordenadas esféricas son vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

40. Use las fórmulas en (8) para expresar **i**, **j** y **k** en términos de $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$.

41. Utilice las fórmulas en (9) para expresar **i**, **j** y **k** en términos de $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\theta$.

42. Considere el sólido en $\mathbf{R}^3$ que aparece en la figura 1.110.

a) Describa al sólido utilizando coordenadas esféricas.

b) Haga la descripción del sólido empleando coordenadas cilíndricas.

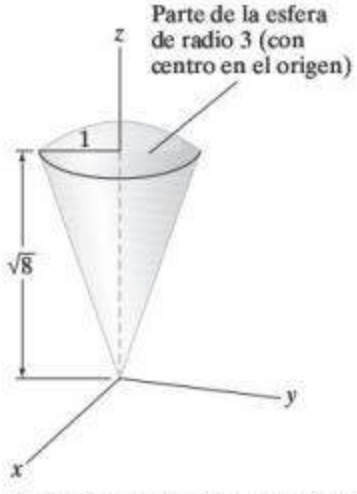


Figura 1.110 El sólido parecido a un cono de helado en $\mathbf{R}^3$ del ejercicio 42.

En los ejercicios 43 a 47 use las ecuaciones en (10) para establecer las de (12).

43. Demuestre que $\tan \varphi_{n-1} = x_2/x_1$.

44. *a*) Calcule $x_1^2 + x_2^2$ en términos de las coordenadas hiperesféricas $\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$.

b) Suponga las desigualdades en (11) y use el inciso *a*) para demostrar que $\varphi_{n-2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3$.

45. *a*) Calcule $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ en términos de las coordenadas hiperesféricas $\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-3}$.

b) Suponga las desigualdades en (11) y utilice el inciso *a*) para demostrar que $\tan \varphi_{n-3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/x_4$.

46. *a*) Para $k = 2, \ldots, n-1$ demuestre que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 \cdots \operatorname{sen}^2 \varphi_{n-k}$. (Nota: esto se logra mejor por medio de inducción matemática).

b) Suponga las desigualdades en (11) y utilice el inciso *a*) para demostrar que para $k = 2, \ldots, n-1$, $\tan \varphi_{n-k} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}/x_{k+1}$.

47. Demuestre que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \rho^2$.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 1

1. Si $\mathbf{a} = (1, 7, -9)$ y $\mathbf{b} = (1, -9, 7)$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
2. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores en $\mathbf{R}^3$ y k y l son números reales, entonces $(k - l)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} - l\mathbf{a} + k\mathbf{b} - l\mathbf{b}$.
3. El vector de desplazamiento de $P_1(1, 0, -1)$ al $P_2(5, 3, 2)$ es: $(-4, -3, -3)$.
4. La fuerza y la aceleración son cantidades vectoriales.
5. La velocidad y la rapidez son cantidades vectoriales.
6. El desplazamiento y la distancia son cantidades escalares.
7. Si una partícula está en el punto $(2, -1)$ en el plano, y se mueve de ahí con el vector de velocidad $\mathbf{v} = (1, 3)$, entonces, después de 2 unidades de tiempo, la partícula estará en el punto $(5, 1)$.
8. El vector $(2, 3, -2)$ es el mismo que $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
9. Un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(1, -2, 0)$ y es paralela a $(-2, 4, 7)$ es $x = 1 - 2t, y = 4t - 2, z = 7$.
10. Un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(1, 2, 3)$ y $(4, 3, 2)$ es $x = 4 - 3t$, $y = 3 - t, z = t + 2$.
11. La recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 - 3t$, $y = t + 1$, $z = 2t - 3$ tiene la forma simétrica $\dfrac{x+2}{-3} = y - 1 = \dfrac{z-3}{2}$.
12. Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x = 3t - 1, y = 2 - t, z = 2t + 5$ y $x = 2 - 6t, y = 2t + 1, z = 7 - 4t$ representan la misma recta.
13. Las ecuaciones paramétricas $x = 2 \operatorname{sen} t, y = 2 \cos t$, donde $0 \leq t \leq \pi$, describen un círculo de radio 2.
14. El producto punto de dos vectores unitarios es igual a 1.
15. Para cualquier vector $\mathbf{a}$ en $\mathbf{R}^n$ y un escalar k se tiene $\|k\mathbf{a}\| = k\|\mathbf{a}\|$.
16. Si $\mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ y $\|\mathbf{u}\| = 1$, entonces $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$.
17. Para cualesquiera vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en $\mathbf{R}^3$ se tiene que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
18. El volumen de un paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ es $|(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}|$.
19. $\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b} - \|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a}$ es un vector.
20. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$ es un escalar.
21. El plano que contiene los puntos $(1, 2, 1)$, $(3, -1, 0)$ y $(1, 0, 2)$ tiene la ecuación $5x + 2y + 4z = 13$.
22. El plano que contiene los puntos $(1, 2, 1)$, $(3, -1, 0)$ y $(1, 0, 2)$ es dado por las ecuaciones paramétricas $x = 2s, y = -3s - 2t, z = t - s$.
23. Si A es una matriz de 5×7 y B es otra de 7×7, entonces BA es una matriz de 7×5.
24. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, entonces

$$\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

25. Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $\det(2A) = 2 \det A$.
26. La superficie que tiene por ecuación $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ en coordenadas cilíndricas es un cilindro de radio 2.
27. La superficie cuya ecuación es $\rho = 4 \cos \theta$ en coordenadas esféricas es una esfera de radio 2.
28. La superficie que tiene por ecuación $\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi = 3$ en coordenadas esféricas es un plano.
29. La superficie que tiene por ecuación $\rho = 3$ en coordenadas esféricas es igual que la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $r^2 + z^2 = 9$.
30. La superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = 2r$ es igual que la superficie cuya ecuación en las coordenadas esféricas es $\varphi = \pi/6$.

Ejercicios varios para el capítulo 1

1. Si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los vértices de un polígono regular que tiene n lados, y si O es el centro del polígono, demuestre que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} = \mathbf{0}$. En la figura 1.111 se ilustra el caso para $n = 5$. (Sugerencia: no intente usar coordenadas. En su lugar utilice dibujos, geometría y tal vez traslaciones o rotaciones).

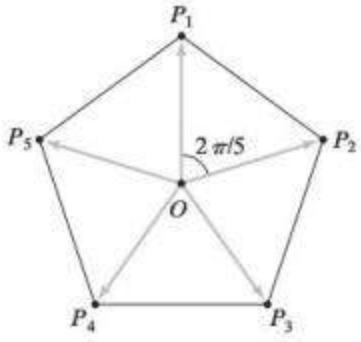


Figura 1.111 El caso para $n = 5$.

2. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -2)$ y que es paralela a la recta $x = 3t + 1, y = 5 - 7t, z = t + 12$.

3. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -2)$ e interseca a la recta $x = 3t + 1, y = 5 - 7t, z = t + 12$ en forma ortogonal. (Sugerencia: sean $x_0 = 3t_0 + 1, y_0 = 5 - 7t_0, z_0 = t_0 + 12$ los puntos donde la recta deseada interseca a la recta dada).

4. Dados dos puntos $P_0(a_1, a_2, a_3)$ y $P_1(b_1, b_2, b_3)$ hemos visto en las ecuaciones (3) y (4) de la sección 1.2 la forma de parametrizar la recta que pasa por P_0 y P_1, como $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{P_0P_1}$, donde t puede ser cualquier número real (recuerde que $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, el vector de posición de un punto arbitrario P sobre la recta).

a) ¿Para qué valor de t se cumple que $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_0}$? ¿Para qué valor de t, $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_1}$?

b) Explique cómo se parametriza el **segmento de recta** que une a P_0 con P_1 (véase la figura 1.112).

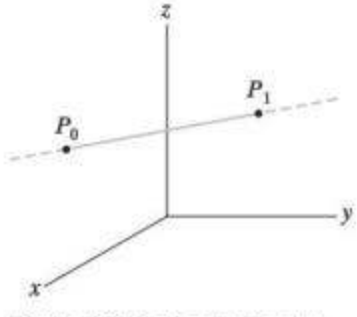


Figura 1.112 El segmento que une a P_0 y P_1 es una parte de la recta que contiene a dichos puntos (véase el ejercicio 4).

c) Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une a los puntos $(0, 1, 3)$ y $(2, 5, -7)$.

5. Recuerde que el **bisector perpendicular** de un segmento de recta en $\mathbf{R}^2$ es la recta que pasa por el punto medio del segmento y que es ortogonal a este.

a) Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para el bisector perpendicular del segmento que une a los puntos $P_1(-1, 3)$ y $P_2(5, -7)$.

b) Dados los puntos generales $P_1(a_1, a_2)$ y $P_2(b_1, b_2)$, proporcione un conjunto de ecuaciones paramétricas para el bisector perpendicular del segmento que los une.

6. Si consideráramos un bisector perpendicular de un segmento de recta en $\mathbf{R}^3$, encontraríamos que el bisector debe ser un *plano*.

a) Dada una ecuación (implícita) para el plano que sirve como bisector perpendicular del segmento que une los puntos $P_1(6, 3, -2)$ y $P_2(-4, 1, 0)$.

b) Dados los puntos generales $P_1(a_1, a_2, a_3)$ y $P_2(b_1, b_2, b_3)$, dé una ecuación para el plano que sirve como el bisector perpendicular del segmento que los une.

7. Al generalizar los ejercicios 5 y 6 definimos el bisector perpendicular de un segmento rectilíneo en $\mathbf{R}^n$ como el hiperplano que pasa por el punto medio del segmento que es ortogonal al primero.

a) Dé una ecuación para el hiperplano en $\mathbf{R}^5$ que sirve como el bisector perpendicular del segmento que une los puntos $P_1(1, 6, 0, 3, -2)$ y $P_2(-3, -2, 4, 1, 0)$.

b) Dados puntos arbitrarios $P_1(a_1, \ldots, a_n)$ y $P_2(b_1, \ldots, b_n)$ en $\mathbf{R}^n$, dé una ecuación para el hiperplano que sirve como el bisector perpendicular del segmento que los une.

8. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores unitarios en $\mathbf{R}^3$, demuestre que

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = 1.$$

9. *a*) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Explique su respuesta.

b) Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Explique.

10. Demuestre que las dos rectas

$$l_1 : \quad x = t - 3, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 2t + 5$$
$$l_2 : \quad x = 4 - 2t, \quad y = 4t + 3, \quad z = 6 - 4t$$

son paralelas y encuentre una ecuación para el plano que las contiene.

11. Considere los dos planos $x + y = 1$ y $y + z = 1$. Estos planos se intersecan en una recta.

a) Encuentre el ángulo (agudo) de intersección entre los planos.

b) Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta de intersección.

12. ¿Cuáles de las siguientes rectas cuyas ecuaciones paramétricas se dan abajo son paralelas? ¿Hay algunas que sean iguales?

a) $x = 4t + 6, y = 2 - 2t, z = 8t + 1$

b) $x = 3 - 6t, y = 3t, z = 4 - 9t$

c) $x = 2 - 2t, y = t + 4, z = -4t - 7$

d) $x = 2t + 4, y = 1 - t, z = 3t - 2$

13. Determine cuáles de los planos cuyas ecuaciones se dan son paralelos y cuáles perpendiculares. ¿Algunos de los planos son iguales?

a) $2x + 3y - z = 3$

b) $-6x + 4y - 2z + 2 = 0$

c) $x + y - z = 2$

d) $10x + 15y - 5z = 1$

e) $3x - 2y + z = 1$

14. *a*) ¿Cuál es el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de las aristas que toca? (Sugerencia: localice el cubo en el espacio en forma conveniente).

b) Encuentre el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras.

15. Marque cada uno de los enunciados siguientes con 1 si está de acuerdo y con -1 si no lo está.

1) El rojo es mi color favorito.

2) Me considero un buen atleta.

3) Me gustan más los gatos que los perros.

4) Disfruto las comidas condimentadas.

5) Las matemáticas son mi materia favorita.

Sus respuestas al "cuestionario" anterior pueden considerarse para formar un vector en $\mathbf{R}^5$. Suponga que usted y un amigo calculan sus respectivos "vectores de respuesta" para el cuestionario. Explique la significación del producto punto de sus dos vectores.

16. La **mediana** de un triángulo es el segmento rectilíneo que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. El propósito de este problema es usar vectores para demostrar que todas las medianas de un triángulo coinciden en un punto.

a) Utilice la figura 1.113 para escribir los vectores $\overrightarrow{BM_1}$ y $\overrightarrow{CM_2}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

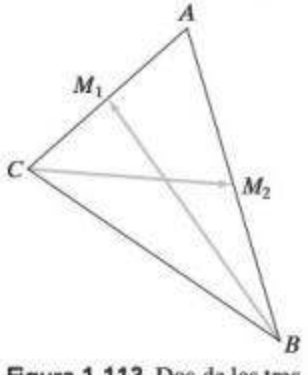


Figura 1.113 Dos de las tres medianas del triángulo del ejercicio 16.

b) Sea P el punto de intersección de $\overline{BM_1}$ y $\overline{CM_2}$. Escriba $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CP}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

c) Use el hecho de que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ para demostrar que P debe estar a dos tercios de la distancia de B a M_1 y a dos tercios de la distancia de C a M_2.

d) Ahora use el inciso *c*) para demostrar por qué las tres medianas se deben encontrar en P.

17. Suponga que los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ en $\mathbf{R}^3$ son coplanares (es decir, están contenidos en el mismo plano). Demuestre entonces que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.

18. Demuestre que el área del triángulo, dos de cuyos lados están determinados por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (véase la figura 1.114), es dada por la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}.$$

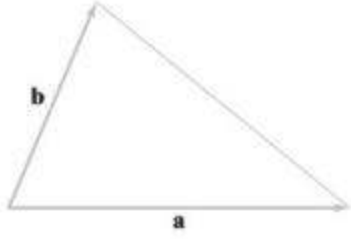


Figura 1.114 Triángulo para el ejercicio 18.

19. Sean $A(1, 3, -1)$, $B(4, -1, 3)$, $C(2, 5, 2)$ y $D(5, 1, 6)$ los vértices de un paralelogramo.

a) Encuentre el área del paralelogramo.

b) Calcule el área de la proyección del paralelogramo en el plano xy.

20. *a*) Para la recta l en $\mathbf{R}^2$ dada por la ecuación $ax + by = d$, encuentre un vector $\mathbf{v}$ que sea paralelo a l.

b) Encuentre un vector $\mathbf{n}$ que sea normal a l y cuya primera componente sea igual a a.

c) Si $P_0(x_0, y_0)$ es cualquier punto en $\mathbf{R}^2$, use vectores para obtener la fórmula siguiente para calcular la distancia de P_0 a l:

$$\text{Distancia de } P_0 \text{ a } l = \frac{|ax_0 + by_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Para hacerlo, encontrará de utilidad la figura 1.115, donde $P_1(x_1, y_1)$ es cualquier punto sobre l.

d) Calcule la distancia entre el punto $(3, 5)$ y la recta $8x - 5y = 2$.

21. *a*) Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en $\mathbf{R}^3$, utilice vectores con el fin de obtener la fórmula siguiente para la distancia de P_0 al plano Π que tiene por ecuación $Ax + By + Cz = D$:

$$\text{Distancia de } P_0 \text{ a } \Pi = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

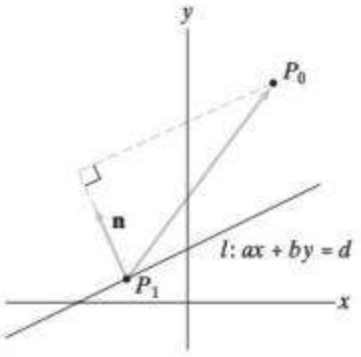


Figura 1.115 Construcción geométrica para el ejercicio 20.

La figura 1.116 ayudaría. (P_1 (x_1, y_1, z_1) es cualquier punto en Π).

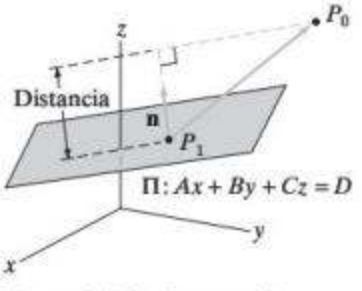


Figura 1.116 Construcción geométrica para el ejercicio 21.

b) Encuentre la distancia entre el punto $(1, 5, -3)$ y el plano $x - 2y + 2z + 12 = 0$.

22. *a*) Sea P un punto en el espacio que *no* está contenido en el plano Π que pasa por los tres puntos no colineales A, B y C, demuestre que la distancia entre P y Π es dada por la expresión

$$\frac{|\mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|},$$

donde $\mathbf{p} = \overrightarrow{AP}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$.

b) Use el resultado del inciso *a*) para calcular la distancia entre $(1, 0, -1)$ y el plano que contiene los puntos $(1, 2, 3)$, $(2, -3, 1)$ y $(2, -1, 0)$.

23. Sean A, B, C y D que denotan cuatro puntos distintos en $\mathbf{R}^3$.

a) Demuestre que A, B y C son colineales si y solo si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$.

b) Demuestre que A, B C y D son coplanares si y solo si $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

24. Sea $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ el vector de posición de un punto P en $\mathbf{R}^3$, considere la ecuación:

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Describa la configuración de puntos P que satisfacen a la ecuación.

25. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores fijos distintos de cero en $\mathbf{R}^3$, y c una constante fija. Explique cómo es que el par de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = c \\ \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{cases}$$

determinan por completo al vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

26. *a*) Dé ejemplos de vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en $\mathbf{R}^3$, los cuales demuestren que, en general, *no* es verdad que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (es decir, el producto cruz *no* es asociativo).

b) Use la identidad de Jacobi (véase el ejercicio 30 de la sección 1.4 para demostrar que para cualesquiera vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en $\mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

si y solo si

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

27. *a*) Dado un tetraedro arbitrario (es decir, no necesariamente regular), asocie a cada una de sus cuatro caras triangulares un vector dirigido hacia fuera de la cara, normal a esta, con longitud igual al área de esa cara (véase la figura 1.117). Demuestre que la suma de esos cuatro vectores es igual a cero. (Sugerencia: describa $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ en términos de algunos de los vectores que corren a lo largo de las *aristas* del tetraedro).

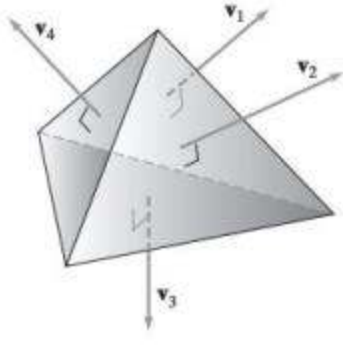


Figura 1.117 Tetraedro del inciso *a*) del ejercicio 27.

b) Recuerde que un **poliedro** es una superficie cerrada en $\mathbf{R}^3$ que consta de un número finito de caras planas. Suponga que se dan los dos tetraedros mostrados en la figura 1.118 y la cara ABC de uno es congruente con la cara $A'B'C'$ del otro. Si se pegan los tetraedros por dichas caras congruentes, entonces las caras externas dan un poliedro de seis caras. Asocie a cada cara de este poliedro un vector que apunte hacia fuera con longitud igual al área de esa cara. Demuestre que la suma de estos seis vectores es igual a cero.

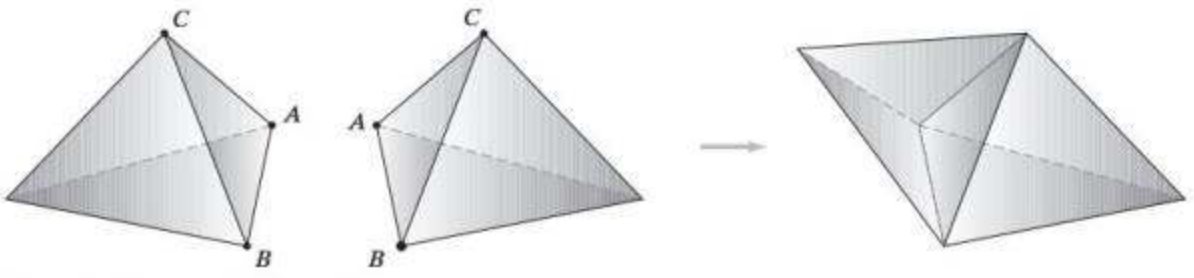


Figura 1.118 En el ejercicio 27(b) se pegan los dos tetraedros mostrados por sus caras congruentes.

c) Bosqueje una demostración de lo siguiente: dado un poliedro de *n* caras, asocie a cada una de ellas un vector normal que apunte hacia fuera con longitud igual al área de esa cara. Demuestre que la suma de esos *n* vectores es igual a cero.

28. Considere un **tetraedro derecho**, es decir, uno que tiene un vértice *R* cuyas tres caras adyacentes son perpendiculares por pares (véase la figura 1.119). Use el resultado del ejercicio 27 para demostrar la siguiente analogía tridimensional del teorema de Pitágoras. Si *a*, *b* y *c* denotan las áreas de las tres caras adyacentes a *R*, y *d* denota el área de la cara opuesta *R*, entonces $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

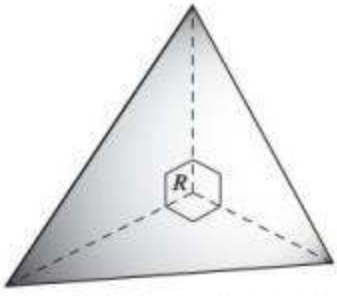


Figura 1.119 Tetraedro derecho del ejercicio 28. Las tres caras que contienen al vértice *R* son perpendiculares por pares.

29. *a*) Use vectores para demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados.

b) Dé una generalización algebraica del inciso *a*) para $\mathbf{R}^n$.

30. Demuestre que para cualesquiera números reales $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ se tiene que

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right].$$

31. Para elevar una matriz *A* cuadrada ($n \times n$) a una potencia entera positiva *n*, se calcula A^n como $A \cdot A \cdots A$ (*n* veces).

a) Calcule potencias sucesivas *A*, A^2, A^3, A^4 de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Haga una conjetura de la forma general de A^n para la matriz *A* del inciso *a*) donde *n* es cualquier entero positivo.

c) Demuestre su conjetura del inciso *b*) usando inducción matemática.

32. Una matriz cuadrada *A* se llama **nilpotente** si $A^n = 0$ para alguna potencia *n* positiva.

a) Demuestre que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es nilpotente.

T *b*) Use una calculadora o computadora para demostrar que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ es nilpotente.

T **33.** La matriz H_n de $n \times n$ cuyo elemento ij-ésimo es $1/(i + j - 1)$ se llama **matriz de Hilbert** de orden *n*.

a) Escriba H_2, H_3, H_4, H_5 y H_6. Use una computadora para calcular sus determinantes con exactitud. ¿Qué parece suceder al det H_n conforme *n* se hace más grande?

b) Ahora calcule H_{10} y det H_{10}. Si el lector usa aritmética exacta, debería encontrar que $H_{10} \neq 0$ y entonces H_{10} es invertible. (Véanse los ejercicios 30 a 38 de la sección 1.6 para más información acerca de las matrices invertibles).

c) Ahora dé una aproximación numérica de *A* para H_{10}. Si su computadora lo permite, calcule la matriz inversa de *B* de esta aproximación. Después calcule *AB* y *BA*. ¿Obtiene la matriz identidad de 10×10, I_{10} en ambos casos?

d) Explique qué incisos *b*) y *c*) sugieren algo acerca de las dificultades al usar aproximaciones numéricas en la aritmética de matrices.

Cuando era niño el lector tal vez jugó con un juguete muy popular llamado **Espirógrafo®**. *Con él se hacían dibujos muy llamativos de figuras geométricas. El Espirógrafo consta de un pequeño disco dentado con varios agujeros en él y un anillo más grande con dientes por dentro y por fuera, como se aprecia en la figura 1.120. Se pueden dibujar figuras haciendo una malla con el disco pequeño y los círculos interno o externo del anillo, y luego se adjunta una pluma en uno de los agujeros del disco mientras se hace girar el disco (el anillo grande permanece fijo).*

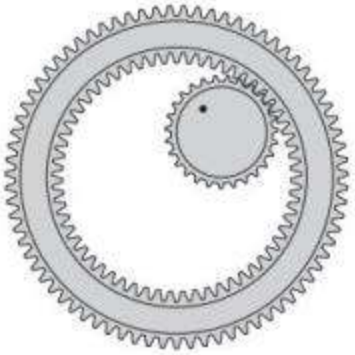


Figura 1.120 Espirógrafo.

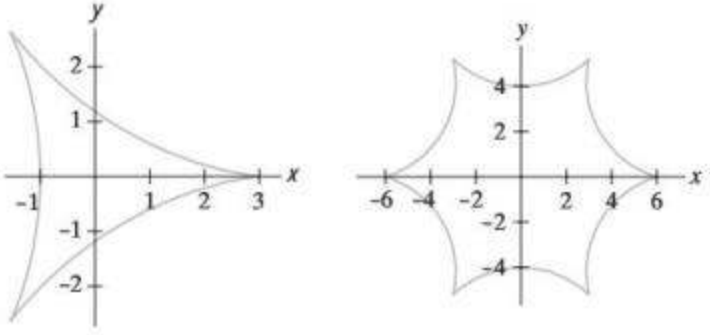


Figura 1.122 Hipocicloides con $a = 3, b = 2$ y $a = 6, b = 5$.

Se puede obtener una versión idealizada del espirógrafo tomando un círculo grande (de radio a) y dejando un círculo pequeño (de radio b) para que ruede por dentro o por fuera sin deslizarse. El patrón A del "espirógrafo" se produce rastreando un punto en particular que esté en cualquier sitio sobre (o dentro) del círculo pequeño. Los ejercicios 34 a 37 se refieren a esto.

34. Suponga que un círculo pequeño rueda dentro del círculo grande y que el punto P que seguimos está en la circunferencia del círculo chico. Si la configuración inicial es tal que P está en $(a, 0)$, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva trazada por P utilizando el ángulo t a partir del eje x positivo al centro B del círculo móvil. (Esta configuración se muestra en la figura 1.121). La curva resultante se llama **hipocicloide**. En la figura 1.122 se dan dos ejemplos.

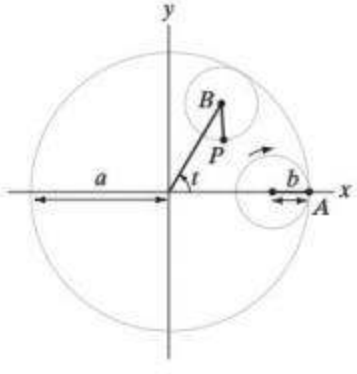


Figura 1.121 Configuración de coordenadas para encontrar las ecuaciones paramétricas de un hipocicloide.

35. Ahora suponga que el círculo pequeño rueda sobre el círculo externo más grande. Obtenga un conjunto de ecuaciones paramétricas para la curva que resulta en este caso. Dicha curva recibe el nombre de **epicicloide** y se ilustra en la figura 1.123.

36. *a*) Un **cuerno** (o esquina) ocurre, ya sea en el hipocicloide o epicicloide cada vez que el punto P sobre el círculo pequeño toca al círculo mayor. De manera equivalente esto pasa siempre que el círculo pequeño rueda sobre 2π. Si suponemos que a/b es racional, ¿cuántos cuernos tiene un hipocicloide o un epicicloide? (Su respuesta debe involucrar de algún modo a a y b).

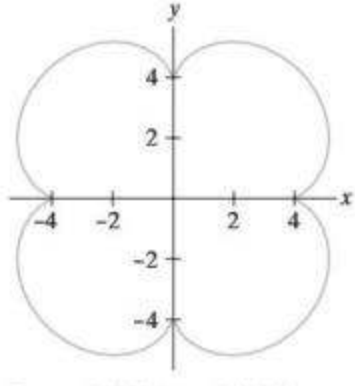


Figura 1.123 Un epicicloide con $a = 4, b = 1$.

b) Describa con palabras y dibujos lo que sucede cuando a/b no es racional.

37. Considere nuevamente el arreglo original del espirógrafo. Si ahora marcamos el punto P a una distancia c del centro del círculo más pequeño, entonces la curva trazada por P se llama **hipotrocoide** (si el círculo más pequeño rueda por el interior del círculo grande) o **epitrocoide** (si el círculo chico rueda sobre el exterior). Advierta que se debe tener $b < a$, pero se puede tener c mayor o menor que b (si $c < b$, se obtiene un patrón "verdadero" del espirógrafo en el sentido de que el punto P estará en el interior del círculo más pequeño. La situación cuando $c > b$ es como tener a P montado al final de un rayo alargado sobre el círculo pequeño). Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para las curvas que resultan al operar de esta manera (consulte la figura 1.124).

Los ejercicios 38 a 43 son factibles si se utiliza el software apropiado para graficar en coordenadas polares, cilíndricas

y esféricas. (Nota: cuando use software para graficar en coordenadas esféricas, asegúrese de revisar las definiciones que utilice para los ángulos φ y θ).

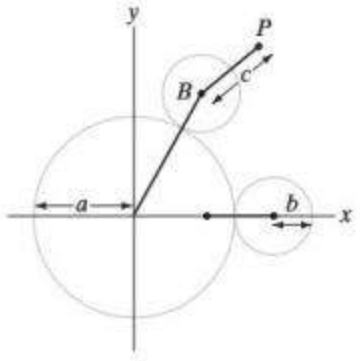


Figura 1.124 Configuración para encontrar las ecuaciones paramétricas de epitrocoides.

38. *a*) Grafique la curva en $\mathbf{R}^2$ cuya ecuación polar es $r = \cos 2\theta$.

b) Haga la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene la ecuación cilíndrica $r = \cos 2\theta$.

c) Elabore la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \cos 2\varphi$.

d) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \cos 2\theta$.

39. *a*) Haga la gráfica de la curva en $\mathbf{R}^2$ cuya ecuación polar es $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

b) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene la ecuación cilíndrica $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

c) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \operatorname{sen} 2\varphi$.

d) Dibuje la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene la ecuación esférica $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$. Compare el resultado de este ejercicio con el del 38.

40. *a*) Elabore la gráfica de la curva en $\mathbf{R}^2$ cuya ecuación polar es $r = \cos 3\theta$.

b) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación cilíndrica es $r = \cos 3\theta$.

c) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene la siguiente ecuación esférica $\rho = \cos 3\varphi$.

d) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \cos 3\theta$.

41. *a*) Grafique la curva en $\mathbf{R}^2$ cuya ecuación polar es $r = \operatorname{sen} 3\theta$.

b) Elabore la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación cilíndrica es $r = \operatorname{sen} 3\theta$.

c) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \operatorname{sen} 3\varphi$.

d) Construya la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \operatorname{sen} 3\theta$. Compare los resultados de este ejercicio con los del ejercicio 40.

42. *a*) Grafique la curva en $\mathbf{R}^2$ que tiene la ecuación polar $r = 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$. (Esta curva se conoce como **nefroide**, que significa "con forma de riñón").

b) Haga la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene por ecuación cilíndrica a $r = 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

c) Construya la gráfica en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = 1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$.

d) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene la siguiente ecuación esférica $\rho = 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

43. *a*) Elabore la gráfica de la curva en $\mathbf{R}^2$ con ecuación polar $r = \theta$.

b) Dibuje la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación cilíndrica es $r = \theta$.

c) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación esférica es $\rho = \varphi$.

d) Construya la gráfica de la superficie en $\mathbf{R}^3$ que tiene por ecuación esférica a $\rho = \theta$, donde $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ y $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

44. Considere el hemisferio sólido de radio 5 que se ilustra en la figura 1.125.

a) Describa este sólido utilizando coordenadas esféricas.

b) Haga la descripción del sólido por medio de coordenadas cilíndricas.

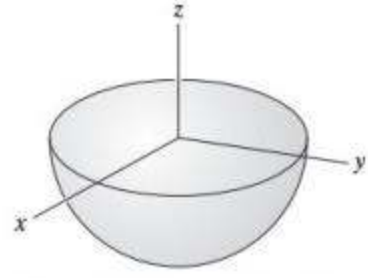


Figura 1.125 Hemisferio sólido del ejercicio 44.

45. Considere el cilindro sólido ilustrado en la figura 1.126.

a) Describa este sólido usando coordenadas cilíndricas (posicione al cilindro de manera conveniente).

b) Describa al sólido usando coordenadas esféricas.

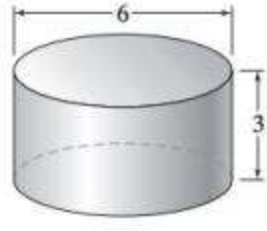


Figura 1.126 Cilindro sólido del ejercicio 45.

2 Diferenciación de varias variables

2.1 Funciones de varias variables. Graficación de superficies

2.2 Límites

2.3 La derivada

2.4 Propiedades. Derivadas parciales de orden superior

2.5 La regla de la cadena

2.6 Derivadas direccionales y gradiente

2.7 Método de Newton (opcional)

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 2

Ejercicios varios para el capítulo 2

2.1 Funciones de varias variables. Graficación de superficies

El volumen y área de la superficie de una esfera dependen de su radio, las fórmulas que describen su relación son $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $S = 4\pi r^2$ (aquí, V y S son, respectivamente, el volumen y el área de la superficie de la esfera, y r el radio de esta). Estas ecuaciones definen el volumen y el área como **funciones** del radio. La característica esencial de una función es que la *variable independiente* (el radio, en este caso) determina un valor *único* de la variable dependiente (V o S). Sin duda el lector es capaz de pensar en muchas cantidades que no son determinadas solo por una variable (como el volumen de la esfera, que es determinado por su radio) sino por varias: por ejemplo, el área de un rectángulo, el volumen de un cilindro o cono, el promedio de lluvia anual que cae en Cleveland, Estados Unidos, o la deuda nacional. La modelación realista del mundo requiere que comprendamos el concepto de una función de más de una variable y la manera de encontrar formas significativas para visualizarlas.

Definiciones, notación y ejemplos

Una función, *cualquier* función, tiene tres características: (1) un conjunto X, o **dominio**, (2) un conjunto Y, o **codominio**, y (3) una **regla de asignación** que asocia a cada elemento x del dominio X, un elemento único, por lo general denotado $f(x)$ en el codominio Y. Con frecuencia usaremos la notación $f: X \to Y$ para una función. Esa notación indica todos los elementos de una función particular, aunque no hace explícita la naturaleza de la regla de asignación. Esta notación también sugiere la naturaleza del "mapeo" de una función, lo que se ilustra en la figura 2.1.

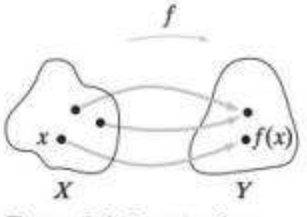


Figura 2.1 La naturaleza del mapeo de una función.

EJEMPLO 1 Las definiciones abstractas son necesarias, pero también es importante que el lector entienda la manera en que ocurren en realidad las funciones. Considere el acto de asignar a cada ciudadano estadounidense su número de seguridad social. Ese emparejamiento define una función: a cada ciudadano se le asigna un número de seguro social. El dominio es el conjunto de ciudadanos y el codominio es el conjunto de todos los números de nueve dígitos.

Por otro lado, cuando una universidad asigna estudiantes a dormitorios, no es probable que se cree una función a partir del conjunto de habitaciones disponibles y el conjunto de estudiantes. Esto se debe a que en algunos cuartos puede haber más de un estudiante asignado, por consiguiente, una recámara en particular no necesariamente determina que solo hay un ocupante. ◆

DEFINICIÓN 1.1 El **rango** de una función $f: X \to Y$ es el conjunto de aquellos elementos de Y que son valores reales de f. Es decir, el rango de f consta de aquellas y en Y tales que $y = f(x)$ para ciertas x en X.

Si usamos notación de conjuntos encontramos que

$$\text{Rango de } f = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algunas } x \in X\}.$$

En la función de la seguridad social del ejemplo 1, el rango consta de aquellos números de nueve dígitos que se usan en realidad como números de seguro social. Por ejemplo, el número 000-00-0000 *no* está en el rango, ya que este no se le asigna a nadie en realidad.

DEFINICIÓN 1.2 Se dice que una función $f: X \to Y$ es **sobre** (o **suprayectiva**) si cada elemento de Y es la imagen de algún elemento de X, es decir, si el rango es $f = Y$.

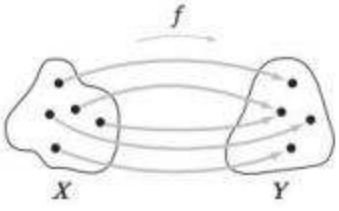


Figura 2.2 Cada $y \in Y$ es "tocada" por al menos una $x \in X$.

La función del seguro social *no* es suprayectiva porque la cifra 000-00-0000 está en el codominio pero no en el rango. En la figura 2.2 se ilustra gráficamente una función suprayectiva. Una función que *no* es suprayectiva tiene el aspecto que se indica en la figura 2.3. Quizá le sea útil pensar en el codominio de una función f como el conjunto de valores *posibles* (o permisibles) de f, y en el rango de f como el conjunto de valores *reales* existentes. Entonces, una función suprayectiva es aquella en la que tanto sus valores posibles como sus valores reales son iguales.

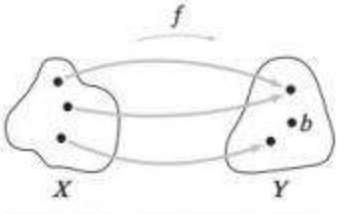


Figura 2.3 El elemento $b \in Y$ no es la imagen de ninguna $x \in X$.

DEFINICIÓN 1.3 Una función $f: X \to Y$ se llama **uno a uno** (o **inyectiva**) si no hay dos elementos distintos del dominio que tengan la misma imagen en f. Es decir, f es uno a uno siempre que $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ (véase la figura 2.4).

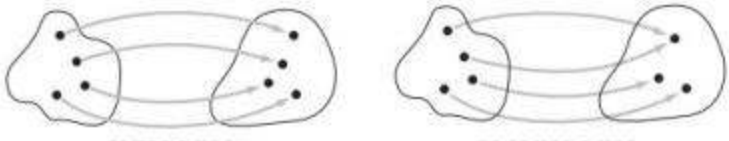


Figura 2.4 La figura de la izquierda ilustra un mapeo uno a uno; la de la derecha presenta una función que no es uno a uno.

El lector tal vez esperaría que la función del seguro social fuera uno a uno, pero se ha sabido de casos en los que se ha asignado el mismo número a dos personas, de modo que al parecer no hay duda de que este no es el caso.

Cuando estudió cálculo de una variable, las funciones de interés eran aquellas cuyos dominios y codominios eran subconjuntos de $\mathbf{R}$ (los números reales). Era este, probablemente, el caso en que solo se hacía explícita la regla de asignación; por lo general se da por hecho que el dominio es el subconjunto más grande posible de $\mathbf{R}$ para el cual la función tiene sentido. Lo más común es que se tome el codominio como todos los $\mathbf{R}$.

EJEMPLO 2 Suponga que lo que da f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es $f(x) = x^2$. Entonces tanto el dominio como el codominio están, explícitamente, todos en $\mathbf{R}$, pero el rango de f es el intervalo $[0, \infty)$. Por consiguiente, f no es suprayectiva, ya que el codominio es estrictamente más grande que el rango. Observe que f es uno a uno, ya que $f(2) = f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. ◆

EJEMPLO 3 Suponga que g es una función tal que $g(x) = \sqrt{x - 1}$. Entonces, si tomamos al codominio como todos los $\mathbf{R}$, el dominio no puede ser más grande que $[1, \infty)$. Si el dominio incluyera valores menores que uno, el radicando sería negativo y, en consecuencia, g no sería un número real. ◆

Ahora podemos pensar en funciones que tengan más de una variable real. En términos más generales, estas son las funciones cuyos dominios son subconjuntos X de $\mathbf{R}^n$, y cuyos codominios son subconjuntos de $\mathbf{R}^m$, para algunos enteros positivos n y m (para mantener sencilla la notación se tomarán los codominios como todos los $\mathbf{R}^m$, excepto cuando se especifique otra cosa). Es decir, dicha función es un mapeo $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que asocia a un vector (o punto) $\mathbf{x}$ en X un vector único (punto) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{R}^m$.

EJEMPLO 4 Sea T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por $T(x, y, z) = xy + xz + yz$. Se puede considerar a T como un tipo de "función temperatura". Dado un punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en $\mathbf{R}^3$, $T(\mathbf{x})$ calcula la temperatura en dicho punto. ◆

EJEMPLO 5 Sea L: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dada por $L(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Esta es una "función longitud" en la que se calcula la longitud de cualquier vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^n$. Advierta el lector que L no es uno a uno, ya que $L(\mathbf{e}_i) = L(\mathbf{e}_j) = 1$, donde $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$ son dos de los vectores básicos estándar para $\mathbf{R}^n$. L tampoco es suprayectiva porque la longitud de un vector siempre es no negativa. ◆

EJEMPLO 6 Considere la función dada por $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, donde $\mathbf{x}$ es un vector en $\mathbf{R}^3$. Observe que si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{N}$ no está definida, por lo que el dominio más grande posible para $\mathbf{N}$ es $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$. El rango de $\mathbf{N}$ consta de todos los vectores unitarios en $\mathbf{R}^3$. La función $\mathbf{N}$ es la "función normalización", es decir, la función que toma un vector diferente de cero en $\mathbf{R}^3$ y devuelve el vector unitario que apunta en la misma dirección. ◆

EJEMPLO 7 En ciertas ocasiones una función puede indicarse en forma numérica por medio de una tabla. Un ejemplo de ello es el concepto del **enfriamiento por viento**, es decir, la temperatura aparente que se percibe al tomar en cuenta tanto la temperatura real del aire como la velocidad del viento. En la figura 2.5[1] se presenta una tabla estándar de los valores del enfriamiento por viento. Se observa que si la temperatura del aire es de 20°F y la velocidad del viento es de 25 millas por hora, la temperatura del enfriamiento por viento ("el frío que se siente") es de 3°F. De manera similar, si la temperatura del aire es de 35°F y la velocidad del viento es de 10 mph, entonces el enfriamiento por viento corresponde a 27°F. En otras palabras, si s denota la velocidad del viento y t la temperatura del aire, el enfriamiento por viento es una función $W(s, t)$. ◆

Las funciones descritas en los ejemplos 4, 5 y 7 son de **variable escalar**, es decir, son funciones cuyos codominios son $\mathbf{R}$ o subconjuntos de $\mathbf{R}$. Las funciones de variable escalar son el tema principal de este capítulo. No obstante, a continuación se presentan algunos ejemplos de funciones cuyos codominios son $\mathbf{R}^m$, donde $m > 1$.

[1] NOAA, National Weather Service, Office of Climate, Water, and Weather Services, "NWS Wind Chill Temperature Index", 26 de febrero de 2004, <http://www.nws.noaa.gov/om/windchill> (31 de julio de 2010).

Temperatura del aire (grados F)	Velocidad del viento (mph)											
	5	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**
40	36	34	32	30	29	28	28	27	26	26	25	25
35	31	27	25	24	23	22	21	20	19	19	18	17
30	25	21	19	17	16	15	14	13	12	12	11	10
25	19	15	13	11	9	8	7	6	5	4	4	3
20	13	9	6	4	3	1	0	−1	−2	−3	−3	−4
15	7	3	0	−2	−4	−5	−7	−8	−9	−10	−11	−11
10	1	−4	−7	−9	−11	−12	−14	−15	−16	−17	−18	−19
5	−5	−10	−13	−15	−17	−19	−21	−22	−23	−24	−25	−26
0	−11	−16	−19	−22	−24	−26	−27	−29	−30	−31	−32	−33
−5	−16	−22	−26	−29	−31	−33	−34	−36	−37	−38	−39	−40
−10	−22	−28	−32	−35	−37	−39	−41	−43	−44	−45	−46	−48
−15	−28	−35	−39	−42	−44	−46	−48	−50	−51	−52	−54	−55
−20	−34	−41	−45	−48	−51	−53	−55	−57	−58	−60	−61	−62
−25	−40	−47	−51	−55	−58	−60	−62	−64	−65	−67	−68	−69
−30	−46	−53	−58	−61	−64	−67	−69	−71	−72	−74	−75	−76
−35	−52	−59	−64	−68	−71	−73	−76	−78	−79	−81	−82	−84
−40	−57	−66	−71	−74	−78	−80	−82	−84	−86	−88	−89	−91
−45	−63	−72	−77	−81	−84	−87	−89	−91	−93	−95	−97	−98

Figura 2.5 Tabla de valores del enfriamiento por viento en unidades del sistema inglés.

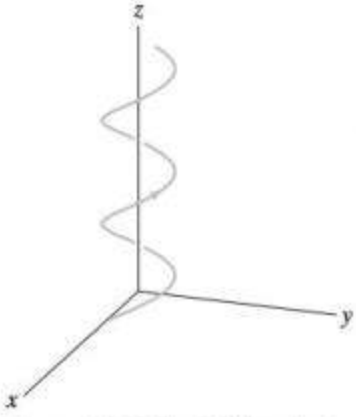


Figura 2.6 Hélice del ejemplo 8. La flecha indica la dirección del incremento de t.

EJEMPLO 8 Se define $\mathbf{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ mediante $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \text{ sen } t, t)$. El rango de f es la curva en $\mathbf{R}^3$ con ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $z = t$. Si se considera que t es un parámetro del tiempo, entonces la función traza una curva tipo sacacorchos (llamada **hélice**) como la que se ilustra en la figura 2.6. ◆

EJEMPLO 9 Se puede pensar en la velocidad de un fluido como un vector en $\mathbf{R}^3$. Este vector depende (al menos) del punto en que se mide la velocidad y también del momento en que se realiza la medida. En otras palabras, es posible considerar la velocidad como una función $\mathbf{v}$: $X \subseteq \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$. El dominio X es un subconjunto de $\mathbf{R}^4$ porque se requieren tres variables, x, y, z para describir un punto en el fluido y se necesita una cuarta variable t para incluir el tiempo (véase la figura 2.7). Por ejemplo, dicha función $\mathbf{v}$ podría ser dada por la expresión

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = xyzt\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + (3z + t)\mathbf{k}. \quad ◆$$

Figura 2.7 Vertedor de agua. La velocidad $\mathbf{v}$ del agua es una función de un subconjunto de $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^3$.

El lector tal vez habrá notado que la expresión para $\mathbf{v}$ del ejemplo 9 es mucho más complicada que las de las funciones dadas en los ejemplos 4 a 8. Esto se debe a que todas las variables y componentes vectoriales se han escrito en forma explícita. En general, si se tiene una función $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, entonces $\mathbf{x} \in X$ se escribe como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y $\mathbf{f}$ se escribe en términos de sus **funciones componente** $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Las funciones componente son funciones de **variable escalar** de $\mathbf{x} \in X$, que definen las componentes del vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$. Esto provoca un laberinto de símbolos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) && \text{(enfatizando las variables)} \\
&= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) && \text{(enfatizando las funciones componente)} \\
&= (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\
& && \text{(escribiendo todas las componentes).}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, cuando la función L del ejemplo 5 se expande, se convierte en:

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

La función **N** del ejemplo 6 se convierte en:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right),$$

y, en consecuencia, las tres funciones componente de **N** son

$$N_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad N_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$N_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Aunque la escritura de una función en términos de todas sus variables y componentes tiene la ventaja de ser explícita, el proceso requiere demasiado papel y tinta. El uso de la notación vectorial no solo ahorra espacio y árboles, también ayuda a aclarar el significado de una función al enfatizar que una función mapea puntos en $\mathbf{R}^n$ a puntos en $\mathbf{R}^m$. La notación vectorial hace que una función de 300 variables "parezca" una función de una variable. Trate de evitar, tanto como pueda, escribir componentes de más (excepto cuando quiera impresionar a sus amigos).

Visualización de funciones

Sin duda el lector ha hecho gráficas de funciones escalares de una variable durante tanto tiempo que ya lo hace sin pensar. Sin embargo, veamos con detalle lo que ha estado haciendo. Una función $f: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ toma un número real y devuelve otro número real, como se ilustra en la figura 2.8. La **gráfica** de f es algo que "vive" en $\mathbf{R}^2$ (véase la figura 2.9). Consta de puntos (x, y) tales que $y = f(x)$. Es decir,

$$\text{Gráfica de } f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} = \{(x, y) \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

Lo importante es que, en general, la gráfica de una función de una variable escalar es una curva (un objeto unidimensional) que se encuentra dentro de un espacio bidimensional.

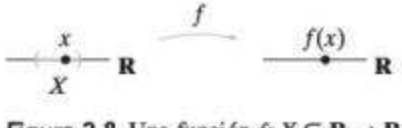


Figura 2.8 Una función $f: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

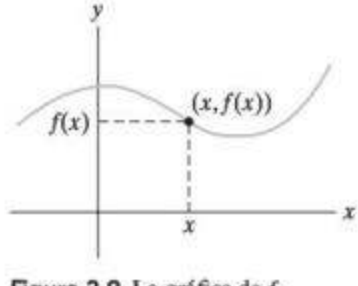


Figura 2.9 La gráfica de f.

Ahora suponga que se tiene una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m$, es decir, una función de dos variables. En esencia, se hace la misma definición para la gráfica:

$$\text{Gráfica de } f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in X\}. \tag{1}$$

Por supuesto, $\mathbf{x} = (x, y)$ es un punto de $\mathbf{R}^2$. De manera que $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\}$ también se puede escribir como

$$\{(x, y, f(x, y))\}, \quad \text{o como} \quad \{(x, y, z) \mid (x, y) \in X, z = f(x, y)\}.$$

En consecuencia, la gráfica de una función de dos variables escalares es algo que se encuentra en $\mathbf{R}^3$. En términos generales, la gráfica será una superficie.

EJEMPLO 10 La gráfica de la función

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \qquad f(x, y) = \frac{1}{12}y^3 - y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}$$

se ilustra en la figura 2.10. Para cada punto $\mathbf{x} = (x, y)$ en $\mathbf{R}^2$ se grafica el punto en $\mathbf{R}^3$ cuyas coordenadas son $(x, y, \frac{1}{12}y^3 - y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2})$. ◆

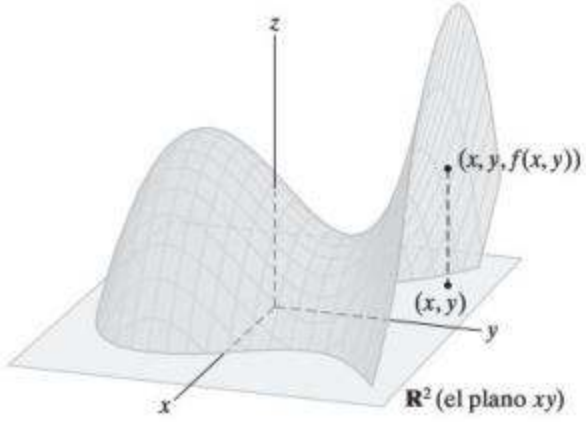


Figura 2.10 La gráfica de $f(x, y) = \frac{1}{12}y^3 - y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}$.

La graficación de funciones de dos variables es mucho más difícil que la de una variable. Por supuesto, una manera de hacerlo es con la ayuda de una computadora. Pero si el lector desea adquirir la sensibilidad a las funciones de más de una variable, es importante que pueda bosquejar una gráfica aproximada a mano. El truco para obtener una gráfica razonable es encontrar la manera de cortar las dimensiones involucradas, lo cual puede lograr dibujando ciertas curvas especiales que estén en la superficie $z = f(x, y)$. Dichas curvas especiales, llamadas **curvas de contorno**, son las que se obtienen al intersecar la superficie con planos horizontales $z = c$ para distintos valores de la constante c. En la figura 2.11 aparecen algunas curvas de contorno dibujadas sobre la superficie del ejemplo 10. Si comprimimos todas las curvas de contorno en el plano xy (en esencia, si miramos a lo largo de la dirección positiva del eje x), creamos un "mapa topográfico" de la superficie que se aprecia en la figura 2.12. Estas curvas en el plano xy se llaman **curvas de nivel** de la función original f.

El punto del análisis anterior es que es posible revertir el proceso con el fin de dibujar de manera sistemática la gráfica de una función f de dos variables. Primero

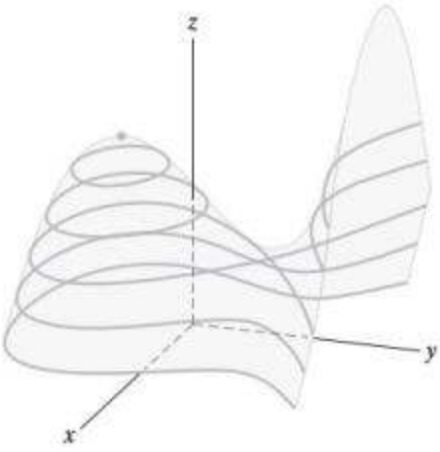


Figura 2.11 Algunas curvas de contorno de la función del ejemplo 10.

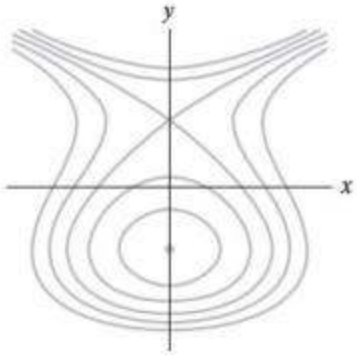


Figura 2.12 Curvas de nivel de la función del ejemplo 10.

construimos un mapa topográfico en $\mathbf{R}^2$ mediante la localización de las curvas de nivel de f, después situamos dichas curvas en $\mathbf{R}^3$ como curvas de contorno a las altitudes apropiadas, y por último terminamos la gráfica de la función. Antes de presentar un ejemplo revisemos la terminología con mayor precisión.

DEFINICIÓN 1.4 Sea $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función de dos variables escalares. La **curva de nivel a la altitud** c **de** f es la curva en $\mathbf{R}^2$ definida por la ecuación $f(x, y) = c$, donde c es una constante. En notación matemática:

$$\text{Curva de nivel a la altitud } c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

La **curva de contorno a la altitud** c **de** f es la curva en $\mathbf{R}^3$ definida por las dos ecuaciones $z = f(x, y)$ y $z = c$. En símbolos:

$$\text{Curva de contorno a la altitud } c = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y) = c\}.$$

Además de considerar las curvas de nivel y de contorno, también es de ayuda atender a las **secciones** de una superficie determinadas por los planos en los que x o y se mantienen constantes. Una **sección** de una superficie producida por un plano es la intersección entre ambos. La definición formal es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.5 Sea $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función de dos variables escalares. La **sección de la gráfica de** f **determinada por el plano** $x = c$ (donde c es una constante) es el conjunto de puntos (x, y, z) donde $z = f(x, y)$ y $x = c$. En símbolos:

$$\text{La sección determinada por } x = c \text{ es } \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y), x = c\}.$$

De manera similar, la **sección de la gráfica de** f **determinada por el plano** $y = c$ es el conjunto de puntos descritos como sigue:

$$\text{La sección determinada por } y = c \text{ es } \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y), y = c\}.$$

EJEMPLO 11 Usaremos curvas de nivel y de contorno para construir la gráfica de la función

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \qquad f(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$$

Según la definición 1.4, la curva de nivel a la altitud c es

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4 - x^2 - y^2 = c\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 - c\}.$$

Por consiguiente, se observa que las curvas de nivel para $c < 4$ son círculos con centro en el origen de radio $\sqrt{4 - c}$. La "curva" de nivel a la altitud $c = 4$ no es del todo una curva sino solo un punto (el origen). Por último, no hay curvas de nivel a altitudes mayores de 4 porque la ecuación $x^2 + y^2 = 4 - c$ no tiene soluciones reales en x y y. (Explique por qué). Estos comentarios se resumen en la tabla siguiente:

c	Curva de nivel $x^2 + y^2 = 4 - c$
-5	$x^2 + y^2 = 9$
-1	$x^2 + y^2 = 5$
0	$x^2 + y^2 = 4$
1	$x^2 + y^2 = 3$
3	$x^2 + y^2 = 1$
4	$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$
c, donde $c > 4$	vacío

Así, en la figura 2.13 se muestra la familia de curvas de nivel, el "mapa topográfico" de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$. Algunas curvas de contorno, *que ocurren en* $\mathbf{R}^3$, se ilustran en la figura 2.14, con la que se obtiene la percepción de toda la gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$. Es una superficie que parece un recipiente invertido y se llama **paraboloide** (véase la figura 2.15). Para que el proceso sea más comprensible, también se dibujaron las secciones de la superficie con los planos $x = 0$ y $y = 0$. La sección para $x = 0$ es dada en forma analítica por el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, x = 0\} = \{(0, y, z) \mid z = 4 - y^2\}.$$

De manera similar, la sección producida por $y = 0$ es

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, y = 0\} = \{(x, 0, z) \mid z = 4 - x^2\}.$$

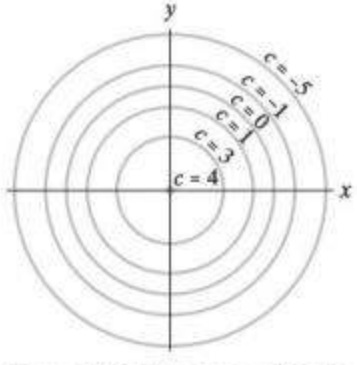


Figura 2.13 Mapa topográfico de $z = 4 - x^2 - y^2$ (es decir, varias de sus curvas de nivel).

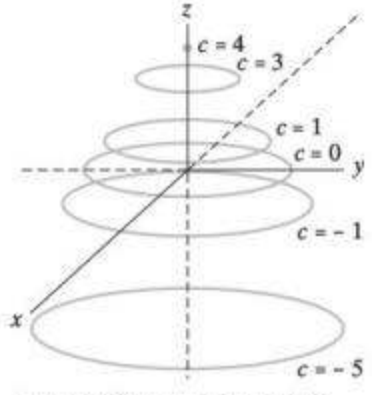


Figura 2.14 Algunas curvas de contorno de $z = 4 - x^2 - y^2$.

Figura 2.15 Gráfica de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

Como estas secciones son parábolas, es fácil ver de dónde toma su nombre esta superficie. ◆

EJEMPLO 12 Graficaremos la función $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g(x, y) = y^2 - x^2$. Todas las curvas de nivel son hipérbolas, con excepción de aquella a la altitud 0, que es un par de rectas que se intersecan.

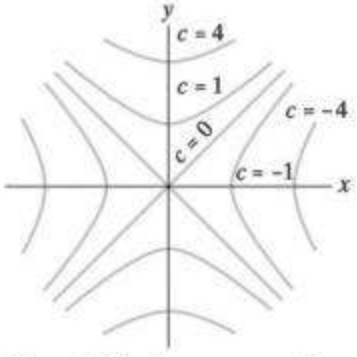


Figura 2.16 Algunas curvas de nivel de $g(x, y) = y^2 - x^2$.

c	Curva de nivel $y^2 - x^2 = c$
−4	$x^2 - y^2 = 4$
−1	$x^2 - y^2 = 1$
0	$y^2 - x^2 = 0 \iff (y - x)(y + x) = 0 \iff y = \pm x$
1	$y^2 - x^2 = 1$
4	$y^2 - x^2 = 4$

El conjunto de curvas de nivel está graficado en la figura 2.16. Las secciones producidas por $x = c$ son

$$\{(x, y, z) \mid z = y^2 - x^2, x = c\} = \{(c, y, z) \mid z = y^2 - c^2\}.$$

Es evidente que estas son parábolas en los planos $x = c$. Las secciones dadas por $y = c$ son

$$\{(x, y, z) \mid z = y^2 - x^2, y = c\} = \{(c, y, z) \mid z = c^2 - x^2\},$$

que también son parábolas. Las curvas de nivel y las secciones generan las curvas de contorno y la superficie que se ilustran en la figura 2.17. Quizá esto ayude a entender por qué esta superficie recibe el nombre de **paraboloide hiperbólico**. ◆

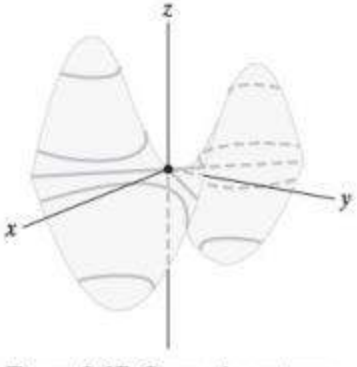


Figura 2.17 Curvas de contorno y gráfica de $g(x, y) = y^2 - x^2$.

EJEMPLO 13 Compararemos las gráficas de la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ del ejemplo 11 con la de

$$h: \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}, \qquad h(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

La curva de nivel de h a la altitud c es

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ln(x^2 + y^2) = c\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = e^c\}.$$

Como $e^c > 0$ para toda $c \in \mathbf{R}$, vemos que la curva de nivel existe para cualquier c y es un círculo de radio $\sqrt{e^c} = e^{c/2}$.

c	Curva de nivel $x^2 + y^2 = e^c$
−5	$x^2 + y^2 = e^{-5}$
−1	$x^2 + y^2 = e^{-1}$
0	$x^2 + y^2 = 1$
1	$x^2 + y^2 = e$
3	$x^2 + y^2 = e^3$
4	$x^2 + y^2 = e^4$

El conjunto de curvas de nivel aparece en la figura 2.18 y la gráfica en la figura 2.19. Observe que la sección de la gráfica producida por $x = 0$ es

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \ln(x^2 + y^2), x = 0\} = \{(0, y, z) \mid z = \ln(y^2) = 2 \ln|y|\}.$$

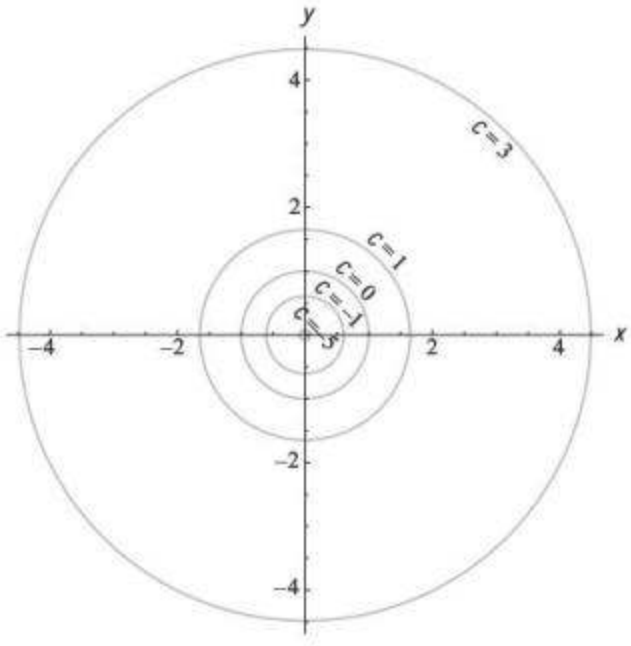


Figura 2.18 Conjunto de curvas de nivel de $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Figura 2.19 Gráfica de $z = \ln(x^2 + y^2)$ mostrada con secciones producidas por $x = 0$ y $y = 0$.

La sección generada por $y = 0$ es muy similar:

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \ln(x^2 + y^2),\ y = 0\} = \{(x, 0, z) \mid z = \ln(x^2) = 2 \ln|x|\}. \quad \blacklozenge$$

De hecho, si cambiamos de coordenadas cartesianas a cilíndricas es muy fácil entender las superficies de los ejemplos 11 y 13. En vista de la relación entre las cartesianas y las cilíndricas $x^2 + y^2 = r^2$, se ve que para la función f del ejemplo 11,

$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - r^2.$$

Para la función h del ejemplo 13 se tiene que

$$z = \ln(x^2 + y^2) = \ln(r^2) = 2 \ln r,$$

donde se adopta la convención usual de que la coordenada cilíndrica r es no negativa. Así que las gráficas de las figuras 2.15 y 2.19 son de las superficies de revolución que se obtienen al girar diferentes curvas alrededor del eje z. Como resultado de ello, las curvas de nivel son, en general, circulares.

El análisis precedente se dedicó por completo a graficar funciones con solo dos variables escalares. Sin embargo, todas las ideas se pueden extender a más variables y a dimensiones mayores. Si $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función (de variable escalar) de n variables, entonces la **gráfica** de f es el subconjunto de $\mathbf{R}^{n+1}$ dado por

$$\begin{aligned} \text{Gráfica de } f &= \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in X\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in X, \\ &\qquad\qquad x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

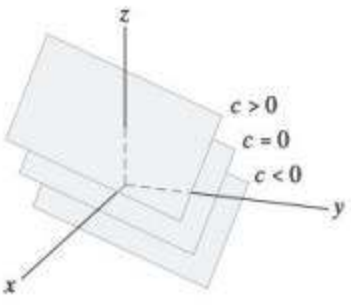


Figura 2.20 Los conjuntos de nivel de la función $F(x, y, z) = x + y + z$ son planos en $\mathbf{R}^3$.

(Lo compacto de la notación vectorial hace que la definición de la gráfica de una función de n variables sea *exactamente* igual que la de (1)). El **conjunto de nivel a la altitud** c de una función como esa es definida por

$$\text{Conjunto de nivel a la altitud } c = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = c\}$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\}.$$

Mientras que la gráfica de f es un subconjunto de $\mathbf{R}^{n+1}$, un conjunto de nivel de f es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Esto permite obtener una visión geométrica de las gráficas de funciones de *tres* variables, aun cuando en realidad no sea posible visualizarlas.

EJEMPLO 14 Sea F: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $F(x, y, z) = x + y + z$. Entonces, la gráfica F es el conjunto $\{(x, y, z, w) \mid w = x + y + z\}$ y es un subconjunto (llamado **hipersuperficie**) de $\mathbf{R}^4$ que no puede dibujarse adecuadamente. No obstante, sí es posible visualizar los conjuntos de nivel de F, que son superficies en $\mathbf{R}^3$ (véase la figura 2.20). Tenemos que

$$\text{Conjunto de nivel a la altitud } c = \{(x, y, z) \mid x + y + z = c\}.$$

Por consiguiente, los conjuntos de nivel forman una familia de planos paralelos con vector normal $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. ◆

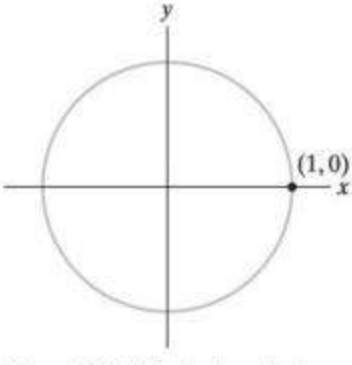


Figura 2.21 El círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.

Superficies en general

No todas las curvas en $\mathbf{R}^2$ pueden describirse como la gráfica de una sola función de una variable. El ejemplo más conocido de esto quizá sea el círculo unitario que se muestra en la figura 2.21, una gráfica que *no* se puede determinar por medio de una única ecuación de la forma $y = f(x)$ (o, para este caso, mediante una de la forma $x = g(y)$). Como sabemos, la gráfica del círculo se describe en forma analítica mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. En general, una curva en $\mathbf{R}^2$ es determinada por una ecuación arbitraria en x y y, no necesariamente una en la que la y aparezca despejada en uno de sus lados. En otras palabras, esto significa que una curva general es dada por una ecuación de la forma $F(x, y) = c$ (es decir, un conjunto de nivel de una función de *dos* variables).

La situación análoga ocurre con superficies en $\mathbf{R}^3$. Con frecuencia, una superficie es determinada mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z)$ (un conjunto de nivel de una función de tres variables), *no* necesariamente por medio de una de la forma $z = f(x, y)$.

EJEMPLO 15 Una **esfera** es una superficie en $\mathbf{R}^3$ con todos sus puntos equidistantes de un punto fijo. Si dicho punto fijo es el origen, entonces la ecuación de la esfera es

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\| = a, \tag{3}$$

donde a es una constante positiva y $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es un punto sobre la esfera. Si elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación (3) y expandimos el producto punto (implícito), entonces tal vez obtendremos la ecuación conocida de una esfera de radio a con centro en el origen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{4}$$

Si el centro de la esfera está en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y no en el origen, entonces la ecuación (3) debe modificarse así:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = a. \tag{5}$$

(Véase la figura 2.22).

Cuando se expande la ecuación (5), se obtiene la siguiente ecuación general de una esfera:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \tag{6}$$

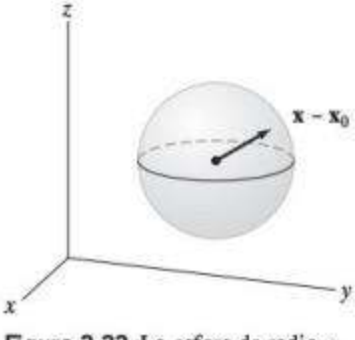


Figura 2.22 La esfera de radio a con centro en el punto (x_0, y_0, z_0).

En la ecuación para una esfera no hay forma de resolverla para z *únicamente* en términos de x y y. En efecto, si tratamos de despejar z en la ecuación (4), obtenemos:

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2,$$

por lo que, para resolver z, tenemos que *elegir* entre raíces cuadradas positivas o negativas:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{o} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

La raíz cuadrada positiva corresponde al hemisferio superior, y la negativa al inferior. En cualquier caso, la esfera *completa* no puede ser la gráfica de una función única de dos variables. ◆

Por supuesto, la gráfica de una función de dos variables describe una superficie en el sentido de "conjunto de nivel". Si se diera el caso de que una superficie fuera dada por una ecuación de la forma

$$z = f(x, y)$$

para alguna función apropiada f: $X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, entonces z se podría pasar al lado opuesto, con lo que se obtendría

$$f(x, y) - z = 0.$$

Si definimos una nueva función F de *tres* variables por medio de

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

entonces la gráfica de f es precisamente el conjunto de nivel a la altitud 0 de F. Reiteramos este punto porque se olvida con demasiada frecuencia: *La gráfica de una función de dos variables es una superficie en* $\mathbf{R}^3$, *y es un conjunto de nivel de una función de tres variables. Sin embargo, no todos los conjuntos de nivel de tres variables son gráficas de funciones de dos variables.* Le pedimos al lector que comprenda esta diferencia.

Superficies cuadráticas

Las secciones cónicas, aquellas curvas que se obtienen a partir de la intersección de un cono con diferentes planos, se encuentran entre las curvas planas más sencillas y, sin embargo, también más interesantes. Estas son el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola. Además de que se obtienen con un método geométrico similar, las secciones cónicas tienen una conexión algebraica elegante. Cada una de ellas se describe en forma analítica mediante una ecuación polinomial de grado dos en dos variables. Es decir, cada sección cónica se expresa con una ecuación que tiene la siguiente forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para constantes apropiadas $A, \ldots, F$.

En $\mathbf{R}^3$, el análogo analítico de una sección cónica se llama **superficie cuadrática**. Las superficies cuadráticas son aquellas definidas por ecuaciones que son polinomios de grado dos con tres variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Pasar de esta ecuación a la gráfica adecuada por lo general es un proceso difícil sin la ayuda de una computadora o de más álgebra lineal de la que solemos tener a nuestra disposición. Así que, en vez de explicarlo, se dan ejemplos de aquellas superficies cuadráticas cuyos ejes de simetría están a lo largo de los ejes coordenados en $\mathbf{R}^3$ y que tienen ecuaciones analíticas relativamente sencillas. En el análisis siguiente a, b y c son constantes que, por conveniencia, se toman como positivas.

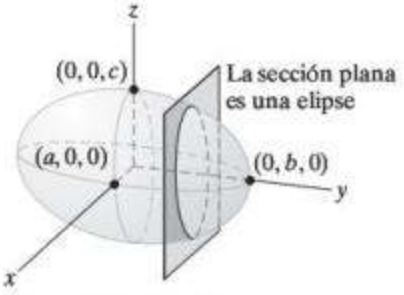


Figura 2.23 Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

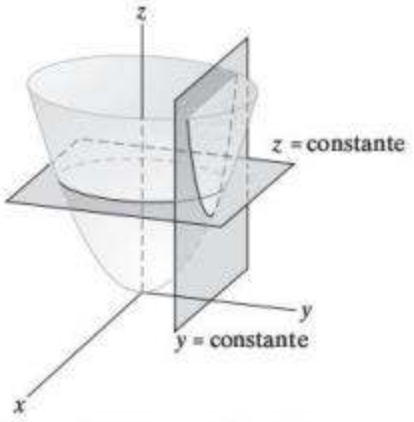


Figura 2.24 Paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$

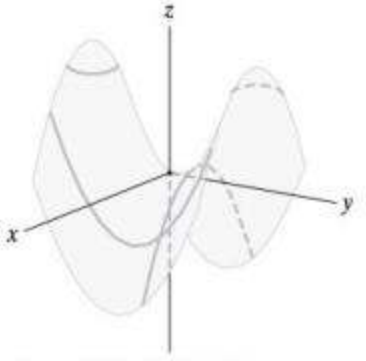


Figura 2.25 Paraboloide hiperbólico $\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$

Figura 2.26 Cono elíptico $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$

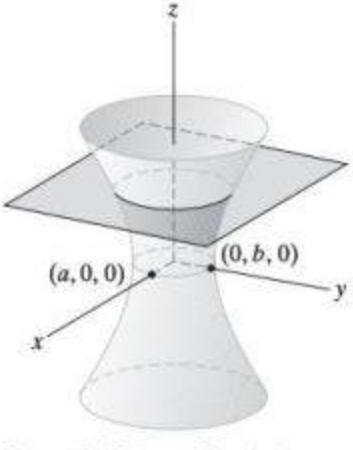


Figura 2.27 La gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ es un hiperboloide de una rama.

Elipsoide (Véase la figura 2.23). $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$
Este es el análogo tridimensional de una elipse en el plano. Todas las secciones del elipsoide determinadas por planos perpendiculares a los ejes coordenados son elipses. Por ejemplo, si el elipsoide se interseca con el plano $z = 0$, se obtiene la elipse estándar $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, z = 0$. Si $a = b = c$, entonces el elipsoide es una esfera de radio a.

Paraboloide elíptico (Figura 2.24). $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2.$
(Las variables x, y y z han intercambiado sus papeles). Esta superficie es la gráfica de una función de x y y. El paraboloide tiene secciones elípticas (o un solo punto o el vacío) determinadas por los planos "z = constante" y secciones parabólicas generadas por los planos "x = constante" o "y = constante". Las constantes a y b afectan la razón del aspecto de las secciones elípticas transversales, y la constante c afecta la inclinación del recipiente (valores más grandes de c producen paraboloides de mayor pendiente).

Paraboloide hiperbólico (Figura 2.25). $z/c = y^2/b^2 - x^2/a^2.$
(Nuevamente x, y y z han intercambiado sus papeles). En el ejemplo 12 de esta sección estudiamos la gráfica de esta superficie. Recordará que su forma es la de una silla de montar con secciones parabólicas cuando "x = constante" o "y = constante", y con secciones hiperbólicas cuando "z = constante".

Cono elíptico (véase la figura 2.26). $z^2/c^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2.$
Las secciones determinadas por los planos "z = constante" son elipses. Cada una de las secciones producidas por $x = 0$ o $y = 0$ son un par de rectas que se intersecan.

Hiperboloide de una rama (Figura 2.27). $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1.$
El término "una rama" significa que la superficie está *conectada,* es decir, que se puede viajar entre dos puntos cualesquiera de la superficie sin tener que abandonarla. Las secciones determinadas por planos "z = constante" son elipses, y las de "x = constante" o "y = constante" son hipérbolas, por lo tanto, esto le da el nombre a la superficie.

Hiperboloide de dos ramas (véase la figura 2.28). $z^2/c^2 - x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$
El hecho de que el lado izquierdo de la ecuación que lo define sea el opuesto del lado izquierdo de la ecuación para el hiperboloide anterior es lo que hace que esta superficie conste de dos partes en lugar de una. Para más precisión, considere las

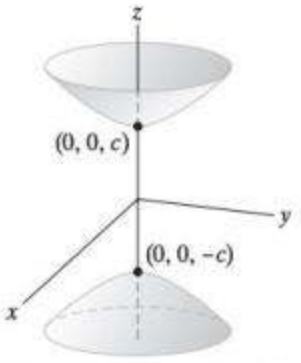


Figura 2.28 La gráfica de la ecuación $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es un hiperboloide de dos ramas.

secciones de la superficie determinada por planos de la forma $z = k$ para diferentes valores de la constante k. Entonces, dichas secciones son dadas por

$$\frac{k^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = k$$

o bien, en forma equivalente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1, \quad z = k.$$

Si $-c < k < c$, entonces $0 \leq k^2/c^2 < 1$. De manera que $k^2/c^2 - 1 < 0$, por lo que la ecuación anterior no tiene solución en x y y. En consecuencia, la sección determinada por $z = k$, donde $|k| < c$, es el vacío. Si $|k| > c$, entonces la sección es una elipse. Las secciones producidas por los planos "x = constante" o "y = constante" son hipérbolas.

Del mismo modo que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

son asintóticas a las rectas $y = \pm(b/a)x$, los hiperboloides

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm 1$$

son asintóticos al cono

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Figura 2.29 Los hiperboloides $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm 1$ son asintóticos al cono $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Esto tal vez se intuya con claridad a partir de la figura 2.29, pero veamos cómo demostrarlo en forma rigurosa. En el contexto actual, decir que los hiperboloides son asintóticos a los conos significa que a medida que $|z|$ aumenta (arbitrariamente) se parecen más y más a los conos. De manera analítica, esto significaría que las ecuaciones para los hiperboloides se aproximarían a la ecuación para el cono para valores de $|z|$ suficientemente grandes. Las ecuaciones de los hiperboloides se escriben como sigue:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \pm 1 = \frac{z^2}{c^2}\left(1 \pm \frac{c^2}{z^2}\right).$$

A medida que $|z| \to \infty$, $c^2/z^2 \to 0$, así que el lado derecho de la ecuación de los hiperboloides se acerca a z^2/c^2. En consecuencia, las ecuaciones de los hiperboloides se aproximan a la del cono, como se deseaba.

2.1 Ejercicios

1. Sea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 + 1$.

a) Encuentre el dominio y el rango de f.

b) ¿Es f uno a uno?

c) ¿Es f suprayectiva?

2. Sea g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por $g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 7$.

a) Determine el dominio y el rango de g.

b) Encuentre una manera de restringir el dominio para construir una nueva función con la misma regla de asignación que g y que sea uno a uno.

c) Encuentre una forma de restringir el codominio para hacer una nueva función con la misma regla de asignación que g, pero que sea suprayectiva.

Encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones dadas en los ejercicios 3 a 7.

3. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

4. $f(x, y) = \ln(x + y)$

5. $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2}$

6. $g(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$

7. $\mathbf{f}(x, y) = \left(x + y, \dfrac{1}{y - 1}, x^2 + y^2\right)$

8. Sea $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, ye^x, x^2y + 7)$. Determine las funciones componente de $\mathbf{f}$.

9. Determine las funciones componente de la función del ejemplo 9.

10. Sea $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 3\mathbf{j}$. Escriba las funciones componente de $\mathbf{f}$ en términos de las componentes del vector $\mathbf{x}$.

11. Considere el mapeo que asigna a un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero en $\mathbf{R}^3$ el vector de longitud 2 que apunta en la dirección opuesta a $\mathbf{x}$.

a) Dé una descripción analítica (simbólica) de este mapeo.

b) Si $\mathbf{x} = (x, y, z)$, determine las funciones componente de dicho mapeo.

12. Considere la función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ y el vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$ está escrito como la matriz columna de 2×1, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

a) Determine en forma explícita las funciones componente de $\mathbf{f}$ en términos de las componentes x_1, x_2 del vector (es decir, la matriz columna) $\mathbf{x}$.

b) Describa el rango de $\mathbf{f}$.

13. Considere la función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^4$ está escrito como la matriz columna de 4×1, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

a) Determine las funciones componente de $\mathbf{f}$ en términos de las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector, es decir, la matriz columna $\mathbf{x}$.

b) Describa el rango de $\mathbf{f}$.

En cada uno de los ejercicios 14 a 23 determine varias curvas de nivel de la función f dada (asegúrese de indicar la altitud c de cada curva); b) use la información obtenida en el inciso anterior para dibujar la gráfica de f.

14. $f(x, y) = 3$

15. $f(x, y) = x^2 + y^2$

16. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9$

17. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

18. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

19. $f(x, y) = xy$

20. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

22. $f(x, y) = 3 - 2x - y$

23. $f(x, y) = |x|$

En los ejercicios 24 a 27 use una computadora para elaborar un dibujo de la función dada $g(x, y)$. Utilice la computadora para a) ayudarse a entender algunas curvas de nivel de la función y b) para graficar (una parte de) la superficie $z = g(x, y)$. Además, marque en la superficie algunas de las curvas de contorno correspondientes a las curvas de nivel que haya obtenido en el inciso a) (observe las figuras 2.10 y 2.11)

24. $g(x, y) = ye^x$

25. $g(x, y) = x^2 - xy$

26. $g(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$

27. $g(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + 1}$

28. La **ley de los gases ideales** es la ecuación $PV = kT$, donde P denota la presión del gas, V el volumen, T la temperatura y k es una constante positiva.

a) Describa la temperatura T del gas como una función del volumen y la presión. Dibuje algunas curvas de nivel de esta función.

b) Describa el volumen V del gas como una función de la presión y temperatura. Trace algunas curvas de nivel.

29. *a*) Grafique las superficies $z = x^2$ y $z = y^2$.

b) Explique cómo puede entenderse la gráfica de las *superficies* $z = f(x)$ y $z = f(y)$ considerando la *curva* en el plano uv dada por $v = f(u)$.

c) Grafique la superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación es $y = x^2$.

30. Use una computadora para graficar la familia de curvas de nivel de las funciones que aparecen en los ejercicios 20 y 21, y compare sus resultados con los que obtuvo al hacer las gráficas a mano. ¿Cómo explica las diferencias que hay?

31. Dada una función $f(x, y)$, ¿pueden intersecarse dos de sus curvas de nivel f que sean diferentes? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 32 a 36 describa la gráfica de $g(x, y, z)$ mediante la determinación de algunas superficies de nivel (si lo prefiere, utilice una computadora como ayuda).

32. $g(x, y, z) = x - 2y + 3z$

33. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

34. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

35. $g(x, y, z) = x^2 + 9y^2 + 4z^2$

36. $g(x, y, z) = xy - yz$

37. *a*) Describa la gráfica de $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ mediante la determinación de algunas superficies de nivel.

b) Suponga que g es una función tal que la expresión para $g(x, y, z)$ involucra solo a x y a y (es decir, $g(x, y, z) = h(x, y)$). ¿Qué podría decirse sobre las superficies de nivel de g?

c) Suponga que g es una función tal que la expresión para $g(x, y, z)$ involucra solo a x y z. ¿Qué podría decirse sobre las superficies de nivel de g?

d) Suponga que g es una función tal que la expresión para $g(x, y, z)$ involucra solo a x. ¿Qué podría decirse sobre las superficies de nivel de g?

38. Este problema se refiere a la superficie determinada por la gráfica de la ecuación $x^2 + xy - xz = 2$.

a) Encuentre una función $F(x, y, z)$ de tres variables de modo que esta superficie se considere un conjunto de nivel de F.

b) Determine una función $f(x, y)$ de dos variables de modo que esta superficie se considere la gráfica de $z = f(x, y)$.

39. Grafique el elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$

¿Es posible encontrar una función $f(x, y)$ tal que el elipsoide se considere la gráfica de $z = f(x, y)$? Explique la razón.

Dibuje o describa las superficies en $\mathbf{R}^3$ *determinadas por las ecuaciones de los ejercicios 40 a 46.*

40. $z = \dfrac{x^2}{4} - y^2$

41. $z^2 = \dfrac{x^2}{4} - y^2$

42. $x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9}$

43. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 0$

44. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

45. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = z^2 - 1$

46. $z = y^2 + 2$

Pueden darse ejemplos de superficies cuadráticas con centros o vértices en puntos distintos del origen utilizando un cambio de coordenadas de la forma $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ *y* $\bar{z} = z - z_0$. *Este cambio de coordenadas simplemente sitúa el punto* (x_0, y_0, z_0) *del sistema de coordenadas xyz en el origen del sistema coordenado* $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ *por medio de una traslación de ejes. De manera que, por ejemplo, la superficie que tiene la ecuación*

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} + (z-5)^2 = 1$$

puede identificarse estableciendo que $\bar{x} = x - 1$, $\bar{y} = y + 2$ *y* $\bar{z} = z - 5$, *de modo que se obtiene*

$$\frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{\bar{y}^2}{9} + \bar{z}^2 = 1,$$

que fácilmente se ve como un elipsoide con centro en $(1, -2, 5)$ *del sistema de coordenadas xyz. Completando el cuadrado en x, y, o en z cuando sea necesario, identifique y dibuje las superficies cuadráticas de los ejercicios 47 a 52.*

47. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (z + 3)^2$

48. $z = 4x^2 + (y + 2)^2$

49. $4x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$

50. $4x^2 + y^2 - 4z^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

51. $x^2 + 2y^2 - 6x - z + 10 = 0$

52. $9x^2 + 4y^2 - 36z^2 - 8y - 144z = 104$

2.2 Límites

Como el lector tal vez recuerda, los procesos de límite son cruciales para el desarrollo del cálculo. El debate matemático y filosófico que tuvo lugar en los siglos XVIII y XIX acerca del significado y pertinencia de las técnicas para obtener límites fue intenso, y cuestionaba los fundamentos mismos del cálculo. A mediados del siglo XIX, para desgracia de muchos estudiantes de los siglos XX y XXI, se había enunciado la difícil definición de límite, "$\epsilon - \delta$", sobre todo por parte de Karl Weierstrass y Augustin Cauchy. En el análisis que sigue estudiaremos los significados intuitivo y riguroso del límite de una función $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, y la forma en que los límites llevan al concepto de función continua, que es el principal objeto de estudio en lo que resta de este libro.

El concepto de límite

Para una función de una variable escalar, f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, el lector ya conoce el enunciado

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y quizá comprenda intuitivamente su significado. En términos poco precisos, la ecuación anterior (que se lee "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L") significa que se puede hacer que el valor numérico de $f(x)$ se acerque arbitrariamente a L acercando x a a tanto como se pueda (pero sin llegar a igualarlo). Esta idea se generaliza de inmediato a funciones $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. En particular, al escribir la ecuación

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L},$$

donde $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, lo cual significa que se puede hacer que el vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se acerque arbitrariamente al **vector límite** $\mathbf{L}$ acercando el vector $\mathbf{x} \in X$ tanto como se pueda al vector $\mathbf{a}$ (pero sin llegar a igualarlo).

La palabra "cerca" (en el sentido que se le da en la sección 1.6) significa que la distancia entre $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{L}$ es pequeña. Por consiguiente, se ofrece una primera definición de límite utilizando la notación para la distancia.

DEFINICIÓN 2.1 (DEFINICIÓN INTUITIVA DE LÍMITE) La ecuación

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L},$$

donde $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ significa que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño, es decir, casi igual a cero, manteniendo a $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ tan pequeño como se pueda (pero sin llegar a cero).

En el caso de una función de variable escalar f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, la longitud del vector $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|$ puede reemplazarse por el valor absoluto $|f(\mathbf{x}) - L|$. De manera similar, si f es una función de solo una variable, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ se sustituye por $|x - a|$.

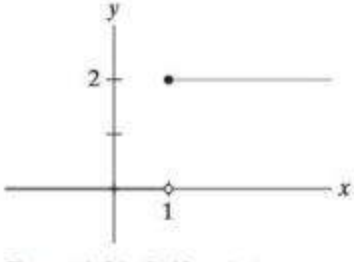


Figura 2.30 Gráfica de f del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Suponga que f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

En la figura 2.30 se muestra la gráfica de f. ¿Cuál debería ser el $\lim_{x \to 1} f(x)$? El límite no puede ser 0 porque sin importar cuánto acerquemos x a 1 (es decir, sin importar cuán pequeño se haga $|x - 1|$), los valores de x pueden ser un poco mayores y un poco menores que 1. Los valores de f que correspondan a los valores de x mayores que 1 serán iguales a 2. Entonces, para dichos valores de x no podemos hacer $|f(x) - 0|$ arbitrariamente pequeño, ya que para $x \geq 1$, $|f(x) - 0| = |2 - 0| = 2$. Asimismo, el límite no puede ser 2 ya que sin importar qué tan pequeño sea $|x - 1|$, x podría ser ligeramente menor que 1. Para $x < 1$, $f(x) = 0$ y, por lo tanto, no podemos hacer $|f(x) - 2| = |0 - 2| = 2$ arbitrariamente pequeño. Entonces, ahora debe estar claro que el límite no puede ser L para *cualquier* $L \in \mathbf{R}$. Así, para esta función *no existe* el $\lim_{x \to 1} f(x)$. ◆

EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida como $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}$ (es decir, $\mathbf{f}$ es cinco veces la **función identidad**). Entonces, la intuición dice que es obvio que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{i}+\mathbf{j}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{i}+\mathbf{j}} 5\mathbf{x} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

De manera que, si escribimos $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (5\mathbf{i} + 5\mathbf{j})\| &= \|(5x\mathbf{i} + 5y\mathbf{j}) - (5\mathbf{i} + 5\mathbf{j})\| \\ &= \|5(x-1)\mathbf{i} + 5(y-1)\mathbf{j}\| = \sqrt{25(x-1)^2 + 25(y-1)^2} \\ &= 5\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.\end{aligned}$$

Esta última cantidad se puede hacer tan pequeña como se desee manteniendo

$$\|\mathbf{x} - (\mathbf{i} + \mathbf{j})\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

suficientemente pequeña. ◆

EJEMPLO 3 Ahora suponga que $\mathbf{g}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es definida por $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$. Afirmamos que, para cualquier $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} 3\mathbf{x} = 3\mathbf{a}.$$

En otras palabras, afirmamos que podemos hacer $\|3\mathbf{x} - 3\mathbf{a}\|$ tan pequeña como queramos haciendo $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ suficientemente pequeño. Observe que

$$\|3\mathbf{x} - 3\mathbf{a}\| = \|3(\mathbf{x} - \mathbf{a})\| = 3\,\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|.$$

Esto significa que si deseamos que $\|3\mathbf{x} - 3\mathbf{a}\|$ no sea más de, digamos, 0.003, podemos hacerlo asegurándonos de que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ no sea más de 0.001. Si en vez de ello queremos que $\|3\mathbf{x} - 3\mathbf{a}\|$ no sea más de 0.0003, lo conseguiremos haciendo que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ no sea más de 0.0001. Así, si queremos que $\|3\mathbf{x} - 3\mathbf{a}\|$ no sea más que *cualquier* cantidad especificada (sin importar lo pequeña que sea), tendremos que asegurarnos de que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ no sea más de un tercio de dicha cantidad.

Más en general, si $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es cualquier constante k que multiplica a la función identidad (es decir, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$) y $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ es *cualquier* vector, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} k\mathbf{x} = k\mathbf{a}.$$ ◆

La dificultad principal con la definición 2.1 radica en la vaguedad de los términos "arbitrariamente pequeño" y "tan pequeño como se pueda". Se puede introducir algo de precisión al enfoque intuitivo del siguiente modo: Piense en que la función $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ se aplica a algún experimento científico, haciendo que la variable $\mathbf{x}$ tome un valor particular en X cantidad para hacer mediciones confiables de las variables de entrada al experimento y que el valor resultante $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se considere como el resultado del experimento. Los experimentos se diseñan para probar teorías, por lo que, el lector debe suponer que este experimento hipotético fue diseñado para probar la teoría de que, a medida que la entrada se acerca más y más a $\mathbf{a}$, entonces el resultado se aproxima cada vez más a $\mathbf{L}$. Para verificar esta teoría, se debe establecer algún error experimental (absoluto) aceptable para el resultado, por ejemplo 0.05. Es decir, se desea que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < 0.05$, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ es suficientemente pequeño. Entonces, ¿qué tan chico necesita ser $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$? Tal vez resulte que se debe tener $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < 0.02$, y que si se toma $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < 0.02$ entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < 0.05$. ¿Significa esto que la teoría es correcta? No todavía. Ahora suponga que desea más exactitud y solo aceptará un error experimental de 0.005 en lugar de 0.05. En otras palabras, desea que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < 0.005$. Tal vez descubra que al tomar $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < 0.001$ alcanza el objetivo. ¿La teoría es correcta? Bueno, no hay nada especial en el número 0.005, por lo que tal vez usted insista en que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < 0.001$ o que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < 0.00001$. Lo importante es que, si su teoría es correcta, entonces, *sin importar cuál sea* el error experimental (absoluto) ϵ que se elija para el resultado, debe encontrar un "nivel de tolerancia" δ para la entrada $\mathbf{x}$ de manera que, si

$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon$. Este es el enfoque heurístico que motiva la definición técnica de límite.

DEFINICIÓN 2.2 (DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE) Sea $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Entonces, decir que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

significa que, dado cualquier $\epsilon > 0$, puede encontrarse un $\delta > 0$ (que en general depende de ϵ) tal que, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon$.

La condición de que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ tan solo significa que los únicos valores que nos importan son los de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ está *cerca* de $\mathbf{a}$, pero *no* son iguales a $\mathbf{a}$. La definición 2.2 no es fácil de usar en la práctica (y no la emplearemos con frecuencia). Además, no es muy valiosa en cuanto a su capacidad para realmente *evaluar* los límites de funciones (en general es una tarea difícil evaluar el límite de una función de más de una variable).

EJEMPLO 4 Ahora que el lector tiene nociones del trabajo con la definición 2.2 veremos en forma rigurosa que

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} (3x - 5y + 2z) = 12$$

(lo cual debería ser "obvio"). Esto significa que, dado cualquier número $\epsilon > 0$, es posible encontrar un $\delta > 0$ correspondiente tal que

$$\text{Si } 0 < \|(x, y, z) - (1, -1, 2)\| < \delta, \qquad \text{entonces } |3x - 5y + 2z - 12| < \epsilon.$$

(Advierta el uso de las longitudes del vector y los valores absolutos). En el párrafo siguiente presentaremos una demostración formal, pero por ahora desarrollaremos los cálculos previos necesarios para construir dicha prueba. En primer lugar, se necesita volver a escribir las dos desigualdades en una forma tal que sea más plausible que surja algebraicamente la desigualdad de ϵ a partir de la desigualdad de δ. A partir de la definición de longitud de un vector, la desigualdad de δ se convierte en

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} < \delta.$$

Si esto es verdad, entonces es claro que surgen tres desigualdades:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2} &= |x-1| < \delta, \\
\sqrt{(y+1)^2} &= |y+1| < \delta, \\
\sqrt{(z-2)^2} &= |z-2| < \delta.
\end{aligned}$$

Ahora, se reescribe el lado izquierdo de la desigualdad de ϵ y se usa la desigualdad del triángulo (2) de la sección 1.6:

$$\begin{aligned}
|3x - 5y + 2z - 12| &= |3(x-1) - 5(y+1) + 2(z-2)| \\
&\le |3(x-1)| + |5(y+1)| + |2(z-2)| \\
&= 3|x-1| + 5|y+1| + 2|z-2|.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si

$$0 < \|(x, y, z) - (1, -1, 2)\| < \delta,$$

entonces

$$|x-1| < \delta, \quad |y+1| < \delta, \quad \text{y} \quad |z-2| < \delta,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
|3x - 5y + 2z - 12| &\le 3|x-1| + 5|y+1| + 2|z-2| \\
&< 3\delta + 5\delta + 2\delta = 10\delta.
\end{aligned}$$

Si pensamos que δ es una cantidad positiva que podemos hacer tan pequeña como queramos, entonces 10δ también puede hacerse muy chico. De hecho, es 10δ lo que desempeña el papel de ϵ.

Ahora, para una demostración formal de "libro de texto", Dado cualquier $\epsilon > 0$, se elige $\delta > 0$, de modo que $\delta \leq \epsilon/10$. Entonces, si

$$0 < \|(x, y, z) - (1, -1, 2)\| < \delta,$$

se sigue que

$$|x - 1| < \delta, \quad |y + 1| < \delta \quad \text{y} \quad |z - 2| < \delta,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |3x - 5y + 2z - 12| &\leq 3|x - 1| + 5|y + 1| + 2|z - 2| \\ &< 3\delta + 5\delta + 2\delta \\ &= 10\delta \leq 10\frac{\epsilon}{10} = \epsilon. \end{aligned}$$

Así, $\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)}(3x - 5y + 2z) = 12$, como se deseaba. ◆

Con los mismos métodos usados en el ejemplo 4 se puede demostrar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

para cualquier a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Algo de terminología topológica

Antes de analizar el significado geométrico del límite de una función es necesario introducir alguna terminología estándar acerca de conjuntos de puntos en $\mathbf{R}^n$. La geometría en que se basan los conjuntos de puntos de un espacio se conoce como **topología** de ese espacio.

Figura 2.31 Bola cerrada con centro en **a**.

Recuerde el lector de la sección 2.1 que la ecuación vectorial $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$, donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{a}$ están en $\mathbf{R}^3$ y $r > 0$, define una esfera de radio r con centro en $\mathbf{a}$. Si modificamos esta ecuación de modo que se convierta en la desigualdad

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r, \tag{1}$$

entonces los puntos $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ que la satisfacen llenan lo que se conoce como **bola cerrada** mostrada en la figura 2.31. De manera similar, la desigualdad *estricta*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r \tag{2}$$

describe puntos $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ y que están a una distancia menor que r de $\mathbf{a}$. Tales puntos determinan una **bola abierta** de radio r con centro en $\mathbf{a}$, es decir, una bola sólida *sin* la esfera de frontera.

No hay nada en las desigualdades (1) y (2) que las restrinja a $\mathbf{R}^3$. De hecho, si hacemos que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{a}$ sean puntos de $\mathbf{R}^n$, entonces (1) y (2) definen, respectivamente, bolas cerradas y abiertas con n dimensiones de radio r con centro en $\mathbf{a}$. Si bien no podemos hacer dibujos cuando $n > 3$, sí podemos ver lo que significan (1) y (2) cuando n es 1 o 2 (véanse las figuras 2.32 y 2.33).

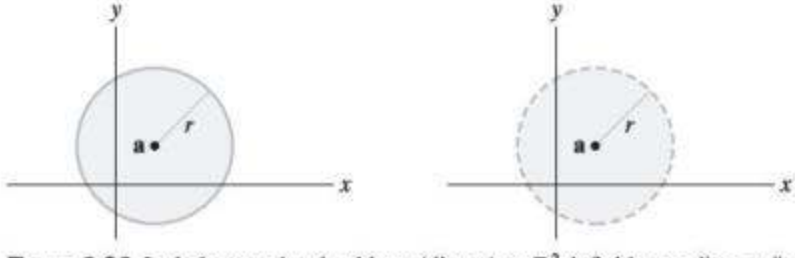


Figura 2.32 La bola cerrada y la abierta (discos) en $\mathbf{R}^2$ definidas por $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$.

Figura 2.33 Bolas (intervalos) cerradas y abiertas en $\mathbf{R}$ definidas por $|x - a| \leq r$ y $|x - a| < r$.

DEFINICIÓN 2.3 Se dice que un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ es **abierto** en $\mathbf{R}^n$ si para cada punto $\mathbf{x} \in X$ hay alguna bola abierta con centro en $\mathbf{x}$ que esté por completo dentro de X. Se dice que un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ está en la **frontera** de un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ si toda bola abierta con centro en $\mathbf{x}$, sin importar lo pequeña que sea, contiene algunos puntos que estén en X y también algunos que no lo estén. Se dice que un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ es **cerrado** en $\mathbf{R}^n$ si contiene a todos sus puntos en la frontera. Por último, una **vecindad** de un punto $\mathbf{x} \in X$ es un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{x}$ y está contenido en X.

Una consecuencia inmediata de la definición 2.3 es que un conjunto X es cerrado en $\mathbf{R}^n$ precisamente si su complemento $\mathbf{R}^n - X$ es abierto.

EJEMPLO 5 La región rectangular

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 2\}$$

es abierta en $\mathbf{R}^2$ (véase la figura 2.34). Cada punto en X tiene un disco abierto alrededor contenido por completo en el rectángulo. La frontera de X consta de los cuatro lados del rectángulo (véase la figura 2.35). ◆

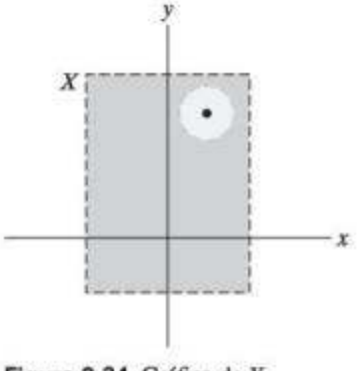


Figura 2.34 Gráfica de X.

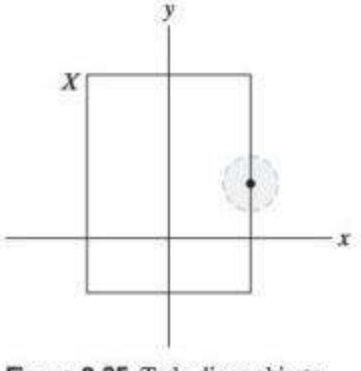


Figura 2.35 Todo disco abierto alrededor de un punto ubicado en un lado del rectángulo X del ejemplo 5 contiene puntos tanto en X como en $\mathbf{R}^2 - X$.

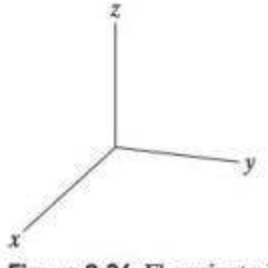


Figura 2.36 El conjunto X del ejemplo 6 consta de los ejes coordenados no negativos.

EJEMPLO 6 El conjunto X que consta de los ejes coordenados no negativos en $\mathbf{R}^3$ que se ilustra en la figura 2.36 es cerrado porque la frontera de X es X en sí. ◆

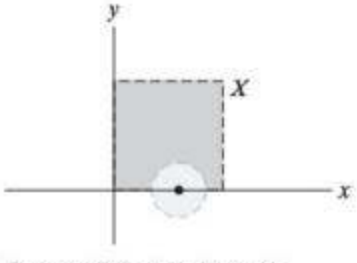


Figura 2.37 El conjunto X del ejemplo 7.

EJEMPLO 7 No se engañe el lector con la suposición de que los conjuntos siempre son cerrados o abiertos (es decir, un conjunto no es una puerta). El conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

que aparece en la figura 2.37 no es abierto ni cerrado. No es abierto porque, por ejemplo, el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ que está en el borde inferior de X no tiene disco abierto alrededor de sí mismo que esté por completo en X. Además, X no es cerrado porque la frontera de X incluye puntos de la forma $(x, 1)$ para $0 \leq x \leq 1$ que no son parte de X (¿a qué cree que se deba?). ◆

Interpretación geométrica del límite

Suponga que $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Entonces el significado geométrico del enunciado

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

es el siguiente: dado cualquier $\epsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ correspondiente tal que, si los puntos $\mathbf{x} \in X$ están dentro de una bola abierta de radio δ centrada en $\mathbf{a}$, entonces los puntos correspondientes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ permanecerán dentro de una bola abierta de radio ϵ con centro en $\mathbf{L}$ (véase la figura 2.38).

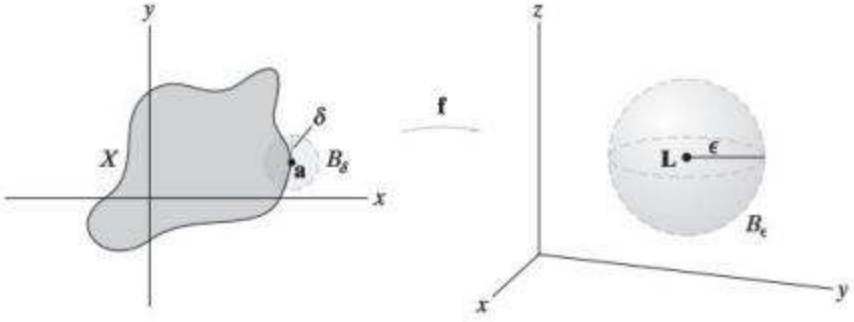


Figura 2.38 Definición de límite. Dada una bola abierta B_ϵ con centro en $\mathbf{L}$ (derecha), siempre es posible encontrar una bola B_δ correspondiente con centro en $\mathbf{a}$ (izquierda), de modo que los puntos en $B_\delta \cap X$ son mapeados por $\mathbf{f}$ hacia puntos en B_ϵ.

Se debe remarcar que para que esta definición tenga sentido, el punto $\mathbf{a}$ debe ser tal que toda vecindad de él en $\mathbf{R}^n$ contenga a puntos $\mathbf{x} \in X$ distintos de $\mathbf{a}$. Dicho punto $\mathbf{a}$ se llama **punto de acumulación** de X (técnicamente, esta suposición también debe hacerse en la definición 2.2). Un punto $\mathbf{a} \in X$ se llama **punto aislado** de X si no es un punto de acumulación, es decir, si hay alguna vecindad de $\mathbf{a}$ en $\mathbf{R}^n$ que no contenga puntos de X además de $\mathbf{a}$.

A partir de estas consideraciones se observa que el enunciado $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ significa realmente que a medida que $\mathbf{x}$ se mueve hacia $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se mueve hacia $\mathbf{L}$. Lo significativo de la geometría de "bola abierta" es que el movimiento arbitrario se permite por completo.

EJEMPLO 8 Sea $f: \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Veamos qué le pasa a f cuando $\mathbf{x} = (x, y)$ se aproxima a $\mathbf{0} = (0, 0)$, (Observe que f está indefinida en el origen, aunque esto no tiene consecuencias en lo que se refiere a la evaluación de límites). Se calcula el valor de f a lo largo del eje x (es decir, la recta $y = 0$), que es:

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1.$$

Por consiguiente, cuando $\mathbf{x}$ se aproxima a $\mathbf{0}$ *a lo largo de la recta* $y = 0$, los valores de f permanecen constantes, por lo que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0} \text{ a lo largo de } y=0} f(\mathbf{x}) = 1.$$

Sin embargo, a lo largo del eje y, el valor de f es

$$f(0, y) = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1.$$

Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0} \text{ a lo largo de } x=0} f(\mathbf{x}) = -1.$$

Es decir, el valor de f es constante a lo largo de cada recta que pase por el origen. A lo largo de la recta $y = mx$, con m constante, se tiene que

$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0} \text{ a lo largo de } y=mx} f(\mathbf{x}) = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Como resultado, el límite de f cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{0}$ *no existe*, ya que f tiene diferentes "valores límite" que dependen de la dirección en que nos aproximemos al origen (véase la figura 2.39). Es decir, no importa lo cerca que se esté del origen, pueden encontrarse puntos $\mathbf{x}$ tales que $f(\mathbf{x})$ *no esté* cerca de ningún número $L \in \mathbf{R}$ (en otras palabras, todo disco abierto con centro en (0, 0), sin importar lo pequeño que sea, es mapeado hacia el intervalo $[-1, 1]$. Si se grafica la superficie cuya ecuación es

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(Figura 2.40), se observa con claridad que no hay un valor límite a medida que x tiende al origen. ◆

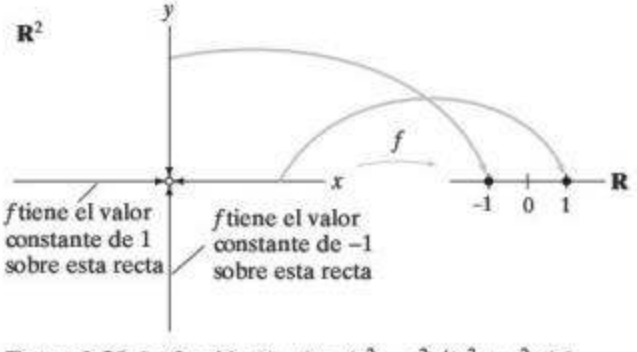


Figura 2.39 La función $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ del ejemplo 8 tiene el valor de 1 a lo largo del eje x, y el valor de -1 a lo largo del eje y (excepto en el origen).

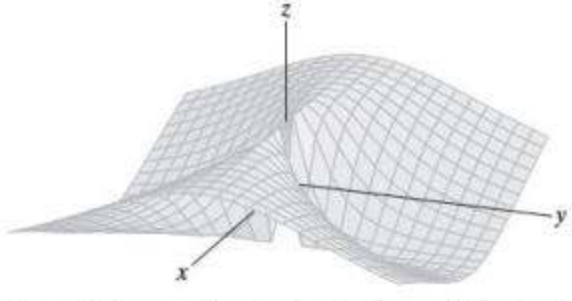


Figura 2.40 La gráfica de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ del ejemplo 8.

ADVERTENCIA El ejemplo 8 podría hacer pensar que se puede establecer el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ demostrando que todos los valores de $\mathbf{f}$ tienden al mismo valor de $\mathbf{L}$ a medida que $\mathbf{x}$ se aproxima a $\mathbf{a}$ a lo largo de trayectorias rectilíneas. Aunque esto es una clara evidencia de que el límite debe ser $\mathbf{L}$, no es de ninguna manera concluyente. Véase el ejercicio 23 para un ejemplo que muestra lo que puede ocurrir.

EJEMPLO 9 Otra manera de trabajar con la función $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ del ejemplo 8 es reescribirla en términos de coordenadas polares. Así, $x = r \cos \theta$,

$y = r \operatorname{sen} \theta$. Utilizando la identidad de Pitágoras y la fórmula del ángulo doble para el coseno, se obtiene, para $r \neq 0$, que

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)} = \frac{\cos 2\theta}{1} = \cos 2\theta.$$

Es decir, para $r \neq 0$,

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = \cos 2\theta.$$

Además, para evaluar el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, solo debemos dejar que r tienda a 0; no necesita haber ninguna restricción sobre θ. Por lo tanto, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} \cos 2\theta = \cos 2\theta.$$

Es evidente que este resultado depende de θ. Por ejemplo, si $\theta = 0$ (lo que define al eje x), entonces:

$$\lim_{r\to 0 \text{ a lo largo de } \theta = 0} \cos 2\theta = 1,$$

mientras que si $\theta = \pi/4$ (lo que define a la recta $y = x$), entonces,

$$\lim_{r\to 0 \text{ a lo largo de } \theta = \pi/4} \cos 2\theta = 0.$$

Entonces, igual que en el ejemplo 8, se observa que no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. ◆

EJEMPLO 10 Usaremos coordenadas polares para obtener el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, donde $f(x, y) = (x^3 + x^5)/(x^2 + y^2)$.

Primero escribiremos la expresión $(x^3 + x^5)/(x^2 + y^2)$ en coordenadas polares:

$$\frac{x^3 + x^5}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^5 \cos^5 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = r(\cos^3 \theta + r^2 \cos^5 \theta).$$

Ahora, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, lo que implica que,

$$-1 - r^2 \leq \cos^3 \theta + r^2 \cos^5 \theta \leq 1 + r^2.$$

Entonces,

$$-r(1 + r^2) \leq f(x, y) \leq r(1 + r^2).$$

Cuando $r \to 0$, las expresiones $-r(1 + r^2)$ y $r(1 + r^2)$ tienden a cero. En consecuencia, se concluye que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, ya que f está contenida entre dos expresiones con el mismo límite. ◆

Propiedades de los límites

Una de las desventajas más grandes de la definición 2.2 es que no es muy útil para determinar el valor de un límite. Para usarla se debe tener ya un "candidato al límite" en la mente y también estar preparado para enfrentar cierto trabajo delicado con desigualdades. Con un poco de fe los resultados que siguen (los cuales se de-

muestran en el anexo de esta sección) resultan útiles para establecer límites, como lo demuestran los ejemplos siguientes.

TEOREMA 2.4 (UNICIDAD DE LOS LÍMITES) Si un límite existe, es único. Es decir, sea $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Si el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ y el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}$, entonces $\mathbf{L} = \mathbf{M}$.

TEOREMA 2.5 (PROPIEDADES ALGEBRAICAS) Sean $\mathbf{F}, \mathbf{G}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ funciones de variable vectorial $f, g: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funciones de variable escalar, y sea $k \in \mathbf{R}$ un escalar.

1. Si el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ y el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}$, entonces el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{F} + \mathbf{G})(\mathbf{x}) = \mathbf{L} + \mathbf{M}$.
2. Si el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, entonces el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} k\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{L}$.
3. Si el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ y el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M$, entonces el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) = LM$.
4. Si el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$, $g(\mathbf{x}) \neq 0$ para $\mathbf{x} \in X$, y el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M \neq 0$, entonces el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f/g)(\mathbf{x}) = L/M$.

No hay ninguna sorpresa en estos teoremas —son exactamente los mismos que los resultados correspondientes a funciones de una variable escalar de una sola variable. Además, el teorema 2.5 permite la evaluación de muchos límites de manera más o menos sencilla.

EJEMPLO 11 Ya sea a partir de consideraciones rigurosas, o con fe ciega, el lector debería de encontrar que es plausible que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b.$$

A partir de esto se sigue, de las partes 1, 2 y 3 del teorema 2.5, que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^2 + 2xy - y^3) = a^2 + 2ab - b^3,$$

porque, según la parte 1 del teorema 2.5,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^2 + 2xy - y^3) = \lim x^2 + \lim 2xy + \lim(-y^3)$$

y, según las partes 2 y 3,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^2 + 2xy - y^3) = (\lim x)^2 + 2(\lim x)(\lim y) - (\lim y)^3$$

por lo que, de los hechos que se acaban de citar,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^2 + 2xy - y^3) = a^2 + 2ab - b^3. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 12 En términos más generales, un **polinomio** en dos variables x y y es cualquier expresión de la forma

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{l=0}^{d} c_{kl} x^k y^l,$$

donde d es algún entero no negativo y $c_{kl} \in \mathbf{R}$, para $k, l = 0, \ldots, d$. Es decir, $p(x, y)$ es una expresión que consta de una suma (finita) de términos que son números reales como coeficientes que multiplican a potencias de x y y. Por ejemplo, la expresión

$x^2 + 2xy - y^3$, del ejemplo 11 es un polinomio. Para cualquier $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, se tiene, según la parte 1 del teorema 2.5,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x, y) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{l=0}^{d} \lim_{(x,y)\to(a,b)} (c_{kl} x^k y^l),$$

por lo que, a partir de la parte 2,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x, y) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{l=0}^{d} c_{kl} \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^k y^l$$

y, de la parte 3:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x, y) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{l=0}^{d} c_{kl} (\lim x^k)(\lim y^l)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \sum_{l=0}^{d} c_{kl} a^k b^l.$$

De manera similar, un **polinomio** en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{d} c_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

donde d es algún entero no negativo y $c_{k_1\cdots k_n} \in \mathbf{R}$ para $k_1, \ldots, k_n = 0, \ldots, d$. Por ejemplo, un polinomio en cuatro variables tendría el aspecto siguiente:

$$p(x_1, \ldots, x_4) = 3x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 x_4 - 7x_3^8 x_4^2.$$

Es evidente que el teorema 2.5 implica que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \sum c_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} = \sum c_{k_1\cdots k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 13 Evaluemos $\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \dfrac{x^2 + xy + 3}{x^2 y - 5xy + y^2 + 1}$.

Usando el ejemplo 12 observamos que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} x^2 + xy + 3 = 4,$$

y que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} x^2 y - 5xy + y^2 + 1 = 1 (\neq 0).$$

Por consiguiente, de la parte 4 del teorema 2.5 se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{x^2 + xy + 3}{x^2 y - 5xy + y^2 + 1} = \frac{4}{1} = 4. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 14 Por supuesto, no todos los límites de expresiones con cocientes son tan fáciles de evaluar como el del ejemplo 13. Por ejemplo, no es posible usar el teorema 2.5 para evaluar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4} \tag{3}$$

ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^4) = 0$. Entonces, dado que también $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^4) = 0$, la expresión $(x^2 - y^4)/(x^2 + y^4)$ se convierte en indeterminada cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Para ver lo que sucede con la expresión observemos que

$$\lim_{x\to 0 \text{ a lo largo de } y=0} \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

en tanto que

$$\lim_{y\to 0 \text{ a lo largo de } x=0} \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^4}{y^4} = -1.$$

Así, el límite de la expresión (3) no existe (compare esto con el ejemplo 8). ◆

El resultado siguiente muestra que la evaluación del límite de una función $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ equivale a evaluar los límites de sus funciones componente (de variable escalar). En primer lugar hay que recordar, de la sección 2.1, que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ puede reescribirse como $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$.

TEOREMA 2.6 Suponga que $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una función de variable vectorial. Entonces, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, donde $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_m)$ si y solo si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ para $i = 1, \ldots, m$.

EJEMPLO 15 Considere el mapeo lineal $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definido por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$ de números reales (véase el ejemplo 5 de la sección 1.6). El teorema 2.6 demuestra que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{b}$$

para cualquier $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ en $\mathbf{R}^n$. Si escribimos la multiplicación de matrices, tenemos que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la i-ésima función componente de $\mathbf{f}$ es

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Del ejemplo 4 se tiene que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} f_i(\mathbf{x}) = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{in}b_n$$

para cada i. En consecuencia, el teorema 2.6 afirma que los límites de las funciones componente se ajustan para formar un vector límite. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} f_1(\mathbf{x}), \ldots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} f_m(\mathbf{x})) \\ &= (a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n, \ldots, a_{m1}b_1 + \cdots + a_{mn}b_n) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = A\mathbf{b}, \end{aligned}$$

una vez que se aprovecha la notación matricial. ◆

Funciones continuas

Para funciones de una sola variable escalar es frecuente adoptar la actitud siguiente para llegar al concepto de continuidad. Una función $f: X \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es **continua** si se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. De acuerdo con este criterio, la figura 2.41 describe una función continua $y = f(x)$, mientras que la figura 2.42 no lo hace.

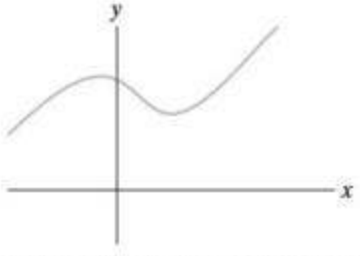


Figura 2.41 Gráfica de una función continua.

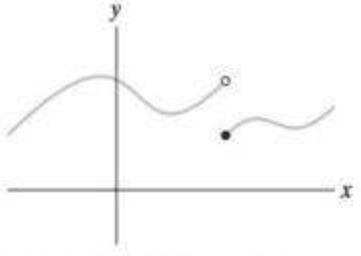


Figura 2.42 Gráfica de una función discontinua.

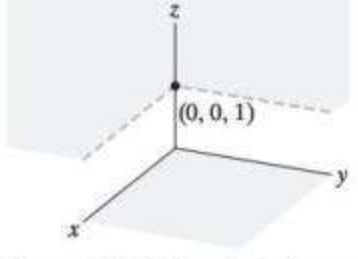


Figura 2.43 Gráfica de f en la que $f(x, y) = 0$ si tanto $x \geq 0$ como $y \geq 0$, y en la que $f(x, y) = 1$.

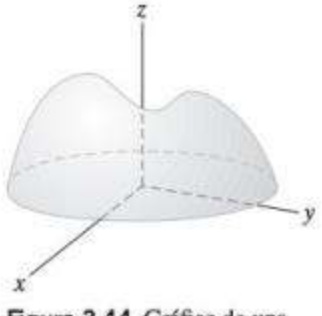


Figura 2.44 Gráfica de una función continua $f(x, y)$.

Podemos extender esta idea a funciones de dos variables escalares: una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es **continua** si su gráfica (en $\mathbf{R}^3$) no tiene rupturas. Por esa razón la función ilustrada en la figura 2.43 no es continua, pero la de la figura 2.44 sí lo es. Aunque este enfoque gráfico de la continuidad es agradable a la intuición desde el punto de vista geométrico, en realidad tiene errores graves. En primer lugar no pueden visualizarse gráficas de funciones de más de dos variables, así que, ¿cómo podríamos decir en general si una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ es continua? Además, no siempre es fácil generar la gráfica de una función de dos variables de modo que baste para hacer una determinación visual de continuidad. Dicho lo anterior, ahora se dará una definición rigurosa de la continuidad de funciones de varias variables.

DEFINICIÓN 2.7 Sea $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, y sea que $\mathbf{a} \in X$. Entonces se dice que $\mathbf{f}$ es **continua en a** si $\mathbf{a}$ es un punto aislado de X, o si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Si $\mathbf{f}$ es continua en todos los puntos de su dominio X, entonces decimos simplemente que $\mathbf{f}$ es **continua**.

EJEMPLO 16 Considere la función $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Por lo tanto, $f(0, 0) = 0$, pero el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe (para ver esto revise el lector lo que pasa cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, primero a lo largo de $y = 0$ y después a lo largo de $x = 0$). En consecuencia, f no es continua en $(0, 0)$. ◆

Es bueno observar que la definición 2.7 no es nada más que la versión "vectorial" de la definición usual de la continuidad de una función de una variable (escalar). Esta definición proporciona otro ejemplo del poder de la notación vectorial. La continuidad es similar sin importar el contexto.

Una manera de pensar sobre las funciones continuas es que son las únicas cuyos límites son fáciles de evaluar: cuando **f** es continua, el *límite* de **f** cuando **x** tiende a **a** tan solo es el *valor* de **f** en **a**. Es demasiado tentador caer en el hábito de actuar como si todas las funciones fueran continuas, en especial porque las funciones que revisten interés para nosotros son continuas. Trate de evitar dicho impulso.

EJEMPLO 17 Las funciones polinominales en n variables son continuas. El ejemplo 12 ilustra el hecho de que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \sum c_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} = \sum c_{k_1\cdots k_n} a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ están en $\mathbf{R}^n$. Si f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es definida por

$$f(\mathbf{x}) = \sum c_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},$$

entonces el enunciado precedente de límite afirma precisamente que f es continua en **a**. ◆

EJEMPLO 18 Los mapeos lineales son continuos. Si $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de $m \times n$, entonces el ejemplo 15 establece que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{b})$$

para toda $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Por consiguiente, **f** es continua. ◆

La interpretación geométrica de la definición $\epsilon - \delta$ de un límite da lugar a una interpretación similar de la continuidad en un punto: $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es continua en un punto $\mathbf{a} \in X$ si, para toda bola abierta B_ϵ en $\mathbf{R}^m$ de radio ϵ con centro en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, hay una bola abierta correspondiente B_δ en $\mathbf{R}^n$ de radio δ con centro en **a** tal que los puntos $\mathbf{x} \in X$ dentro de B_δ son mapeados por **f** hacia puntos dentro de B_ϵ (véase la figura 2.45). En términos aproximados, la continuidad de **f** significa que los puntos "cercanos" en $X \subseteq \mathbf{R}^n$ son mapeados hacia puntos "cercanos" en $\mathbf{R}^m$.

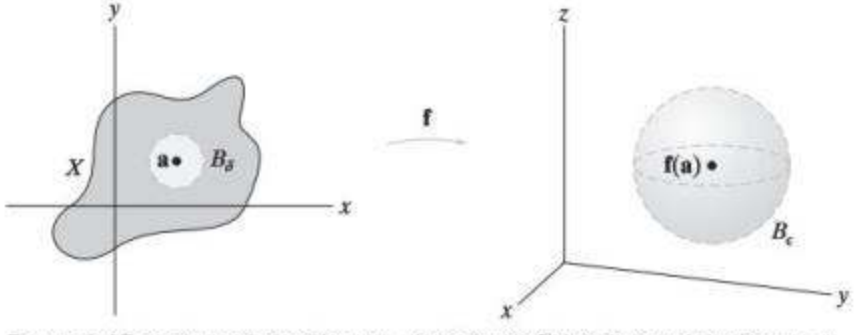


Figura 2.45 Dada una bola abierta B_ϵ alrededor de $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ (a la derecha), siempre es posible encontrar una bola abierta correspondiente B_δ de modo que los puntos en $B_\delta \cap X$ son mapeados hacia puntos en B_ϵ.

En la práctica, por lo general se establece la continuidad de una función utilizando los teoremas 2.5 y 2.6. Dichos teoremas, cuando se interpretan en el contexto de la continuidad, dicen lo siguiente:

- La suma $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ de dos funciones $\mathbf{F}, \mathbf{G}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que son continuas en $\mathbf{a} \in X$, es continua en $\mathbf{a}$.
- Para toda $k \in \mathbf{R}$, el múltiplo escalar $k\mathbf{F}$ de una función $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que es continua en $\mathbf{a} \in X$ es continuo en $\mathbf{a}$.
- El producto fg y el cociente f/g $(g \neq 0)$ de dos funciones de variable escalar, $f, g: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que son continuas en $\mathbf{a} \in X$, son continuos en $\mathbf{a}$.
- $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es continua en $\mathbf{a} \in X$ si y solo si sus funciones componente $F_i: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ son todas continuas en $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 19 La función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x^2y, y \operatorname{sen}(xy))$$

es continua. En vista de los comentarios anteriores se comprueba esto verificando que las tres funciones componente

$$f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = x^2y \quad \text{y} \quad f_3(x, y) = y \operatorname{sen}(xy)$$

son continuas (como funciones de variable escalar). Ahora, f_1 y f_2 son continuas porque son polinomios en las dos variables x y y (véase el ejemplo 17). La función f_3 es el producto de dos funciones más; es decir,

$$f_3(x, y) = g(x, y)h(x, y),$$

donde $g(x, y) = y$ y $h(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$. Es evidente que la función g es continua (¡es un polinomio en dos variables, una variable no aparece en forma explícita!). La función h es una *composición* de la función seno (que es continua como función de una variable) y la función continua $p(x, y) = xy$. A partir de estas precisiones no es difícil concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \operatorname{sen}(p(x, y)) \\ &= \operatorname{sen}\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x, y) \right), \end{aligned}$$

ya que la función seno es continua. Así,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x, y) = \operatorname{sen} p(a, b) = h(a, b),$$

ya que p es continua. Entonces h, por lo tanto, f_3 y, en consecuencia, $\mathbf{f}$, son continuas en $\mathbf{R}^2$. ◆

El razonamiento efectuado en el ejemplo 19 nos lleva al siguiente resultado general, el cual no se demuestra:

TEOREMA 2.8 Si $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $\mathbf{g}: Y \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ son funciones continuas tales que el rango $\mathbf{f} \subseteq Y$, entonces la función compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ se define y también es continua.

Apéndice. Demostraciones de los teoremas 2.4, 2.5, 2.6 y 2.8

Para el lector interesado, en esta sección se establecen los distintos resultados sobre límites de funciones que se han utilizado.

Demostración del teorema 2.4 La definición de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ significa que, dado cualquier $\epsilon > 0$, puede encontrarse algún $\delta_1 > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_1$, entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon/2$ (la razón de escribir $\epsilon/2$ en lugar de solo ϵ quedará clara un poco más adelante). De manera similar, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}$ significa que, dado cualquier $\epsilon > 0$, puede encontrarse algún $\delta_2 > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_2$, entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}\| < \epsilon/2$.

Ahora, sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$; lo cual significa que se hizo que δ sea la más pequeña de δ_1 y δ_2. Si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces *tanto* $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|$ como $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}\|$ son menores que $\epsilon/2$, de modo que, utilizando la desigualdad del triángulo, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{L} - \mathbf{M}\| &= \|(\mathbf{L} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) + (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{M})\| \\ &\leq \|\mathbf{L} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Esto demuestra que la cantidad $\|\mathbf{L} - \mathbf{M}\|$ puede hacerse arbitrariamente pequeña; así, se sigue que $\mathbf{L} - \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Entonces, $\mathbf{L} = \mathbf{M}$. ■

Demostración del teorema 2.5 Para establecer la parte 1, obsérvese que si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, entonces dado cualquier $\epsilon > 0$, puede encontrarse un $\delta_1 > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_1$, entonces, $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon/2$. De manera similar, si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}$, entonces se puede encontrar un $\delta_2 > 0$ tal que, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_2$, entonces $\|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}\| < \epsilon/2$. Ahora, sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$; entonces, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, la desigualdad del triángulo implica que:

$$\|(\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})) - (\mathbf{L} + \mathbf{M})\| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De ahí que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{L} + \mathbf{M}$.

Para demostrar la parte 2 suponga que se da $\epsilon > 0$. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, entonces podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon/|k|$. Por lo tanto,

$$\|k\mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{L}\| = |k|\,\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < |k|\,\frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon,$$

lo que significa que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} k\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{L}$. (Advierta que si $k = 0$, entonces la parte 2 se vuelve trivial).

Para establecer la regla del límite de un producto de funciones de variable escalar (parte 3) se usará la identidad algebraica que sigue:

$$f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - LM = (f(\mathbf{x}) - L)(g(\mathbf{x}) - M) + L(g(\mathbf{x}) - M) + M(f(\mathbf{x}) - L). \quad (4)$$

Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, puede encontrarse un $\delta_1 > 0$ tal que, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_1$, entonces,

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \sqrt{\epsilon}.$$

De manera similar, si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M$, puede encontrarse un $\delta_2 > 0$ tal que, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_2$, entonces,

$$|g(\mathbf{x}) - M| < \sqrt{\epsilon}.$$

sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces

$$|(f(\mathbf{x}) - L)(g(\mathbf{x}) - M)| < \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{\epsilon} = \epsilon.$$

Esto significa que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) - L)(g(\mathbf{x}) - M) = 0$. Por lo tanto, utilizando la ecuación (4) y las partes 1 y 2 se ve que

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - LM) &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) - L)(g(\mathbf{x}) - M) + L\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(g(\mathbf{x}) - M) \\ &\quad + M\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) - L) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Como $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}((f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - LM) + LM)$, el resultado deseado se infiere de la parte 1.

Lo crucial de la demostración de la parte 4 es probar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{g(\mathbf{x})} = \frac{1}{M}.$$

Una vez demostrado eso, el resultado buscado surge directamente de la parte 3:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(f(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{g(\mathbf{x})} \right) = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

Advierta que

$$\left| \frac{1}{g(\mathbf{x})} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(\mathbf{x})|}{|Mg(\mathbf{x})|}$$

y, mediante la desigualdad del triángulo,

$$|M| = |M - g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})| \leq |M - g(\mathbf{x})| + |g(\mathbf{x})|. \tag{5}$$

Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M$, entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, puede encontrarse un δ_1 tal que, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_1$, entonces,

$$|g(\mathbf{x}) - M| < \frac{M^2}{2}\epsilon.$$

También puede encontrarse un $\delta_2 > 0$ tal que, $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_2$, entonces, $|g(\mathbf{x}) - M| < |M|/2$ y, por lo tanto, utilizando la ecuación (5), que

$$|M| < \frac{|M|}{2} + |g(\mathbf{x})| \iff |g(\mathbf{x})| > \frac{|M|}{2} \iff \frac{1}{|g(\mathbf{x})|} < \frac{2}{|M|}.$$

Ahora, si $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{g(\mathbf{x})} - \frac{1}{M} \right| &= \frac{|M - g(\mathbf{x})|}{|Mg(\mathbf{x})|} = \frac{1}{|M|}\frac{|M - g(\mathbf{x})|}{|g(\mathbf{x})|} \\ &< \frac{1}{|M|}\frac{2}{|M|}\frac{M^2}{2}\epsilon = \epsilon.\end{aligned}$$

■

Demostración del teorema 2.6 En primer lugar observe que para $i = 1, \ldots, m$,

$$|f_i(\mathbf{x}) - L_i| \leq \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - L_1)^2 + \cdots + (f_m(\mathbf{x}) - L_m)^2} = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|. \tag{6}$$

Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, entonces, dado un $\epsilon > 0$, puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon$. De ahí que la ecuación (6) implica que $|f_i(\mathbf{x}) - L_i| < \epsilon$ para $i = 1, \ldots, m$, lo que significa que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$.

Por el contrario, suponga el lector que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$, para $i = 1, \ldots, m$. Esto significa que, dado cualquier $\epsilon > 0$, para cada i puede encontrarse un $\delta_i > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_i$, entonces $|f_i(\mathbf{x}) - L_i| < \epsilon/\sqrt{m}$. Por lo tanto, si

$\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, entonces si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, vemos que (6) implica lo siguiente:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m} + \cdots \frac{\epsilon^2}{m}} = \sqrt{m \frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon.$$

Por consiguiente, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$. ■

Demostración del teorema 2.8 Debemos demostrar que la función compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en todo punto $\mathbf{a} \in X$. Si $\mathbf{a}$ es un punto aislado de X, no hay nada que demostrar. En otro caso, debe demostrarse que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a})$.

Dado cualquier $\epsilon > 0$, la continuidad de $\mathbf{g}$ en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ implica que puede encontrarse algún $\gamma > 0$, tal que si $\mathbf{y} \in$ del rango de $\mathbf{f}$ y $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \gamma$, entonces

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\| < \epsilon.$$

Como $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$, puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \gamma.$$

Por lo tanto, si $\mathbf{x} \in X$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\| < \epsilon.$$ ■

2.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 determine si el conjunto dado es abierto o cerrado (o si no tiene ninguna de ambas propiedades).

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$
4. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
5. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < x < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2\}$
6. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

En los ejercicios 7 a 21 evalúe el límite en cada uno o explique por qué no existe.

7. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} x^2 + 2xy + yz + z^3 + 2$
8. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
9. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$
10. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{e^x e^y}{x + y + 2}$
11. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$
12. $\lim_{(x,y) \to (-1,2)} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$
13. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$
14. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
15. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$
16. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$
17. $\lim_{(x,y) \to (0,0), x \neq y} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
18. $\lim_{(x,y) \to (2,0)} \frac{x^2 - y^2 - 4x + 4}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$
19. $\lim_{(x,y,z) \to (0, \sqrt{\pi}, 1)} e^{xz} \cos y^2 - x$
20. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{2x^2 + 3y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
21. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{xy - xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$
22. *a*) ¿Cuál es el $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$?

    b) ¿Cuál es el $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$?

    c) ¿Cuál es el $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$?

23. Estudie el comportamiento de $f(x, y) = x^4y^4/(x^2 + y^4)^3$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de distintas rectas. A partir de sus observaciones, ¿podría hacer una conjetura acerca de cuál es el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? A continuación considere lo que ocurre cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la curva $x = y^2$. ¿Existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 24 a 27 a) use una computadora para graficar $z = f(x, y)$; b) use la gráfica del inciso a) para hacer un análisis geométrico acerca de si existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$; c) dé un argumento analítico (es decir, no gráfico) para su respuesta al inciso b).

24. $f(x, y) = \dfrac{4x^2 + 2xy + 5y^2}{3x^2 + 5y^2}$

25. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2}$

26. $f(x, y) = \dfrac{xy^5}{x^2 + y^{10}}$

27. $f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

Algunos límites son fáciles de encontrar si se cambia a un sistema de coordenadas distinto. En los ejercicios 28 a 33 cambie de coordenadas cartesianas a polares para evaluar los límites dados. En los ejercicios 34 a 37 cambie a coordenadas esféricas.

28. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$

29. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

30. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$

31. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5 + y^4 - 3x^3y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

32. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

33. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

34. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2 + z^2}$

35. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

36. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

37. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xz}{x^2 + y^2 + z^2}$

En los ejercicios 38 a 45 determine si las funciones son continuas en sus dominios:

38. $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^7$

39. $f(x, y, z) = x^2 + 3xyz + yz^3 + 2$

40. $g(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 1}$

41. $h(x, y) = \cos\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 1}\right)$

42. $f(x, y) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 xy$

43. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

44. $g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 + xy^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

45. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 + 3xy, \dfrac{e^x e^y}{2x^2 + y^4 + 3}, \operatorname{sen}\left(\dfrac{xy}{y^2 + 1}\right)\right)$

46. Determine el valor de la constante c tal que

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ c & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua.

47. Demuestre que la función $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}$ es continua.

48. Demuestre que la función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (6\mathbf{i} - 5\mathbf{k}) \times \mathbf{x}$ es continua.

Los ejercicios 49 a 53 involucran la definición 2.2 del límite.

49. Considere la función $f(x) = 2x - 3$.

a) Demuestre que si $|x - 5| < \delta$, entonces $|f(x) - 7| < 2\delta$.

b) Utilice el inciso anterior para demostrar que $\lim_{x\to 5} f(x) = 7$.

50. Considere la función $f(x, y) = 2x - 10y + 3$.

a) Demuestre que si $\|(x, y) - (5, 1)\| < \delta$, entonces $|x - 5| < \delta$ y $|y - 1| < \delta$.

b) Use el inciso anterior para demostrar que si $\|(x, y) - (5, 1)\| < \delta$, entonces $|f(x, y) - 3| < 12\delta$.

c) Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(5,1)} f(x, y) = 3$.

51. Si A, B y C son constantes y $f(x, y) = Ax + By + C$, demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C.$$

52. En este problema se establecerá en forma rigurosa que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

a) Demuestre que $|x| \leq \|(x, y)\|$ y que $|y| \leq \|(x, y)\|$.

b) Demuestre que $|x^3 + y^3| \leq 2(x^2 + y^2)^{3/2}$. (Sugerencia: comience con la desigualdad del triángulo y después utilice el inciso *a*)).

c) Demuestre que si $0 < \|(x, y)\| < \delta$, entonces $|(x^3 + y^3)/(x^2 + y^2)| < 2\delta$.

d) Ahora demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^3 + y^3)/(x^2 + y^2) = 0$.

53. *a*) Si a y b son números reales cualesquiera, demuestre que $2|ab| \leq a^2 + b^2$.

b) Sea

$$f(x, y) = xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Utilice el resultado del inciso anterior para demostrar que si $0 < \|(x, y)\| < \delta$, entonces $|f(x, y)| < \delta^2/2$.

c) Demuestre que existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y encuentre su valor.

2.3 La derivada

El objetivo de esta sección es definir la derivada de una función $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, donde n y m son enteros positivos arbitrarios. Es de esperar que la derivada de una función de varias variables vectoriales sea un objeto más complicado que la derivada de una función de una sola variable escalar. Además, el concepto de ser diferenciable es muy sutil en el caso de una función de más de una variable.

Primero se definirá la herramienta básica de cálculo de las derivadas parciales. Después de eso se comenzará a comprender la diferenciabilidad por medio de la geometría de planos tangentes a superficies. Al final estas ideas relativamente concretas se generalizarán a dimensiones mayores.

Derivadas parciales

Hay que recordar que si F: $X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función de una variable escalar, entonces la **derivada** de F en un número $a \in X$ es

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a + h) - F(a)}{h}. \tag{1}$$

Además, se dice que F es **diferenciable en** a precisamente cuando existe el límite en la ecuación (1).

DEFINICIÓN 3.1 Suponga que f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de n variables escalares. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que denota un punto de $\mathbf{R}^n$. Una **función parcial F con respecto a la variable** x_i es una función de una variable obtenida de f por medio de mantener constantes a todas las variables, excepto a x_i. Es decir, hacemos a x_j igual a una constante a_j para $j \neq i$. Entonces, la función parcial en x_i es definida por

$$F(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, x_i, \ldots, a_n).$$

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, entonces las funciones parciales con respecto a x son dadas por

$$F(x) = f(x, a_2) = \frac{x^2 - a_2^2}{x^2 + a_2^2},$$

donde a_2 puede ser cualquier constante. Si, por ejemplo, $a_2 = 0$, entonces la función parcial es

$$F(x) = f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} \equiv 1.$$

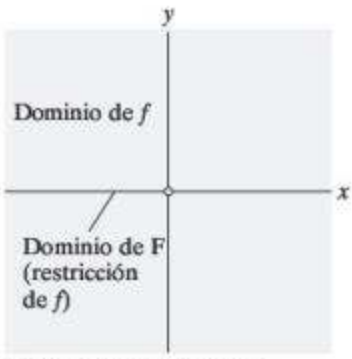


Figura 2.46 La función f del ejemplo 1 es definida en $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, mientras que su función parcial F a lo largo de $y = 0$ es definida sobre el eje x menos el origen.

Geométricamente esta función parcial no es otra cosa que la restricción de f a la recta horizontal $y = 0$. Observe que, como el origen no está en el dominio de f, no se debe considerar que el 0 forma parte del dominio de F (véase la figura 2.46). ◆

OBSERVACIÓN En la práctica, cuando se trabaja con funciones parciales, por lo general no se pasa por el problema de notación de reemplazar explícitamente las x_j's ($j \neq i$) con las constantes. En vez de ello se toma nota mental de que la función parcial se obtiene permitiendo que solo una variable cambie, mientras que las demás se mantienen fijas.

DEFINICIÓN 3.2 La **derivada parcial de f con respecto a x_i** es la derivada (ordinaria) de la función parcial con respecto de x_i. Es decir, en la notación de la definición 3.1, la derivada parcial con respecto a x_i es $F'(x_i)$. Otras notaciones comunes para la derivada parcial de f con respecto de x_i son las siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad D_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{y} \quad f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Simbólicamente, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}. \tag{2}$$

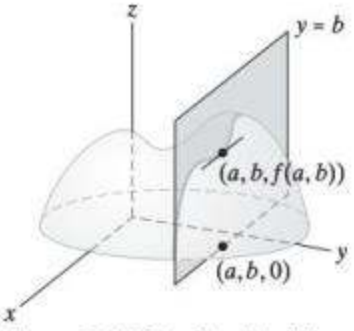


Figura 2.47 Visualización de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Por definición, la derivada parcial es la velocidad de cambio (instantánea) de f cuando todas las variables, excepto la especificada, se conservan fijas. En el caso en que f es una función (escalar) de dos variables, se entiende a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

Geométricamente, como la pendiente en el punto $(a, b, f(a, b))$ de la curva obtenida con la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = b$, como se ilustra en la figura 2.47. De manera similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

es la pendiente en $(a, b, f(a, b))$ de la curva formada por la intersección de $z = f(x, y)$ con $x = a$, como se ilustra en la figura 2.48.

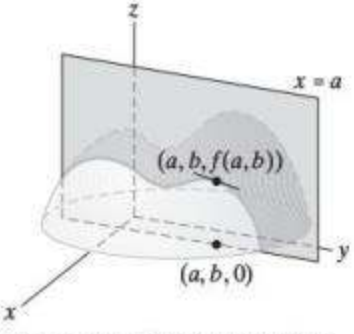


Figura 2.48 Visualización de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

EJEMPLO 2 En su mayoría, las derivadas parciales son muy fáciles de obtener, una vez que se acostumbre el lector a tratar a las variables como constantes. Si

$$f(x, y) = x^2 y + \cos(x + y),$$

entonces se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \operatorname{sen}(x + y).$$

(Durante el proceso de la diferenciación imagine que y es una constante). También,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \operatorname{sen}(x + y).$$

(Imagine que x es una constante). De manera similar, si $g(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, entonces, según la regla del cociente del cálculo elemental, se tiene:

$$g_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)y - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

y

$$g_y(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)x - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Observe que, por supuesto, ni g ni sus derivadas parciales están definidas en $(0, 0)$. ◆

EJEMPLO 3 Ocasionalmente es necesario recurrir en forma explícita a los límites para evaluar derivadas parciales. Suponga que $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Entonces, para $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{8xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^4 - 6x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pero, ¿qué deberían ser $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$? Para investigarlo volvamos a la definición 3.2 de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} -1 = -1.$$ ◆

Tangencia y diferenciabilidad

Si $F: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función de una variable escalar, entonces que F sea diferenciable en cierto número $a \in X$ significa precisamente que la gráfica de la curva $y = F(x)$ tiene una recta tangente en el punto $(a, F(a))$ (véase la figura 2.49). Además, dicha recta tangente es dada por la ecuación

$$y = F(a) + F'(a)(x - a). \tag{3}$$

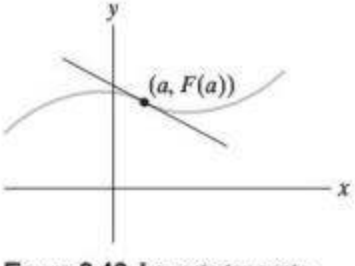


Figura 2.49 La recta tangente a $y = F(x)$ en $x = a$ tiene la ecuación $y = F(a) + F'(a)(x - a)$.

Si definimos la función $H(x)$ como $F(a) + F'(a)(x - a)$ (es decir, $H(x)$ es el lado derecho de la ecuación (3) que da la ecuación de la recta tangente), entonces H tiene dos propiedades:

1. $H(a) = F(a)$
2. $H'(a) = F'(a)$.

En otras palabras, la recta definida por $y = H(x)$ pasa por el punto $(a, F(a))$ y tiene la misma pendiente en $(a, F(a))$ que la curva definida por $y = F(x)$ (de ahí el término "recta tangente").

Ahora suponga el lector que $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función de variable escalar de dos variables donde X es abierta en $\mathbf{R}^2$. Entonces, la gráfica de f es una superficie.

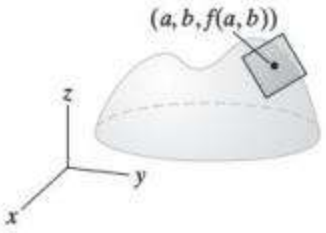


Figura 2.50 El plano tangente a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$

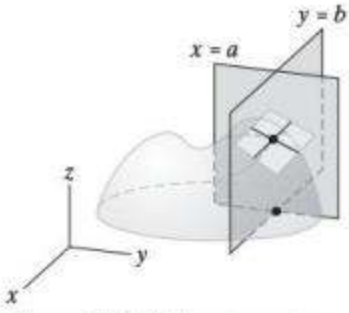


Figura 2.51 El plano tangente en el punto $(a, b, f(a, b))$ contiene las rectas tangentes a las curvas formadas por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con los planos $x = a$ y $y = b$.

¿Cuál debería ser el **plano tangente** a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$? Geométricamente, la situación se ilustra en la figura 2.50. A partir de las observaciones anteriores sabemos que la derivada parcial $f_x(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, b, f(a, b))$ a la curva obtenida con la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = b$ (véase la figura 2.51). Esto significa que si se avanza a lo largo de dicha recta tangente, entonces, por cada unidad de cambio en la dirección positiva de x, habrá un cambio de $f_x(a, b)$ unidades en la dirección z. En consecuencia, utilizando la fórmula (1) de la sección 1.2, la recta tangente es dada en forma paramétrica vectorial como:

$$\mathbf{l}_1(t) = (a, b, f(a, b)) + t(1, 0, f_x(a, b)).$$

Por consiguiente, un vector paralelo a esta recta tangente es

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + f_x(a, b)\mathbf{k}.$$

De manera similar, la derivada parcial $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, b, f(a, b))$ a la curva obtenida con la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = a$ (mire de nuevo la figura 2.51). En consecuencia, la recta tangente es dada por

$$\mathbf{l}_2(t) = (a, b, f(a, b)) + t(0, 1, f_y(a, b)),$$

por lo que un vector paralelo a esta recta tangente es

$$\mathbf{v} = \mathbf{j} + f_y(a, b)\mathbf{k}.$$

Las dos rectas tangentes antes mencionadas deben estar contenidas en el plano tangente a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$, si es que existe. Entonces, un vector $\mathbf{n}$ *normal* al plano tangente debe ser perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Por lo tanto, concluimos que $\mathbf{n}$ es

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -f_x(a, b)\mathbf{i} - f_y(a, b)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Ahora se utiliza la ecuación (1) de la sección 1.5 para encontrar que la ecuación para el plano tangente, es decir, el plano que pasa por $(a, b, f(a, b))$ con $\mathbf{n}$ normal es

$$(-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1) \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0$$

o, en forma equivalente,

$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + z - f(a, b) = 0.$$

Al reescribir esta última ecuación se ha demostrado el resultado siguiente:

TEOREMA 3.3 Si la gráfica de $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente en $(a, b, f(a, b))$, entonces dicho plano tiene la ecuación

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \tag{4}$$

Observe que si se define la función $h(x, y)$ como igual a $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ (es decir, $h(x, y)$ es el lado derecho de la ecuación (4)), entonces h tiene las propiedades siguientes:

1. $h(a, b) = f(a, b)$
2. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ y $\dfrac{\partial h}{\partial y}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

En otras palabras, h y sus derivadas parciales coinciden con las de f en (a, b).

Es tentador pensar que la superficie $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ siempre que la ecuación (4) tenga sentido, es decir, siempre que existan las

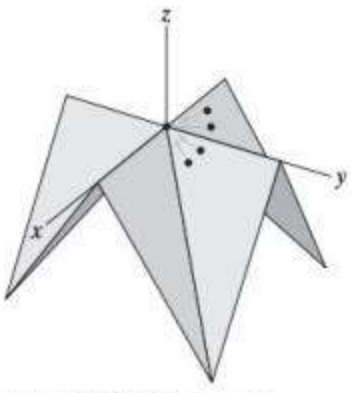


Figura 2.52 Si dos puntos tienden a (0, 0, 0), mientras que permanecen en una cara de la superficie descrita en el ejemplo 4, el plano que determinan con (0, 0, 0) es diferente del que determinan si se permite que los dos puntos tiendan a (0, 0, 0) mientras que permanecen en otra cara.

derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$. En realidad, esto sería análogo a la situación con una variable, donde la existencia de la derivada y la de la recta tangente significan exactamente lo mismo. Sin embargo, para una función de dos variables es posible tener derivadas parciales bien definidas (de modo que la ecuación (4) tenga sentido) y *no* tener un plano tangente.

EJEMPLO 4 Sea $f(x, y) = \|x| - |y\| - |x| - |y|$ y considere la superficie definida por la gráfica de $z = f(x, y)$ que se aprecia en la figura 2.52. Las derivadas parciales de f en el origen pueden calcularse a partir de la definición 3.2 como sigue:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{||h|| - |h|}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

y

$$f_y(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|-|h|| - |h|}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(En realidad las dos funciones parciales, $F(x) = f(x, 0)$ y $G(y) = f(0, y)$, son iguales a cero y, por lo tanto, tienen derivadas iguales a cero). En consecuencia, si la superficie en cuestión tiene un plano tangente en el origen, entonces la ecuación (4) dice que tiene ecuación $z = 0$. Pero no tiene ningún sentido geométrico el que la superficie $z = f(x, y)$ tenga un plano tangente en el origen. Si pensamos en un plano tangente como el límite geométrico de los planos que pasan por el punto de tangencia, y en otros dos puntos "moviéndose" sobre la superficie a medida que esos dos puntos se acercan al punto de tangencia, entonces la figura 2.52 muestra que no hay un plano limitante únicamente determinado. ◆

El ejemplo 4 muestra que la existencia de un plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ es una condición más fuerte que la existencia de derivadas parciales. Revela que esa condición más fuerte es más útil en el contexto de funciones de varias variables que los teoremas del cálculo de funciones de una sola variable. Lo que ahora debemos hacer es encontrar una definición analítica apropiada de la diferenciabilidad que incluya dicha idea. Comenzaremos por ver con una nueva mirada la definición de la derivada en una variable.

Al reemplazar la cantidad $a + h$ por la variable x, la ecuación de límite en la fórmula (1) se puede reescribir como sigue:

$$F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}.$$

Esta es equivalente a la ecuación

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{F(x) - F(a)}{x - a} \right) - F'(a) = 0.$$

La cantidad $F'(a)$ no depende de x, por lo tanto, puede llevarse dentro del límite. Así, se obtiene la ecuación

$$\lim_{x\to a} \left\{ \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - F'(a) \right\} = 0.$$

Por último, un poco de álgebra fácil permite concluir que la función F es diferenciable en a si hay un número $F'(a)$ tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - [F(a) + F'(a)(x - a)]}{x - a} = 0. \tag{5}$$

¿Qué aprendimos al escribir la ecuación (5)? Observe el lector que la expresión entre corchetes en el numerador de la expresión del límite en la ecuación 5 es la

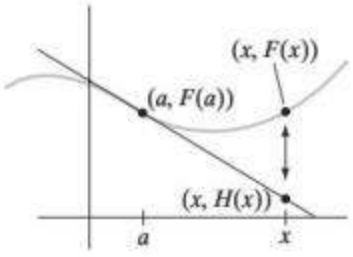


Figura 2.53 Si F es diferenciable en a, la distancia vertical entre $F(x)$ y $H(x)$ debe tender a cero más rápido de lo que lo hace la distancia horizontal entre x y a.

función $H(x)$ que se usó para definir la recta tangente a $y = F(x)$ en $(a, F(a))$. Por lo anterior podemos reescribir la ecuación (5) como

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - H(x)}{x - a} = 0.$$

Para que el límite anterior sea igual a cero es evidente que el límite del numerador debe ser cero. Pero como el límite del denominador también es cero podemos concluir más al respecto, es decir, que la diferencia entre los valores de y de la gráfica de F y de su recta tangente deben tender a cero más rápido que lo que x tiende a a. Esto es lo que se quiere decir cuando se afirma que "H es una buena aproximación lineal a F cerca de a" (véase la figura 2.53). Geométricamente representa que, cerca del punto de tangencia, la gráfica de $y = F(x)$ es aproximadamente igual a la de la gráfica $y = H(x)$.

Si ahora pasamos al caso de una función de dos variables escalares $f(x, y)$, entonces decimos que $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ (es decir, que f sea diferenciable en (a, b) debe significar que la distancia vertical entre la gráfica de f y el plano tangente "candidato" dado por

$$z = h(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

debe tender a cero más rápido de lo que el punto (x, y) tiende a (a, b) (véase la figura 2.54). En otras palabras, cerca del punto de tangencia, la gráfica de $z = f(x, y)$ es aproximadamente plana, al igual que la gráfica de $z = h(x, y)$. Es posible captar esta idea geométrica con la siguiente definición formal de diferenciabilidad:

DEFINICIÓN 3.4 Sea X abierto en $\mathbf{R}^2$ y $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función de dos variables escalares. Decimos que f es **diferenciable en** $(a, b) \in X$ si las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen, y si la función

$$h(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

es una buena aproximación lineal a f cerca de (a, b), es decir, si

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x, y) - h(x, y)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

Además, si f es diferenciable en (a, b), entonces la ecuación $z = h(x, y)$ define el **plano tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$. Si f es diferenciable en todos los puntos de su dominio, entonces simplemente decimos que f es **diferenciable**.

Figura 2.54 Si f es diferenciable en (a, b), la distancia entre $f(x, y)$ y $h(x, y)$ debe tender a cero con más rapidez que la distancia entre (x, y) y (a, b).

EJEMPLO 5 Volvamos a la función $f(x, y) = \|x| - |y\| - |x| - |y|$ del ejemplo 4. Ya sabemos que las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen y son iguales a cero. Por consiguiente, la función h de la definición 3.4 es la función cero. En consecuencia, f será diferenciable en (0, 0) solo en el caso en que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - h(x, y)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||x| - |y|| - |x| - |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sea igual a cero. Sin embargo, no es difícil darse cuenta de que el límite en cuestión no existe. A lo largo de la recta $y = 0$ se tiene

$$\frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{||x| - 0| - |x| - |0|}{\sqrt{x^2}} = \frac{0}{|x|} = 0,$$

pero a lo largo de la recta $y = x$ se tiene que

$$\frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{||x| - |x|| - |x| - |x|}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{-2|x|}{\sqrt{2}|x|} = -\sqrt{2}.$$

En consecuencia, f no es diferenciable en (0, 0) y no tiene plano tangente en dicho punto. ◆

La condición límite en la definición 3.4 podría ser difícil de aplicar en la práctica. Por fortuna, el resultado siguiente, que no demostraremos, en muchas ocasiones simplifica los problemas. Hay que recordar, de la definición 2.3, que la frase "una **vecindad** de un punto P en un conjunto X" solo quiere decir un conjunto abierto que contiene a P y está contenido en X.

TEOREMA 3.5 Suponga que X es abierto en $\mathbf{R}^2$. Si $f: X \to \mathbf{R}$ tiene derivadas parciales continuas, en una vecindad de (a, b) en X, entonces f es diferenciable en (a, b).

En el apéndice de esta sección se da la demostración de un resultado más general (teorema 3.10).

EJEMPLO 6 Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Entonces, $\partial f/\partial x = 2x$ y $\partial f/\partial y = 4y$, de las cuales dos son funciones continuas en todo $\mathbf{R}^2$. Por consiguiente, el teorema 3.5 implica que f es diferenciable en todo lugar. La superficie $z = x^2 + 2y^2$ debe, por lo tanto, tener un plano tangente en todo punto. Por ejemplo, en el punto $(2, -1)$ dicho plano tangente es dado por la ecuación

$$z = 6 + 4(x - 2) - 4(y + 1)$$

(o, en forma equivalente, por $4x - 4y - z = 6$). ◆

Respecto del tema de continuidad y diferenciabilidad, el resultado siguiente es el análogo con varias variables de un teorema familiar sobre funciones de una sola variable.

TEOREMA 3.6 Si $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es diferenciable en (a, b), entonces es continua en (a, b).

EJEMPLO 7 Sea la función f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

La función f no es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe (sin embargo, f es continua en todas partes de $\mathbf{R}^2$). Según el teorema 3.6, f entonces no puede ser diferenciable en el origen. No obstante, las derivadas parciales de f sí existen en el origen, y se tiene que

$$f(x, 0) = \frac{0}{x^4 + 0} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

y

$$f(0, y) = \frac{0}{0 + y^4} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

puesto que las funciones parciales son constantes. Así, se observa que si el teorema 3.6 ha de ser verdadero, no basta con la existencia de las derivadas parciales. ◆

La diferenciabilidad en general

Ahora ya no es difícil generalizar la definición 3.4 a tres (o más) variables: para que una función de tres variables escalares sea diferenciable en un punto (a, b, c), debe ocurrir que (i) las tres derivadas parciales existan en (a, b, c), y (ii) la función h: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por

$$h(x, y, z) = f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

sea una buena aproximación lineal de f cerca de (a, b, c). En otras palabras, la condición (ii) significa que

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \frac{f(x, y, z) - h(x, y, z)}{\|(x, y, z) - (a, b, c)\|} = 0.$$

Ahora es fácil pasar de tres variables a un número arbitrario de ellas.

DEFINICIÓN 3.7 Sea X abierto en $\mathbf{R}^n$ y f: $X \to \mathbf{R}$ una función escalar; sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$. Se dice que f es **diferenciable en a** si todas las derivadas parciales $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$, existen, y si la función h: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f_{x_1}(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + f_{x_2}(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{a})(x_n - a_n) \tag{6}$$

es una buena aproximación lineal de f cerca de $\mathbf{a}$, lo que significa que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Se puede usar notación vectorial y matricial para reescribir nuestros resultados. Definamos el **gradiente** de una función escalar $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ como el *vector*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

En consecuencia,

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (f_{x_1}(\mathbf{a}), f_{x_2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{a})).$$

En forma alternativa, es posible usar notación matricial y definir la **derivada** de f en $\mathbf{a}$, denotada como $Df(\mathbf{a})$, como la matriz fila cuyos elementos son las componentes de $\nabla f(\mathbf{a})$; es decir,

$$\mathrm{D}f(\mathbf{a}) = [f_{x_1}(\mathbf{a}) \quad f_{x_2}(\mathbf{a}) \quad \cdots \quad f_{x_n}(\mathbf{a})].$$

Entonces, al identificar el vector $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ con la matriz columna de orden $n \times 1$ cuyos elementos son las componentes de $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, se tiene que

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$= f_{x_1}(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + f_{x_2}(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{a})(x_n - a_n).$$

Así, la notación vectorial nos permite reescribir la ecuación (6) en una forma muy breve, como sigue:

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Por consiguiente, decir que h es una buena aproximación lineal a f cerca de $\mathbf{a}$ en la ecuación (6), significa que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})]}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \tag{7}$$

Compárese la ecuación (7) con la (5). La diferenciabilidad de funciones de una variable y la de varias variables le debe parecer al lector casi igual. Es útil observar que los análogos de los teoremas 3.5 y 3.6 se cumplen en el caso de n variables.

El gradiente de una función es una construcción muy importante, y la estudiaremos de manera detallada en la sección 2.6.

Tal vez el lector se pregunte qué conceptos de geometría están incluidos en este concepto de diferenciabilidad general, si hubiera alguno. Recuerde que la gráfica de la función $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es la **hipersuperficie** en $\mathbf{R}^{n+1}$ dada por la ecuación $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (véase la ecuación (2) de la sección 2.1). Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces la hipersuperficie determinada por la gráfica tiene un **hiperplano tangente** en $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ dado por la ecuación

$$x_{n+1} = h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$= f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \tag{8}$$

Compare la ecuación (8) con la (3) para la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en $(\mathbf{a}, F(\mathbf{a}))$. Aunque no es posible visualizar la gráfica de una función de más de dos variables, puede emplearse la notación vectorial para dar un significado real a la tangencia en n dimensiones.

EJEMPLO 8 Antes de entrar en un mar de abstracción y generalización, hagamos algunos cálculos concretos. Un ejemplo de "paraboloide n-dimensional" en $\mathbf{R}^{n+1}$ es

dado por la ecuación

$$x_{n+1} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

es decir, por la gráfica de la función $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

de modo que

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n).$$

Observe que las derivadas parciales de f son continuas en todo lugar. De ahí que la versión n-dimensional del teorema 3.5 dice que f es diferenciable en todos los puntos. En particular, f es diferenciable en el punto $(1, 2, \ldots, n)$.

$$\nabla f(1, 2, \ldots, n) = (2, 4, \ldots, 2n),$$

y

$$Df(1, 2, \ldots, n) = [2 \ 4 \cdots 2n].$$

Por consiguiente, el paraboloide tiene un hiperplano tangente en el punto

$$(1, 2, \ldots, n, 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

cuya ecuación es dada por la ecuación (8):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + \begin{bmatrix} 2 & 4 & \cdots & 2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ \vdots \\ x_n - n \end{bmatrix} \\ &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 2(x_1 - 1) + 4(x_2 - 2) + \cdots + 2n(x_n - n) \\ &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2nx_n \\ &\quad - (2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \cdots + 2n \cdot n) \\ &= 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2nx_n - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2i x_i - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

(La fórmula $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)/(2n + 1)/6$, es una identidad bien conocida que el lector habrá encontrado cuando estudió la integral definida. Es fácil demostrarla con inducción matemática). ◆

Por fin estamos listos para estudiar la diferenciabilidad en su sentido más general. Sea X abierto en $\mathbf{R}^n$ y $f: X \to \mathbf{R}^m$ una función de n variables vectoriales. Se

define la **matriz de derivadas parciales** de $\mathbf{f}$, denotada con $D\mathbf{f}$, como la matriz de orden $m \times n$ cuyo ij-ésimo elemento es $\partial f_i/\partial x_j$, donde f_i: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es la i-ésima función componente de $\mathbf{f}$. Es decir,

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

El i-ésimo renglón de $D\mathbf{f}$ no es nada más que Df_i —y los elementos de Df_i son precisamente las componentes del vector gradiente ∇f_i (en realidad, en el caso en que $m = 1$, ∇f y Df tienen exactamente el mismo significado).

EJEMPLO 9 Suponga que $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ es dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x \cos y + z, xy)$. Entonces, tenemos que

$$D\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos y & -x \operatorname{sen} y & 1 \\ y & x & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge$$

La ecuación (7) y la definición 3.7 se generalizan en una forma obvia para llegar a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.8 (DEFINICIÓN AMPLIA DE LA DIFERENCIABILIDAD) Sea $X \subseteq \mathbf{R}^n$ que es abierto, sea $\mathbf{f}$: $X \to \mathbf{R}^m$ y sea $\mathbf{a} \in X$. Decimos que $\mathbf{f}$ es **diferenciable en a** si existe $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ y si la función $\mathbf{h}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definida por

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

es una buena aproximación lineal a $\mathbf{f}$ cerca de $\mathbf{a}$. Es decir, debemos tener

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Es necesario hacer algunos comentarios. En primer lugar, la razón por la que la longitud del vector aparece en el numerador de la ecuación de límite en la definición 3.8 es que se requiere que haya un cociente de números reales de los cuales se pueda obtener un límite. (La definición 3.7 se refiere solo a funciones de variable escalar, por lo que automáticamente hay un cociente de números reales). En segundo lugar, el término $D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ en la definición de $\mathbf{h}$ debe interpretarse como el producto de la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ de orden $m \times n$, y de la matriz columna de $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}.$$

Debido a la consistencia de nuestras definiciones, no debieran sorprender los resultados siguientes:

TEOREMA 3.9 Si $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces es continua en $\mathbf{a}$.

TEOREMA 3.10 Si $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es tal que para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, todas las $\partial f_i/\partial x_j$ existen y son continuas en una vecindad de $\mathbf{a}$ en X, por lo que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$.

TEOREMA 3.11 Una función $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in X$ (en el sentido de la definición 3.8) si y solo si cada una de sus funciones componente $f_i: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ son diferenciables en $\mathbf{a}$ (en el sentido de la definición 3.7).

Las demostraciones de los teoremas 3.9, 3.10 y 3.11 se dan en el apéndice de esta sección. Advierta que los teoremas 3.10 y 3.11 proporcionan con frecuencia una manera sencilla de averiguar si una función es diferenciable: basta con investigar las derivadas parciales de las funciones componente y ver si son continuas. De ese modo se evita en muchas circunstancias, aunque no en todas, el trabajo directo con el límite de la definición 3.8.

EJEMPLO 10 La función $\mathbf{g}: \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(x, y, z) = \left(\frac{3}{x^2 + y^2 + z^2}, xy, xz \right)$$

tiene

$$D\mathbf{g}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \dfrac{-6x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \dfrac{-6y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \dfrac{-6z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Cada uno de los elementos de esta matriz es continuo en $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Por lo tanto, según el teorema 3.10, $\mathbf{g}$ es diferenciable en todo su dominio. ◆

¿Qué es una derivada?

Aunque hemos definido con cuidado lo que significa que una función sea diferenciable, en el análisis anterior la derivada en sí misma ha ocupado el "asiento trasero". Es el momento de tomar alguna perspectiva sobre el concepto de derivada.

En el caso de una función de una sola variable escalar (diferenciable), $f: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, la derivada $f'(a)$ es simplemente un número real, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Desde un punto de vista más cuidadoso (y un poco menos geométrico), la derivada $f'(a)$ es el número tal que la función

$$h(x) = f(a) + f(a)(x - a)$$

es una buena aproximación de $f(x)$ para una x cerca de a (y, por supuesto, $y = h(x)$ es la ecuación de la recta tangente).

Si una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de n variables es diferenciable, deben existir n derivadas parciales $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$. Estas derivadas parciales forman las componentes del vector gradiente ∇f (o los elementos de la matriz Df de orden $1 \times n$). Es

el gradiente el que debe considerarse propiamente como la derivada de f, pero en el sentido siguiente: $\nabla f(\mathbf{a})$ es el vector tal que la función h: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dada por

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

es una buena aproximación lineal a $f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{a}$. Por último, la derivada de una función diferenciable de variable vectorial $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ puede tomarse como la matriz $D\mathbf{f}$ de derivadas parciales, pero en el sentido en que la función $\mathbf{h}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dada por

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

es una buena aproximación lineal de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cerca de $\mathbf{a}$. El lector debe ver la derivada $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ no como una matriz "estática" de números, sino como una que define un *mapeo lineal* de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ (véase el ejemplo 5 de la sección 1.6). Esta queda incluida en la ecuación de límite de la definición 3.8 y, aunque es una idea sutil, en realidad constituye el núcleo del cálculo diferencial de varias variables.

De hecho, hubiéramos podido abordar nuestro análisis de la diferenciabilidad de manera mucho más abstracta desde el principio. Pudimos haber definido una función $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que fuera diferenciable en el punto $\mathbf{a} \in X$ para que significara que ahí existía algún mapeo lineal $\mathbf{L}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Recuerde el lector que cualquier mapeo lineal $\mathbf{L}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ en realidad no es más que la multiplicación por una matriz, A, apropiada de orden $m \times n$ (es decir, que $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = A\mathbf{y}$). Es posible demostrar que si hay un mapeo lineal que satisfaga la ecuación mencionada de límite, entonces la matriz A que la define es determinada en forma única y es precisamente la matriz de derivadas parciales $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ (véase los ejercicios 60 a 62, donde se demuestra esto). Sin embargo, si hubiéramos iniciado con esa definición, aunque es equivalente a la definición 3.8, nos hubiera motivado un poco menos que el enfoque que adoptamos. Por consiguiente, presentamos los conceptos de diferenciabilidad y derivada desde lo que esperamos sea un punto de vista un poco más concreto y geométrico.

Apéndice. Demostraciones de los teoremas 3.9, 3.10 y 3.11

Demostración del teorema 3.9 Comencemos por afirmar lo siguiente: Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$. Si $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ (de modo que $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$), entonces

$$\|\mathbf{y}\| \leq K \|\mathbf{x}\|, \tag{9}$$

donde $K = \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2}$. Pospondremos la demostración de (9) hasta que hayamos establecido el teorema principal.

Para demostrar que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$, demostraremos que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. Lo haremos utilizando el hecho de que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ (definición 3.8).

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| &= \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\| \\ &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\| + \|D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\|, \end{aligned} \tag{10}$$

utilizando la desigualdad del triángulo. Observe el lector que el primer término del lado derecho de la desigualdad (10) es el numerador de la expresión del límite en

la definición 3.8. Por consiguiente, como $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, podemos hacer a $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\|$ tan pequeño como queramos manteniendo $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ apropiadamente pequeño. En particular,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ es suficientemente pequeño. Para el segundo término en el lado derecho de la desigualdad (10) aplicamos (9) ya que $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ es una matriz de orden $m \times n$. Por lo tanto, vemos que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ se hace suficientemente pequeño,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + K\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = (1 + K)\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|. \tag{11}$$

La constante K no depende de $\mathbf{x}$. Entonces, cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ se tiene que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \to 0,$$

como se deseaba.

Para completar la demostración se establece la desigualdad (9). Escribimos la multiplicación de matrices,

$$\mathbf{y} = B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{b}_i$ denota el i-ésimo renglón de B, considerado como vector en $\mathbf{R}^n$. Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\| &= \left((\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{x})^2 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{x})^2 + \cdots + (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{x})^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\|\mathbf{b}_1\|^2\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2\|\mathbf{x}\|^2 + \cdots + \|\mathbf{b}_m\|^2\|\mathbf{x}\|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{b}_m\|^2\right)^{1/2}\|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\|\mathbf{b}_i\|^2 = b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2.$$

En consecuencia,

$$\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{b}_m\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{b}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 = K^2.$$

Por consiguiente, $\|\mathbf{y}\| \leq K\|\mathbf{x}\|$, con lo que concluye la demostración del teorema 3.9. ■

Demostración del teorema 3.10 En primer lugar demostraremos el teorema 3.10 para el caso en que f es una función de dos variables escalares. Comenzamos por escribir

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2).$$

Por el teorema del valor medio,[2] existe un número c_1 entre a_1 y x_1 tal que

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) = f_{x_1}(c_1, x_2)(x_1 - a_1)$$

[2] Recuerde el lector que el teorema del valor medio afirma que si F es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que $F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$.

y un número c_2 entre a_2 y x_2, tal que

$$f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f_{x_2}(a_1, c_2)(x_2 - a_2).$$

(esto funciona porque en cada caso mantenemos todas las variables en f constantes excepto una, de modo que se aplica el teorema del valor medio). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\left|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\right| \\
&\quad = \left|f_{x_1}(c_1, x_2)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a_1, c_2)(x_2 - a_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1)\right. \\
&\qquad \left. - f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\right| \\
&\quad \leq \left|f_{x_1}(c_1, x_2)(x_1 - a_1) - f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1)\right| \\
&\qquad + \left|f_{x_2}(a_1, c_2)(x_2 - a_2) - f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\right|,
\end{aligned}$$

por la desigualdad del triángulo. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\left|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\right| \\
&\quad \leq \left|f_{x_1}(c_1, x_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)\right||x_1 - a_1| \\
&\qquad + \left|f_{x_2}(a_1, c_2) - f_{x_2}(a_1, a_2)\right||x_2 - a_2| \\
&\quad \leq \left\{\left|f_{x_1}(c_1, x_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)\right| + \left|f_{x_2}(a_1, c_2) - f_{x_2}(a_1, a_2)\right|\right\}\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|,
\end{aligned}$$

puesto que para $i = 1, 2$,

$$|x_i - a_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = ((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2)^{1/2}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\right|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \\
&\quad \leq \left|f_{x_1}(c_1, x_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)\right| + \left|f_{x_2}(a_1, c_2) - f_{x_2}(a_1, a_2)\right|. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, debemos tener que $c_i \to a_i$, para $i = 1, 2$, puesto que c_i está entre a_i y x_i. En consecuencia, por la continuidad de las derivadas parciales, ambos términos del lado derecho de (12) tienden a cero. Por lo tanto,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\left|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) - f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)\right|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0$$

como se deseaba.

Para el caso en que f es una función de variable escalar de n variables, puede usarse exactamente el mismo tipo de argumento, los detalles cambian solo un poco, así que los omitimos. Demos lo anterior por hecho y consideremos el caso de una función de variable vectorial $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. De acuerdo con la definición 3.8, se debe demostrar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \qquad (13)$$

Las funciones componente de la expresión que aparece en el numerador pueden escribirse como

$$G_i = f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a}) - Df_i(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \qquad (14)$$

donde f_i, $i = 1, \ldots, m$ denota la i-ésima función componente de $\mathbf{f}$ (advierta que, para los casos del teorema 3.10 ya establecido, cada función f_i de variable escalar es

diferenciable). Ahora, consideremos

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})-D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} &= \frac{\|(G_1, G_2, \ldots, G_m)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\\ &= \frac{\left(G_1^2+G_2^2+\cdots+G_m^2\right)^{1/2}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\\ &\leq \frac{|G_1|+|G_2|+\cdots+|G_m|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\\ &= \frac{|G_1|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}+\frac{|G_2|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}+\cdots+\frac{|G_m|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}.\end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{x}\to\mathbf{a}$ cada término $|G_i|/\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\to 0$, por la definición de G_i en la ecuación (14) y la diferenciabilidad de las funciones componente f_i de $\mathbf{f}$. Entonces, la ecuación (13) se cumple y $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$. (Para ver que $(G_1^2+\cdots+G_m^2)^{1/2}\leq |G_1|+\cdots+|G_m|$ observe que

$$\begin{aligned}(|G_1|+\cdots+|G_m|)^2 &= |G_1|^2+\cdots+|G_m|^2\\ &\quad +2|G_1||G_2|+2|G_1||G_3|+\cdots+2|G_{m-1}||G_m|\\ &\geq |G_1|^2+\cdots+|G_m|^2.\end{aligned}$$

Entonces, al sacar raíces cuadradas se obtiene la desigualdad.) ■

Demostración del teorema 3.11 En el párrafo final de la demostración del teorema 3.10 se demostró que

$$\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})-D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\leq\frac{|G_1|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}+\frac{|G_2|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}+\cdots+\frac{|G_m|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|},$$

donde $G_i=f_i(\mathbf{x})-f_i(\mathbf{a})-Df_i(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ como en la ecuación (14). A partir de eso se sigue de inmediato que la diferenciabilidad de las funciones componente $f_1,\ldots,f_m$ en $\mathbf{a}$ implica la diferenciabilidad de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$. A la inversa, para $i=1,\ldots,m$,

$$\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})-D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}=\frac{\|(G_1, G_2, \ldots, G_m)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\geq\frac{|G_i|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}.$$

Por consiguiente, la diferenciabilidad de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ fuerza la diferenciabilidad de cada función componente. ■

2.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 9 calcule $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

1. $f(x,y)=xy^2+x^2y$
2. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=\operatorname{sen} xy+\cos xy$
4. $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^2}{1+x^2+3y^4}$
5. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
6. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$
7. $f(x,y)=\cos x^3y$
8. $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$
9. $f(x,y)=xe^y+y\operatorname{sen}(x^2+y)$

En los ejercicios 10 a 17 evalúe las derivadas parciales $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ y $\partial F/\partial z$, para las funciones F dadas.

10. $F(x,y,z)=x+3y-2z$

11. $F(x, y, z) = \dfrac{x - y}{y + z}$

12. $F(x, y, z) = xyz$

13. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

14. $F(x, y, z) = e^{ax}\cos by + e^{az}\operatorname{sen} bx$

15. $F(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

16. $F(x, y, z) = \operatorname{sen} x^2y^3z^4$

17. $F(x, y, z) = \dfrac{x^3 + yz}{x^2 + z^2 + 1}$

Encuentre el gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$, donde f y $\mathbf{a}$ son dadas en los ejercicios 18 a 25.

18. $f(x, y) = x^2y + e^{y/x}, \quad \mathbf{a} = (1, 0)$

19. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \mathbf{a} = (2, -1)$

20. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} xyz, \quad \mathbf{a} = (\pi, 0, \pi/2)$

21. $f(x, y, z) = xy + y\cos z - x\operatorname{sen} yz,$
$\mathbf{a} = (2, -1, \pi)$

22. $f(x, y) = e^{xy} + \ln(x - y), \quad \mathbf{a} = (2, 1)$

23. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{e^z}, \quad \mathbf{a} = (3, -1, 0)$

24. $f(x, y, z) = \cos z \ln(x + y^2), \quad \mathbf{a} = (e, 0, \pi/4)$

25. $f(x, y, z) = \dfrac{xy^2 - x^2z}{y^2 + z^2 + 1}, \quad \mathbf{a} = (-1, 2, 1)$

En los ejercicios 26 a 33 calcule la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ de derivadas parciales, donde $\mathbf{f}$ y $\mathbf{a}$ son las que se indican.

26. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}, \quad \mathbf{a} = (3, 2)$

27. $f(x, y, z) = x^2 + x\ln(yz), \quad \mathbf{a} = (-3, e, e)$

28. $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x - 3y + 5z, x^2 + y, \ln(yz)),$
$\mathbf{a} = (3, -1, -2)$

29. $\mathbf{f}(x, y, z) = \left(xyz, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$
$\mathbf{a} = (1, 0, -2)$

30. $\mathbf{f}(t) = (t, \cos 2t, \operatorname{sen} 5t), \quad a = 0$

31. $\mathbf{f}(x, y, z, w) = (3x - 7y + z, 5x + 2z - 8w,$
$y - 17z + 3w), \quad \mathbf{a} = (1, 2, 3, 4)$

32. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2y, x + y^2, \cos \pi xy), \quad \mathbf{a} = (2, -1)$

33. $\mathbf{f}(s, t) = (s^2, st, t^2), \quad \mathbf{a} = (-1, 1)$

Explique por qué cada una de las funciones dadas en los ejercicios 34 a 36 es diferenciable en cada punto de su dominio.

34. $f(x, y) = xy - 7x^8y^2 + \cos x$

35. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

36. $\mathbf{f}(x, y) = \left(\dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

37. *a*) Explique por qué la gráfica de $z = x^3 - 7xy + e^y$ tiene un plano tangente en $(-1, 0, 0)$.

b) Dé una ecuación de dicho plano tangente.

38. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la gráfica de $z = 4\cos xy$ en el punto $(\pi/3, 1, 2)$.

39. Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = e^{x+y}\cos xy$ en el punto $(0, 1, e)$.

40. Obtenga ecuaciones para los planos tangentes a $z = x^2 - 6x + y^3$ que sean paralelos al plano $4x - 12y + z = 7$.

41. Use la fórmula (8) para encontrar una ecuación para el hiperplano tangente al paraboloide de 4 dimensiones, $x_5 = 10 - (x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2)$ en el punto $(2, -1, 1, 3, -8)$.

42. Suponga que tiene la siguiente información acerca de una función diferenciable f:

$$f(2, 3) = 12, \quad f(1.98, 3) = 12.1, \quad f(2, 3.01) = 12.2.$$

a) Dé una ecuación aproximada del plano tangente a la gráfica de f en $(2, 3, 12)$.

b) Use el resultado del inciso a) para estimar $f(1.98, 2.98)$.

En los ejercicios 43 a 45, a) use la función lineal $h(\mathbf{x})$ de la definición 3.8 para aproximar el valor indicado de la función f dada. b) ¿Qué tan exacta es la aproximación determinada en el inciso a)?

43. $f(x, y) = e^{x+y}$, $f(0.1, -0.1)$

44. $f(x, y) = 3 + \cos \pi xy$, $f(0.98, 0.51)$

45. $f(x, y, z) = x^2 + xyz + y^3z$, $f(1.01, 1.95, 2.2)$

46. Calcule las derivadas parciales de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}.$$

47. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - x^2y + 3x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Calcule $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ (el lector tal vez desee utilizar un sistema de álgebra por computadora para resolver este inciso).

b) Encuentre $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

Como se dijo en el texto, si una función $F(x)$ de una sola variable es diferenciable en a, entonces, al acercarnos al punto $(a, F(a))$, la gráfica de $y = F(x)$ se "volverá derecha" y se verá como una recta tangente en $(a, F(a))$. Para las funciones diferenciables dadas en los ejercicios 48 a 51, a) calcule la recta

tangente en el punto indicado, y b) use una computadora para graficar la función y la recta tangente en el mismo conjunto de ejes. Acérquese al punto de tangencia para ilustrar la manera en que la gráfica de $y = F(x)$ se asemeja a la recta tangente cerca de $(a, F(a))$.

48. $F(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 1$

49. $F(x) = x + \operatorname{sen} x, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

50. $F(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x}{x^2 + 1}, \quad a = 0$

51. $F(x) = \ln(x^2 + 1), \quad a = -1$

52. *a*) Use una computadora para graficar la función $F(x) = (x - 2)^{2/3}$.

b) Mediante un acercamiento a $x = 2$ realice un análisis geométrico respecto de la diferenciabilidad de F en $x = 2$.

Como antes se expuso en el texto, una función $f(x, y)$ puede tener derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ y aun así no ser diferenciable en (a, b). Geométricamente, si una función $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), entonces, a medida que nos acerquemos al punto $(a, b, f(a, b))$, la gráfica de $z = f(x, y)$ se "aplanará" y parecerá el plano dado por la ecuación (4) de esta sección. Para la función $f(x, y)$ dada en los ejercicios 53 a 57, a) calcule $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ en el punto (a, b) indicado y escriba la ecuación para el plano dado por la fórmula (4) de esta sección, b) use una computadora para graficar la ecuación $z = f(x, y)$ junto con el plano obtenido en el inciso (a). Haga un acercamiento del punto $(a, b, f(a, b))$ y analice si $f(x, y)$ es diferenciable o no en (a, b). c) Dé un argumento analítico (es decir, no gráfico) para su respuesta al inciso b).

53. $f(x, y) = x^3 - xy + y^2, \quad (a, b) = (2, 1)$

54. $f(x, y) = ((x - 1)y)^{2/3}, \quad (a, b) = (1, 0)$

55. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (a, b) = (0, 0)$

56. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y, \quad (a, b) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

57. $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \cos x, \quad (a, b) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

58. Sea $g(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

a) ¿Es continua g en $(0, 0)$?

b) Calcule $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ *cuando* $xy \neq 0$.

c) Demuestre la existencia de $g_x(0, 0)$ y $g_y(0, 0)$ por medio de asignarles valores.

d) ¿Son $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ continuas en $(0, 0)$?

e) ¿La gráfica de $z = g(x, y)$ tiene un plano tangente en $(0, 0)$? El lector tal vez considere adecuado hacer una gráfica de esta superficie.

f) ¿Es g diferenciable en $(0, 0)$?

59. Suponga que $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es un mapeo lineal, es decir,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \text{donde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

y A es una matriz de $m \times n$. Calcule $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y relacione su resultado con la derivada de la función lineal de una variable $f(x) = ax$.

En los ejercicios 60 a 62 el lector establecerá que la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ de derivadas parciales de las funciones componente de $\mathbf{f}$ es determinada únicamente por la ecuación de límite de la definición 3.8.

60. Sea X un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$, sea $\mathbf{a} \in X$ y sea $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Demuestre que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| = 0 \iff \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

61. Sea X un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$, sea $\mathbf{a} \in X$ y sea $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Suponga que A y B son matrices de orden $m \times n$ tales que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} =$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + B(\mathbf{x} - \mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

a) Use el ejercicio 60 para demostrar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{(B - A)(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \mathbf{0}.$$

b) Escriba $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ como $t\mathbf{h}$, donde $\mathbf{h}$ es un vector distinto de cero en $\mathbf{R}^n$. Primero fundamente que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{(B - A)(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \mathbf{0} \quad \text{implica}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{(B - A)(t\mathbf{h})}{\|t\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

y después utilice este resultado para concluir que $A = B$. (Sugerencia: descomponga en casos en los que $t > 0$ y en los que $t < 0$).

62. Sea X un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$, sea $\mathbf{a} \in X$ y sea $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Suponga que A es una matriz de orden $m \times n$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

En este problema el lector establecerá que $A = D\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

a) Defina $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ por medio de

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}.$$

Identifique la i-ésima función componente de $F_i(\mathbf{x})$ utilizando las funciones componente de $\mathbf{f}$ y las partes de la matriz A.

b) Advierta que con las suposiciones de este problema y el ejercicio 60 se tiene que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

En primer lugar argumente que para $i = 1, \ldots, m$, se tiene que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_i(\mathbf{x}) = 0$. A continuación fundamente que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{implica que} \quad \lim_{h\to 0} F_i(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) = 0,$$

donde $\mathbf{e}_j$ denota el vector básico estándar $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ para $\mathbf{R}^n$.

c) Utilice los incisos *a*) y *b*) para demostrar que $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$, donde a_{ij} denota el i-ésimo elemento de A. (Sugerencia: descomponga en casos en los que $h > 0$ y en los que $h < 0$).

2.4 Propiedades. Derivadas parciales de orden superior

Propiedades de la derivada

De nuestro trabajo en la sección anterior sabemos que la derivada de una función $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ puede identificarse con su matriz de derivadas parciales. A continuación vimos varias propiedades que la derivada debe satisfacer. Las demostraciones de dichos resultados involucran la definición 3.8 de la derivada, las propiedades de la diferenciación ordinaria y el álgebra matricial.

PROPOSICIÓN 4.1 (LINEALIDAD DE LA DIFERENCIACIÓN) Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dos funciones que son diferenciables en un punto $\mathbf{a} \in X$, y sea $c \in \mathbf{R}$ cualquier escalar. Entonces,

1. La función $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ también es diferenciable en $\mathbf{a}$, y se tiene
$$D\mathbf{h}(\mathbf{a}) = D(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$
2. La función $\mathbf{k} = c\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y
$$D\mathbf{k}(\mathbf{a}) = D(c\mathbf{f})(\mathbf{a}) = cD\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ definidas por $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, xy \operatorname{sen} y, y/x)$ y $\mathbf{g}(x, y) = (x^2 + y^2, ye^{xy}, 2x^3 - 7y^5)$. Se tiene

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y \operatorname{sen} y & x \operatorname{sen} y + xy \cos y \\ -y/x^2 & 1/x \end{bmatrix}$$

y

$$D\mathbf{g}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y^2 e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ 6x^2 & -35y^4 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, por el teorema 3.10, $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{R}^2 - \{\text{eje } y\}$ y $\mathbf{g}$ es diferenciable en todo $\mathbf{R}^2$. Si se hace $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$, entonces, la parte 1 de la proposición 4 dice que $\mathbf{h}$ debe ser diferenciable en todo su dominio, y

$$D\mathbf{h}(x, y) = D\mathbf{f}(x, y) + D\mathbf{g}(x, y)$$

$$= \begin{bmatrix} 2x + 1 & 2y + 1 \\ y \operatorname{sen} y + y^2 e^{xy} & x \operatorname{sen} y + xy \cos y + e^{xy} + xye^{xy} \\ 6x^2 - y/x^2 & 1/x - 35y^4 \end{bmatrix}.$$

Advierta también que la función $\mathbf{k} = 3\mathbf{g}$ debe ser diferenciable en todas partes, según la parte 2 de la proposición 4.1. Es fácil comprobar que $D\mathbf{k}(x, y) = 3\, D\mathbf{g}(x, y)$: tenemos

$$\mathbf{k}(x, y) = (3x^2 + 3y^2, 3ye^{xy}, 6x^3 - 21y^5).$$

De manera que,

$$D\mathbf{k}(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 3y^2e^{xy} & 3e^{xy} + 3xye^{xy} \\ 18x^2 & -105y^4 \end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y^2e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ 6x^2 & -35y^4 \end{bmatrix}$$

$$= 3D\mathbf{g}(x, y). \quad \blacklozenge$$

Debido a la naturaleza de la multiplicación de matrices, no existen reglas generales del producto y división en ninguna forma particularmente sencilla. Sin embargo, para funciones de variable escalar es posible demostrar lo siguiente:

PROPOSICIÓN 4.2 Sean $f, g: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenciables en $\mathbf{a} \in X$. Entonces,

1. El producto de las funciones fg también es diferenciable en $\mathbf{a}$, y
$$D(fg)(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a}).$$
2. Si $g(\mathbf{a}) \neq 0$, entonces el cociente de funciones f/g es diferenciable en $\mathbf{a}$, y
$$D(f/g)(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}.$$

EJEMPLO 2 Si $f(x, y, z) = ze^{xy}$ y $g(x, y, z) = xy + 2yz - xz$, entonces

$$(fg)(x, y, z) = (xyz\ 1\ 2yz^2\ 2\ xz^2)e^{xy},$$

de modo que

$$D(fg)(x, y, z) = \begin{bmatrix} (yz - z^2)e^{xy} + (xyz + 2yz^2 - xz^2)ye^{xy} \\ (xz + 2z^2)e^{xy} + (xyz + 2yz^2 - xz^2)xe^{xy} \\ (xy + 4yz - 2xz)e^{xy} \end{bmatrix}^T.$$

Asimismo, se tiene que

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} yze^{xy} & xze^{xy} & e^{xy} \end{bmatrix}$$

y

$$Dg(x, y, z) = \begin{bmatrix} y - z & x + 2z & 2y - x \end{bmatrix},$$

de manera que

$$g(x, y, z)Df(x, y, z) + f(x, y, z)Dg(x, y, z)$$

$$= \begin{bmatrix} (xy^2z + 2y^2z^2 - xyz^2)e^{xy} \\ (x^2yz + 2xyz^2 - x^2z^2)e^{xy} \\ (xy + 2yz - xz)e^{xy} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} (yz - z^2)e^{xy} \\ (xz + 2z^2)e^{xy} \\ (2yz - xz)e^{xy} \end{bmatrix}^T$$

$$= e^{xy} \begin{bmatrix} xy^2z + 2y^2z^2 - xyz^2 + yz - z^2 \\ x^2yz + 2xyz^2 - x^2z^2 + xz + 2z^2 \\ xy + 4yz - 2xz \end{bmatrix}^T,$$

que concuerda con la parte 1 de la proposición 4.2. (Nota: la transpuesta de la matriz se usa simplemente para conservar espacio en la página). ◆

La regla del producto en la parte 1 de la proposición 4.2 no es el resultado más general posible. En realidad, si f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de variable escalar y $\mathbf{g}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una función de variable vectorial, entonces si f y $\mathbf{g}$ son ambas diferenciables en $\mathbf{a} \in X$, también lo es $f\mathbf{g}$, y se cumple la fórmula siguiente (donde se ve a $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ como una matriz de orden $m \times 1$):

$$D(f\mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})D\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

Derivadas parciales de orden superior

Hasta este momento, en nuestro estudio de la diferenciación hemos considerado solo derivadas parciales de primer orden. No obstante, es fácil imaginar el cálculo de parciales de segundo y tercer orden por medio de iterar el proceso de diferenciación con respecto de una variable, mientras que todas las demás se mantienen constantes.

EJEMPLO 3 Sea $f(x, y, z) = x^2y + y^2z$. Entonces las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2.$$

La **derivada parcial de segundo orden** con respecto de x, denotada con $\partial^2 f/\partial x^2$, o bien, $f_{xx}(x, y, z)$, es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y.$$

De manera similar, las parciales de segundo orden con respecto de y y z son, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2yz) = 2z,$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(y^2) \equiv 0.$$

Sin embargo, hay más parciales de segundo orden. La **derivada parcial mixta** con respecto de x, primero, y luego con respecto de y, que se denota con $\partial^2 f/\partial y \partial x$ o $f_{xy}(x, y, z)$, es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x.$$

Para esta función en particular hay cinco derivadas parciales mixtas más: $\partial^2 f/\partial x \partial y$, $\partial^2 f/\partial z \partial x$, $\partial^2 f/\partial x \partial z$, $\partial^2 f/\partial z \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y \partial z$. Se invita al lector a calcular cada una de ellas para que adquiera la sensibilidad del proceso. ◆

En general, si f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de n variables escalares, la **derivada parcial de k-ésimo orden** con respecto de las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ (en ese

orden), donde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ son enteros del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ (tal vez repetidos), es la derivada iterada

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (f(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Una notación equivalente (y con frecuencia más manejable) de la derivada parcial de k-ésimo orden es

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Advierta que el orden en que se escriben las variables con respecto de la que se deriva es distinto en las dos notaciones: en la notación con subíndices las variables de la diferenciación se escriben de izquierda a derecha en el orden en que se deriva, mientras que en la notación con ∂ se escriben en orden *opuesto* (es decir, de derecha a izquierda).

EJEMPLO 4 Sea $f(x, y, z, w) = xyz + xy^2w - \cos(x + zw)$, se tiene que

$$f_{yw}(x, y, z, w) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y} = \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial y} (xyz + xy^2w - \cos(x + zw))$$

$$= \frac{\partial}{\partial w} (xz + 2xyw) = 2xy,$$

y

$$f_{wy}(x, y, z, w) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial w} (xyz + xy^2w - \cos(x + zw))$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (xy^2 + z \operatorname{sen}(x + zw)) = 2xy. \quad \blacklozenge$$

Aunque por lo general no es aconsejable hacer conjeturas basadas en un solo elemento aislado de evidencia, el ejemplo 4 sugiere que hay una relación sorprendentemente sencilla entre las derivadas parciales de segundo orden mixtas. De hecho ese es el caso, como lo indica el siguiente resultado, el cual fue obtenido en el siglo XVIII por el matemático francés Alexis Clairaut.

TEOREMA 4.3 Suponga que X es abierto en $\mathbf{R}^n$ y que $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tiene derivadas parciales de primer y segundo orden. Entonces, el orden en que se evalúan las parciales mixtas de segundo orden es irrelevante; es decir, si i_1 e i_2 son dos enteros cualesquiera entre 1 y n, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}.$$

Una demostración del teorema 4.3 se incluye en el apéndice a esta sección. También sugerimos una segunda demostración (¡usando integrales!) en el ejercicio 4 de los ejercicios varios para el capítulo 5.

Es natural especular acerca de la posibilidad de un análogo para el teorema 4.3 para las parciales mixtas de k-ésimo orden. Antes de enunciar lo que debe ser un resultado muy previsible, es necesario introducir cierta terminología.

DEFINICIÓN 4.4 Suponga que X es abierto en $\mathbf{R}^n$. Se dice que una función escalar $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, es **de clase** C^k si sus derivadas parciales de orden hasta al menos k (incluida esta) existen y son continuas en X. Si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en X, entonces se dice que f es **de clase** C^∞, o **suave**. Una función de variable vectorial $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es de clase C^k (respectivamente, de clase C^∞) si y solo si cada una de sus funciones componente es de clase C^k (respectivamente, C^∞).

TEOREMA 4.5 Sea $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función de variable escalar de clase C^k. Entonces no importa el orden en que se calcula cualquier k-ésima derivada parcial. Si $i_1, \ldots, i_k$ son enteros k cualesquiera (no necesariamente distintos) entre 1 y n, y si $(j_1, \ldots, j_k)$ es cualquier permutación (arreglo) de dichos enteros, entonces

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}.$$

EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z, w) = x^2 w e^{yz} - z e^{xw} + xyzw$, compruebe que

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial w \partial z \partial y \partial x} = 2e^{yz}(yz + 1) = \frac{\partial^5 f}{\partial z \partial y \partial w \partial^2 x},$$

Con lo que en este caso se verificaría el teorema 4.5. ◆

Apéndice: Dos demostraciones técnicas

Demostración de la parte 1 de la proposición 4.1

Paso 1. Demostraremos que la matriz de derivadas parciales de $\mathbf{h}$ es la suma de aquellas de $\mathbf{f}$ y de $\mathbf{g}$. Si escribimos $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ como $(h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_m(\mathbf{x}))$ (es decir, en términos de sus funciones componente), entonces el ij-ésimo elemento de $D\mathbf{h}(\mathbf{a})$ es $\partial h_i / \partial x_j$ evaluada en $\mathbf{a}$. Pero $h_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})$ mediante la definición de $\mathbf{h}$. Entonces,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial x_j},$$

según las propiedades de la diferenciación ordinaria (ya que todas las variables, excepto x_j, se mantienen constantes). Por consiguiente,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

y, por lo tanto,

$$D\mathbf{h}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

Paso 2. Ahora que sabemos que la matriz deseada de parciales existe, debemos demostrar que $\mathbf{h}$ realmente es diferenciable; es decir, debemos establecer que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - [\mathbf{h}(\mathbf{a}) + D\mathbf{h}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Como conocimiento preliminar, observemos que

$$\frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - [\mathbf{h}(\mathbf{a}) + D\mathbf{h}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$$

$$= \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$$

$$= \frac{\|(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]) + (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - [\mathbf{g}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})])\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$$

$$\leq \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} + \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - [\mathbf{g}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$$

mediante la desigualdad del triángulo, fórmula (2) de la sección 1.6. Para demostrar que la ecuación deseada de límite para $\mathbf{h}$ se obtiene de la definición de límite, debemos demostrar que, dado cualquier $\epsilon > 0$, es posible encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta, \text{ entonces } \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - [\mathbf{h}(\mathbf{a}) + D\mathbf{h}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} < \epsilon. \qquad (1)$$

Toda vez que $\mathbf{f}$ es dada como diferenciable en $\mathbf{a}$, esto significa que, dado cualquier $\epsilon_1 > 0$, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta_1, \text{ entonces } \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} < \epsilon_1. \qquad (2)$$

De manera similar, la diferenciabilidad de $\mathbf{g}$ significa que, dado cualquier $\epsilon_2 > 0$, podemos encontrar un $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta_2, \text{ entonces } \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - [\mathbf{g}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} < \epsilon_2. \qquad (3)$$

Ahora estamos listos para establecer el enunciado (1). Suponga que se da $\epsilon > 0$. Sean δ_1 y δ_2, tales que se cumplen (2) y (3) con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2$. Tome δ como el más pequeño de δ_1 y δ_2. Entonces, si $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$, se cumplen los enunciados (2) y (3) (con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2$) y, además,

$$\frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - [\mathbf{h}(\mathbf{a}) + D\mathbf{h}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} \leq \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} + \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - [\mathbf{g}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$$

$$< \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir, se cumple el enunciado (1), como se buscaba demostrar. ■

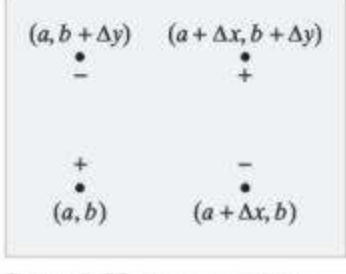


Figura 2.55 Para construir la función diferencia D usada en la demostración del teorema 4.3 evalúe f en los cuatro puntos ilustrados con los signos que se indican.

Demostración del teorema 4.3 Solo en aras de la sencillez de la notación asumiremos que f es una función de solo dos variables (x y y). Sea el punto $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ en el interior de algún rectángulo sobre el cual todas las $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ y f_{yx} son continuas. Considere la siguiente "función diferencia" (véase la figura 2.55).

$$D(\Delta x, \Delta y) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) - f(a, b + \Delta y) + f(a, b).$$

Nuestra demostración depende de considerar esta función de dos maneras. Primero vemos D como la diferencia de diferencias verticales en f:

$$\begin{aligned} D(\Delta x, \Delta y) &= [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b)] \\ &\quad -[f(a, b + \Delta y) - f(a, b)] \\ &= F(a + \Delta x) - F(a). \end{aligned}$$

Aquí definimos la función de una variable $F(x)$ como $f(x, b + \Delta y) - f(x, b)$. Como se verá, la segunda parcial mixta de f puede encontrarse a partir de dos aplicaciones del teorema del valor medio del cálculo de una variable. Como f tiene parciales continuas, es diferenciable (véase el teorema 3.10). Así, F es continua y diferenciable, por consiguiente, el teorema del valor medio implica que hay algún número c entre a y $a + \Delta x$ tal que

$$D(\Delta x, \Delta y) = F(a + \Delta x) - F(a) = F'(c)\Delta x. \tag{4}$$

Ahora, $F'(c) = f_x(c, b + \Delta y) - f_x(c, b)$. Aplicamos de nuevo el teorema del valor medio, esta vez a la función $f_x(c, y)$. (Aquí pensamos en c como constante, y en y como la variable). Por hipótesis f_x es diferenciable porque se asume que sus derivadas parciales, f_{xx} y f_{xy}, son continuas. En consecuencia, aplicamos el teorema del valor medio y obtenemos un número d que está entre b y $b + \Delta y$ tal que

$$F'(c) = f_x(c, b + \Delta y) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)\Delta y. \tag{5}$$

Utilizando la ecuación (5) en la (4) se tiene

$$D(\Delta x, \Delta y) = F'(c)\Delta x = f_{xy}(c, d)\Delta y\,\Delta x.$$

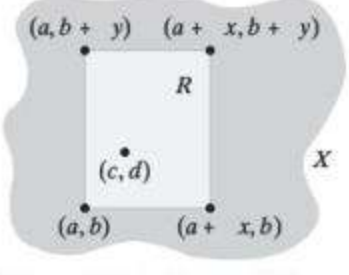


Figura 2.56 Aplicación doble del teorema del valor medio.

El punto (c, d) está en algún sitio en el interior del rectángulo R con vértices en (a, b), $(a + \Delta x, b)$, $(a, b + \Delta y)$, $(a + \Delta x, b + \Delta y)$, como se ilustra en la figura 2.56. Así, cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ tenemos que $(c, d) \to (a, b)$. De ahí, se infiere que

$$f_{xy}(c, d) \to f_{xy}(a, b) \quad \text{a medida que} \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0),$$

puesto que se supuso que f_{xy} era continua. Por lo tanto,

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_{xy}(c, d) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{D(\Delta x, \Delta y)}{\Delta y \Delta x}.$$

Por otro lado, también hubiéramos podido escribir tan solo D como una diferencia de diferencias horizontales en f:

$$\begin{aligned} D(\Delta x, \Delta y) &= [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] \\ &\quad -[f(a + \Delta x, b) - f(a, b)] \\ &= G(b + \Delta y) - G(b). \end{aligned}$$

Aquí, $G(y) = f(a + \Delta x, y) - f(a, y)$. Igual que antes, podemos aplicar dos veces el teorema del valor medio para encontrar que debe haber otro punto $(\bar{c}, \bar{d})$ en R tal que

$$D(\Delta x, \Delta y) = G'(\bar{d})\Delta y = f_{yx}(\bar{c}, \bar{d})\Delta x\,\Delta y.$$

Por lo tanto,

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_{yx}(\bar{c}, \bar{d}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{D(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Debido a que este límite es igual al que se acaba de dar para $f_{xy}(a, b)$, hemos establecido el resultado deseado. ■

2.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 verifique la regla de la suma para matrices de derivadas (es decir, la parte 1 de la proposición 4.1) para cada par de funciones dadas:

1. $f(x, y) = xy + \cos x, \quad g(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + y^3$
2. $\mathbf{f}(x, y) = (e^{x+y}, xe^y), \quad \mathbf{g}(x, y) = (\ln(xy), ye^x)$
3. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x \operatorname{sen} y + z, ye^z - 3x^2), \quad \mathbf{g}(x, y, z) = (x^3 \cos x, xyz)$
4. $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz^2, xe^{-y}, y \operatorname{sen} xz), \quad \mathbf{g}(x, y, z) = (x - y, x^2 + y^2 + z^2, \ln(xz + 2))$

Verifique el producto y las reglas del cociente (proposición 4.2) para los pares de funciones dadas en los ejercicios 5 a 8.

5. $f(x, y) = x^2y + y^3, \quad g(x, y) = \dfrac{x}{y}$
6. $f(x, y) = e^{xy}, \quad g(x, y) = x \operatorname{sen} 2y$
7. $f(x, y) = 3xy + y^5, \quad g(x, y) = x^3 - 2xy^2$
8. $f(x, y, z) = x \cos(yz)$, $g(x, y, z) = x^2 + x^9y^2 + y^2z^3 + 2$

Para las funciones dadas en los ejercicios 9 a 17 determine todas las derivadas parciales de segundo orden (inclusive las mixtas).

9. $f(x, y) = x^3y^7 + 3xy^2 - 7xy$
10. $f(x, y) = \cos(xy)$
11. $f(x, y) = e^{y/x} - ye^{-x}$
12. $f(x, y) = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}$
13. $f(x, y) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x + 2e^y}$
14. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
15. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x - x \cos y$
16. $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$
17. $f(x, y) = x^2e^y + e^{2z}$
18. $f(x, y, z) = \dfrac{x - y}{y + z}$
19. $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$
20. $f(x, y, z) = e^{xyz}$
21. $f(x, y, z) = e^{ax} \operatorname{sen} y + e^{bx} \cos z$
22. Considere la función $F(x, y, z) = 2x^3y + xz^2 + y^3z^5 - 7xyz$.
    a) Obtenga F_{xx}, F_{yy} y F_{zz}.
    b) Determine las derivadas parciales mixtas de segundo orden F_{xy}, F_{yx}, F_{xz}, F_{zx}, F_{yz} y F_{zy}, y verifique el teorema 4.3.
    c) ¿Es $F_{xyx} = F_{xxy}$? ¿Hubiera podido saberlo el lector sin efectuar el cálculo?
    d) ¿Es $F_{xyz} = F_{yzx}$?
23. Sea $f(x, y) = ye^{3x}$. Dé fórmulas generales para $\partial^n f/\partial x^n$ y $\partial^n f/\partial y^n$, donde $n \geq 2$.
24. Sea $f(x, y, z) = xe^{2y} + ye^{3z} + ze^{-x}$. Dé fórmulas generales para $\partial^n f/\partial x^n$, $\partial^n f/\partial y^n$ y $\partial^n f/\partial z^n$, donde $n \geq 1$.
25. Sea $f(x, y, z) = \ln\left(\dfrac{xy}{z}\right)$. Dé formulas generales para $\partial^n f/\partial x^n$, $\partial^n f/\partial y^n$ y $\partial^n f/\partial z^n$ donde $n \geq 1$. ¿Qué podría decirse acerca de las derivadas parciales mixtas?
26. Sea $f(x, y, z) = x^7y^2z^3 - 2x^4yz$.
    a) Qué es $\partial^4 f/\partial x^2 \partial y \partial z$
    b) Qué es $\partial^5 f/\partial x^3 \partial y \partial z$
    c) Qué es $\partial^{15} f/\partial x^{13} \partial y \partial z$
27. Recuerde de la sección 2.2 que un polinomio en dos variables x y y es una expresión de la forma

$$p(x, y) = \sum_{k,l=0}^{d} c_{kl} x^k y^l,$$

donde c_{kl} puede ser cualquier número real para $0 \leq k, l \leq d$. El **grado del término** $c_{kl}x^ky^l$ cuando $c_{kl} \neq 0$ es $k + l$ y el **grado del polinomio** p es el grado más grande de cualquier término distinto de cero del polinomio (es decir, el grado más grande de cualquier término para el que $c_{kl} \neq 0$). Por ejemplo, el polinomio

$$p(x, y) = 7x^6y^9 + 2x^2y^3 - 3x^4 - 5xy^3 + 1$$

tiene cinco términos de grados 15, 5, 4, 4 y 0. El grado de p es, por lo tanto, 15. (Nota: el grado del **polinomio cero** $p(x, y) \equiv 0$ no está definido).

a) Si $p(x, y) = 8x^7y^{10} - 9x^2y + 2x$, ¿cuál es el grado de $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, $\partial^2 p/\partial x^2$, $\partial^2 p/\partial y^2$, $\partial^2 p/\partial x \partial y$?

b) Si $p(x, y) = 8x^2y + 2x^3y$, ¿cuál es el grado de $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, $\partial^2 p/\partial x^2$, $\partial^2 p/\partial y^2$, $\partial^2 p/\partial x \partial y$?

c) Intente formular y demostrar una conjetura relacionada con el grado de un polinomio p para el grado de sus derivadas parciales.

28. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

se conoce como **ecuación de Laplace** en honor de Pierre Simon de Laplace (1749-1827). Cualquier fun-

ción f de clase C^2 que satisfaga la ecuación de Laplace se llama una **función armónica**.[3]

a) ¿Es armónica $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$? ¿Y qué pasa con $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$?

b) La ecuación de Laplace puede generalizarse a funciones de n variables como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Dé un ejemplo de una función armónica de n variables y verifique que su ejemplo sea correcto.

29. La **ecuación del calor** en tres dimensiones es la ecuación diferencial parcial siguiente:

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t},$$

donde k es una constante positiva. Modela la temperatura $T(x, y, z, t)$ en el punto (x, y, z) y el momento t de un cuerpo en el espacio.

a) Estudiamos una versión simplificada de la ecuación del calor. Considere un alambre recto con "coordenadas" x. Entonces, la temperatura $T(x, y)$ en el momento t y la posición x a lo largo del alambre es modelada por la ecuación del calor unidimensional

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Demuestre que la función $T(x, t) = e^{-kt}\cos x$ satisface esta ecuación. Observe que t se mantiene constante en el valor t_0, de modo que $T(x, t_0)$ muestra la forma en que la temperatura varía a lo largo del alambre en el momento t_0. Grafique las curvas $z = T(x, t_0)$ para $t_0 = 0, 1, 10$ y úselas para entender la gráfica de la superficie $z = T(x, t)$ para $t \geq 0$. Explique lo que pasa con la temperatura del alambre después de un periodo largo.

b) Demuestre que $T(x, y, t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y)$ satisface la ecuación del calor en dos dimensiones

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Grafique las superficies dadas por $z = T(x, y, t_0)$, donde $t_0 = 0, 1, 10$. Si consideramos la función $T(x, y, t)$ como el modelo de la temperatura en los puntos (x, y) de una placa en el momento t, describa lo que sucede con la temperatura de la placa después de un periodo largo.

c) Ahora demuestre que $T(x, y, z, t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y + \cos z)$ satisface la ecuación del calor en tres dimensiones.

30. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ (un sistema de álgebra por computadora le será util).

b) Obtenga las derivadas parciales $f_x(0, y)$ y $f_y(x, 0)$, ya sea con lápiz y papel (utilizando límites) o por medio del inciso *a*).

c) Encuentre los valores de $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$. Concilie su respuesta con el enunciado del teorema 4.3.

Una superficie que tiene la superficie mínima entre todas aquellas con una frontera dada se llama ***superficie mínima****. Las burbujas de jabón son ejemplos naturales de superficies mínimas. Es un hecho que las superficies mínimas tienen ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$ (donde f es de la clase C^2) que satisfacen la ecuación diferencial*

$$(1 + z_y^2)z_{xx} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 2z_x z_y z_{xy}. \qquad (6)$$

Los ejercicios 31 a 33 se refieren a superficies mínimas y a la ecuación (6).

31. Demuestre que un plano es una superficie mínima.

32. La **superficie de Scherk** es dada por la ecuación $e^z \cos y = \cos x$.

a) Use una computadora para graficar una parte de esta superficie.

b) Verifique que la superficie de Scherk es mínima.

33. Una manera de describir la superficie conocida como **helicoide** es mediante la ecuación $x = y \tan z$.

a) Use una computadora para graficar una parte de dicha superficie.

b) Verifique que la helicoide es una superficie mínima.

2.5 La regla de la cadena

Entre las diversas propiedades que satisface la derivada, una notable tanto por su utilidad como por su sutileza es el comportamiento de la derivada con respecto de la composición de funciones. Este comportamiento es descrito por una fórmula co-

[3] Laplace realizó trabajos fundamentales y muy profundos tanto en física matemática como en teoría de la probabilidad. La ecuación de Laplace y la función armónica forman parte del campo de la **teoría del potencial**, rama que fue creada por Laplace. La teoría del potencial tiene aplicaciones en áreas tales como la gravitación, la electricidad y el magnetismo, así como la mecánica de fluidos, por mencionar algunos.

nocida como **regla de la cadena**. En esta sección se revisa la regla de la cadena del cálculo de una variable y se estudia cómo se generaliza a los casos de funciones de varias variables escalares y vectoriales.

La regla de la cadena para funciones de una variable. Repaso

Comenzaremos con un ejemplo frecuente del uso de la regla de la cadena del cálculo de una variable.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $x(t) = t^3 + t$. Construiremos la función compuesta $f(x(t)) = \operatorname{sen}(t^3 + t)$. La regla de la cadena indica cómo encontrar la derivada de $f \circ x$ con respecto de t:

$$(f \circ x)'(t) = \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(t^3 + t)) = (\cos(t^3 + t))(3t^2 + 1).$$

Como $x = t^3 + t$, tenemos que

$$(f \circ x)'(t) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \cdot \frac{d}{dt}(t^3 + t) = f'(x) \cdot x'(t). \quad \blacklozenge$$

En general, suponga que X y T son subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}$ y f: $X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y x: $T \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son funciones definidas de modo que la función compuesta $f \circ x$: $T \to \mathbf{R}$ tiene sentido (véase la figura 2.57). En particular, esto significa que el rango de la función x debe estar contenido en X, el dominio de f. El resultado clave es el siguiente:

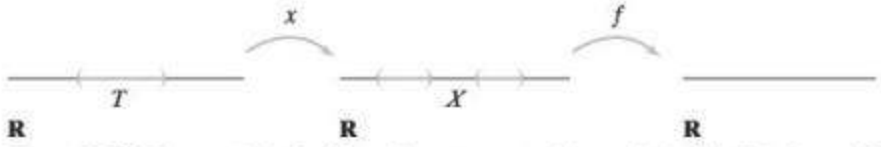


Figura 2.57 El rango de la función x debe estar contenido en el dominio X de f con el fin de que la composición $f \circ x$ sea definida.

TEOREMA 5.1 (LA REGLA DE LA CADENA EN UNA VARIABLE) Con las suposiciones anteriores, si x es diferenciable en $t_0 \in T$ y f es diferenciable en $x_0 = x(t_0) \in X$, entonces la composición $f \circ x$ es diferenciable en t_0 y, además,

$$(f \circ x)'(t_0) = f'(x_0)x'(t_0). \tag{1}$$

Una manera más común de escribir la fórmula de la regla de la cadena en el teorema 5.1 es

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{df}{dx}(x_0)\frac{dx}{dt}(t_0). \tag{2}$$

Aunque la ecuación (2) es más útil en la práctica, representa un abuso desafortunado de la notación el hecho de que el símbolo f se utilice para denotar tanto una función de x como una de t. Sería más apropiado definir una nueva función y mediante $y(t) = (f \circ x)(t)$, de modo que $dy/dt = (df/dx)(dx/dt)$. Pero el abuso original de la notación en realidad es conveniente, ya que evita la dificultad de tener demasiados nombres de variables en un análisis dado. En aras de la sencillez continuaremos cometiendo dichos abusos y le pediremos al lector que haga lo mismo.

Las fórmulas en las ecuaciones (1) y (2) son tan sencillas que es muy poco lo que necesita decirse. No obstante, las analizaremos porque serán de utilidad cuando

generalicemos el caso de varias variables. La regla de la cadena dice lo siguiente: Para entender la forma en que f depende de t, debemos saber cómo depende f de la "variable intermedia" x, y cómo esta a su vez depende de la variable "final" independiente t. El diagrama de la figura 2.58 ilustra la jerarquía de las dependencias de las variables. Las "trayectorias" indican las derivadas involucradas en la fórmula de la regla de la cadena.

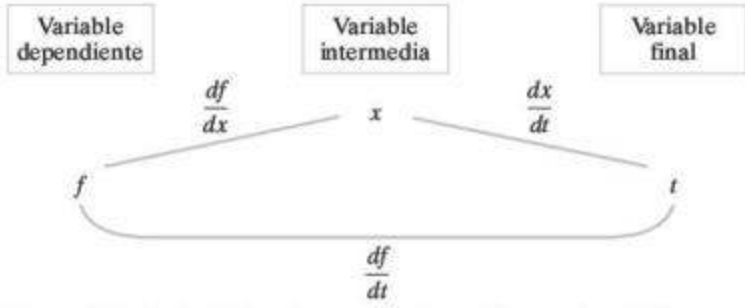


Figura 2.58 Regla de la cadena para funciones de una sola variable.

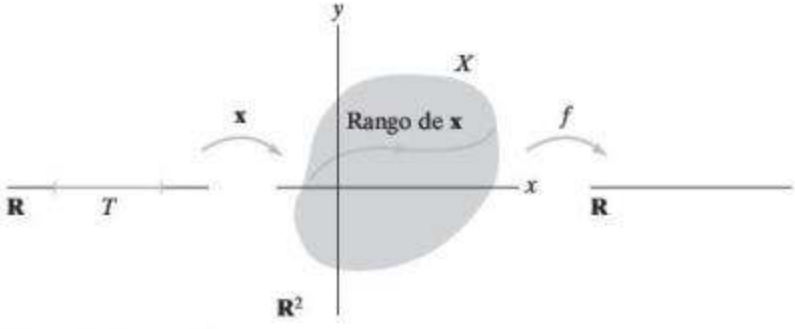


Figura 2.59 Función compuesta $f \circ \mathbf{x}$.

La regla de la cadena con varias variables

Ahora iremos más allá y supondremos que $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función C^1 de dos variables y $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ es una función de una sola variable vectorial diferenciable. Si el rango de $\mathbf{x}$ está contenido en X, entonces la composición $f \circ \mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida (véase la figura 2.59). Es bueno pensar que $\mathbf{x}$ describe una curva paramétrica en $\mathbf{R}^2$ y que f es un tipo de "función de temperatura" sobre X. Entonces, la composición $f \circ \mathbf{x}$ no es otra cosa que la restricción de f para la curva (es decir, la función que mide la temperatura a lo largo de la curva). La pregunta es, ¿cómo depende f de t? Haremos la siguiente afirmación:

PROPOSICIÓN 5.2 Suponga que $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ es diferenciable en $t_0 \in T$, y que $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = (x_0, y_0) \in X$, donde T y X son abiertos en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^2$, respectivamente, y el rango de $\mathbf{x}$ está contenido en X. Si, además, f es de clase C^1, entonces, $f \circ \mathbf{x}$: $T \to \mathbf{R}$ es diferenciable en t_0 y

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Antes de demostrar la proposición 5. 2 es necesario hacer algunos comentarios. En primer lugar, observe la mezcla de derivadas ordinarias y parciales que apare-

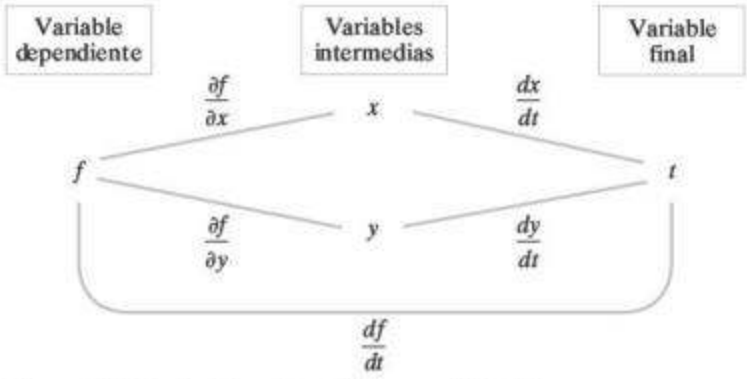


Figura 2.60 Regla de la cadena de la proposición 5.2.

cen en la fórmula de la derivada. Estos términos tienen sentido si se construye un diagrama apropiado de "jerarquía de variables" como el que se muestra en la figura 2.60. En el nivel intermedio, f depende de dos variables, x y y (o, en forma equivalente, de la variable vectorial $\mathbf{x} = (x, y)$), así que las derivadas parciales existen. Al final, en el nivel de la composición, f solo depende de una variable independiente, t, en consecuencia, está garantizado el uso de derivadas ordinarias df/dt. En segundo lugar, la fórmula en la proposición 5.2 es una generalización de la ecuación (2): un término con un producto aparece en cada una de las dos variables intermedias.

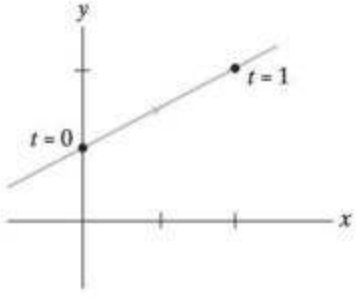


Figura 2.61 Gráfica de la función $\mathbf{x}$ del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Suponga que $f(x, y) = (x + y^2)/(2x^2 + 1)$ es una función de temperatura en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{x}(t) = (2t, t + 1)$. La función $\mathbf{x}$ da las ecuaciones paramétricas de una recta (véase la figura 2.61). Entonces,

$$(f \circ \mathbf{x})(t) = f(\mathbf{x}(t)) = \frac{2t + (t + 1)^2}{8t^2 + 1} = \frac{t^2 + 4t + 1}{8t^2 + 1}$$

es la función de temperatura a lo largo de la recta, y tenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{4 - 14t - 32t^2}{(8t^2 + 1)^2},$$

según la regla del cociente. Por lo tanto, se satisfacen todas las hipótesis de la proposición 5.2, así que se cumple la fórmula de la derivada. En realidad, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - 2x^2 - 4xy^2}{(2x^2 + 1)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2x^2 + 1},$$

y

$$\mathbf{x}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (2, 1).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1 - 2x^2 - 4xy^2}{(2x^2 + 1)^2} \cdot 2 + \frac{2y}{2x^2 + 1} \cdot 1$$

$$= \frac{2(1 - 8t^2 - 8t(t + 1)^2)}{(8t^2 + 1)^2} + \frac{2(t + 1)}{8t^2 + 1},$$

después de sustituir $2t$ para x, y $t + 1$ para y. En consecuencia,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2(2 - 7t - 16t^2)}{(8t^2 + 1)^2},$$

que concuerda con el resultado previo de df/dt. ◆

Demostración de la proposición 5.2 Denotemos la función compuesta $f \circ \mathbf{x}$ con z. Queremos establecer una fórmula para dz/dt en t_0. Como z solo es una función de una variable escalar, la diferenciabilidad y la existencia de la derivada tienen el mismo significado. Entonces, consideremos

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0},$$

y veamos si existe este límite. Tenemos

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0}.$$

El primer paso es reescribir el numerador de la expresión de límite con la sustracción y suma de $f(x_0, y)$, y la aplicación de un poco de álgebra. Así,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{t - t_0}.\end{aligned}$$

(Recuerde el lector que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Ahora sigamos con la innovación principal de la demostración. Apliquemos el teorema del valor medio a las funciones parciales de f. Esto nos dice que debe haber un número c entre x_0 y x, y otro número d entre y_0 y y, tal que

$$f(x, y) - f(x_0, y) = f_x(c, y)(x - x_0)$$

y

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, d)(y - y_0).$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t_0) &= \lim_{t \to t_0} f_x(c, y)\frac{x - x_0}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} f_y(x_0, d)\frac{y - y_0}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} f_x(c, y)\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} f_y(x_0, d)\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ &= f_x(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + f_y(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}(t_0),\end{aligned}$$

por la definición de las derivadas

$$\frac{dx}{dt}(t_0) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}(t_0)$$

y el hecho de que $f_x(c, y)$ y $f_y(x_0, d)$ deben tender a $f_x(x_0, y_0)$ y a $f_y(x_0, y_0)$, respectivamente, cuando t tiende a t_0, por la continuidad de las parciales (recuerde el lector que f se asumió como ser de clase C^1). Esto completa la demostración. ■

La proposición 5.2 y su demostración son fáciles de generalizar al caso en que f es una función de n variables (es decir, $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$) y $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. En este

caso es apropiada la fórmula de la regla de la cadena

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)\frac{dx_2}{dt}(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\frac{dx_n}{dt}(t_0). \tag{3}$$

Advierta que el lado derecho de la ecuación (3) también puede escribirse utilizando notación matricial:

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \dfrac{dx_2}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}(t_0) \end{bmatrix}.$$

Así, hemos demostrado que

$$\frac{df}{dt}(t_0) = Df(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{x}'(t_0), \tag{4}$$

donde se utiliza $\mathbf{x}'(t_0)$ como una notación alternativa a $D\mathbf{x}(t_0)$. La versión de la regla de la cadena dada en la fórmula (4) es particularmente importante y se usará varias veces en el trabajo subsecuente.

Consideremos más casos de composición de funciones de muchas variables. Por ejemplo, suponga que X es abierto en $\mathbf{R}^3$, T es abierto en $\mathbf{R}^2$, y f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ son tales que el rango de $\mathbf{x}$ está contenido en X. Entonces, puede formarse la composición $f \circ \mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, como se indica en la figura 2.62. Note que el rango de $\mathbf{x}$, es decir $\mathbf{x}(T)$ es tan solo una superficie en $\mathbf{R}^3$, por lo que $f \circ \mathbf{x}$ puede considerarse una "función de temperatura" apropiada restringida a dicha superficie. Si se usa $\mathbf{x} = (x, y, z)$ para denotar la variable vectorial en $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{t} = (s, t)$ para la variable vectorial en $\mathbf{R}^2$, entonces podemos escribir una fórmula plausible de la regla de la cadena a partir de un diagrama apropiado de jerarquía de variables

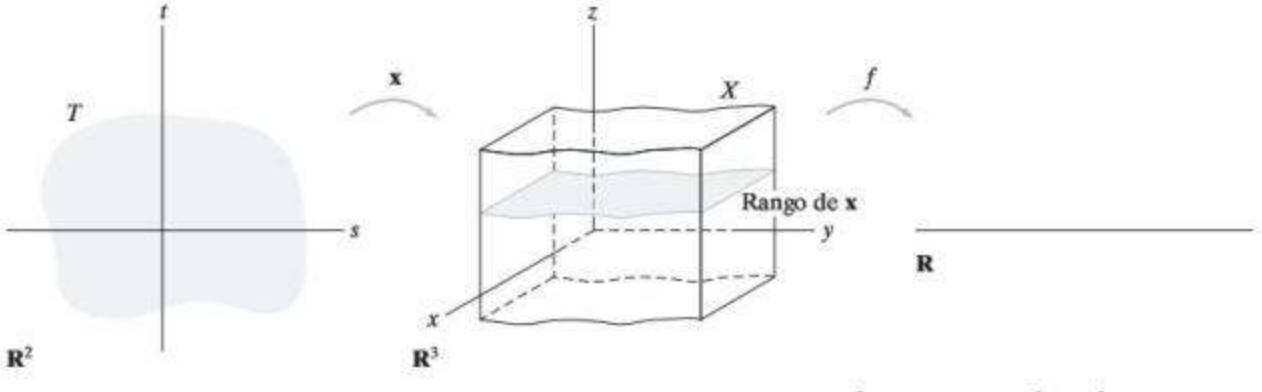


Figura 2.62 La $f \circ \mathbf{x}$ compuesta donde f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$.

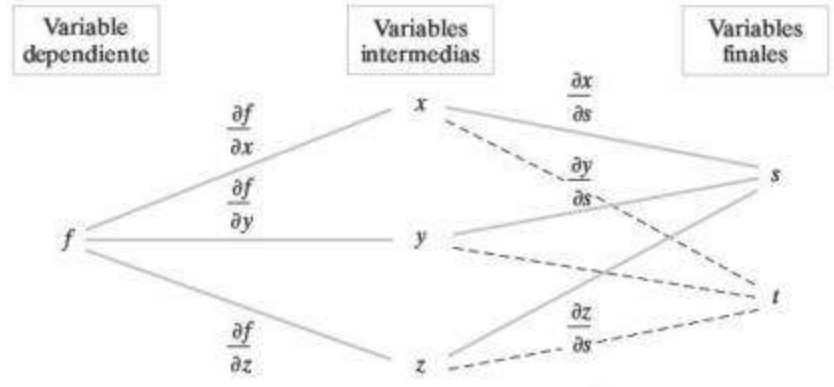


Figura 2.63 Regla de la cadena para $f \circ \mathbf{x}$, donde f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$.

(véase la figura 2.63). Por consiguiente, es razonable esperar que se cumpla la fórmula siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

y (5)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

(Otra vez abusamos de la notación al escribir $\partial f/\partial s$, $\partial f/\partial t$ y $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$). En realidad, cuando f es una función de x, y y z de clase C^1, se aplica la fórmula (3) con $n = 3$ una vez que nos damos cuenta de que $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, etc., representan diferenciaciones ordinarias de las funciones parciales en s o t.

EJEMPLO 3 Suponga

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(s, t) = (s \cos t, e^{st}, s^2 - t^2).$$

Entonces, $h(s, t) = f \circ \mathbf{x}(s, t) = s^2 \cos^2 t + e^{2st} + (s^2 - t^2)^2$, de modo que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial s} = 2s \cos^2 t + 2te^{2st} + 4s(s^2 - t^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial t} = -2s^2 \cos t \operatorname{sen} t + 2se^{2st} - 4t(s^2 - t^2).$$

También tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

y

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -s \operatorname{sen} t,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s} = te^{st}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = se^{st},$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2s, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -2t.$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 2x(\cos t) + 2y(te^{st}) + 2z(2s) \\ &= 2s\cos t(\cos t) + 2e^{st}(te^{st}) + 2(s^2 - t^2)(2s) \\ &= 2s\cos^2 t + 2te^{2st} + 4s(s^2 - t^2),\end{aligned}$$

como ya se expuso. Dejamos como ejercicio para el lector el empleo de la regla de la cadena para obtener $\partial f/\partial t$ en forma similar. ◆

Por supuesto, no hay necesidad de detenerse aquí. Suponga que tenemos un conjunto abierto X en $\mathbf{R}^m$, un conjunto abierto T en $\mathbf{R}^n$, y funciones $f\colon X \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{x}\colon T \to \mathbf{R}^m$, tales que puede definirse $h = f \circ \mathbf{x}\colon T \to \mathbf{R}$. Si f es de clase C^1 y $\mathbf{x}$ es diferenciable, entonces, a partir de los comentarios anteriores, h también debe ser diferenciable y, además,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Como las funciones componente de una función de variable vectorial solo son funciones de variable escalar, podemos decir aún más. Suponga que $\mathbf{f}\colon X \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ y $\mathbf{x}\colon T \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ son tales que puede definirse $\mathbf{h} = f \circ \mathbf{x}\colon T \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ (como siempre, suponemos que X es abierto en $\mathbf{R}^m$ y T es abierto en $\mathbf{R}^n$). Para una representación de la situación véase la figura 2.64. Si $\mathbf{f}$ es de clase C^1 y $\mathbf{x}$ es diferenciable, entonces la composición $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ es diferenciable y se cumple la fórmula general siguiente:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

La plausibilidad de la fórmula (6) es inmediata, dado el diagrama de jerarquía de variables que se muestra en la figura 2.65.

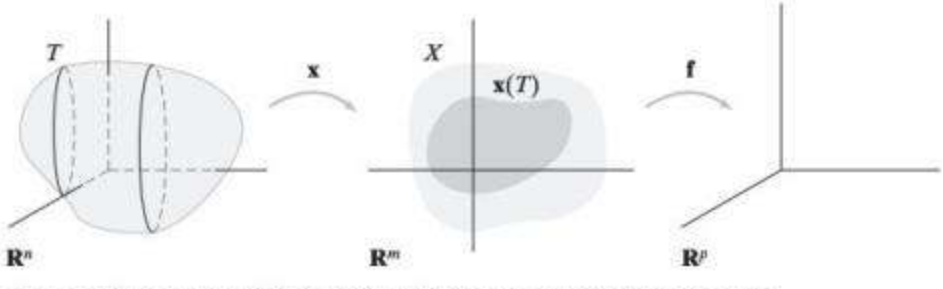


Figura 2.64 La composición $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ donde $\mathbf{f}\colon X \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ y $\mathbf{x}\colon T \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Ahora viene la verdadera "magia". Recuerde que si A es una matriz de $p \times m$ y B es otra de $m \times n$, entonces el producto de matrices $C = AB$ se define como una matriz de orden $p \times n$. Más aún, el ij-ésimo elemento de C es dado por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

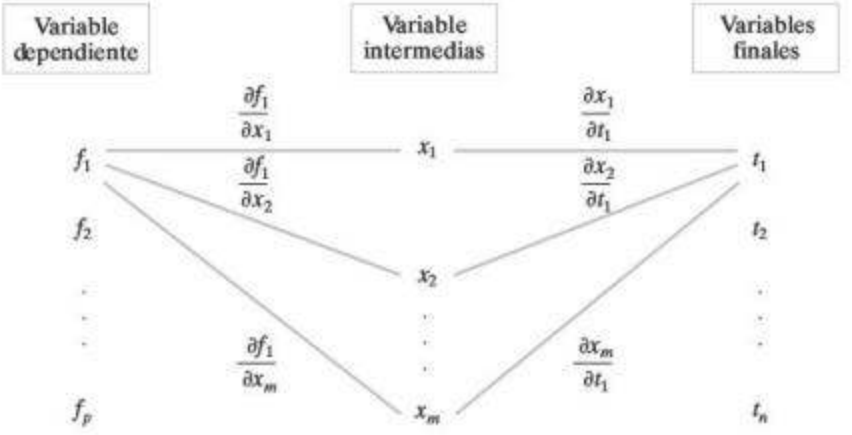


Figura 2.65 Diagrama de la regla de la cadena para $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$, donde $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ y $\mathbf{x}$: $T \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Si recordamos que el ij-ésimo elemento de la matriz $D\mathbf{h}(\mathbf{t})$ es $\partial h_i/\partial t_j$, y hacemos lo mismo para $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $D\mathbf{x}(\mathbf{t})$, entonces vemos que lo único que expresa la fórmula (6) es la siguiente ecuación de matrices:

$$D\mathbf{h}(\mathbf{t}) = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{t}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x})D\mathbf{x}(t). \tag{7}$$

La similitud de las fórmulas (7) y (1) es sorprendente. Una de las razones (quizá la principal) para definir la multiplicación de matrices como lo hicimos es precisamente que la regla de la cadena para varias variables tiene el aspecto elegante de la fórmula (7).

EJEMPLO 4 Suponga que $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ es dada por $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1x_2x_3)$ y $\mathbf{x}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ es dada por $\mathbf{x}(t_1, t_2) = (t_1t_2, t_1^2, t_2^2)$. Entonces $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es dada por $(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(t_1, t_2) = (t_1t_2 - t_1^2, t_1^3t_2^3)$, así que

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} t_2 - 2t_1 & t_1 \\ 3t_1^2t_2^3 & 3t_1^3t_2^2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t_2 & t_1 \\ 2t_1 & 0 \\ 0 & 2t_2 \end{bmatrix},$$

de modo que el producto de matrices es

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})D\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} t_2 - 2t_1 & t_1 \\ x_2x_3t_2 + 2x_1x_3t_1 & x_2x_3t_1 + 2x_1x_2t_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_2 - 2t_1 & t_1 \\ t_1^2t_2^3 + 2t_1^2t_2^3 & t_1^3t_2^2 + 2t_1^3t_2^2 \end{bmatrix},$$

después de sustituir x_1, x_2 y x_3. Por consiguiente, $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{t}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x})D\mathbf{x}(\mathbf{t})$, como se esperaba.

De manera alternativa, puede usarse el diagrama de jerarquía de variables que aparece en la figura 2.66 y calcular cualquier derivada parcial individual que se desee. Por ejemplo,

$$\frac{\partial f_2}{\partial t_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t_1}$$

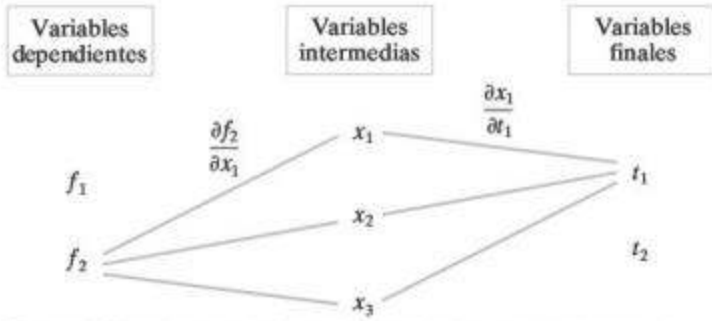


Figura 2.66 Diagrama de jerarquía de variables para el ejemplo 4.

según la fórmula (6). Después viene el abuso con la notación,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial t_1} &= (x_2x_3)(t_2) + (x_1x_3)(2t_1) + (x_1x_2)(0)\\ &= (t_1^2t_2^2)(t_2) + (t_1t_2)(t_2^2)(2t_1)\\ &= 3t_1^2t_2^3,\end{aligned}$$

que es en realidad el elemento (2, 1) de la matriz producto. ◆

Al fin establecimos la versión más general de la regla de la cadena desde un punto de vista técnico; una demostración de esto se encuentra en el apéndice de esta sección.

TEOREMA 5.3 (REGLA DE LA CADENA) Suponga que $X \subseteq \mathbf{R}^m$ y $T \subseteq \mathbf{R}^n$ son abiertos, y $\mathbf{f}$: $X \to \mathbf{R}^p$ y $\mathbf{x}$: $T \to \mathbf{R}^m$ están definidas de modo que su rango es $\mathbf{x} \subseteq X$. Si $\mathbf{x}$ es diferenciable en $\mathbf{t}_0 \in T$ y $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)$, entonces la composición $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ es diferenciable en $\mathbf{t}_0$, y tenemos

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{t}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0).$$

La ventaja del teorema 5.3 sobre las versiones anteriores de la regla de la cadena que hemos estudiado es que requiere que $\mathbf{f}$ solo sea diferenciable en el punto en cuestión, no ser de clase C^1. Advierta que, por supuesto, el teorema 5.3 incluye todos los casos especiales de la regla de la cadena que hemos estudiado con anterioridad. En particular, el teorema 5.3 incluye el importante caso de la fórmula (4).

EJEMPLO 5 Sea $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x, y) = (x - 2y + 7, 3xy^2)$. Suponga que $\mathbf{g}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ es diferenciable en (0, 0, 0) y que sabemos que $\mathbf{g}(0, 0, 0) = (-2, 1)$ y

$$D\mathbf{g}(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usaremos esta información para determinar $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(0, 0, 0)$.

En primer lugar, observe que el teorema 5.3 nos dice que $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ debe ser diferenciable en (0, 0, 0), y en segundo lugar que

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(0, 0, 0) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(0, 0, 0))\, D\mathbf{g}(0, 0, 0) = D\mathbf{f}(-2, 1)\, D\mathbf{g}(0, 0, 0).$$

Gracias a que conocemos **f** por completo, es fácil calcular que

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3y^2 & 6xy \end{bmatrix} \text{ por lo que, } D\mathbf{f}(-2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 18 & 12 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hay que remarcar que es necesaria toda la fuerza del teorema 5.3, ya que no sabemos nada acerca de la diferenciabilidad de **g** más que en el punto (0, 0, 0). ◆

EJEMPLO 6 (Conversiones de coordenadas polares/rectangulares) Recuerde el lector que en la sección 1.7 se dieron las ecuaciones básicas que relacionan las coordenadas polares con las rectangulares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}.$$

Ahora suponga que se tiene una ecuación que define una cantidad w como función de x y de y; es decir,

$$w = f(x, y).$$

Entonces, por supuesto, w debe verse solo como una función de r y θ por medio de sustituir a x por $r\cos\theta$, y a y por $r\,\text{sen}\,\theta$. Es decir,

$$w = g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

Nuestro problema es el siguiente: si suponemos que todas las funciones involucradas son diferenciables, ¿cómo se relacionan las derivadas parciales $\partial w/\partial r$, $\partial w/\partial\theta$, con $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$?

En la situación que se acaba de describir se tiene $w = g(r, \theta) = (f \circ \mathbf{x})(r, \theta)$, de modo que la regla de la cadena implica que

$$Dg(r, \theta) = Df(x, y)\, D\mathbf{x}(r, \theta).$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} & \dfrac{\partial g}{\partial\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Al extraer los elementos se observa que las distintas derivadas parciales de w están relacionadas según las fórmulas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial r} = \cos\theta\, \dfrac{\partial w}{\partial x} + \text{sen}\,\theta\, \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial\theta} = -r\,\text{sen}\,\theta\, \dfrac{\partial w}{\partial x} + r\cos\theta\, \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}. \tag{8}$$

La significancia de (8) es que proporciona una relación de **operadores diferenciales**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}. \tag{9}$$

La interpretación apropiada de (9) es la siguiente: la diferenciación con respecto de la coordenada polar r es igual que una cierta combinación de diferenciaciones con respecto de ambas coordenadas cartesianas x y y (es decir, la combinación $\cos\theta\,\partial/\partial x + \operatorname{sen}\theta\,\partial/\partial y$). Se aplica un comentario similar para la diferenciación con respecto de la coordenada polar θ. Observe que, cuando $r \neq 0$ es posible resolver algebraicamente para $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ en (9), con lo que se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}. \tag{10}$$

Más adelante tendremos ocasión de usar las relaciones (9) y (10), así como el método de su derivación.

Apéndice. Demostración del teorema 5.3

Comenzamos por hacer notar que existen tanto las matrices de derivadas $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ como las $D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)$ porque se asume que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y también que $\mathbf{x}$ es diferenciable en $\mathbf{t}_0$. Entonces, existe la matriz producto $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)$. Necesitamos demostrar que el límite en la definición 3.8 se satisface mediante esta matriz producto, es decir, que

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{t}_0} \frac{\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - [(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)]\,\|}{\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|} = 0. \tag{11}$$

En vista de la unicidad de la matriz de derivadas se sigue automáticamente que $\mathbf{f}\circ\mathbf{x}$ es diferenciable en $\mathbf{t}_0$, y que $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = D(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0)$. Entonces, nos preocuparemos solo por establecer el límite (11) mencionado.

Consideremos el numerador de (11). En primer lugar, reescribimos

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) &- [(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)] \\ &= (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0)) \\ &\qquad + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0)) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0).\end{aligned}$$

Después usamos la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) &- [(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)]\,\| \\ &\leq \|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0))\| \\ &\qquad + \|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0)) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)\| \\ &= \|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0))\| \\ &\qquad + \|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,[(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0)) - D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)]\,\|.\end{aligned}$$

Según la desigualdad (9) en la demostración del teorema 3.9 hay una constante K tal que, para cualquier vector $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$, $\|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \leq K\|\mathbf{h}\|$ Así,

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)\| \\ \leq \|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0))\| \\ + K\|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t_0) - D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)\|.\end{aligned} \tag{12}$$

Para establecer el límite (11) de manera formal debemos demostrar que dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar a $\delta > 0$ tal que si $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta$, entonces

$$\frac{\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - [(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)]\|}{\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|} < \epsilon.$$

Considere el primer término del lado derecho de (12). Utilizando la diferenciabilidad de $\mathbf{x}$ en $\mathbf{t}_0$, y la desigualdad (11) en la demostración del teorema 3.9, podemos encontrar algún $\delta_0 > 0$ y una constante K_0 tal que si $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta_0$, entonces

$$\|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)\| < K_0\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\|.$$

Por la diferenciabilidad de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$, dado cualquier $\epsilon_1 > 0$, podemos encontrar algún $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$, entonces

$$\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)]\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} < \epsilon_1.$$

Hacemos $\epsilon_1 = \epsilon/(2K_0)$. Con $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)$ tenemos que si tanto $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta_0$ como $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta_1/K_0$, entonces

$$\|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)\| < K_0\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta_1.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0))\| &< \epsilon_1\|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)\| \\ &< \epsilon_1 K_0\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| = \frac{\epsilon\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|}{2}.\end{aligned} \tag{13}$$

Ahora veamos el segundo término del lado derecho de (12). Como $\mathbf{x}$ es diferenciable en $\mathbf{t}_0$, dado cualquier $\epsilon_2 > 0$, podemos encontrar algún $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta_2$, entonces

$$\frac{\|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - [\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) + D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)]\|}{\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|} < \epsilon_2.$$

Hacemos $\epsilon_2 = \epsilon/(2\mathrm{K})$. Entonces, para $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta_2$ tenemos

$$\|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - [\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) + D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)]\| < \frac{\epsilon}{2K}\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|. \tag{14}$$

Finalmente, sea δ el más pequeño de δ_0, δ_1/K_0 y δ_2. Entonces, para $0 < \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \delta$ tenemos que se cumplen ambas desigualdades (13) y (14), de modo que (12) se convierte en

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)\| \\ < \frac{\epsilon}{2}\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\| + K\left(\frac{\epsilon}{2K}\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|\right) \\ = \epsilon\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\|(\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}\circ\mathbf{x})(\mathbf{t}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)\|}{\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_0\|} < \epsilon,$$

como se buscaba. ■

2.5 Ejercicios

1. Si $f(x, y, z) = x^2 - y^3 + xyz$ y $x = 6t + 7$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = t^2$, verifique la regla de la cadena por medio de encontrar df/dt de dos maneras distintas.

2. Si $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ y $x = s + t$, $y = s^2 + t^2$, encuentre $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial t$ de dos maneras:

a) por sustitución.

b) por medio de la regla de la cadena.

3. Suponga que un pájaro vuela a lo largo de la curva helicoidal $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 3t$. De pronto, el pájaro encuentra un frente de mal clima de manera que la presión barométrica varía mucho de un punto a otro de acuerdo con la relación $P(x, y, z) = 6x^2z/y$ atm.

a) Use la regla de la cadena para determinar la forma en que cambia la presión en el momento $t = \pi/4$ min.

b) Compruebe el resultado que obtuvo en el inciso anterior por medio de una sustitución directa.

c) ¿Cuál es la presión aproximada en el momento $t = \pi/4 + 0.01$ min?

4. Suponga que $z = x^2 + y^3$, donde $x = st$ y y es una función de s y t. Suponga además que cuando $(s, t) = (2, 1)$, $\partial y/\partial t = 0$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial t}(2, 1)$.

5. Suponga que usted es el orgulloso poseedor de una máquina amasadora de pan de la marca Acme, de lujo, que está usando hoy por primera vez. Suponga que al mediodía las dimensiones de su barra de masa de pan (casi rectangular) son $L = 7$ pulg (longitud), $W = 5$ pulg (ancho) y $H = 4$ pulg (alto). En ese momento usted coloca la masa en la máquina para que la amase y el aparato comienza a estirarla con una velocidad inicial de 0.75 pulg/min, a comprimirla a una velocidad de 1 pulg/min y a aumentar el ancho a una velocidad de 0.5 pulg/min. ¿Cuál es la velocidad de cambio del volumen de la masa cuando la máquina comienza a funcionar? ¿Qué sucede con el tamaño de la masa en ese momento? ¿Está aumentando o disminuyendo?

6. Se coloca una barra rectangular de mantequilla en el horno de microondas para fundirla. En el momento en que la longitud de la barra mide 6 pulgadas y su área de sección transversal mide 1.5 pulgadas por lado, su longitud disminuye a una velocidad de 0.25 pulg/min y la arista de su sección transversal disminuye a una velocidad de 0.125 pulg/min. ¿Con qué rapidez se está fundiendo la mantequilla en ese momento?, es decir, ¿a qué velocidad se está convirtiendo en líquido el volumen sólido de mantequilla?

7. Suponga que se usa la siguiente función para modelar la demanda mensual de bicicletas:

$$P(x, y) = 200 + 20\sqrt{0.1x + 10} - 12\sqrt[3]{y}.$$

En esta fórmula x representa el precio (en dólares por galón) de gasolina de automóvil y la y representa el precio de venta (en dólares) de cada bicicleta. Además, suponga que el precio de la gasolina en t meses después de hoy será

$$x = 1 + 0.1t - \cos\frac{\pi t}{6}$$

y que el precio de cada bicicleta será

$$y = 200 + 2t\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}.$$

¿A qué velocidad estará cambiando la demanda mensual de bicicletas en seis meses después de hoy?

8. Los Centros para el Control y Prevención de Enfermedades dan información sobre el **índice de masa corporal** (IMC) para brindar una asesoría más significativa acerca del peso de una persona. El IMC es dado por la fórmula

$$\text{BMI} = \frac{10{,}000w}{h^2},$$

donde w es la masa corporal de un individuo, expresada en kilogramos, y h es su estatura en centímetros. Mientras el lector vigilaba el crecimiento de un niño, estimó que en el momento en que tenía 10 años de edad su estatura aumentaba a razón de 0.6 cm por mes. Al mismo tiempo, su masa crecía a una tasa de 0.4 kg por mes. Suponga que en su décimo cumpleaños el niño medía 140 cm y pesaba 33 kg.

a) ¿A qué velocidad estaba cambiando su IMC en su décimo cumpleaños?

b) El IMC de un hombre normal de 10 años de edad aumenta a una tasa promedio de 0.041 puntos IMC por mes. ¿Habría que preocuparse por el aumento de peso del niño?

9. Una mezcladora de cemento forma una pila cónica al verter el concreto. En el momento en que la altura y el radio de la base del cono de concreto son, respectivamente, de 30 y 12 cm, la velocidad a la que aumenta la altura del cono es de 1cm/min, y la velocidad a la que aumenta el volumen de cemento en la pila es de 320 cm^3/min. En ese momento, ¿con qué rapidez está cambiando el radio del cono?

10. Un clarinetista está tocando el glisando al principio de la "Rapsodia en azul", mientras Hermione (que llegó tarde) va caminando rumbo a su asiento. Si la frecuencia (cambio) de la nota es f y Hermione avanza hacia el clarinetista a una velocidad v, entonces ella en realidad escucha la frecuencia ϕ dada por

$$\phi = \frac{c + v}{c} f,$$

donde c es la velocidad (constante) del sonido en el aire, de alrededor de 330 m/seg. En ese momento en particular, la frecuencia es de $f = 440$ Hz y está aumentando a razón de 100 Hz por segundo. En ese preciso momento, Hermione está avanzando hacia el

clarinetista a 4 m/seg y desacelerando a razón de 2 m/seg^2. ¿Cuál es la frecuencia percibida ϕ que ella escucha en ese momento? ¿Qué tan rápido está cambiando? ¿Hermione escucha más alta o más baja la nota que sale del clarinete?

11. Suponga que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas. Sea $x = e^r \cos\theta$, $y = e^r \operatorname{sen}\theta$. Demuestre que en ese caso

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = e^{-2r}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

12. Suponga que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas. Sea $x = 2uv$ y $y = u^2 + v^2$. Demuestre que entonces

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] + 4y\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

13. Si $w = g(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto a $x = u^2 - v^2$ y $y = v^2 - u^2$, demuestre que

$$v\frac{\partial w}{\partial u} + u\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

14. Suponga que $z = f(x + y, x - y)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto de $u = x + y$ y $v = x - y$. Demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

15. Si $w = f\left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)$ es una función diferenciable de $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, demuestre que

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

16. Si $w = f\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ es una función diferenciable de $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, demuestre que entonces

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

17. Suponga que $w = f\left(\dfrac{y - x}{xy}, \dfrac{z - x}{xz}\right)$ es una función diferenciable de $u = \dfrac{y - x}{xy}$ y de $v = \dfrac{z - x}{xz}$. Demuestre entonces que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

18. Suponga que $w = g\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{y}\right)$ es una función diferenciable de $u = x/y$ y $v = z/y$. Demuestre entonces que

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

En los ejercicios 19 a 27 calcule $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})$ en dos formas: a) con la evaluación de $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ y b) utilizando la regla de la cadena y las matrices de derivadas $D\mathbf{f}$ y $D\mathbf{g}$.

19. $\mathbf{f}(x) = (3x^5, e^{2x})$, $g(s, t) = s - 7t$

20. $\mathbf{f}(x) = (x^2, \cos 3x, \ln x)$, $g(s, t, u) = s + t^2 + u^3$

21. $f(x, y) = ye^x$, $\mathbf{g}(s, t) = (s - t, s + t)$

22. $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $\mathbf{g}(s, t) = (st, s + t^2)$

23. $\mathbf{f}(x, y) = \left(xy - \dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{y} + y^3\right)$, $\mathbf{g}(s, t) = \left(\dfrac{s}{t}, s^2t\right)$

24. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2y + y^2z, xyz, e^{z})$, $\mathbf{g}(t) = (t - 2, 3t + 7, t^3)$

25. $\mathbf{f}(x, y) = (xy^2, x^2y, x^3 + y^3)$, $\mathbf{g}(t) = (\operatorname{sen} t, e^t)$

26. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y, y/x, e^y)$, $\mathbf{g}(s, t, u) = (s + 2t + 3u, stu)$

27. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y + z, x^3 - e^{yz})$, $\mathbf{g}(s, t, u) = (st, tu, su)$

28. Sea $\mathbf{g}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ una función diferenciable, tal que $\mathbf{g}(1, -1, 3) = (2, 5)$ y $D\mathbf{g}(1, -1, 3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Suponga que $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es definida por $\mathbf{f}(x, y) = (2xy, 3x - y + 5)$. ¿Cuál es $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(1, -1, 3)$?

29. Sean $\mathbf{g}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ y $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ funciones diferenciables, tales que $\mathbf{g}(0, 0) = (1, 2)$, $\mathbf{g}(1, 2) = (3, 5)$, $\mathbf{f}(0, 0) = (3, 5)$, $\mathbf{f}(4, 1) = (1, 2)$, $D\mathbf{g}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $D\mathbf{g}(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $D\mathbf{f}(3, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $D\mathbf{f}(4, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(1, 2)$

b) Determine $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(4, 1)$.

30. Sea $z = f(x, y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas. Si hacemos la sustitución estándar de coordenadas polares y rectangulares, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

31. *a*) Utilice los métodos del ejemplo 6 y la fórmula (10) de esta sección para determinar $\partial^2/\partial x^2$ y $\partial^2/\partial y^2$ en términos de los operadores diferenciales polares parciales $\partial^2/\partial r^2$, $\partial^2/\partial\theta^2$, $\partial^2/\partial r\,\partial\theta$, $\partial/\partial r$ y $\partial/\partial\theta$. (Sugerencia: necesitará usar la regla del producto).

b) Use el inciso anterior para demostrar que la fórmula que da el **operador laplaciano** $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

32. Demuestre que la fórmula que da el operador laplaciano $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ en tres dimensiones en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

33. En este problema determinará la fórmula para el operador laplaciano en coordenadas esféricas.

a) Observe, en primer lugar, que las conversiones de coordenadas cilíndricas/esféricas, dadas por la fórmula (6) de la sección 1.7, expresan las coordenadas cilíndricas z y r en términos de las coordenadas esféricas ρ y φ por medio de ecuaciones cuya forma es igual a la de aquellas que expresan x y y en términos de las coordenadas polares r y θ. Use este hecho para escribir $\partial/\partial r$ en términos de $\partial/\partial\rho$ y $\partial/\partial\varphi$ (véase también la fórmula (10) de esta sección).

b) Use las ideas y el resultado del inciso anterior para establecer la fórmula siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cot\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

34. Suponga que y está definida en forma implícita como una función $y(x)$ mediante una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0.$$

(Por ejemplo, la ecuación $x^3 - y^2 = 0$ define y como dos funciones de x, que son $y = x^{3/2}$ y $y = -x^{3/2}$. La ecuación $\operatorname{sen}(xy) - x^2y^7 + e^y = 0$, por otro lado, no puede resolverse fácilmente para y en términos de x. Consulte el final de la sección 2.6 para saber más sobre las funciones implícitas).

a) Demuestre que si se acepta que tanto F como $y(x)$ son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

siempre que $F_y(x, y) \neq 0$.

b) Use el resultado del inciso anterior para encontrar dy/dx cuando y está definida en forma implícita en términos de x por la ecuación $x^3 - y^2 = 0$. Compruebe su resultado resolviendo explícitamente para y y luego diferencie.

35. Encuentre dy/dx cuando y está definida implícitamente por la ecuación $\operatorname{sen}(xy) - x^2y^7 + e^y = 0$ (véase el ejercicio 34).

36. Suponga que se da una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

por ejemplo, alguna como $x^3z + y\cos z + (\operatorname{sen} y)/z = 0$. Entonces puede considerarse que z está definida implícitamente como una función $z(x, y)$.

a) Use la regla de la cadena para demostrar que si tanto F como $z(x, y)$ se asumen como diferenciables, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

b) Utilice el inciso anterior para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, donde z es dada por la ecuación $xyz = 2$. Compruebe su resultado resolviendo explícitamente para z y después calcule las derivadas parciales.

37. Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, donde z es dada implícitamente por la ecuación

$$x^3z + y\cos z + \frac{\operatorname{sen} y}{z} = 0.$$

(Véase el ejercicio 36).

38. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Use la definición de la derivada parcial para encontrar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

b) Sea a una constante distinta de cero, y sea $\mathbf{x}(t) = (t, at)$. Demuestre que $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ es diferenciable y encuentre directamente $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(0)$.

c) Calcule $Df(0, 0)D\mathbf{x}(0)$. ¿Cómo puede conciliar la respuesta con la del inciso anterior y la regla de la cadena?

Sea $w = f(x, y, z)$ una función diferenciable de x, y y z. Por ejemplo, suponga que $w = x + 2y + z$. Considere las variables x, y y z como independientes, se tiene que $\partial w/\partial x = 1$, y $\partial w/\partial y = 2$. Pero ahora suponga que $z = xy$. Entonces x, y y z no son independientes y, por sustitución, tenemos que $w = x + 2y + xy$, de modo que $\partial w/\partial x = 1 + y$ y $\partial w/\partial y = 2 + x$. Para superar la ambigüedad aparente en la notación de las derivadas parciales se acostumbra indicar el conjunto completo de variables

independientes escribiendo subíndices adicionales además de la derivada parcial. Así,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$$

significaría que la derivada parcial de w con respecto de x, aunque tanto y como z se mantendrían constantes. Por consiguiente, en este caso x, y y z constituyen el conjunto completo de variables independientes. Por otro lado, usaríamos $(\partial w/\partial x)_y$ *para indicar que x y y solas son las variables independientes. En el caso en que* $w = x + 2y + z$*, esta notación da*

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 1, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z} = 2 \quad y \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y} = 1.$$

Si $z = xy$*, entonces también se tiene*

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y} = 1 + y \quad y \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x} = 2 + x.$$

De esta manera se evita la ambigüedad de la notación. Utilice esta notación para resolver los ejercicios 39 a 45.

39. Sea $w = x + 7y - 10z$ y $z = x^2 + y^2$.

a) Encuentre $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}, \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y}$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x}$.

b) Relacione $(\partial w/\partial x)_{y,z}$ y $(\partial w/\partial x)_y$ utilizando la regla de la cadena.

40. Repita el ejercicio 39, donde $w = x^3 + y^3 + z^3$ y $z = 2x - 3y$.

41. Suponga que $s = x^3y + xzw - z^2$ y $xyw - y^3z + xz = 0$. Encuentre

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_{x,y,w} \quad y \quad \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_{x,w}.$$

42. Sea que $U = F(P, V, T)$ denote la energía interna de un gas. Suponga que el gas obedece la ley de los gases ideales $PV = kT$, donde k es una constante.

a) Encuentre $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{P}$.

b) Encuentre $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V}$.

c) Encuentre $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{V}$.

43. Demuestre que si x, y, z están relacionadas en forma implícita por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, entonces

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y} = -1.$$

Esta relación se utiliza en termodinámica. (Sugerencia: use el ejercicio 36).

44. La ley de los gases ideales $PV = kT$, donde k es una constante, relaciona la presión P, temperatura T y volumen V de un gas. Compruebe el resultado del ejercicio 43 para la ecuación de los gases ideales.

45. Verifique el resultado del ejercicio 43 para el elipsoide

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$$

donde a, b, c y d son constantes.

2.6 Derivadas direccionales y gradientes

En esta sección consideraremos algunas de las propiedades geométricas clave del **vector gradiente**.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

de una función de n variables escalares. De aquí en adelante, n será por lo general 2 o 3.

La derivada direccional

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables escalares. En la sección 2.3 se visualizó la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ como la pendiente en el punto $(a, b, f(a, b))$, de la curva obtenida cuando la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = b$. La otra derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ tiene una interpretación geométrica similar. Sin embargo, la superficie $z = f(x, y)$ contiene infinitas curvas que pasan por $(a, b, f(a, b))$ cuyas pendientes podríamos desear medir. La derivada direccional nos permite hacer esto.

Una manera alternativa de visualizar $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ es como la velocidad de cambio de f a medida que nos movemos "infinitesimalmente" de $\mathbf{a} = (a, b)$ en la dirección $\mathbf{i}$, como se indica en la figura 2.67. Esto es fácil de ver porque, de acuerdo con la definición de la derivada parcial,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f((a, b) + (h, 0)) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f((a, b) + h(1, 0)) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{i}) - f(\mathbf{a})}{h}.\end{aligned}$$

Observe que estamos identificando el punto (a, b) con el vector $\mathbf{a} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. De manera similar, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{j}) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

El escribir las derivadas parciales como lo hemos hecho nos permite ver que hay casos especiales de un tipo más general de derivada. Suponga que $\mathbf{v}$ es cualquier vector unitario en $\mathbf{R}^2$ (la razón para tomar un vector unitario se verá más adelante). La cantidad

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} \tag{1}$$

tan solo es la velocidad de cambio de f a medida que nos movemos (infinitesimalmente) de $\mathbf{a} = (a, b)$ en la dirección especificada por $\mathbf{v} = (A, B) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$. También es la pendiente de la curva obtenida de la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical $B(x - a) - A(y - b) = 0$ (véase la figura 2.68). Podemos usar la expresión del límite en (1) para definir la derivada de cualquier función de variable vectorial en una dirección particular.

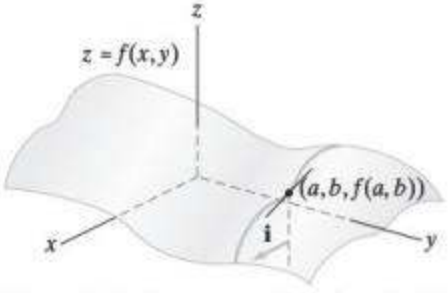


Figura 2.67 Otra manera de ver la derivada parcial $\partial f/\partial x$ en un punto.

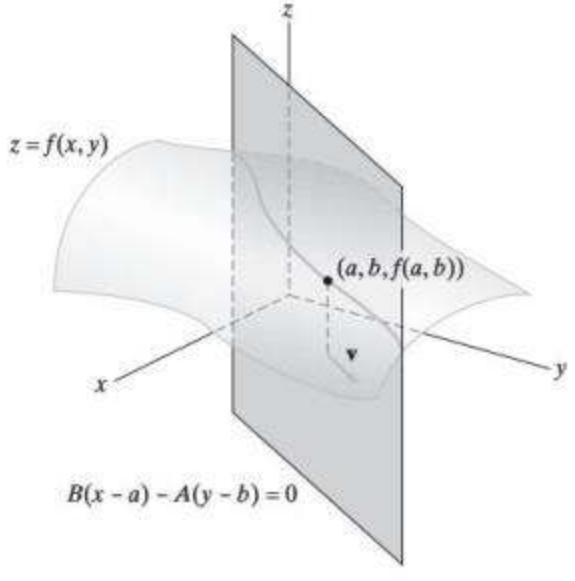


Figura 2.68 La derivada direccional.

DEFINICIÓN 6.1 Sea X abierto en $\mathbf{R}^n$, $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función de variable escalar, y $\mathbf{a} \in X$. Si $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ es cualquier vector unitario, entonces la **derivada direccional de f en a, en la dirección de v**, denotada $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$, es

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

(siempre que este límite exista).

EJEMPLO 1 Suponga que $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2x - 5y$. Entonces, si $\mathbf{v} = (v, w) \in \mathbf{R}^2$ es cualquier vector unitario, se infiere que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0, 0) + h(v, w)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 v^2 - 3h^2 vw + 2hv - 5hw}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (hv^2 - 3hvw + 2v - 5w) \\ &= 2v - 5w. \end{aligned}$$

Así, la velocidad de cambio de f es $2v - 5w$ si nos movemos del origen en la dirección dada por $\mathbf{v}$. La velocidad de cambio es cero si $\mathbf{v} = (5/\sqrt{29}, 2/\sqrt{29})$ o $(-5/\sqrt{29}, -2/\sqrt{29})$. ◆

En consecuencia, se ve que las derivadas parciales de una función solo son la "punta del iceberg". Sin embargo, está claro que cuando f es diferenciable, las derivadas parciales en realidad determinan las derivadas direccionales para todas las direcciones $\mathbf{v}$. Para ver este notable resultado comencemos por definir una nueva función F de una sola variable mediante:

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}).$$

Entonces, según la definición 6.1, tenemos

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(0).$$

Es decir,

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})\Big|_{t=0}. \tag{2}$$

Lo significativo de la ecuación (2) es que, cuando f es diferenciable en $\mathbf{a}$, podemos aplicar la regla de la cadena al lado derecho. En realidad, sea $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Entonces, según la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = Df(\mathbf{x}) D\mathbf{x}(t) = Df(\mathbf{x})\mathbf{v}.$$

La evaluación en $t = 0$ da

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}. \tag{3}$$

El propósito de la ecuación (3) es hacer énfasis en la geometría de la situación. El resultado anterior dice que la derivada direccional tan solo es el producto punto del

gradiente y del vector de dirección $\mathbf{v}$. Como el gradiente está constituido por las derivadas parciales, se ve que el concepto más general de la derivada direccional depende por completo del vector de dirección y las derivadas parciales. Para dar más formalidad se resume este análisis en un teorema.

TEOREMA 6.2 Suponga que $X \subseteq \mathbf{R}^n$ es abierto y que $f: X \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in X$. Entonces, la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ existe para todas las direcciones (vectores unitarios) $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ y, además, se tiene

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

EJEMPLO 2 La función $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2x - 5y$ se consideró en el ejemplo 1 y tiene parciales continuas, por lo que, según el teorema 3.5, es diferenciable. Por consiguiente, la aplicación del teorema 2.6 indica que para cualquier vector unitario $\mathbf{v} = v\mathbf{i} + w\mathbf{j} \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(0, 0) &= \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v} = (f_x(0, 0)\mathbf{i} + f_y(0, 0)\mathbf{j}) \cdot (v\mathbf{i} + w\mathbf{j}) \\ &= (2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) \cdot (v\mathbf{i} + w\mathbf{j}) \\ &= 2v - 5w, \end{aligned}$$

como ya se había visto. ◆

EJEMPLO 3 Lo contrario del teorema 6.2 no es verdadero. Es decir, una función puede tener derivadas direccionales en todas direcciones en un punto y aun así no ser diferenciable. Para ver cómo puede suceder esto, considere la función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

La función *no* es continua en el origen (¿por qué?). De modo que, por el teorema 3.6, no es diferenciable ahí; sin embargo, afirmamos que todas las derivadas direccionales existen en el origen. Para ver esto, establezca que la dirección del vector $\mathbf{v}$ sea $v\mathbf{i} + w\mathbf{j}$. Entonces, de acuerdo con la definición 6.1, se observa que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0, 0) + h(v\mathbf{i} + w\mathbf{j})) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{hv(hw)^2}{(hv)^2 + (hw)^4} - 0 \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 v w^2}{h^2(v^2 + h^2 w^4)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{v w^2}{v^2 + h^2 w^4} = \frac{v w^2}{v^2} = \frac{w^2}{v}. \end{aligned}$$

Así, la derivada direccional existe con la condición de que $v \neq 0$. Cuando $v = 0$ (en cuyo caso $\mathbf{v} = \mathbf{j}$), otra vez debemos calcular

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{j}} f(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0, 0) + h\mathbf{j}) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, también existe esta derivada direccional (que en realidad es $\partial f/\partial y$). ◆

La razón de restringir el vector de dirección $\mathbf{v}$ para que sea de longitud uno en el análisis de las derivadas direccionales tiene que ver con el significado de $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$, no con otros tecnicismos relacionados con la definición 6.1 o el teorema 6.2. En realidad podemos definir con certeza el límite en la definición 6.1 para cualquier vector $\mathbf{v}$, no solo para uno de longitud unitaria. Entonces, suponga que $\mathbf{w}$ es un vector arbitrario distinto de cero en $\mathbf{R}^n$ y f es diferenciable. Por lo tanto, la demostración del teorema 6.2 pasa sin cambio para dar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{w}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{w}.$$

El problema es el siguiente: Si $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ para algún escalar k (distinto de cero), entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{w}) - f(\mathbf{a})}{h} &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (k\mathbf{v}) \\ &= k(\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}) \\ &= k \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} \right). \end{aligned}$$

Es decir, la "derivada direccional generalizada" en la dirección de $k\mathbf{v}$ es k veces la derivada en la dirección de $\mathbf{v}$. Pero $\mathbf{v}$ y $k\mathbf{v}$ son vectores paralelos, y no es deseable que ocurra esta clase de ambigüedad de terminología. Así que evitaremos la dificultad insistiendo en que, cuando se trabaje con derivadas direccionales, se utilicen exclusivamente vectores unitarios (es decir, permitiendo que k solo sea ± 1).

Los gradientes y el ascenso más inclinado

Suponga que usted está viajando en el espacio cerca del planeta Nilrebo y que uno de los instrumentos de su nave mide la presión atmosférica exterior como una función $f(x, y, z)$ de la posición. Suponga, razonablemente, que esta función es diferenciable. Entonces se aplica el teorema 6.2 y este indica que, si se viaja del punto $\mathbf{a} = (a, b, c)$ en la dirección del vector (unitario) $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, la velocidad de cambio de la presión es dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

Ahora nos preguntamos lo siguiente: ¿En qué dirección la presión se está incrementando al máximo? Si θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$, entonces tenemos, de acuerdo con el teorema 3.3 de la sección 1.3, que

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta,$$

puesto que $\mathbf{u}$ es un vector unitario. Debido a que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, se tiene

$$-\|\nabla f(\mathbf{a})\| \leq D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\|.$$

Además, $\cos\theta = 1$ cuando $\theta = 0$ y $\cos\theta = -1$ cuando $\theta = \pi$. Por lo tanto, establecimos lo siguiente:

TEOREMA 6.3 La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$ es máxima con respecto de la dirección, cuando $\mathbf{u}$ apunta en la *misma* dirección que $\nabla f(\mathbf{a})$, y es mínima cuando $\mathbf{u}$ señala en la dirección *opuesta*. Además, los valores máximo y mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$ son $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ y $-\|\nabla f(\mathbf{a})\|$, respectivamente.

EJEMPLO 4 Si la función de presión de Nilrebo es

$$f(x, y, z) = 5x^2 + 7y^4 + x^2z^2 \text{ atm},$$

donde el origen se localiza en el centro de Nilrebo y las unidades de distancia se miden en miles de kilómetros, entonces la velocidad de cambio de la presión en $(1, -1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ puede calcularse como $\nabla f(1, -1, 2) \cdot \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ (observe que normalizamos el vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ para obtener un vector unitario). Utilizando el teorema 6.2 calculamos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, -1, 2) &= \nabla f(1, -1, 2) \cdot \mathbf{u} \\ &= (18\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{18 - 28 + 4}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} \text{ atm/Mm}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, al considerar el teorema 6.3, la presión aumentará con mayor rapidez en la dirección de $\nabla f(1, -1, 2)$, es decir, en la dirección

$$\frac{18\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\|18\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\|} = \frac{9\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{281}}$$

Además, la *velocidad* de este incremento es

$$\|\nabla f(1, -1, 2)\| = 2\sqrt{281} \text{ atm/Mm}. \quad \blacklozenge$$

El teorema 6.3 está enunciado de manera que es independiente de la dimensión, es decir, se aplica a funciones $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ para cualquier $n \geq 2$. En el caso en que $n = 2$ hay otra interpretación geométrica del teorema 6.3: suponga el lector que es un montañista en la superficie $z = f(x, y)$. Piense en el valor de f como la altura de la montaña sobre (o debajo) del nivel del mar. Si usted cuenta con un mapa y una brújula (que solo dan información en el plano xy), entonces, si está en el punto sobre la montaña con coordenadas xy (coordenadas del mapa) (a, b), el teorema 6.3 afirma que se debe mover en la dirección paralela al gradiente $\nabla f(a, b)$ con el fin de escalar la montaña con la mayor rapidez posible (véase la figura 2.69). De manera similar, se debe mover en la dirección paralela a $-\nabla f(a, b)$ para descender con la mayor rapidez. Más aún, la pendiente de su ascenso o descenso en estos casos es $\|\nabla f(a, b)\|$. Asegúrese de comprender que $\nabla f(a, b)$ es *un vector en* $\mathbf{R}^2$ que da la dirección norte-sur, este-oeste, que resulta óptima para viajar.

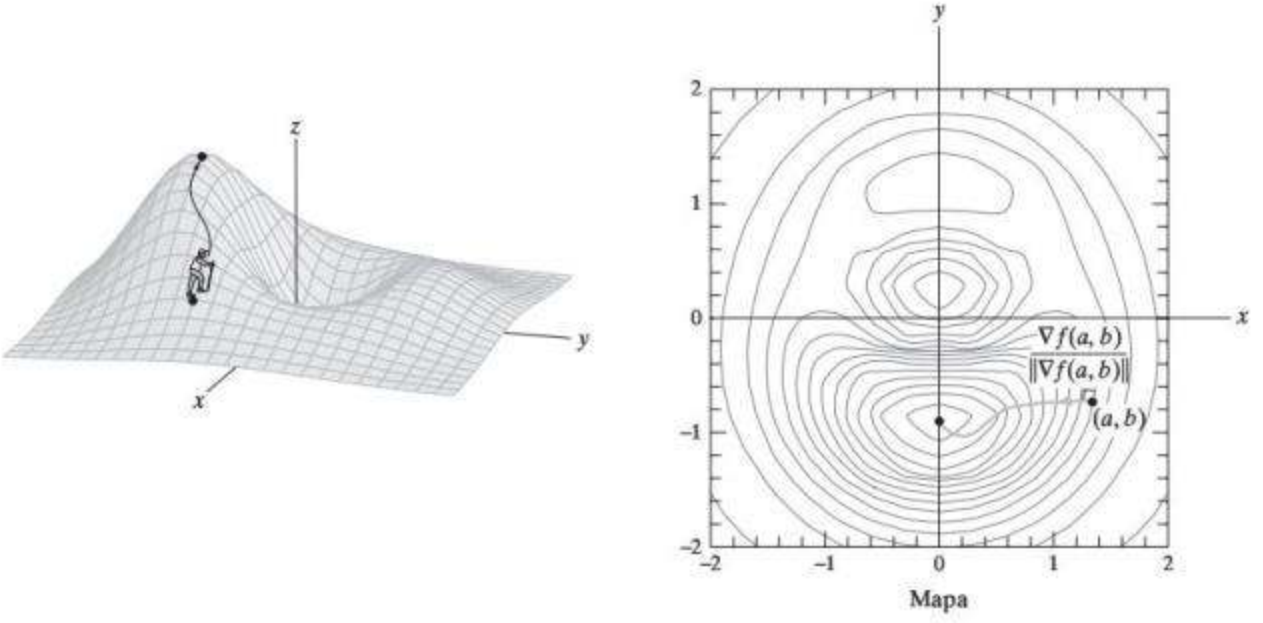


Figura 2.69 Selección de $\nabla f(a, b)/\|\nabla f(a, b)\|$ para la dirección del ascenso más inclinado.

Figura 2.70 Una esfera y uno de sus planos tangentes.

Una segunda visita a los planos tangentes

En la sección 2.1 se indicó que no todas las superficies pueden ser descritas por medio de ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$. En realidad, una superficie tan sencilla y conocida como la esfera no es la gráfica de ninguna función simple de dos variables. A pesar de ello, la esfera es claramente tan suave como para intuir que debe tener un plano tangente en cada uno de sus puntos (véase la figura 2.70).

¿Cómo puede encontrarse la ecuación del plano tangente? En el caso de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, procederíamos como sigue: en primer lugar hay que decidir si el punto de tangencia está en el hemisferio superior o el inferior. Después se aplica la ecuación (4) de la sección 2.3 a la gráfica de $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ o $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ cuando sea apropiado. El cálculo es tedioso pero no difícil desde el punto de vista conceptual. Sin embargo, los planos tangentes a puntos en el ecuador son todos verticales, por lo que no se aplica la ecuación (4) de la sección 2.3 (se puede modificar este enfoque para incluir dichos puntos, pero no lo haremos). En general, dada una superficie descrita por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = c$ (donde c es una constante), no es muy práctico resolver para z, incluso como varias funciones de x y y. Intente el lector resolver para z en la ecuación $xyz + ye^{xz} - x^2 + yz^2 = 0$ y verá lo que queremos decir. Necesitamos otro modo de enfrentar los planos tangentes a superficies descritas como conjuntos de nivel de funciones de tres variables.

Para iniciar la búsqueda presentaremos el resultado siguiente, interesante en sí mismo:

TEOREMA 6.4 Sea $X \subseteq \mathbf{R}^n$ abierto y $f: X \to \mathbf{R}$ una función de clase C^1. Si $\mathbf{x}_0$ es un punto sobre el conjunto de nivel $S = \{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) = c\}$, entonces el vector $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S.

DEMOSTRACIÓN Necesitamos establecer lo siguiente: Si $\mathbf{v}$ es cualquier vector tangente a S en $\mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ (es decir, $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = 0$). Por vector tangente a S en $\mathbf{x}_0$ queremos decir que $\mathbf{v}$ es el vector velocidad de una curva C que está en S y pasa por $\mathbf{x}_0$. La situación en $\mathbf{R}^3$ se ilustra en la figura 2.71.

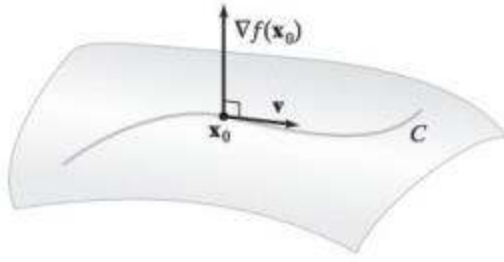


Figura 2.71 La superficie del conjunto de nivel $S = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = c\}$.

Por consiguiente, sea C dada en forma paramétrica por $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, donde $a < t < b$ y $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para cierto número t_0 en (a, b). (Entonces, si $\mathbf{v}$ es el vector velocidad en $\mathbf{x}_0$, debemos tener $\mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{v}$. Se invita al lector a consultar la sección 3.1 para más información acerca de los vectores de velocidad). Como C está contenida en S, tenemos

$$f(\mathbf{x}(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = c.$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dt}[f(\mathbf{x}(t))] = \frac{d}{dt}[c] = 0. \tag{4}$$

Por otro lado, la regla de la cadena aplicada a la función compuesta $f \circ \mathbf{x}$: $(a, b) \to \mathbf{R}$ indica que

$$\frac{d}{dt}[f(\mathbf{x}(t))] = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t).$$

La evaluación en t_0 y la ecuación (4) permiten concluir que

$$\nabla f(\mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = 0,$$

como se deseaba. ■

A continuación se describe la forma de usar el resultado del teorema 6.4 para encontrar el plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. De la sección 1.5 se sabe que un plano queda determinado únicamente con dos elementos de información: (i) un punto en el plano y (ii) un vector perpendicular al plano. Se nos da un punto en el plano en la forma del punto de tangencia $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Igual que para un vector normal al plano, el teorema 6.4 indica que lo obtendremos con el gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que define la esfera como un conjunto de nivel. Tenemos

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

por lo que

$$\nabla f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}.$$

En consecuencia, la ecuación del plano tangente es

$$\nabla f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}, y - 0, z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

$$-\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

o bien,

$$z - x = \sqrt{2}.$$

En general, si S es una superficie en $\mathbf{R}^3$ definida por una ecuación de la forma

$$f(x, y, z) = c,$$

entonces, si $\mathbf{x}_0 \in X$, el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S y, en consecuencia, si es distinto de cero, es un vector normal al plano tangente a S en $\mathbf{x}_0$. Por lo tanto, la ecuación

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \tag{5}$$

o, en forma equivalente,

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{6}$$

es una ecuación para el plano tangente a S en $\mathbf{x}_0$.

Advierta que la fórmula (5) se puede usar en $\mathbf{R}^n$ y en $\mathbf{R}^3$, en cuyo caso define un **hiperplano tangente** a la hipersuperficie $S \subset \mathbf{R}^n$ definida por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ en el punto $\mathbf{x}_0 \in S$.

EJEMPLO 5 Considere la superficie S definida por la ecuación $x^3y - yz^2 + z^5 = 9$. Calcularemos el plano tangente a S en el punto $(3, -1, 2)$.

Para hacerlo definimos $f(x, y, z) = x^3y - yz^2 + z^5$. Entonces

$$\nabla f(3, -1, 2) = \left(3x^2y\mathbf{i} + (x^3 - z^2)\mathbf{j} + (5z^4 - 2yz)\mathbf{k}\right)\Big|_{(3,-1,2)}$$

$$= -27\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 84\mathbf{k}$$

es normal a S en $(3, -1, 2)$, por medio del teorema 6.4. Utilizando la fórmula (6) vemos que el plano tangente tiene la ecuación

$$-27(x - 3) + 23(y + 1) + 84(z - 2) = 0$$

o, en forma equivalente,

$$-27x + 23y + 84z = 64. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 6 Considere la superficie definida por $z^4 = x^2 + y^2$. Esta superficie es el conjunto de nivel (en la altitud 0) de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^4.$$

El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 4z^3\,\mathbf{k}.$$

Figura 2.72 La superficie del ejemplo 6.

Observe que el punto (0, 0, 0) está en la superficie. Sin embargo, $\nabla f(0, 0, 0) = \mathbf{0}$, lo que hace imposible usar el vector gradiente como un vector normal a un plano tangente. Por consiguiente, la fórmula (6) no se aplica. Lo que concluimos de este ejemplo es que la superficie no tiene un plano tangente en el origen, un hecho que es evidente si se observa la gráfica (véase la figura 2.72). ◆

EJEMPLO 7 La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4$ define una **hiperesfera** de radio 2 en $\mathbf{R}^4$. Usemos la fórmula (5) para determinar el hiperplano tangente a la hiperesfera en $(-1, 1, 1, -1)$.

La hiperesfera puede considerarse un conjunto de nivel a una altitud 4 de la función $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, por lo que el vector gradiente es

$$\nabla f(x, y, z, w) = (2x, 2y, 2z, 2w),$$

de modo que

$$\nabla f(-1, 1, 1, -1) = (-2, 2, 2, -2).$$

Utilizando la fórmula (5) obtenemos una ecuación para el hiperplano tangente como

$$(-2, 2, 2, -2) \cdot (x + 1, y - 1, z - 1, w + 1) = 0$$

o bien,

$$-2(x + 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) - 2(w + 1) = 0.$$

En forma equivalente se tiene la ecuación

$$x - y - z + w + 4 = 0. \quad ◆$$

EJEMPLO 8 Determinamos el plano tangente al paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ en el punto $(-2, 1, 7)$ de dos maneras: (i) utilizando la fórmula (4) de la sección 2.3, y (ii) empleando nuestra nueva fórmula (6).

En primer lugar, la ecuación $z = x^2 + 3y^2$ describe en forma explícita al paraboloide como la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, es decir, con una ecuación de la forma $z = f(x, y)$. Entonces, la aplicación de la fórmula (4) de la sección 2.3 indica que el plano tangente en $(-2, 1, 7)$ tiene la ecuación

$$z = f(-2, 1) + f_x(-2, 1)(x + 2) + f_y(-2, 1)(y - 1)$$

o, de manera equivalente

$$z = 7 - 4(x + 2) + 6(y - 1). \tag{7}$$

En segundo lugar, si escribimos la ecuación del paraboloide como $x^2 + 3y^2 - z = 0$, vemos que describe al paraboloide como el conjunto de nivel de altitud 0 de la función de tres variables $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z$. En consecuencia, la aplicación de la fórmula (6) indica que una ecuación para el plano tangente en $(-2, 1, 7)$ es

$$F_x(-2, 1, 7)(x + 2) + F_y(-2, 1, 7)(y - 1) + F_z(-2, 1, 7)(z - 7) = 0$$

o bien,

$$-4(x + 2) + 6(y - 1) - 1(z - 7) = 0. \tag{8}$$

Como puede verse, la ecuación (7) coincide con la (8). ◆

El ejemplo 8 puede considerarse en un contexto más general. Si S es la superficie en $\mathbf{R}^3$ dada por la ecuación $z = f(x, y)$ (donde f es diferenciable), entonces la fórmula (4) de la sección 2.3 indica que una ecuación para el plano tangente a S en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Al mismo tiempo, la ecuación para S se puede escribir como

$$f(x, y) - z = 0.$$

Entonces, si $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, vemos que S es el conjunto de nivel de F en la altitud 0. De manera que la fórmula (6) indica que el plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ es

$$F_x(a, b, f(a, b))(x - a) + F_y(a, b, f(a, b))(y - b) + F_z(a, b, f(a, b))(z - f(a, b)) = 0.$$

Mediante la construcción de F,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Así, la fórmula del plano tangente se convierte en

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0.$$

La última ecuación para el plano tangente es igual a la que se obtuvo antes con la ecuación (4) de la sección 2.3.

El resultado muestra que las ecuaciones (5) y (6) extienden la fórmula (4) de la sección 2.3 al planteamiento más general de conjuntos nivel.

Los teoremas de la función implícita y la función inversa (opcional)

Notamos previamente que no todas las superficies que son descritas por ecuaciones de la forma $F(x, y, z) = c$ se pueden describir por medio de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$. Terminaremos esta sección con una digresión breve, pero importante desde el punto de vista teórico, acerca de cuándo y cómo el conjunto de nivel $\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = c\}$ también se puede describir como la gráfica de una función de dos variables, es decir, como la gráfica de $z = f(x, y)$. También consideraremos la pregunta más general de cuándo es posible resolver un sistema de ecuaciones para algunas de las variables en términos de las demás.

Comencemos con un ejemplo.

Figura 2.73 El hiperboloide de dos partes $z^2/4 - x^2 - y^2 = 1$. El punto $(-2, 2, 6)$ está en la parte dada por $z = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, y el punto $(1, 1, -2\sqrt{3})$ está en la parte dada por $z = -2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

EJEMPLO 9 Considere el hiperboloide $z^2/4 - x^2 - y^2 = 1$, que puede describirse como el conjunto de nivel (a la altitud 1) de la función

$$F(x, y, z) = \frac{z^2}{4} - x^2 - y^2.$$

(Véase la figura 2.73). Esta superficie *no puede* describirse como la gráfica de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, ya que valores particulares de x y de y dan origen a *dos* valores de z. En realidad, cuando se resuelve para z en términos de x y de y, se encuentra que hay dos soluciones funcionales:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{y} \quad z = -2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}. \tag{9}$$

Por otro lado, estas dos soluciones muestran que, dado cualquier punto particular (x_0, y_0, z_0) del paraboloide, es posible resolver *localmente* para z en términos de x y de y. Es decir, podemos identificar en qué parte del hiperboloide está el punto (x_0, y_0, z_0) y después usar la expresión apropiada en (9) para describirla. ◆

El ejemplo 9 nos conduce a plantear la pregunta siguiente: dada una superficie S descrita como el conjunto de nivel $\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = c\}$, ¿siempre es posible determinar al menos una parte de S como la gráfica de una función $z = f(x, y)$? El

resultado siguiente, un caso especial de lo que se conoce como **teorema de la función implícita**, proporciona hipótesis relativamente simples que sirven como punto de partida.

TEOREMA 6.5 (TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA) Sea $F: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de clase C^1, y sea $\mathbf{a}$ un punto del conjunto de nivel $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid F(\mathbf{x}) = c\}$. Si $F_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$, entonces existe una vecindad U de $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ en $\mathbf{R}^{n-1}$, una vecindad V de a_n en $\mathbf{R}$, y una función $f: U \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \to V$ de clase C^1 tal que si $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in U$ y $x_n \in V$ satisface a $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ (es decir, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$), entonces $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

La importancia del teorema 6.5 radica en que nos dice que *cerca* de un punto $\mathbf{a} \in S$ tal que $\partial F/\partial x_n \neq 0$, el conjunto de nivel S dado por la ecuación $F(x_1, \ldots, x_n) = c$ también es *localmente* la gráfica de una función $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$. En otras palabras, es posible resolver localmente para x_n en términos de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, de manera que S es, al menos localmente, una hipersuperficie diferenciable en $\mathbf{R}^n$.

EJEMPLO 10 Volvamos al ejemplo 9 y recordemos que el hiperboloide es el conjunto de nivel (a la altitud 1) de la función $F(x, y, z) = z^2/4 - x^2 - y^2$. Tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{2}.$$

Advierta que para cualquier punto (x_0, y_0, z_0) en el hiperboloide, se tiene $|z_0| \geq 2$. Entonces $\partial F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Por consiguiente, el teorema 6.5 implica que es posible describir una parte del hiperboloide cerca de cualquier punto como la gráfica de una función de dos variables. Esto es consistente con lo que observamos en el ejemplo 9. ◆

Por supuesto, no hay nada especial en resolver para la variable particular x_n en términos de $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Suponga que $\mathbf{a}$ es un punto en el conjunto de nivel S determinado por la ecuación $F(\mathbf{x}) = c$ y suponga que $\nabla F(\mathbf{a}) \neq 0$. Entonces, $F_{x_i}(\mathbf{a}) \neq 0$ para alguna i. De ahí que se pueda resolver localmente cerca de $\mathbf{a}$ para x_i como una función diferenciable de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Por lo tanto, S es localmente una hipersuperficie diferenciable en $\mathbf{R}^n$.

EJEMPLO 11 Sea que S denote al elipsoide $x^2/4 + y^2/36 + z^2/9 = 1$. Entonces, S es el conjunto de nivel (a la altitud 1) de la función

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9}.$$

En el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})$ se tiene

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})} = \left.\frac{2z}{9}\right|_{(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \neq 0.$$

Así, S puede considerarse cerca de $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})$ como la gráfica de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, es decir, $z = 3\sqrt{1 - x^2/4 - y^2/36}$. Sin embargo, en el punto $(0, -6, 0)$ observamos que $\partial F/\partial z$ desaparece. Por otro lado,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0, -6, 0)} = \left.\frac{2y}{36}\right|_{(0, -6, 0)} = -\frac{1}{3} \neq 0.$$

En consecuencia, cerca de $(0, -6, 0)$, el elipsoide puede ser descrito resolviendo para y como una función de x y z, es decir, $y = -6\sqrt{1 - x^2/4 - z^2/9}$. ◆

EJEMPLO 12 Considere el conjunto de puntos S definido por la ecuación $x^2z^2 - y = 0$. Entonces, S es el conjunto de nivel a la altitud 0 de la función $F(x, y, z) = x^2z^2 - y$. Observe que

$$\nabla F(x, y, z) = (2xz^2, -1, 2x^2z).$$

Como $\partial F/\partial y$ nunca desaparece, vemos que siempre es posible resolver para y como una función de x y de z (por supuesto, esto es obvio a partir de la ecuación). Por otro lado, cerca de puntos donde x y z no son cero, tanto $\partial F/\partial x$ como $\partial F/\partial z$ no son igual a cero. De ahí que en este caso podamos resolver tanto para x como para z. Por ejemplo, cerca de $(1, 1, -1)$ tenemos

$$x = \sqrt{\frac{y}{z^2}} \quad \text{y} \quad z = -\sqrt{\frac{y}{x^2}}. \qquad \blacklozenge$$

Como acabamos de mencionar, el teorema 6.5 en realidad es un caso especial de un resultado más general. En el teorema 6.5 estamos tratando de resolver la ecuación

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

para x_n en términos de $x_1, \ldots, x_{n-1}$. En el caso general tenemos un *sistema de m* ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_1 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_2 \\ \quad \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_m \end{cases}, \tag{10}$$

y queremos resolver el sistema para $y_1, \ldots, y_m$ en términos de $x_1, \ldots, x_n$. Utilizando notación vectorial también podemos escribir este sistema como $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ y $F_1, \ldots, F_m$ son las funciones componente de $\mathbf{F}$. Con esta notación, el resultado general es el siguiente:

TEOREMA 6.6 (TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA, CASO GENERAL) Suponga que $\mathbf{F}: A \to \mathbf{R}^m$ es de clase C^1, donde A es abierto en $\mathbf{R}^{n+m}$. Sea $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in A$ que satisface a $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$. Si el determinante

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{bmatrix} \neq 0,$$

entonces hay una vecindad U de $\mathbf{a}$ en $\mathbf{R}^n$ y una función única $\mathbf{f}: U \to \mathbf{R}^m$ de clase C^1 tal que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$ para todo $\mathbf{x} \in U$. En otras palabras, podemos resolver localmente para $\mathbf{y}$ como una función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

EJEMPLO 13 Demostraremos que, cerca del punto $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (-1, 1, 1, 2, 1)$, podemos resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1y_2 + x_2y_1 = 1 \\ x_1^2x_3y_1 + x_2y_2^3 = 3 \end{cases} \tag{11}$$

para y_1 y y_2 en términos de x_1, x_2, x_3.

Aplicamos el teorema de la función implícita general (teorema 6.6) al sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1y_2 + x_2y_1 = 1 \\ F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1^2x_3y_1 + x_2y_2^3 = 3 \end{cases}.$$

El determinante relevante es

$$\Delta(-1, 1, 1, 2, 1) = \det \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{array} \right] \Bigg|_{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (-1, 1, 1, 2, 1)}$$

$$= \det \left[\begin{array}{cc} x_2 & x_1 \\ x_1^2x_3 & 3x_2y_2^2 \end{array} \right] \Bigg|_{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (-1, 1, 1, 2, 1)}$$

$$= \det \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{array} \right] = 4 \neq 0.$$

De ahí que podamos resolver localmente, al menos en principio.

También podemos usar las ecuaciones en (11) para determinar, por ejemplo, $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(-1, 1, 1)$, donde tratamos a x_1, x_2, x_3 como variables independientes, y a y_1 y a y_2 como funciones de ellas.

Al diferenciar las ecuaciones en (11) implícitamente con respecto de x_1, y utilizando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{cases} y_2 + x_1\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0 \\ 2x_1x_3y_1 + x_1^2x_3\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + 3x_2y_2^2\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}.$$

Ahora, sea $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (-1, 1, 1, 2, 1)$, así que el sistema se convierte en

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(-1, 1, 1) - \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(-1, 1, 1) = -1 \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(-1, 1, 1) + 3\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(-1, 1, 1) = 4 \end{cases}.$$

Este último sistema se resuelve con facilidad y se encuentra que $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(-1, 1, 1) = \dfrac{5}{4}$. ◆

Ahora, supongamos que tenemos un sistema de n ecuaciones que definen las variables $y_1, \ldots, y_n$ en términos de las variables $x_1, \ldots, x_n$, es decir,

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}. \tag{12}$$

Advierta que el sistema dado en (12) puede escribirse en forma vectorial como $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. La pregunta es, ¿cuándo es posible *invertir* este sistema? En otras palabras,

¿cuándo podemos resolver para $x_1, \ldots, x_n$ en términos de $y_1, \ldots, y_n$?, o, en forma equivalente, ¿cuándo podemos encontrar una función $\mathbf{g}$ de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$?

La solución es aplicar el teorema 6.6 al sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases},$$

donde $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n) - y_i$ (en forma vectorial estamos haciendo $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$). Entonces, el poder resolver para $\mathbf{x}$ en términos de $\mathbf{y}$ cerca de $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ depende de que el determinante

$$\det D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

no sea cero.

Este determinante también se denota con

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$$

y se llama **jacobiano** de $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Un enunciado más preciso y completo que el que estamos observando es el siguiente:

TEOREMA 6.7 (TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA) Suponga que $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ es de clase C^1 sobre un conjunto abierto $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Si

$$\det D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \neq 0,$$

entonces hay un conjunto abierto $U \subseteq \mathbf{R}^n$ que contiene a $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{f}$ es uno a uno sobre U, el conjunto $V = \mathbf{f}(U)$ también es abierto, y hay una única función inversa determinada $\mathbf{g}$: $V \to U$ a $\mathbf{f}$, que también es de clase C^1. En otras palabras, el sistema de ecuaciones $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se puede resolver en forma única como $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{y}$ cerca de $\mathbf{b}$.

EJEMPLO 14 Considere las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}.$$

Estas ecuaciones definen x y y como funciones de r y θ. Usamos el teorema 6.7 para ver a cuáles puntos del plano hay que acercarse para poder invertir dichas ecuaciones, es decir, para resolver r y θ en términos de x y de y.

Para usar el teorema 6.7 obtenemos el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Así, vemos que, fuera del origen ($r = 0$), podemos resolver (localmente) para r y θ únicamente en términos de x y de y. Sin embargo, en el origen no se aplica el teore-

ma de la función inversa. Geométricamente esto tiene perfecto sentido, ya que en el origen el ángulo θ de las coordenadas polares puede tomar cualquier valor. ◆

2.6 Ejercicios

1. Suponga que $f(x, y, z)$ es una función diferenciable de tres variables.

a) Explique a cuál cantidad representa $\nabla f(x, y, z) \cdot (-\mathbf{k})$.

b) ¿Cómo se relaciona $\nabla f(x, y, z) \cdot (-\mathbf{k})$ con $\partial f/\partial z$?

En los ejercicios 2 a 8 calcule la derivada direccional de la función dada f en el punto **a** *en la dirección paralela al vector* **u**.

2. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x, \mathbf{a} = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \mathbf{u} = \frac{3\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{10}}$

3. $f(x, y) = x^2 - 2x^3y + 2y^3, \mathbf{a} = (2, -1), \mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{\sqrt{5}}$

4. $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)}, \mathbf{a} = (3, -2), \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

5. $f(x, y) = e^x - x^2y, \mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

6. $f(x, y, z) = xyz, \mathbf{a} = (-1, 0, 2), \mathbf{u} = \frac{2\mathbf{k} - \mathbf{i}}{\sqrt{5}}$

7. $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}, \mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

8. $f(x, y, z) = \frac{xe^y}{3z^2 + 1}, \quad \mathbf{a} = (2, -1, 0), \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

9. Para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

a) calcule $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ (el lector necesitará usar la definición de derivada parcial).

b) use la definición 6.1 para determinar para cuáles vectores unitarios $\mathbf{v} = v\mathbf{i} + w\mathbf{j}$ existe la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$.

c) use una computadora para graficar la superficie $z = f(x, y)$.

10. Para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

a) calcule $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$. (Necesitará usar la definición de derivada parcial).

b) utilizando la definición 6.1, determine para cuáles vectores unitarios $\mathbf{v} = v\mathbf{i} + w\mathbf{j}$ existe la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$.

c) use una computadora para graficar la superficie $z = f(x, y)$.

11. La superficie del lago Erehwon puede representarse como una región D en el plano xy, de modo que su profundidad (en metros) en el punto (x, y) es dada por la expresión $400 - 3x^2y^2$. Si su profesora de cálculo está en el agua en el punto $(1, -2)$, ¿en qué dirección debe nadar

a) para que la profundidad aumente con la máxima rapidez (es decir, donde sea más probable que se ahogue)?

b) para que la profundidad permanezca constante?

12. Una catarina (insecto que es muy sensible a la temperatura) camina sobre una hoja de papel para graficar. Está en el punto $(3, 7)$ y nota que si avanza en la dirección $\mathbf{i}$, la temperatura *aumenta* a razón de 3 grados/cm. Si avanza en la dirección $\mathbf{j}$, su temperatura *disminuye* a razón de 2 grados/cm. ¿En qué dirección debe avanzar si

a) quiere calentarse lo más rápido posible?

b) busca enfriarse con la máxima rapidez?

c) desea que su temperatura *no* cambie?

13. El lector está en el monte Gradiente, a 5000 pies sobre el nivel del mar, equipado con el mapa topográfico que se muestra en la figura 2.74. De pronto se desata una tormenta y necesita volver a casa de inmediato. Trace la trayectoria que tomaría hacia abajo, y que lo llevaría al nivel del mar con la máxima rapidez, si comienza a caminar hacia el este desde la cima de la montaña.

14. Está lloviendo y el agua escurre por un domo elipsoidal cuya ecuación es $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$, donde $z \geq 0$. Dado que la gravedad hará que el líquido se mueva hacia abajo muy rápido, describa las trayectorias de las curvas que seguirá. (Sugerencia: necesitará resolver una ecuación diferencial sencilla).

15. Igor, el gusano medidor, se arrastra por un papel para graficar en un campo magnético. La intensidad del campo en el punto (x, y) es dada por $M(x, y) = 3x^2 + y^2 + 5000$. Si Igor se encuentra en el punto $(8, 6)$, describa la curva a lo largo de la cual debe viajar si desea que la intensidad del campo magnético se reduzca lo más rápido posible.

En los ejercicios 16 a 19 encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por la ecuación en el punto que se indique (x_0, y_0, z_0).

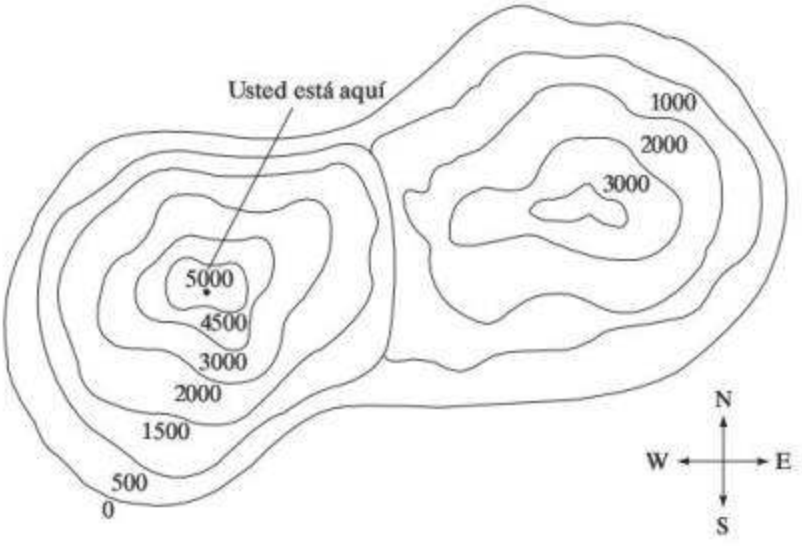


Figura 2.74 Mapa topográfico del monte Gradiente para el ejercicio 13.

16. $x^3 + y^3 + z^3 = 7, (x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 2)$

17. $ze^y \cos x = 1, (x_0, y_0, z_0) = (\pi, 0, -1)$

18. $2xz + yz - x^2y + 10 = 0, (x_0, y_0, z_0) = (1, -5, 5)$

19. $2xy^2 = 2z^2 - xyz, (x_0, y_0, z_0) = (2, -3, 3)$

20. Calcule el plano tangente a la superficie cuya ecuación es $x^2 - 2y^2 + 5xz = 7$ en el punto $(-1, 0, -\frac{6}{5})$ de dos maneras:

a) resolviendo para z en términos de x y de y, y utilizando la fórmula (4) de la sección 2.3.

b) utilizando la fórmula (6) de esta sección.

21. Calcule el plano tangente a la superficie x sen $y + xz^2 = 2e^{yz}$ en el punto $(2, \frac{\pi}{2}, 0)$ de dos maneras:

a) resolviendo para x en términos de y y de z y utilizando una variante de la fórmula (4) de la sección 2.3.

b) utilizando la fórmula (6) de esta sección.

22. Encuentre el punto sobre la superficie $x^3 - 2y^2 + z^2 = 27$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta dada en forma paramétrica cuando $x = 3t - 5, y = 2t + 7, z = 1 - \sqrt{2}t$.

23. Determine los puntos sobre el hiperboloide $9x^2 - 45y^2 + 5z^2 = 45$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 5y - 2z = 7$.

24. Demuestre que las superficies $z = 7x^2 - 12x - 5y^2$ y $xyz^2 = 2$ se intersecan en forma ortogonal en el punto $(2, 1, -1)$.

25. Suponga que dos superficies son dadas por las ecuaciones

$$F(x, y, z) = c \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = k.$$

Además, suponga que dichas superficies se intersecan en el punto (x_0, y_0, z_0). Demuestre que las superficies son tangentes en (x_0, y_0, z_0) si y solo si

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0}.$$

26. Sea S que denota al cono $x^2 + 4y^2 = z^2$.

a) Encuentre una ecuación para el plano tangente a S en el punto $(3, -2, -5)$.

b) ¿Qué pasa si se trata de encontrar una ecuación para un plano tangente a S en el origen? Analice cómo se relacionan sus descubrimientos con el aspecto de S.

27. Considere la superficie S definida por la ecuación $x^3 - x^2y^2 + z^2 = 0$.

a) Encuentre una ecuación para el plano tangente a S en el punto $(2, -3/2, 1)$.

b) ¿Tiene S un plano tangente en el origen? Justifique su respuesta.

Si una curva está dada por una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, entonces la recta tangente a la curva en un punto dado (x_0, y_0) sobre ella puede encontrarse de dos maneras: a) utilizando la técnica de la diferenciación del cálculo de una variable, y b) empleando una fórmula análoga a la (6). En los ejercicios 28 a 30 use ambos métodos para determinar las rectas tangentes a las curvas dadas en los puntos indicados.

28. $x^2 + y^2 = 4, (x_0, y_0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

29. $y^3 = x^2 + x^3, (x_0, y_0) = (1, \sqrt[3]{2})$

30. $x^5 + 2xy + y^3 = 16, (x_0, y_0) = (2, -2)$

Sea C una curva en $\mathbf{R}^2$ dada por una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$. La ***recta normal*** *a C en el punto (x_0, y_0) sobre la recta es la que pasa por (x_0, y_0) y es perpendicular a C, lo que significa que es perpendicular a la recta tangente a C en (x_0, y_0)). En los ejercicios 31 a 33 encuentre las rectas normales a las curvas dadas en los puntos indicados. Dé tanto un conjunto de ecuaciones paramétricas para las rectas como una ecuación de la forma $Ax + By = C$. (Sugerencia: use gradientes).*

31. $x^2 - y^2 = 9, (x_0, y_0) = (5, -4)$

32. $x^2 - x^3 = y^2, (x_0, y_0) = (-1, \sqrt{2})$

33. $x^3 - 2xy + y^5 = 11, (x_0, y_0) = (2, -1)$

34. Este problema se refiere a la superficie definida por la ecuación

$$x^3z + x^2y^2 + \operatorname{sen}(yz) = -3.$$

a) Encuentre una ecuación para el plano tangente a esta superficie en el punto $(-1, 0, 3)$.

b) La **recta normal** a la superficie S en $\mathbf{R}^3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) sobre la cual está la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es perpendicular a S. Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta normal a la superficie dada arriba en el punto $(-1, 0, 3)$.

35. Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta normal a la superficie definida por la ecuación $e^{xy} + e^{xz} - 2e^{yz} = 0$ en el punto $(-1, -1, -1)$ (véase el ejercicio 34).

36. Proporcione una fórmula general para las ecuaciones paramétricas de la recta normal a una superficie dada por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto sobre la superficie (x_0, y_0, z_0) (véase el ejercicio 34).

37. Para generalizar las técnicas de esta sección, encuentre una ecuación para el hiperplano tangente a la hipersuperficie $\operatorname{sen} x_1 + \cos x_2 + \operatorname{sen} x_3 + \cos x_4 + \operatorname{sen} x_5 = -1$ en el punto $(\pi, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 2\pi) \in \mathbf{R}^5$.

38. Determine una ecuación para el hiperplano tangente al elipsoide con $(n - 1)$ dimensiones

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \cdots + nx_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

en el punto $(-1, -1, \ldots, -1) \in \mathbf{R}^n$.

39. Encuentre una ecuación para el hiperplano tangente a la esfera con $(n - 1)$ dimensiones $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ en $\mathbf{R}^n$ en el punto $(1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}, -1/\sqrt{n})$.

Los ejercicios 40 a 49 se refieren a los teoremas de funciones implícitas y al teorema de la función inversa (teoremas 6.5, 6.6 y 6.7).

40. Sea S la superficie descrita por $z^2y^3 + x^2y = 2$.

a) Utilice el teorema de la función implícita para determinar cerca de cuáles puntos es posible describir a S localmente como la gráfica de una función C^1, $z = f(x, y)$.

b) ¿Cerca de cuáles puntos puede describirse a S (localmente) como la gráfica de una función $x = g(y, z)$?

c) ¿Cerca de cuáles puntos es posible describir a S (localmente) como la gráfica de una función $y = h(x, z)$?

41. Sea S el conjunto de puntos descritos por la ecuación $\operatorname{sen} xy + e^{xz} + x^3y = 1$.

a) ¿Cerca de cuáles puntos se podría describir a S como la gráfica de una función C^1 $z = f(x, y)$? ¿Cuál es $f(x, y)$ en este caso?

b) Describa el conjunto de puntos "malos" de S, es decir, aquellos puntos $(x_0, y_0, z_0) \in S$ donde *no es posible* describir a S como la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

c) Utilice una computadora para ayudar a *completar* el panorama de S.

42. Sea $F(x, y) = c$, defina una curva C en $\mathbf{R}^2$. Suponga que (x_0, y_0) es un punto de C tal que $\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Demuestre que la curva puede representarse cerca de (x_0, y_0) como la gráfica de una función $y = f(x)$ o como la de una función $x = g(y)$.

43. Considere $F(x, y) = x^2 - y^3$ y la curva C definida por la ecuación $F(x, y) = 0$.

a) Demuestre que $(0, 0)$ está sobre C y que $F_y(0, 0) = 0$.

b) ¿Puede describirse a C como la gráfica de una función $y = f(x)$? Grafique C.

c) Comente los resultados de los incisos anteriores a la luz del teorema de la función implícita (teorema 6.5).

44. *a*) Considere la familia de conjuntos de nivel de la función $F(x, y) = xy + 1$. Use el teorema de la función implícita para identificar cuáles conjuntos de nivel de esta familia son realmente uniones de curvas suaves en $\mathbf{R}^2$ (es decir, son localmente gráficas de funciones C^1 de una sola variable).

b) Ahora considere la familia de conjuntos de nivel de $F(x, y, z) = xyz + 1$. ¿Cuáles conjuntos de nivel de esta familia son uniones de superficies suaves en $\mathbf{R}^3$?

45. Suponga que $F(u, v)$ es de clase C^1 y es tal que $F(-2, 1) = 0$ y $F_u(-2, 1) = 7$, $F_v(-2, 1) = 5$. Sea $G(x, y, z) = F(x^3 - 2y^2 + z^5, xy - x^2z + 3)$.

a) Compruebe que $G(-1, 1, 1) = 0$.

b) Demuestre que la ecuación $G(x, y, z) = 0$ se puede resolver para z en términos de x y de y (es decir, cuando $z = g(x, y)$ para (x, y) cerca de $(-1, 1)$, de modo que $g(-1, 1) = 1$).

46. ¿Puede el lector resolver

$$\begin{cases} x_2y_2 - x_1 \cos y_1 = 5 \\ x_2 \operatorname{sen} y_1 + x_1y_2 = 2 \end{cases}$$

para y_1, y_2 como funciones de x_1, x_2 cerca del punto $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (2, 3, \pi, 1)$? ¿Qué ocurre con la cercanía del punto $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 2, \pi/2, 5/2)$?

47. Considere el sistema

$$\begin{cases} x_1 y_2^2 - 2x_2 y_3 = 1 \\ x_1 y_1^5 + x_2 y_2 - 4y_2 y_3 = -9 \\ x_2 y_1 + 3x_1 y_3^2 = 12 \end{cases}.$$

a) Demuestre que cerca del punto $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (1, 0, -1, 1, 2)$ es posible resolver para y_1, y_2, y_3 en términos de x_1 y x_2.

b) Del resultado del inciso anterior podemos considerar que y_1, y_2, y_3 son funciones de x_1 y x_2. Use la diferenciación implícita y la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(1, 0)$, $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(1, 0)$ y $\dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}(1, 0)$.

48. Considere la ecuación que relaciona coordenadas cilíndricas y cartesianas en $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta, \\ z = z \end{cases}$$

a) ¿Cerca de cuáles puntos de $\mathbf{R}^3$ es posible resolver para r, θ y z en términos de las coordenadas cartesianas?

b) Explique la geometría tras la respuesta que dio en el inciso anterior.

49. Recuerde que las ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas con las cartesianas en $\mathbf{R}^3$ son

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta, \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

a) ¿Cerca de cuáles puntos de $\mathbf{R}^3$ es posible resolver para ρ, φ y θ en términos de x, y y z?

b) Describa la geometría tras la respuesta dada en el inciso anterior.

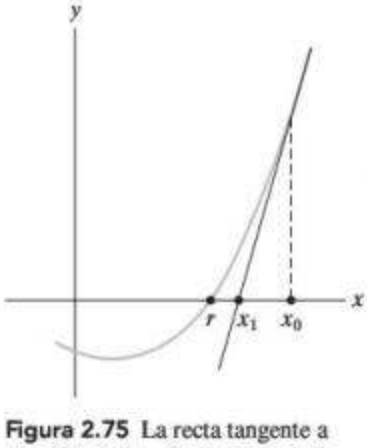


Figura 2.75 La recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ cruza el eje x en $x = x_1$.

2.7 Método de Newton (opcional)

Cuando el lector estudió el cálculo de una variable tal vez aprendió el método que se conoce como **método de Newton** (o **método de Newton-Raphson**) para aproximar la solución a una ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde $f: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función diferenciable. A continuación se hace un recordatorio de cómo funciona el método.

Deseamos encontrar un número r tal que $f(r) = 0$. Para aproximar r hacemos una elección inicial de x_0 para r, y, en general, esperamos encontrar que $f(x_0) \neq 0$. De manera que a continuación vemos la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ (véase la figura 2.75). Como la recta tangente aproxima la gráfica de f cerca de $(x_0, f(x_0))$ podemos encontrar en dónde la recta tangente cruza el eje x. El punto de cruce $(x_1, 0)$ por lo general estará más cerca de $(r, 0)$ que $(x_0, 0)$, así que tomamos x_1 como una aproximación revisada y mejorada para la raíz de $f(x) = 0$.

Para encontrar x_1 comenzamos con la ecuación de la recta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

después hacemos $y = 0$ para encontrar en dónde esta recta cruza el eje x. Por consiguiente, resolvemos la ecuación

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

para x_1 con el fin de encontrar

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Una vez que tenemos x_1 podemos empezar el proceso nuevamente usando x_1 en lugar de x_0 y producir lo que esperamos sea una mejor aproximación a x_2 por medio de la fórmula

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En realidad debemos iterar este proceso y definir x_k de manera recursiva con

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

y así producir una secuencia de números $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$

No siempre es el caso que la secuencia $\{x_k\}$ converja. Sin embargo, cuando lo hace debe converger a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Para ver esto, sea $L = \lim_{k\to\infty} x_k$. Después también tenemos $\lim_{k\to\infty} x_{k-1} = L$. Tomando límites en la fórmula (1) encontramos

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)},$$

lo que de inmediato implica que $f(L) = 0$. Entonces, L es una raíz de la ecuación.

Ahora que tenemos cierta comprensión de las derivadas en el caso de variables múltiples, pasaremos a la generalización del método de Newton con el fin de resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Escribimos dicho sistema como sigue:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Consideramos el mapa $\mathbf{f}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definido como $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$ (es decir, $\mathbf{f}$ es el mapa cuyas funciones componente provienen de las ecuaciones en (2). El dominio X de $\mathbf{f}$ puede tomarse como el conjunto en donde están definidas todas las funciones componente). Entonces, resolver el sistema (2) significa encontrar un vector $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Para aproximar dicho vector $\mathbf{r}$ hacemos, como en el caso de una variable, una elección inicial $\mathbf{x}_0$ para lo que podría ser el valor de $\mathbf{r}$. Si $\mathbf{f}$ es diferenciable, entonces sabemos que $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es aproximada mediante la ecuación

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

(En este punto pensamos en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ y los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_0$ como matrices de $n \times 1$). Después igualamos $\mathbf{y}$ a $\mathbf{0}$ para encontrar en dónde esta función de aproximación es cero. Por consiguiente, resolvemos la ecuación matricial

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \tag{3}$$

para $\mathbf{x}_1$ a fin de dar una aproximación revisada a la raíz $\mathbf{r}$. Es evidente que (3) equivale a

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \tag{4}$$

Para continuar la argumentación, suponga que $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ es una matriz de $n \times n$ invertible, lo que significa que hay una segunda matriz $[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1}$ de $n \times n$ con la propiedad de que $[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1} = I_n$, que es la matriz identidad de $n \times n$ (véase el ejercicio 20 y los ejercicios 30 a 38 en la sección 1.6). Entonces podemos multiplicar la ecuación (4) en el lado izquierdo por $[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1}$ para obtener

$$I_n(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Como $I_nA = A$ para cualquier matriz A de orden $n \times k$, esta última ecuación implica que

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

Igual que hicimos para el caso de una variable con el método de Newton, debemos iterar la fórmula (5) para definir de manera recursiva una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ de *vectores* por medio de

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} - [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \tag{6}$$

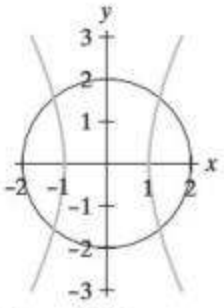


Figura 2.76
Determinación de los puntos de intersección del círculo $x^2 + y^2 = 4$ con la hipérbola $4x^2 - y^2 = 4$ del ejemplo 1.

Advierta la similitud entre las fórmulas (1) y (6). Además, igual que en el caso de la fórmula (1), aunque la secuencia $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ podría no converger, si lo hace debe llegar a una raíz de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (véase el ejercicio 4).

EJEMPLO 1 Considere el problema de encontrar los puntos de intersección del círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y la hipérbola $4x^2 - y^2 = 4$ (véase la figura 2.76). Buscamos analíticamente soluciones simultáneas para las dos ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad 4x^2 - y^2 = 4,$$

o, de manera equivalente, soluciones al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 4x^2 - y^2 - 4 = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Para usar el método de Newton se define una función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ por medio de $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2 - 4, 4x^2 - y^2 - 4)$ y tratamos de aproximar soluciones para la ecuación vectorial $\mathbf{f}(x, y) = (0,0)$. Comenzamos con cualquier suposición inicial, digamos

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y luego producimos aproximaciones sucesivas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$, a una solución utilizando la fórmula (6). En particular, tenemos

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 8x & -2y \end{bmatrix}.$$

Observe que $\det D\mathbf{f}(x, y) = -20xy$. Invitamos al lector a verificar (véase el ejercicio 36 de la sección 1.6) que

$$[D\mathbf{f}(x, y)]^{-1} = \frac{1}{-20xy}\begin{bmatrix} -2y & -2y \\ -8x & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{10x} & \dfrac{1}{10x} \\ \dfrac{2}{5y} & -\dfrac{1}{10y} \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} - [D\mathbf{f}(x_{k-1}, y_{k-1})]^{-1}\mathbf{f}(x_{k-1}, y_{k-1})$$

$$= \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{1}{10x_{k-1}} & \dfrac{1}{10x_{k-1}} \\ \dfrac{2}{5y_{k-1}} & -\dfrac{1}{10y_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2 - 4 \\ 4x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 - 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{5x_{k-1}^2 - 8}{10x_{k-1}} \\ \dfrac{5y_{k-1}^2 - 12}{10y_{k-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k-1} - \dfrac{5x_{k-1}^2 - 8}{10x_{k-1}} \\ y_{k-1} - \dfrac{5y_{k-1}^2 - 12}{10y_{k-1}} \end{bmatrix}.$$

Si comenzamos con $x_0 = y_0 = 1$, tenemos:

$$x_1 = 1 - \frac{5 \cdot 1^2 - 8}{10 \cdot 1} = 1.3 \qquad y_1 = 1 - \frac{5 \cdot 1^2 - 12}{10 \cdot 1} = 1.7$$

$$x_2 = 1.3 - \frac{5(1.3)^2 - 8}{10(1.3)} = 1.265385 \qquad y_2 = 1.7 - \frac{5(1.7)^2 - 12}{10(1.7)} = 1.555882, \quad \text{etc.}$$

También es fácil introducir los detalles del cálculo en una calculadora o computadora. Al hacerlo se obtienen los resultados siguientes:

k	x_k	y_k
0	1	1
1	1.3	1.7
2	1.26538462	1.55588235
3	1.26491115	1.54920772
4	1.26491106	1.54919334
5	1.26491106	1.54919334

Así, parece que con una exactitud de ocho cifras decimales, un punto de intersección de la curva es (1.26491106, 1.54919334).

En este ejemplo particular no es difícil encontrar soluciones para (7) con exactitud. Agregamos las dos ecuaciones en (7) para obtener

$$5x^2 - 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \tfrac{8}{5}.$$

Entonces, $x = \pm\sqrt{8/5}$. Si sustituimos estos valores para x en la primera ecuación de (7), obtenemos:

$$\tfrac{8}{5} + y^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \tfrac{12}{5}.$$

En consecuencia, $y = \pm\sqrt{12/5}$. Por lo tanto, los cuatro puntos de intersección son

$$\left(\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{12}{5}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{12}{5}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}, -\sqrt{\frac{12}{5}}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{8}{5}}, -\sqrt{\frac{12}{5}}\right).$$

Como $\sqrt{8/5} \approx 1.264911064$ y $\sqrt{12/5} \approx 1.54919334$, vemos que el método de Newton produce rápidamente una solución aproximada muy exacta. ◆

EJEMPLO 2 Utilicemos el método de Newton con el fin de encontrar soluciones para el sistema

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 2x - y + 13 = 0 \\ x^3 + x^2 - 14x - y - 19 = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Igual que en el ejemplo anterior, definimos $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mediante $\mathbf{f}(x, y) = (x^3 - 5x^2 + 2x - y + 13, x^3 + x^2 - 14x - y - 19)$. Entonces,

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 10x + 2 & -1 \\ 3x^2 + 2x - 14 & -1 \end{bmatrix},$$

de modo que $\det D\mathbf{f}(x, y) = 12x - 16$ y

$$[D\mathbf{f}(x, y)]^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{12x - 16} & \dfrac{1}{12x - 16} \\ \dfrac{-3x^2 - 2x + 14}{12x - 16} & \dfrac{-3x^2 - 10x + 2}{12x - 16} \end{bmatrix}.$$

Entonces, la fórmula (6) se convierte en

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{12x_{k-1} - 16} & \dfrac{1}{12x_{k-1} - 16} \\ \dfrac{-3x_{k-1}^2 - 2x_{k-1} + 14}{12x_{k-1} - 16} & \dfrac{-3x_{k-1}^2 - 10x_{k-1} + 2}{12x_{k-1} - 16} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{k-1}^3 - 5x_{k-1}^2 + 2x_{k-1} - y_{k-1} + 13 \\ x_{k-1}^3 + x_{k-1}^2 - 14x_{k-1} - y_{k-1} - 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{k-1} - \dfrac{6x_{k-1}^2 - 16x_{k-1} - 32}{12x_{k-1} - 16} \\ y_{k-1} - \dfrac{3x_{k-1}^4 - 16x_{k-1}^3 - 14x_{k-1}^2 + 82x_{k-1} - 8y_{k-1} + 6x_{k-1}y_{k-1} + 72}{6x_{k-1} - 8} \end{bmatrix}.$$

Esta es la fórmula que iteramos con el fin de obtener soluciones aproximadas para (8).

Si comenzamos con $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (8, 10)$, entonces las aproximaciones sucesivas $\mathbf{x}_k$ convergen con rapidez a (4, 5), como se demuestra en la tabla siguiente:

k	x_k	y_k
0	8	10
1	5.2	−98.2
2	4.1862069	−2.7412414
3	4.00607686	4.82161865
4	4.00000691	4.99981073
5	4.00000000	5.00000000
6	4.00000000	5.00000000

Si en vez de lo anterior comenzamos con $\mathbf{x}_0 = (50, 60)$, entonces la convergencia es, como el lector quizá lo previó, un poco más lenta (aunque de todos modos es bastante rápida):

k	x_k	y_k
0	50	60
1	25.739726	−57257.438
2	13.682211	−7080.8238
3	7.79569757	−846.58548
4	5.11470969	−86.660453
5	4.1643023	−1.6486813
6	4.00476785	4.86119425
7	4.00000425	4.99988349
8	4.00000000	5.00000000
9	4.00000000	5.00000000

Por otro lado, si comenzamos con $\mathbf{x}_0 = (-2, 12)$, entonces la secuencia de puntos generados converge a una solución diferente, es decir $(-4/3, -25/27)$:

k	x_k	y_k
0	−2	12
1	−1.4	1.4
2	−1.3341463	−0.903122
3	−1.3333335	−0.9259225
4	−1.3333333	−0.9259259
5	−1.3333333	−0.9259259

De hecho, cuando un sistema de ecuaciones tiene soluciones múltiples, no siempre es fácil pronosticar con el método de Newton hacia cuál solución convergerá un vector inicial dado $\mathbf{x}_0$ (en caso de que hubiera convergencia). ◆

Por último, hacemos dos comentarios. El primero es que en cualquier etapa del proceso de iteración la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ deja de ser invertible (es decir, $[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)]^{-1}$ no existe), en cuyo caso no se puede usar la fórmula (6). Una manera de salvar la situación es hacer diferentes elecciones para el vector inicial $\mathbf{x}_0$ esperando que la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ que genere no involucre matrices que no sean invertibles. El segundo comentario es que, si $\mathbf{x}_k$ es *exactamente* una raíz de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ en cualquier etapa, entonces la fórmula (6) no cambiará (véase el ejercicio 7).

2.7 Ejercicios

1. Use el método de Newton con un vector inicial $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$ para aproximar la solución real del sistema

$$\begin{cases} y^2 e^x = 3 \\ 2ye^x + 10y^4 = 0 \end{cases}.$$

2. En este problema el lector usará el método de Newton para estimar las ubicaciones de los puntos de intersección de las elipses que tienen ecuaciones $3x^2 + y^2 = 7$ y $x^2 + 4y^2 = 8$.

a) Grafique las elipses y use su gráfica para dar una estimación aproximada de (x_0, y_0) para el punto de intersección que está en el primer cuadrante.

b) Denote el punto *exacto* de intersección en el primer cuadrante con (X, Y). Sin resolver, diga un argumento de por qué los otros puntos de intersección deben ser $(-X, Y)$, $(X, -Y)$ y $(-X, -Y)$.

c) Ahora use el método de Newton con su estimación (x_0, y_0) del inciso anterior para aproximar el punto de intersección (X, Y) en el primer cuadrante.

d) Resuelva exactamente para los puntos de intersección y compare su respuesta con sus aproximaciones.

3. Este problema tiene que ver con la determinación de los puntos de intersección de las dos curvas con las ecuaciones $x^3 - 4y^3 = 1$ y $x^2 + 4y^2 = 2$.

a) Grafique las curvas y use la gráfica para hacer estimaciones aproximadas de los puntos de intersección.

b) Ahora use el método de Newton con diferentes estimaciones iniciales para aproximar los puntos de intersección.

4. Considere la secuencia de vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$, donde, para $k \geq 1$, dada una "elección" inicial $\mathbf{x}_0$ en una raíz de la ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, el vector $\mathbf{x}_k$ es definido por la fórmula (6) de recursividad del método de Newton. (Aquí se supone que $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una función diferenciable). Mediante la imitación del argumento en el caso de una variable, demuestre que si la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ converge a un vector $\mathbf{L}$ y $D\mathbf{f}(\mathbf{L})$ es una matriz invertible, entonces $\mathbf{L}$ debe satisfacer $\mathbf{f}(\mathbf{L}) = \mathbf{0}$.

5. Este problema se relaciona con la iteración del método de Newton en el ejemplo 1.

a) Use el vector inicial $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$ y calcule las aproximaciones sucesivas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, etc. ¿A cuál solución del sistema de ecuaciones (7) convergen las aproximaciones?

b) Repita el inciso anterior con $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$. Hágalo nuevamente con $\mathbf{x}_0 = (-1, -1)$.

c) Comente los resultados de los incisos *a*) y *b*) y si hubiera podido predecirlos. Describa los resultados en términos de la figura 2.76.

6. Considere la iteración del método de Newton en el ejemplo 2.

a) Use el vector inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 4, 10)$ y calcule las aproximaciones sucesivas $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, etc. ¿Hacia cuál solución del sistema de ecuaciones (8) convergen las aproximaciones?

b) Repita el inciso anterior con $\mathbf{x}_0 = (1.3, 10)$.

c) En el ejemplo 2 vimos que (4, 5) era una solución del sistema de ecuaciones dado. ¿Está (1.3, 10) más cerca de (4, 5) o del punto limitante de la secuencia que calculó en el inciso *b*)?

d) Haga comentarios sobre sus observaciones en el inciso c). ¿Qué sugieren estas acerca de la facilidad con que se puede usar el vector inicial $\mathbf{x}_0$ para predecir el valor de $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ (suponiendo que el límite existe)?

7. Suponga que en cierta etapa de la iteración del método de Newton utilizando la fórmula (6) se obtiene un vector $\mathbf{x}_k$ que es una solución exacta del sistema de ecuaciones (2). Demuestre que todos los vectores subsecuentes $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+2}, \ldots$, son iguales a $\mathbf{x}_k$. En consecuencia, si se da el caso de que obtengamos una raíz exacta por medio del método de Newton, la conservaremos.

8. Suponga que $\mathbf{f}: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es diferenciable y que escribimos $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Demuestre que la fórmula (6) implica que para $k \geq 1$,

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1}, y_{k-1})g_y(x_{k-1}, y_{k-1}) - g(x_{k-1}, y_{k-1})f_y(x_{k-1}, y_{k-1})}{f_x(x_{k-1}, y_{k-1})g_y(x_{k-1}, y_{k-1}) - f_y(x_{k-1}, y_{k-1})g_x(x_{k-1}, y_{k-1})}$$

$$y_k = y_{k-1} - \frac{g(x_{k-1}, y_{k-1})f_x(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-1}, y_{k-1})g_x(x_{k-1}, y_{k-1})}{f_x(x_{k-1}, y_{k-1})g_y(x_{k-1}, y_{k-1}) - f_y(x_{k-1}, y_{k-1})g_x(x_{k-1}, y_{k-1})}.$$

9. Como se verá en el capítulo 4, cuando se buscan máximos y mínimos de una función diferenciable $F: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es necesario encontrar los puntos donde $DF(x_1, \ldots, x_n) = [0 \cdots 0]$, llamados **puntos críticos** de F. Sea $F(x, y) = 4\,\mathrm{sen}(xy) + x^3 + y^3$. Use el método de Newton para aproximar el punto crítico que esté cerca de $(x, y) = (-1, -1)$.

10. Considere el problema de encontrar los puntos de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ y el cilindro elíptico $4y^2 + z^2 = 4$.

a) Use el método de Newton para encontrar uno de los puntos de intersección. Elija un vector inicial diferente $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y aproxime un segundo punto de intersección. (Nota: el lector tal vez quiera usar un sistema de álgebra por computadora para determinar las matrices inversas apropiadas).

b) Por medio de álgebra encuentre exactamente todos los puntos de intersección y compárelos con los resultados que obtuvo en el inciso anterior.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 2

1. Las funciones componente de una función de variable vectorial son vectores.

2. El dominio de $\mathbf{f}(x, y) = \left(x^2 + y^2 + 1, \dfrac{3}{x+y}, \dfrac{x}{y}\right)$ es $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq 0, x \neq y\}$.

3. El rango de $\mathbf{f}(x, y) = \left(x^2 + y^2 + 1, \dfrac{3}{x+y}, \dfrac{x}{y}\right)$ es $\{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid u \geq 1\}$.

4. La función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ es uno a uno.

5. La gráfica de $x = 9y^2 + z^2/4$ es un paraboloide.

6. La gráfica de $z + x^2 = y^2$ es un hiperboloide.

7. El conjunto de nivel de una función $f(x, y, z)$ es el vacío o una superficie.

8. La gráfica de cualquier función de dos variables es un conjunto de nivel de una función de tres variables.

9. El conjunto de nivel de cualquier función de tres variables es la gráfica de una función de dos variables.

10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = 1$.

11. Si $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 - x^4}{x^2 + y^2} & \text{cuando } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{cuando } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, entonces f es continua.

12. Si $f(x, y)$ tiende a un número L cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de todas las rectas que pasan por (a, b), entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.

13. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existe y es finito, entonces $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$.

14. $f_x(a, b) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$.

15. Si $f(x, y, z) = \operatorname{sen} y$, entonces $\nabla f(x, y, z) = \cos y$.

16. Si $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ es diferenciable, entonces $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una matriz de 3×4.

17. Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$.

18. Si $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$.

19. Si todas las derivadas parciales $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ de una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ existen en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{a}$.

20. Si tanto $\mathbf{f}: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ como $\mathbf{g}: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ son diferenciables en $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^4$, entonces $D(\mathbf{f} - \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{g}(\mathbf{a})$.

21. Existe una función f de clase C^2 tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 2x$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y - 3xy^2$.

22. Si las derivadas parciales de segundo orden de f existen en (a, b), entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

23. Si $w = F(x, y, z)$ y $z = g(x, y)$, donde F y g son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

24. El plano tangente a $z = x^3/(y + 1)$ en el punto $(-2, 0, -8)$ tiene la ecuación $z = 12x + 8y + 16$.

25. El plano tangente a $xy/z^2 = 1$ en $(2, 8, -4)$ tiene la ecuación $4x + y + 2z = 8$.

26. El plano tangente a la superficie $x^2 + xye^z + y^3 = 1$ en el punto $(2, -1, 0)$ es paralelo al vector $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

27. $D_{\mathbf{j}} f(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

28. $D_{-\mathbf{k}} f(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

29. Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ y $\mathbf{v}$ es un vector unitario en $\mathbf{R}^2$, entonces $0 \leq D_{\mathbf{v}} f\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

30. Si $\mathbf{v}$ es un vector unitario en $\mathbf{R}^3$ y $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x - \cos y + \operatorname{sen} z$, entonces

$$-\sqrt{3} \leq D_{\mathbf{v}} f(x, y, z) \leq \sqrt{3}.$$

Ejercicios varios para el capítulo 2

1. Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times \mathbf{x}$.

a) Escriba las funciones componente de $\mathbf{f}$.

b) Describa el dominio y rango de $\mathbf{f}$.

2. Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{proy}_{3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}} \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

a) Describa el dominio y rango de $\mathbf{f}$.

b) Escriba las funciones componente de $\mathbf{f}$.

3. Sea $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

a) Encuentre el dominio y rango de f.

b) ¿El dominio de f es abierto o cerrado? Explique su respuesta.

4. Sea $g(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

a) Determine el dominio y rango de g.

b) ¿El dominio de g es abierto o cerrado? Explique su respuesta.

5. La figura 2.77 muestra las gráficas de seis funciones $f(x, y)$ y trazos de los conjuntos de sus curvas de nivel en cierto orden. Complete la tabla siguiente relacionando cada función de la tabla con su gráfica y trazo de sus curvas de nivel.

Función $f(x, y)$	Gráfica (letra mayúscula)	Curvas de nivel (letra minúscula)
$f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$		
$f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$		
$f(x, y) = (3y^2 - 2x^2)e^{-x^2-2y^2}$		
$f(x, y) = y^3 - 3x^2y$		
$f(x, y) = x^2y^2e^{-x^2-2y^2}$		
$f(x, y) = ye^{-x^2-y^2}$		

6. Considere la función $f(x, y) = 2 + \ln(x^2 + y^2)$.

a) Dibuje algunas curvas de nivel de f. Dé al menos las de las altitudes 0, 1 y 2 (probablemente le ayudará hacer algunas más).

b) Utilice el inciso anterior u otra manera para elaborar un dibujo aproximado de la gráfica de $z = f(x, y)$.

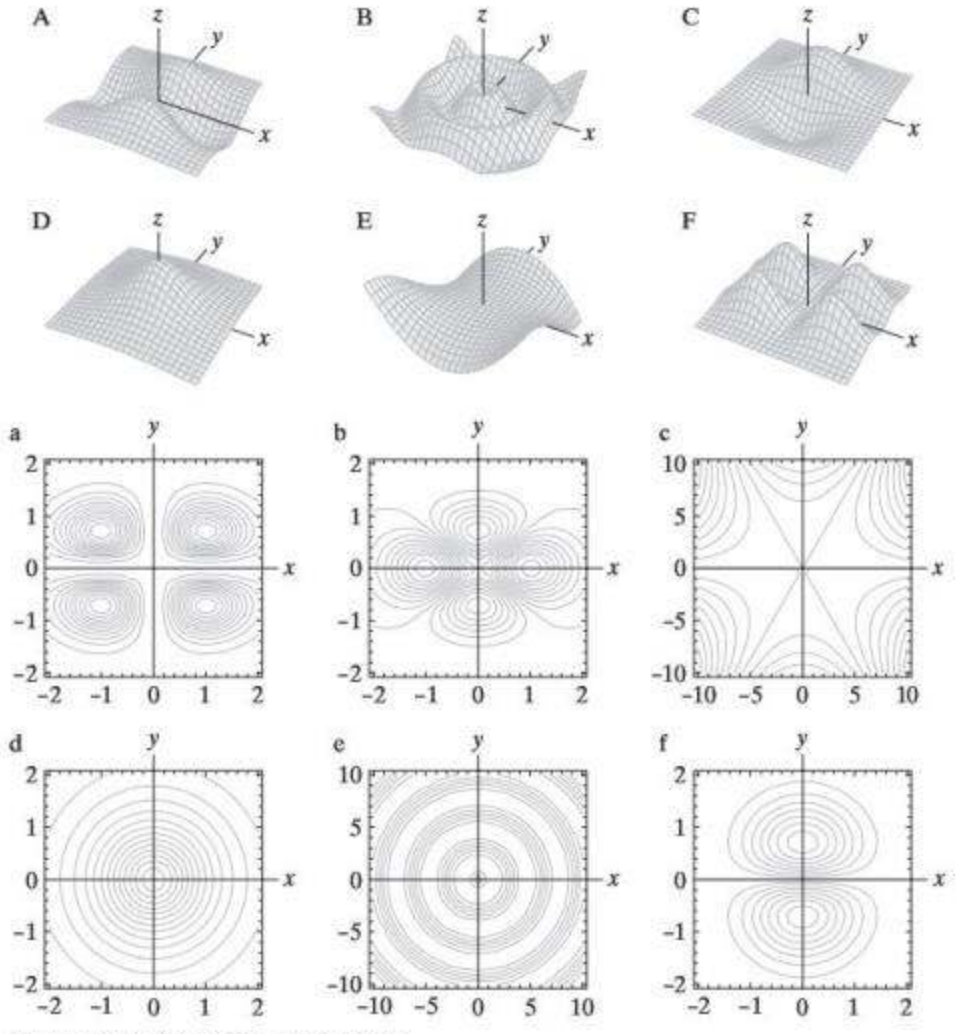


Figura 2.77 Figuras para el ejercicio 5.

7. Use coordenadas polares para evaluar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

8. Este problema se refiere a la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Use coordenadas polares para describir esta función.

b) Utilice la descripción con coordenadas polares que obtuvo en el inciso anterior para dar algunas curvas de nivel para esta función.

c) Elabore un dibujo aproximado de la gráfica de f.

d) Determine $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, si es que existe.

e) ¿Es f continua? Justifique su respuesta.

9. Sea

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(xy + x^2)}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Demuestre que la función $g(x) = F(x)$ es continua en $x = 0$. Demuestre que la función $h(y) = F(0, y)$ es continua en $y = 0$. Sin embargo, demuestre que F no es continua en $(0, 0)$ (es decir, la continuidad en cada variable tomada por separado no necesariamente implica la continuidad de la función).

10. Suponga que f: $U \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ no está definida en un punto $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ pero está definida para toda $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{a}$. En otras palabras, el dominio U de f incluye, para ciertas $r > 0$, el conjunto $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$ (el conjunto B_r es una bola abierta de radio r centrado en $\mathbf{a}$ con el punto $\mathbf{a}$ eliminado).

Entonces decimos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = +\infty$ si $f(\mathbf{x})$ crece sin límite cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. El significado más preciso de esto es que, dada cualquier $N > 0$ (sin importar qué tan grande sea), hay algún $\delta > 0$ tal que si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ (es decir, si $\mathbf{x} \in B_r$), entonces $f(\mathbf{a}) > N$.

a) Utilizando argumentos intuitivos, o la definición técnica anterior, explique por qué $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$.

b) Explique por qué

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{2}{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \infty.$$

c) Formule una definición del significado de decir que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = -\infty.$$

d) Explique por qué

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-x}{xy^4 - y^4 + x^3 - x^2} = -\infty.$$

Los ejercicios 11 a 17 involucran el concepto de la temperatura de enfriamiento por viento —véase el ejemplo 7 de la sección 2.1 y la tabla de valores de temperatura de enfriamiento por viento que aparece en la página 85.

11. *a*) Encuentre la temperatura de enfriamiento por viento cuando la temperatura del aire es de 25 °F y la velocidad del viento es de 10 mph.

b) Si la velocidad del viento es de 20 mph, ¿cuál es la temperatura del aire que ocasiona una temperatura de enfriamiento por viento de −15 °F?

12. *a*) Si la temperatura del aire es de 10 °F, estime (al entero más cercano) cuál es la velocidad del viento que daría una temperatura de enfriamiento por viento de −5 °F.

b) ¿Piensa el lector que la estimación que hizo en el inciso anterior es alta o baja? Explique su respuesta.

13. Con una velocidad del viento de 30 mph y una temperatura del aire de 35 °F, estime la velocidad de cambio de la temperatura de enfriamiento por viento, con respecto a la temperatura del aire, si la velocidad del viento se mantiene constante.

14. Con una velocidad del viento de 15 mph, y una temperatura del aire de 25°F, estime la velocidad de cambio de la temperatura de enfriamiento por viento con respecto de la velocidad del viento.

15. Las tablas de enfriamiento por viento se construyeron de manera empírica a partir de fórmulas para la pérdida de calor de una superficie expuesta. Los primeros experimentos fueron realizados por P. A. Siple y C. F. Passel,[4] y dieron como resultado la fórmula siguiente:

$$W = 91.4 + (t - 91.4)(0.474 + 0.304\sqrt{s} - 0.0203s).$$

Aquí W denota la temperatura de enfriamiento por viento (en grados Fahrenheit), t es la temperatura del aire (para $t < 91.4$ °F) y s es la velocidad del viento en millas por hora (para $s \geq 4$ mph.[5]

a) Compare sus respuestas en los ejercicios 11 y 12 con los que se calculan directamente de la fórmula de Siple que se acaba de mencionar.

b) Analice cualesquiera diferencias que observe entre sus respuestas en los ejercicios 11 y 12 y las del inciso anterior.

c) ¿Por qué es necesario tomar $t < 91.4$ °F y $s \geq 4$ mph en la fórmula de Siple? (No busque una razón de pureza matemática; piense en el modelo).

16. Las investigaciones recientes llevaron al National Weather Service de Estados Unidos a emplear una fórmula nueva para calcular los valores del enfriamiento por viento a partir del 1 de noviembre de 2001. En particular, la tabla de la página 85 se construyó con la fórmula

$$W = 35.74 + 0.621t - 35.75s^{0.16} + 0.4275ts^{0.16}.$$

Aquí, igual que en la fórmula de Siple del ejercicio 15, W denota la temperatura de enfriamiento por viento (en grados Fahrenheit), t es la temperatura del aire (para $t \leq 50$ °F) y s es la velocidad del viento en millas por hora (para $s \geq 3$ mph).[6] Compare sus respuestas en los ejercicios 13 y 14 con los calculados directamente con la fórmula mencionada del National Weather Service.

17. En este problema el lector comparará gráficamente las dos fórmulas de enfriamiento por viento dadas en los ejercicios 15 y 16.

a) Si $W_1(s, t)$ denota la función de enfriamiento por viento dada por la fórmula de Siple en el ejercicio 15, y $W_2(s, t)$ es la función de enfriamiento por viento dada por la fórmula del National Weather Service en el ejercicio 16, grafique las curvas $y = W_1(s, 40)$ y $y = W_2(s, 40)$ sobre el mismo conjunto de ejes (sea que s varíe entre 3 y 120 mph). Además, grafique otros pares de curvas, $y = W_1(s, t_0)$, $y = W_2(s, t_0)$, para otros valores de t_0. Analice lo que le dicen sus resultados acerca de las dos fórmulas para el enfriamiento por viento.

b) Ahora grafique pares de curvas, $y = W_1(s_0, t)$, $y = W_2(s_0, t)$, para varios valores constantes s_0 de la velocidad del viento. Analice sus resultados.

c) Por último, grafique las superficies $z = W_1(s, t)$ y $z = W_2(s, t)$ y comente al respecto.

---

[4] "Measurements of dry atmospheric cooling in subfreezing temperatures", *Proc. Amer. Phil. Soc.*, **89** (1945), 177-199.

[5] De Bob Rilling, Atmospheric Technology Division, National Center for Atmospheric Research (NCAR), "Calculating Windchill Values", 12 de febrero de 1996. Documento en línea en http://www.atd.ucar.edu/homes/rilling/wc_formula.html (31 de julio de 2010).

[6] NOAA, National Weather Service Office of Climate, Water, and Weather Services, "NWS Wind Chill Temperature Index", 26 de febrero de 2004, <http://www.nws.noaa.gov/om/windchill> (31 de julio de 2010).

18. Considere la esfera de radio 3 con centro en el origen. El plano tangente a la esfera en (1, 2, 2) interseca el eje x en un punto P. Encuentre las coordenadas de P.

19. Demuestre que el plano tangente a una esfera en el punto P sobre la esfera siempre es perpendicular al vector $\overrightarrow{OP}$ que va del centro de la esfera O a P. (Sugerencia: ubique a la esfera de modo que su centro esté en el origen en $\mathbf{R}^3$).

20. La superficie $z = 3x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - 4y^2$ se interseca con el plano $2x - y = 1$. La intersección resultante es una curva sobre la superficie. Obtenga un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a dicha curva en el punto $(1, 1, -\frac{23}{24})$.

21. Considere el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

a) Encuentre una ecuación del plano tangente al cono en el punto $(3, -4, 5)$.

b) Halle una ecuación del plano tangente al cono en el punto (a, b, c).

c) Demuestre que todo plano tangente al cono debe pasar por el origen.

22. Demuestre que las dos superficies

$$S_1\colon\ z = xy \qquad \text{y} \qquad S_2\colon\ z = \tfrac{3}{4}x^2 - y^2$$

se intersecan perpendicularmente en el punto $(2, 1, 2)$.

23. Considere la superficie $z = x^2 + 4y^2$.

a) Encuentre una ecuación para el plano que es tangente a la superficie en el punto $(1, -1, 5)$.

b) Ahora suponga que la superficie se interseca con el plano $x = 1$. La intersección resultante es una curva sobre la superficie (y también es una curva en el plano $x = 1$). Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta en $\mathbf{R}^3$ que es tangente a esta curva en el punto $(1, -1, 5)$. Un dibujo aproximado lo ayudará en su reflexión.

24. Un suéter de cuello de tortuga fue lavado y ahora está en la secadora, junto con el resto de prendas. En cierto momento particular, t_0, el cuello del suéter, mide 18 pulgadas de circunferencia y 3 pulgadas de longitud. Sin embargo, el suéter es 100% de algodón, por lo que en t_0 el calor de la secadora está haciendo que la circunferencia del cuello disminuya su tamaño a razón de 0.2 pulg/min, mientras que los giros y sacudidas están haciendo que la longitud del cuello aumente a razón de 0.1 pulg/min. ¿Cómo está cambiando el volumen V del espacio dentro del cuello en $t = t_0$? En ese momento, ¿V está aumentando o disminuyendo?

25. Una fábrica genera contaminación del aire diariamente de acuerdo con la fórmula

$$P(S, T) = 330S^{2/3}T^{4/5},$$

donde S denota el número de estaciones de máquinas en operación y T denota la temperatura diaria promedio. En un momento hay 75 estaciones en uso regular y la temperatura diaria promedio es de 15 °C. Si la temperatura promedio está aumentando a razón de 0.2 °C/día, y el número de estaciones en uso está disminuyendo a razón de 2 por mes, ¿a qué velocidad está cambiando la cantidad de contaminación? (Nota: suponga que hay 24 días laborales por mes).

26. Los economistas tratan de cuantificar, por medio de **funciones de utilidad**, qué tan útiles o satisfactorios le parecen a la gente los bienes o servicios. Suponga que la utilidad de una persona en particular proviene de consumir x onzas de refresco por semana y ver y minutos de televisión por semana, así:

$$u(x, y) = 1 - e^{-0.001x^2 - 0.00005y^2}.$$

Además, suponga que actualmente la gente bebe 80 onzas de refresco por semana y mira 240 minutos de televisión cada semana. Si fuera a incrementar su consumo de refresco en 5 onzas por semana, y a disminuir 15 minutos por semana el tiempo que dedica a ver televisión, ¿la utilidad que obtiene con esos cambios aumentará o disminuirá? Y, si lo hace, ¿a qué velocidad lo hará?

27. Suponga que $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho \cos\varphi$ (observe que las ecuaciones para x, y y z están en términos de ρ, φ y θ, y solo son las relaciones de conversión de coordenadas esféricas a rectangulares).

a) Use la regla de la cadena para calcular $\partial w/\partial\rho$, $\partial w/\partial\varphi$ y $\partial w/\partial\theta$. Simplifique sus respuestas tanto como sea posible.

b) Sustituya ρ, φ y θ para x, y y z en la expresión original para w. ¿Puede el lector explicar su respuesta en el inciso anterior?

28. Si $w = f\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$, demuestre que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} - y^2\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

(El lector debe suponer que f es una función diferenciable de una variable).

29. Sea $z = g(x, y)$ una función de clase C^2, y sea $x = e^r \cos\theta$, $y = e^r \operatorname{sen}\theta$.

a) Use la regla de la cadena para encontrar $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial\theta$ en términos de $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$. Utilice sus resultados para resolver para $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en términos de $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial\theta$.

b) Use el inciso anterior y la regla del producto para demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right).$$

30. *a*) Use la función $f(x, y) = x^y$ $(= e^{y \ln x})$ y la regla de la cadena para varias variables a fin de calcular $\dfrac{d}{du}(u^u)$.

b) Utilice la regla de la cadena para varias variables con el fin de calcular $\dfrac{d}{dt}((\operatorname{sen} t)^{\cos t})$.

31. Use la función $f(x, y, z) = x^{y^z}$ y la regla de la cadena con varias variables para calcular $\dfrac{d}{du}(u^{u^u})$.

32. Suponga que $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de clase C^2. El **laplaciano** de f denotado por $\nabla^2 f$ se define como

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Cuando $n = 2$ o 3, esta construcción es importante en el momento en que se estudian ciertas ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos físicos tales como las ecuaciones de calor o de onda (véase los ejercicios 28 y 29 de la sección 2.4). Ahora suponga que f depende solamente de la distancia $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ desde el origen en $\mathbf{R}^n$; es decir, suponga que $f(\mathbf{x}) = g(r)$ para cierta función g, donde $r = \|\mathbf{x}\|$. Demuestre que para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, el laplaciano es dado por

$$\nabla^2 f = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r).$$

33. *a*) Considere una función $f(x, y)$ de clase C^4. Demuestre que si el operador laplaciano $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ se aplica dos veces a f, se obtiene

$$\nabla^2(\nabla^2 f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}.$$

b) Suponga ahora que f es una función de n variables de clase C^4. Demuestre que

$$\nabla^2(\nabla^2 f) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}.$$

Las funciones que satisfacen la ecuación diferencial parcial $\nabla^2(\nabla^2 f) = 0$ se llaman **funciones biarmónicas** y surgen en el estudio teórico de la elasticidad.

34. Livinia, la mosca doméstica, está atrapada en el horno en el punto (0, 0, 1). La temperatura en los puntos del horno es dada por la función

$$T(x, y, z) = 10(xe^{-y^2} + ze^{-x^2}),$$

donde las unidades están en grados Celsius.

a) Si Livinia comienza a avanzar hacia el punto (2, 3, 1), ¿a qué velocidad (en grados/cm) encuentra que está cambiando la temperatura?

b) ¿En qué dirección debe avanzar a fin de enfriarse tan rápido como sea posible?

c) Suponga que Livinia puede volar a 3 cm/seg. Si avanza en la dirección del inciso b), ¿a qué velocidad (instantánea, en grados/seg) encontrará que está cambiando la temperatura?

35. Considere la superficie dada en coordenadas cilíndricas por la ecuación $z = r\cos 3\theta$.

a) Describa esta superficie en coordenadas cartesianas, es decir, cuando $z = f(x, y)$.

b) ¿Es f continua en el origen? (Sugerencia: piense en forma cilíndrica).

c) Encuentre expresiones para $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en puntos distintos de (0, 0). Dé valores para $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (0, 0) observando las funciones parciales de f a través de $(x, 0)$ y $(0, y)$ y de tomar límites en una variable.

d) Demuestre que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(0, 0)$ existe para toda dirección (vector unitario) $\mathbf{u}$. (Sugerencia: piense en coordenadas cilíndricas de nuevo y note que puede especificar una dirección a través del origen en el plano xy por medio de escoger un valor constante particular para θ).

e) Demuestre directamente, mediante el examen de la expresión para $\partial f/\partial y$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, y también mediante el empleo del inciso *c*), que $\partial f/\partial y$ *no* es continua en (0, 0).

f) Dibuje la gráfica de la superficie, quizá con ayuda de una computadora.

36. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

se conoce como **ecuación de onda**. Modela el movimiento de una onda $u(x, y, z, t)$ en $\mathbf{R}^3$ y fue obtenida por primera vez por Johann Bernoulli en 1727. En dicha ecuación, c es una constante positiva, las variables x, y y z representan coordenadas espaciales, y la variable t representa el tiempo.

a) Sea $u = \cos(x - t) + \operatorname{sen}(x + t) - 2e^{z+t} - (y - t)^3$. Demuestre que u satisface la ecuación de onda con $c = 1$.

b) Más en general, demuestre que si f_1, f_2, g_1, g_2, h_1 y h_2 son funciones cualesquiera de una variable, y son diferenciables dos veces, entonces

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = {} & f_1(x - t) + f_2(x + t) \\ & + g_1(y - t) + g_2(y + t) \\ & + h_1(z - t) + h_2(z + t) \end{aligned}$$

satisface la ecuación de onda con $c = 1$.

Sea X un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$. Se dice que una función $F: X \to \mathbf{R}$ es ***homogénea de grado*** *d si para toda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ y toda $t \in \mathbf{R}$ de modo que $t\mathbf{x} \in X$, se tiene*

$$F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^d F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

En los ejercicios 37 a 41, ¿cuáles de las funciones dadas son homogéneas? Para aquellas que lo sean indique el grado de homogeneidad.

37. $F(x, y) = x^3 + xy^2 - 6y^3$

38. $F(x, y, z) = x^3 y - x^2 z^2 + z^8$

39. $F(x, y, z) = zy^2 - x^3 + x^2 z$

40. $F(x, y) = e^{y/x}$

41. $F(x, y, z) = \dfrac{x^3 + x^2y - yz^2}{xyz + 7xz^2}$

42. Si $F(x, y, z)$ es un polinomio, especifique el significado de decir que F es homogéneo de grado d (es decir, explique qué es lo que debe ser verdadero acerca del polinomio si es homogéneo de grado d).

43. Suponga que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es diferenciable y homogénea de grado d. Demuestre la **fórmula de Euler**:

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = dF.$$

(Sugerencia: tome la ecuación $F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^d F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que define la homogeneidad y diferencie con respecto de t).

44. Generalice la fórmula de Euler como sigue: si F es de clase C^2 y homogénea de grado d, entonces

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = d(d-1)F.$$

¿Puede el lector hacer conjeturas del aspecto que debería de tener una fórmula análoga que involucrara derivadas parciales de k-ésimo orden?

3 Funciones de variable vectorial

3.1 Curvas paramétricas y las leyes de Kepler

3.2 Longitud de arco y geometría diferencial

3.3 Campos vectoriales. Una introducción

3.4 El gradiente, la divergencia, el rotacional y el operador nabla

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 3

Ejercicios varios para el capítulo 3

Introducción

El objetivo principal del capítulo 2 fue el estudio de las funciones de variable escalar, aunque ocasionalmente se consideraron mapeos generales de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Este capítulo se ocupa de las funciones de variable vectorial de dos tipos especiales:

1. Mapeos continuos de una variable, es decir, funciones $\mathbf{x}: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, donde I es un intervalo llamado **trayectorias** en $\mathbf{R}^n$.
2. Mapeos de (subconjuntos de) $\mathbf{R}^n$ a sí mismo (llamados **campos vectoriales**).

Más adelante, cuando se estudien integrales de línea y superficie, se requerirá comprender ambos conceptos.

3.1 Curvas paramétricas y las leyes de Kepler

Trayectorias en $\mathbf{R}^n$

Comenzaremos con una definición sencilla. Sea que I denote cualquier intervalo en $\mathbf{R}$ (por lo que I puede ser de la forma $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$).

DEFINICIÓN 1.1 Una **trayectoria en $\mathbf{R}^n$** es una función continua $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^n$. Si $I = [a, b]$ para ciertos números $a < b$, entonces los puntos $\mathbf{x}(a)$ y $\mathbf{x}(b)$ se llaman **puntos extremos** de la trayectoria $\mathbf{x}$ (se aplican definiciones similares si $I = [a, b)$, $[a, \infty)$, etcétera).

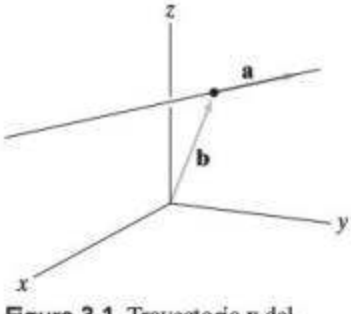


Figura 3.1 Trayectoria $\mathbf{x}$ del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores en $\mathbf{R}^3$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Entonces, la función $\mathbf{x}: (-\infty, \infty) \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{a}$$

define la trayectoria a lo largo de la recta paralela a $\mathbf{a}$ y que pasa por el punto final del vector de posición de $\mathbf{b}$, como se aprecia en la figura 3.1. (Consulte la fórmula (1) de la sección 1.2). ◆

EJEMPLO 2 La trayectoria $\mathbf{y}: [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^2$ dada por

$$\mathbf{y}(t) = (3 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$$

puede considerarse como la trayectoria de una partícula que se mueve una vez, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor de un círculo de radio 3 (véase la figura 3.2). ◆

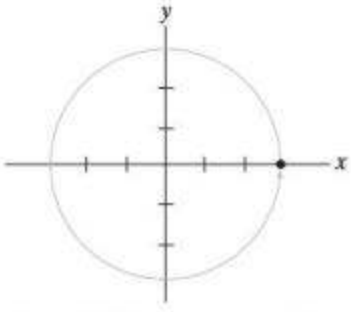


Figura 3.2 La trayectoria **y** del ejemplo 2.

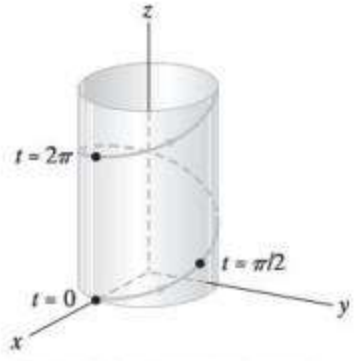


Figura 3.3 La trayectoria **z** del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 El mapeo $\mathbf{z}$: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ definido por

$$\mathbf{z}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt), \qquad a, b \text{ son constantes } (a > 0)$$

se llama **hélice circular**, se denomina así porque su proyección en el plano xy es un círculo de radio a. La hélice misma está en el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = a^2$ (véase la figura 3.3). El valor de b determina qué tan abierta gira la hélice. ◆

Hay diferencias entre una trayectoria $\mathbf{x}$ y su rango o conjunto imagen $\mathbf{x}(I)$, y este último es una curva en $\mathbf{R}^n$. Por definición, una trayectoria es una función, un objeto dinámico (al menos cuando imaginamos que la variable independiente t representa al tiempo), mientras que una curva es una figura estática en el espacio. Con este punto de vista es natural que consideremos a la derivada $D\mathbf{x}(t)$, que también se escribe $\mathbf{x}'(t)$ o $\mathbf{v}(t)$, como el vector **velocidad** de la trayectoria. Es fácil justificar dicha terminología. Puesto que

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

es una función de solo una variable,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}.$$

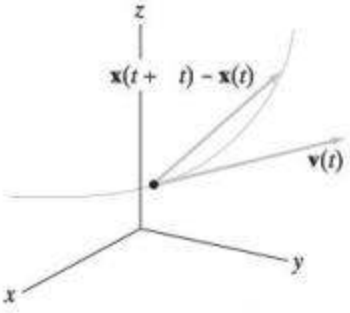


Figura 3.4 La trayectoria **x** y su vector velocidad **v**.

Entonces, $\mathbf{v}(t)$ es la tasa de cambio instantánea de la posición $\mathbf{x}(t)$ con respecto de t (tiempo), por lo que puede llamarse *velocidad* con toda propiedad. La figura 3.4 proporciona una indicación de por qué dibujamos $\mathbf{v}(t)$ como un vector tangente a la trayectoria en $\mathbf{x}(t)$. Continuando en esta línea, se introduce la terminología siguiente:

DEFINICIÓN 1.2 Sea $\mathbf{x}$: $I \rightarrow \mathbf{R}^n$ una trayectoria diferenciable. Entonces, existe el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$, y definimos la **rapidez** de $\mathbf{x}$ como la magnitud de la velocidad; es decir,

$$\text{Velocidad} = \|\mathbf{v}(t)\|.$$

Si $\mathbf{v}$ es diferenciable, entonces llamamos a $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{x}''(t)$ la **aceleración** de $\mathbf{x}$ y la denotamos con $\mathbf{a}(t)$.

EJEMPLO 4 La hélice $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ tiene

$$\mathbf{v}(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} + b\, \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = -a \cos t\, \mathbf{i} - a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}.$$

Así, el vector aceleración es paralelo al plano xy, es decir, es horizontal. La velocidad de esta trayectoria helicoidal es

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

que es constante. ◆

El vector velocidad $\mathbf{v}$ es importante por otra razón, que es la de encontrar ecuaciones de rectas tangentes a trayectorias. La **recta tangente** a una trayectoria diferenciable $\mathbf{x}$ en el punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ es la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ y es paralela a cualquier vector tangente a $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}_0$ (distinto de cero). Como $\mathbf{v}(t)$, cuando no es igual a cero, siempre es tangente a $\mathbf{x}(t)$, podemos usar la ecuación (1) de la sección 1.2 para obtener la siguiente ecuación vectorial paramétrica para la recta tangente:

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}_0. \tag{1}$$

Aquí, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ y s es cualquier número real.

En la ecuación (1) se tiene que $\mathbf{l}(0) = \mathbf{x}_0$. Para relacionar el nuevo parámetro s con el parámetro original t para la trayectoria, hacemos $s = t - t_0$ y establecemos el resultado siguiente:

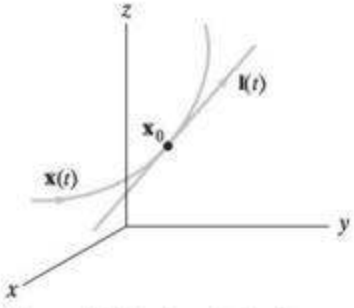


Figura 3.5 La trayectoria de la recta tangente a $\mathbf{x}(t)$ en el punto $\mathbf{x}_0$.

PROPOSICIÓN 1.3 Establezca $\mathbf{x}$ como una trayectoria diferenciable y suponga que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0) \neq \mathbf{0}$. Entonces, una ecuación vectorial paramétrica para la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ es cualquiera de las siguientes:

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}_0 \tag{2}$$

o esta:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0. \tag{3}$$

(Véase la figura 3.5).

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{x}(t) = (3t + 2, t^2 - 7, t - t^2)$, encontramos ecuaciones paramétricas para la recta tangente en $\mathbf{x}$ en $(5, -6, 0) = \mathbf{x}(1)$.

Para esta trayectoria, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = 3\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$, por lo que

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Así, según la fórmula (3),

$$\mathbf{l}(t) = (5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) + (t - 1)(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Al tomar componentes leemos las ecuaciones paramétricas para las coordenadas de la recta tangente como sigue:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 8 \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

◆

El significado físico de la recta tangente es esta: suponga que una partícula de masa m se mueve a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}$. Si, de pronto, en $t = t_0$, todas las fuerzas dejan de actuar sobre la partícula (de modo que, de acuerdo con la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, tenemos $\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{0}$ para $t \geq t_0$), entonces la partícula seguirá la trayectoria sobre la recta tangente de la ecuación (3).

EJEMPLO 6 Si Roger Ramjet es disparado por un cañón, podemos usar vectores para describir su trayectoria (véase la figura 3.6).

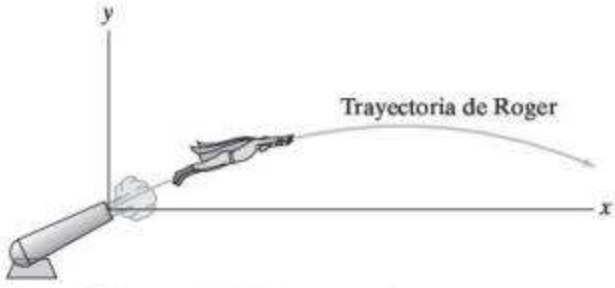


Figura 3.6 Trayectoria de Roger Ramjet.

Supondremos que Roger recibe un vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ por medio del disparo del cañón, y que de ahí en adelante sobre él actúa solo la fuerza de gravedad (por lo que, en particular, se desprecia la resistencia del aire). Escogemos las coordenadas de manera que al inicio Roger esté en el origen y pasamos por alto la altura del cañón. Sea que $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ denote la trayectoria de Roger. Entonces, la información que tenemos es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t) = -g\mathbf{j}$$

(es decir, la aceleración debida a la gravedad es constante y está dirigida hacia abajo); en consecuencia,

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{x}'(0) = \mathbf{v}_0$$

y

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, para encontrar la velocidad sencillamente integramos la expresión para las componentes de la aceleración:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int -g\mathbf{j}\,dt = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{c}.$$

Aquí, $\mathbf{c}$ es un *vector* constante arbitrario (la "constante de integración"). Como $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, debemos tener que $\mathbf{c} = \mathbf{v}_0$, por lo que

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Al integrar otra vez se encuentra la trayectoria,

$$\mathbf{x}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (-gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{d},$$

donde $\mathbf{d}$ es otro vector constante arbitrario. A partir del hecho de que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, se concluye que

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 \tag{4}$$

es la ecuación que describe la trayectoria de Roger.

Para comprender mejor la ecuación (4), escribimos $\mathbf{v}_0$ en términos de sus componentes:

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}.$$

Aquí, $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ es la velocidad inicial, en realidad lo único que estamos haciendo es expresar las componentes rectangulares de $\mathbf{v}_0$ en coordenadas polares. (Véase la

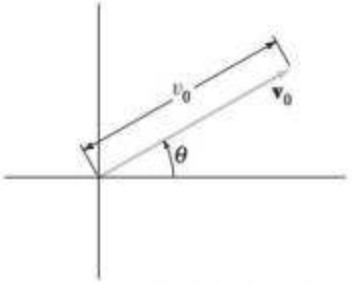


Figura 3.7 Velocidad inicial de Roger

figura 3.7). Por consiguiente,

$$\mathbf{x}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t(v_0\cos\theta\,\mathbf{i} + v_0\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})$$

$$= (v_0\cos\theta)t\,\mathbf{i} + \left((v_0\,\text{sen}\,\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}.$$

A partir de esta se pueden leer las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta)t \\ y = (v_0\,\text{sen}\,\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases},$$

de las cuales no es difícil deducir que la trayectoria de Roger es una parábola. ◆

Dos preguntas prácticas acerca del planteamiento del ejemplo 6 son las siguientes: en primer lugar, para una velocidad inicial dada, ¿qué tan lejos llega Roger en la horizontal? En segundo lugar, para una velocidad inicial dada, ¿cómo podría colocarse el cañón de modo que Roger llegue (horizontalmente) lo más lejos posible? Para encontrar el rango del disparo del cañón y, por lo tanto, la respuesta de la primera pregunta, necesitamos conocer cuándo $y = 0$, es decir, cuándo Roger llega al piso. Así que resolvemos:

$$(v_0\,\text{sen}\,\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = t(v_0\,\text{sen}\,\theta - \tfrac{1}{2}gt) = 0$$

para t. Entonces, $y = 0$ cuando $t = 0$ (que es cuando Roger sale disparado) y cuando $t = (2v_0\,\text{sen}\,\theta)/g$. En este segundo momento,

$$x = (v_0\cos\theta)\cdot\left(\frac{2v_0\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2\,\text{sen}\,2\theta}{g}. \tag{5}$$

La fórmula (5) es el rango horizontal de Roger para una velocidad inicial dada. Para maximizar el rango para una velocidad inicial v_0, debemos elegir θ de modo que $(v_0^2\,\text{sen}\,2\theta)/g$ sea lo más grande posible. Es evidente que esto ocurre cuando $\text{sen}\,2\theta = 1$, es decir, cuando $\theta = \pi/4$.

Leyes de Kepler del movimiento planetario (opcional)

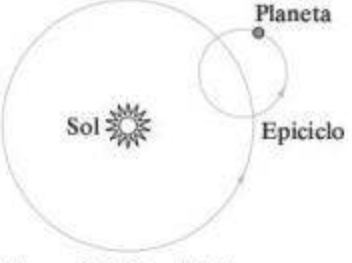


Figura 3.8 Un epiciclo.

Desde la antigüedad clásica, los individuos han tratado de entender el movimiento de los planetas y las estrellas. La mayoría de los primeros astrónomos se limitaban a combinar la observación simple y la fe, y creían que todos los cuerpos celestes giraban alrededor de la Tierra. Por fortuna, eventualmente la teoría heliocéntrica ("con centro en el Sol") de Nicolás Copérnico (1473-1543) ganó terreno cuando mejoraron las técnicas de observación. Sin embargo, todavía se creía que los planetas se movían en órbitas circulares alrededor del Sol. Esta teoría del movimiento circular no predecía correctamente las posiciones planetarias, por lo que los astrónomos postularon la existencia de **epiciclos**, órbitas circulares más pequeñas que se desplazaban a lo largo del arco circular más grande, como se ilustra en la figura 3.8. Aunque los cálculos de la posición con epiciclos daban resultados más cercanos a las observaciones realizadas, aún no eran correctos. Para tratar de mejorar los cálculos utilizaron epiciclos de segundo y de tercer orden, pero todos los avances en el poder de predicción se lograban con un costo considerable en cuanto a la complejidad del cálculo. Era necesaria una nueva idea. La inspiración llegó con Johannes Kepler (1571-1630), hijo de un conserje y asistente del astrónomo Tycho Brahe. Los astrónomos clásicos estaban "anclados en los círculos" porque creían que el círculo era una forma perfecta y que Dios solo usaría figuras perfectas para el movimiento planetario. Sin embargo, Kepler consideraba que las otras secciones cónicas eran tan elegantes como el círculo y estableció la sencilla teoría de que las órbitas planetarias eran elípticas. La evidencia empírica respaldaba esta teoría.

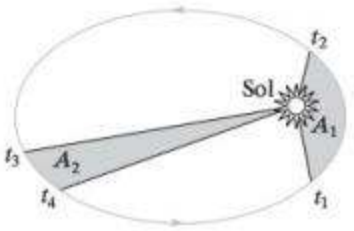


Figura 3.9 La segunda ley de Kepler del movimiento planetario: Si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, entonces $A_1 = A_2$, donde A_1 y A_2 son las áreas de las regiones sombreadas.

Las tres leyes del movimiento planetario de Kepler son

1. La órbita de un planeta es elíptica, con el Sol en un foco de la elipse.
2. Durante periodos iguales, un planeta barre áreas iguales con respecto del Sol (véase la figura 3.9).
3. El cuadrado del periodo de una órbita elíptica es proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la elipse.

Las leyes de Kepler revolucionaron la astronomía. Sin embargo, hacemos énfasis en que no fueron descubiertas de modo analítico, sino empírico, lo cual significa que no se obtuvieron de leyes físicas generales. La primera obtención analítica a menudo se atribuye a Newton, quien afirmó haber establecido las leyes de Kepler (al menos la primera y la tercera) en el Libro I de su *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* (1687). No obstante, algunos científicos e historiadores de la ciencia ahora consideran que la demostración que hizo Newton de la primera ley de Kepler contiene errores y que fue Johann Bernoulli (1667-1748) quien hizo la primera obtención rigurosa en 1710.[1] En el análisis que sigue se utiliza la ley de Newton de la gravitación universal para demostrar las tres leyes de Kepler.

En el desarrollo siguiente supondremos que los únicos efectos físicos son los que ocurren entre el Sol y un solo planeta —el problema conocido como *de los dos cuerpos*. (El problema de los n cuerpos, donde $n \geq 3$ es, en contraste, un área importante de la investigación matemática actual). Para establecer el contexto de nuestros cálculos haremos que el Sol se encuentre fijo en el origen O en $\mathbf{R}^3$ y que el planeta esté en movimiento en la posición P. También necesitamos seguir dos "reglas del producto vectorial" cuyas demostraciones dejaremos al lector.

PROPOSICIÓN 1.4

1. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son trayectorias diferenciables en $\mathbf{R}^n$, entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \mathbf{y}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x}\cdot\frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

2. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son trayectorias diferenciables en $\mathbf{R}^3$, entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{y} + \mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

En primer lugar establecemos el siguiente resultado preliminar:

PROPOSICIÓN 1.5 El movimiento del planeta es plano y el Sol se encuentra en el plano del movimiento del planeta.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$. Entonces, $\mathbf{r}$ es un vector cuya flecha representativa tiene su origen fijo en O (observe que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; es decir, $\mathbf{r}$ es una función del tiempo). Si $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$, demostraremos que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es un vector constante $\mathbf{c}$. Este resultado, a su vez, implica que $\mathbf{r}$ siempre debe ser perpendicular a $\mathbf{c}$ y, por ello, $\mathbf{r}$ siempre está en un plano con $\mathbf{c}$ como vector normal.

Para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es constante, demostraremos que su derivada es igual a cero. Según la parte 2 de la proposición 1.4,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{a},$$

[1] Para un análisis de la controversia más reciente que rodea los trabajos matemáticos de Newton consulte a R. Weinstock, "Isaac Newton: Credit where credit won't do," *The College Mathematics Journal*, **25**(1994), No. 3, 179-192, y C. Wilson, "Newton's orbit problem: A historian's response," *Ibid.*, 193-200 y otros artículos relacionados.

de acuerdo con la definición de velocidad y aceleración. Sabemos que $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (explique por qué), de modo que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}. \tag{6}$$

Ahora usamos las leyes de Newton. La ley de la gravitación de este dice que el planeta es atraído hacia el Sol con una fuerza

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}, \tag{7}$$

donde G es la constante gravitacional de Newton ($= 6.6720 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2), M es la masa del Sol, m es la masa del planeta (en kilogramos), $r = \|\mathbf{r}\|$ y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ (las distancias están en metros). Por otro lado, la segunda ley de Newton del movimiento establece que, para el planeta,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Por consiguiente,

$$m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u},$$

o bien,

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}. \tag{8}$$

Por lo tanto, $\mathbf{a}$ tan solo es un múltiplo escalar de $\mathbf{r}$ y por ello siempre es paralelo a $\mathbf{r}$. En vista de las ecuaciones (6) y (8) concluimos que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

es decir, que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es constante. ■

TOEREMA 1.6 (PRIMERA LEY DE KEPLER) En un sistema de dos cuerpos que consta de un sol y un planeta, la órbita del planeta es una elipse y el sol está en uno de sus focos.

DEMOSTRACIÓN Eventualmente encontraremos una ecuación polar para la órbita del planeta y veremos que ella define una elipse como la descrita. Conservaremos la notación usada en la demostración de la proposición 1.5 y estableceremos coordenadas en $\mathbf{R}^3$, de modo que el Sol esté en el origen y la trayectoria del planeta en el plano xy. Entonces, el vector constante $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ usado en la demostración de la proposición 1.5 se puede escribir como $c\mathbf{k}$, donde c es algún número real distinto de cero. En la figura 3.10 se ilustra este planteamiento.

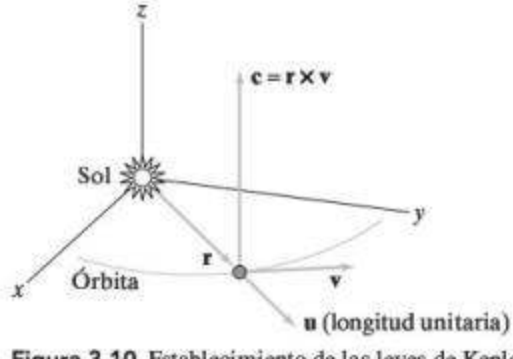


Figura 3.10 Establecimiento de las leyes de Kepler.

Paso 1. Encontremos otra expresión de $\mathbf{c}$. De acuerdo con la definición de $\mathbf{u}$ en la fórmula (7), $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$, de modo que, según la regla del producto,

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} = (r\mathbf{u})\times\left(r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}\right) = r^2\left(\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) + r\frac{dr}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{u}).$$

Como $\mathbf{u}\times\mathbf{u}$ debe ser igual a cero, concluimos que

$$\mathbf{c} = r^2\left(\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right). \tag{9}$$

Paso 2. Obtenemos la ecuación polar para la órbita. Sin embargo, antes de hacerlo observemos el resultado siguiente, cuya demostración se deja al lector como ejercicio:

PROPOSICIÓN 1.7 Si $\mathbf{x}(t)$ tiene longitud constante, es decir, $\|\mathbf{x}(t)\|$ es constante para toda t, entonces $\mathbf{x}$ es perpendicular a su derivada $d\mathbf{x}/dt$.

Al continuar ahora con el argumento principal se nota que el vector $\mathbf{r}(t)$ es definido de manera que su magnitud es precisamente la coordenada polar r de la posición del planeta. Utilizando las ecuaciones (8) y (9) se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{c} &= \left(-\frac{GM}{r^2}\mathbf{u}\right)\times r^2\left(\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\\
&= -GM\left[\mathbf{u}\times\left(\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\right]\\
&= GM\left[\left(\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\times\mathbf{u}\right]\\
&= GM\left[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \left(\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\mathbf{u}\right] && \text{(Consulte el ejercicio 27 de la sección 1.4)}\\
&= GM\left[1\frac{d\mathbf{u}}{dt} - 0\mathbf{u}\right] && \text{(Según la proposición 1.7)}\\
&= \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

puesto que G y M son constantes. Por otro lado, es posible "invertir" la regla del producto para encontrar que

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{c} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{c}\\
&= \frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{c} + \mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt} && \text{(Puesto que } \mathbf{c} \text{ es constante)}\\
&= \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{c}).
\end{aligned}$$

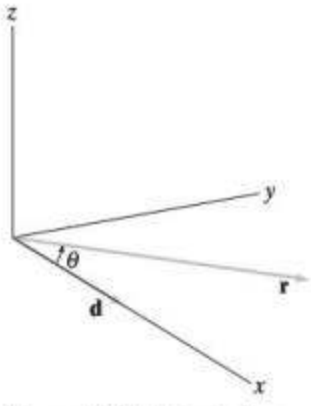


Figura 3.11 El ángulo θ es aquel entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{d}$.

Entonces,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}),$$

y por ello,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM\mathbf{u} + \mathbf{d} \tag{10}$$

donde $\mathbf{d}$ es un vector constante arbitrario. Debido a que tanto $\mathbf{v} \times \mathbf{c}$ como $\mathbf{u}$ están en el plano xy, también $\mathbf{d}$ debe estarlo.

De ser necesario se ajustan las coordenadas de manera que $\mathbf{d}$ señale en la dirección $\mathbf{i}$, es decir, de manera que $\mathbf{d} = d\mathbf{i}$ para alguna $d \in \mathbf{R}$. Esto se logra con la rotación de todo el arreglo alrededor del eje z, lo que no expulsa nada fuera del plano xy que esté contenido en este. Entonces, el ángulo entre $\mathbf{r}$ y por lo tanto en $\mathbf{u}$ y $\mathbf{d}$ es el ángulo polar θ, como se aprecia en la figura 3.11.

Según el teorema 3.3 del capítulo 1,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{d}\| \cos\theta = d \cos\theta. \tag{11}$$

Como $c = \|\mathbf{c}\|$,

$$\begin{aligned} c^2 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} && \text{(Explique por qué. Véase la fórmula (4)} \\ &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) && \text{de la sección 1.4)} \\ &= r\mathbf{u} \cdot (GM\mathbf{u} + \mathbf{d}) && \text{Según la ecuación (10)} \end{aligned}$$

Entonces,

$$c^2 = GMr + rd\cos\theta$$

según la ecuación (11). Esta ecuación se resuelve con facilidad para r y se obtiene

$$r = \frac{c^2}{GM + d\cos\theta}, \tag{12}$$

que es la ecuación polar de la órbita del planeta.

Paso 3. Ahora comprobamos que la ecuación (12) en verdad define una elipse mediante la conversión a coordenadas cartesianas. Primero escribimos la ecuación en la forma siguiente:

$$r = \frac{c^2}{GM + d\cos\theta} = \frac{(c^2/GM)}{1 + (d/GM)\cos\theta},$$

y después, por conveniencia, se hace $p = c^2/GM$, $e = d/GM$ (observe que $p > 0$). Así, la ecuación (12) se convierte en:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{13}$$

Con un poco de álgebra se obtiene la ecuación equivalente,

$$r = p - er\cos\theta. \tag{14}$$

Ahora, $r\cos\theta = x$ (x es la coordenada cartesiana habitual), de manera que la ecuación (14) equivale a

$$r = p - ex.$$

Para completar la conversión elevamos al cuadrado ambos lados y encontramos que, por el hecho de que $r^2 = x^2 + y^2$ se llega a lo siguiente,

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2.$$

Un poco más de álgebra revela que

$$(1 - e^2)\,x^2 + 2pex + y^2 = p^2. \tag{15}$$

Por lo tanto, la curva descrita por la ecuación anterior es una elipse si $0 < |e| < 1$, una parábola si $e = \pm 1$ y una hipérbola si $|e| > 1$. Desde el punto de vista analítico, no hay manera de eliminar las últimas dos posibilidades. En realidad, los objetos "no capturados", como los cometas o las sondas del espacio profundo, pueden tener órbitas hiperbólicas o parabólicas. Sin embargo, si se ha de tener una órbita *cerrada* (aquella en que el planeta repite su tránsito por el cielo) forzosamente habrá que concluir que debe ser elíptica.

Puede decirse más sobre las órbitas elípticas. Al dividir la ecuación (15) entre $1 - e^2$ y completar el cuadrado en x se tiene que

$$\left(x + \frac{pe}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Esto es equivalente a la ecuación alternativa de aspecto impresionante:

$$\frac{\left(x + pe/(1 - e^2)\right)^2}{p^2/(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{p^2/(1 - e^2)} = 1. \tag{16}$$

A partir de la ecuación (16) se ve que la elipse tiene su centro en el punto $(-pe/(1 - e^2), 0)$, es decir, que el semieje mayor tiene una longitud de $a = p/(1 - e^2)$, y que su semieje menor tiene una longitud de $b = p/\sqrt{1 - e^2}$. Los focos de la elipse están a una distancia de

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{p^2}{1 - e^2}} = \frac{p|e|}{1 - e^2}$$

del centro (véase la figura 3.12). Entonces, se ve que un foco debe estar en el origen, la ubicación del Sol. Por lo tanto, nuestra demostración está completa. ■

Por fortuna, todo el gran esfuerzo dedicado a demostrar la primera ley rendirá sus frutos cuando se hagan las demostraciones de la segunda y la tercera ley, que serán considerablemente más breves. Otra vez conservaremos la notación ya introducida.

TEOREMA 1.8 (SEGUNDA LEY DE KEPLER) Durante intervalos iguales de tiempo, un planeta barre áreas iguales con respecto del Sol.

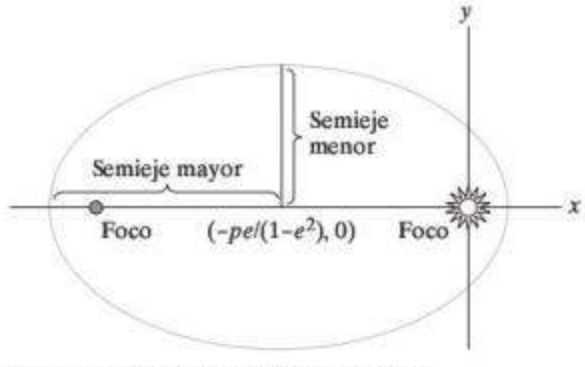


Figura 3.12 La elipse de la ecuación (16).

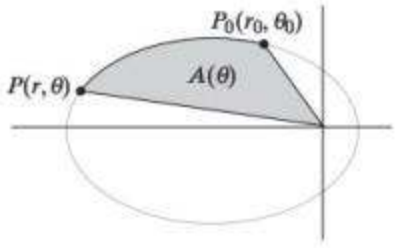


Figura 3.13 El área sombreada $A(\theta)$ es dada por $\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$.

DEMOSTRACIÓN Fijemos un punto P_0 sobre la órbita del planeta. Entonces, el área A barrida entre p_0 y un segundo punto (en movimiento) P sobre la órbita es dado por la integral de área polar (véase la figura 3.13)

$$A(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi.$$

Por consiguiente, se puede reformular la ley de Kepler para decir que dA/dt es constante. Establecemos esta reformulación relacionando dA/dt con una constante conocida, a saber, el vector $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

Mediante la regla de la cadena (en una variable),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Según el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} [r(\theta)]^2.$$

En consecuencia,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \tag{17}$$

Ahora relacionamos $\mathbf{c}$ con $d\theta/dt$ por medio de la ecuación (9). Por lo tanto, calculamos $\mathbf{u} \times d\mathbf{u}/dt$ en términos de θ. Recordemos que $u = \frac{1}{r} r^2$ y que $\mathbf{r} = r \cos \theta \, \mathbf{i} + r \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j}$. Así,

$$\mathbf{u} = \cos \theta \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}.$$

Entonces, del cálculo directo del producto cruz se sigue que

$$\mathbf{c} = r^2 \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k},$$

por lo que $c = \|\mathbf{c}\| = r^2 d\theta/dt$, y la ecuación (17) implica que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} c, \tag{18}$$

es una constante.

TEOREMA 1.9 (TERCERA LEY DE KEPLER) Si T es la longitud de tiempo requerida para recorrer una órbita planetaria, y a es la longitud del semieje mayor de esta, entonces $T^2 = Ka^3$ para alguna constante K.

DEMOSTRACIÓN Nos centramos en el área total encerrada por la órbita elíptica. El área de una elipse cuyos semieje mayor y semieje menor tienen longitudes a y b, respectivamente, es πab. Esta área también debe ser barrida por el planeta en el intervalo de tiempo $[0, T]$. De manera que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi ab &= \int_0^T \frac{dA}{dt}\, dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} c\, dt \qquad \text{por la ecuación (18)} \\ &= \frac{1}{2} cT. \end{aligned}$$

Entonces,

$$T = \frac{2\pi ab}{c}, \quad \text{así que} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2}. \tag{19}$$

Ahora, b y c están relacionadas con a, por lo que estas cantidades deben reemplazarse antes de que continuemos. En particular, a partir de la ecuación (16), $b^2 = p^2/(1 - e^2)$, por lo que $b^2 = pa$.

También

$$p = \frac{c^2}{GM}.$$

(Véanse las ecuaciones (12) y (13)). Con estas sustituciones el resultado en (19) se convierte en lo siguiente:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 (pa)}{pGM} = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3.$$

Esta última ecuación demuestra que T^2 es proporcional a a^3, pero dice más: la constante de proporcionalidad $4\pi^2/GM$ depende por completo de la masa del Sol (la constante es la misma para *cualquier* planeta que gire alrededor del Sol). ◆

3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 dibuje las imágenes de las trayectorias siguientes, utilice flechas para indicar la dirección en la que se incrementa el parámetro:

1. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 - t \end{cases}, \quad -1 \le t \le 1$

2. $\mathbf{x}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$

3. $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad -6\pi \le t \le 6\pi$

4. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} 2t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

5. $\mathbf{x}(t) = (t, 3t^2 + 1, 0)$

6. $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$

Calcule la velocidad, rapidez y aceleración de las trayectorias dadas en los ejercicios 7 a 10.

7. $\mathbf{x}(t) = (3t - 5)\mathbf{i} + (2t + 7)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{x}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{x}(t) = (t \operatorname{sen} t, t\cos t, t^2)$

10. $\mathbf{x}(t) = (e^t, e^{2t}, 2e^t)$

En los ejercicios 11 a 14 a) utilice una computadora para elaborar una gráfica de la trayectoria dada $\mathbf{x}$ *en el intervalo indicado de t; identifique la dirección en que se incrementa t. b) Demuestre que la trayectoria está sobre la superficie dada S.*

11. $\mathbf{x}(t) = (3\cos \pi t, 4 \operatorname{sen} \pi t, 2t)$, $-4 \le t \le 4$; S es un cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

12. $\mathbf{x}(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, $-20 \le t \le 20$; S es un cono $z^2 = x^2 + y^2$.

13. $\mathbf{x}(t) = (t \operatorname{sen} 2t, t\cos 2t, t^2)$, $-6 \le t \le 6$; S es un paraboloide $z = x^2 + y^2$.

14. $\mathbf{x}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen} 8t)$, $0 \le t \le 2\pi$; S es un cilindro $x^2 + y^2 = 4$

En los ejercicios 15 a 18 encuentre una ecuación para la recta tangente a la trayectoria dada en el valor indicado para el parámetro.

15. $\mathbf{x}(t) = te^{-t}\,\mathbf{i} + e^{3t}\,\mathbf{j}$, $t = 0$

16. $\mathbf{x}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k}$, $t = \pi/3$

17. $\mathbf{x}(t) = (t^2, t^3, t^5)$, $t = 2$

18. $\mathbf{x}(t) = (\cos(e^t), 3 - t^2, t)$, $t = 1$

19. *a*) Dibuje la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (t, t^3 - 2t + 1)$.

b) Determine cuál es la recta tangente a $\mathbf{x}$ cuando $t = 2$.

c) Describa la imagen de $\mathbf{x}$ con una ecuación de la forma $y = f(x)$ eliminando t.

d) Verifique su respuesta del inciso *b*) volviendo a calcular la recta tangente utilizando el resultado del inciso *c*).

Los ejercicios 20 a 23 se refieren a Roger Ramjet y su trayectoria al ser disparado por un cañón, como en el ejemplo 6 de esta sección.

20. Compruebe que la trayectoria de Roger Ramjet del ejemplo 6 es una parábola.

21. Suponga que Roger es disparado por el cañón con un ángulo de inclinación θ de 60° y una velocidad inicial v_0 de 100 pies/seg. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza Roger?

22. Imagine que el cañón dispara a Roger con un ángulo de inclinación θ de 60°, y que toca el piso a 1/2 milla del cañón. En esas condiciones, ¿cuál fue la velocidad inicial de Roger?

23. Si Roger es disparado por el cañón con una velocidad inicial de 250 pies/seg, ¿qué ángulo de inclinación θ debe usarse de modo que toque el piso a 1500 pies del cañón?

24. Gertrude dispara su pistola de agua súper empapadora a Egbert, quien mide 1.6 m de estatura y está a 5 m de ella. Gertrude dispara el agua a 1 m por arriba del piso, con cierto ángulo α de elevación (véase la figura 3.14).

a) Si la pistola de agua dispara con una velocidad inicial de 7 m/seg y un ángulo de elevación de 45°, ¿alcanza a mojar a Egbert?

b) Si la pistola dispara con una velocidad inicial de 8 m/seg, ¿cuáles son los ángulos de elevación que harán que moje a Egbert? (Nota: tal vez el lector querrá usar un sistema de álgebra o graficación por computadora para resolver este inciso).

25. Un cohete descompuesto se mueve de acuerdo con la trayectoria $\mathbf{x}(t) = \left(e^{2t}, 3t^3 - 2t, t - \frac{1}{t}\right)$ con la esperanza de llegar a una estación de reparación ubicada en el punto $(7e^4, 35, 5)$. (En este caso, t representa el tiempo en minutos y las coordenadas espaciales se miden en millas). Los motores del cohete se apagan de súbito en $t = 2$. ¿Llegará el cohete con su solo impulso a la estación de reparación?

26. Dos bolas de billar se desplazan sobre una mesa (con coordenadas) de acuerdo con las siguientes trayectorias respectivas: $\mathbf{x}(t) = \left(t^2 - 2, \frac{t^2}{2} - 1\right)$ y $\mathbf{y}(t) = (t, 5 - t^2)$, donde t representa el tiempo medido en segundos.

a) ¿En qué momento y dónde chocarán las bolas?

b) ¿Cuál es el ángulo formado por las trayectorias de las bolas en el punto de colisión?

27. Establezca la parte 1 de la proposición 1.4 de esta sección: si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son trayectorias diferenciables en $\mathbf{R}^n$, demuestre que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \mathbf{y}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x}\cdot\frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

28. Establezca la parte 2 de la proposición 1.4 de esta sección: si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son trayectorias diferenciables en $\mathbf{R}^3$, demuestre que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{y} + \mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

29. Demuestre la proposición 1.7.

30. *a*) Demuestre que la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \cos t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se encuentra sobre una esfera unitaria.

b) Compruebe que $\mathbf{x}(t)$ siempre es perpendicular al vector velocidad $\mathbf{v}(t)$.

c) Use la proposición 1.7 para demostrar que si una trayectoria diferenciable está sobre una esfera con centro en el origen, entonces su vector de posición siempre es perpendicular a su vector velocidad.

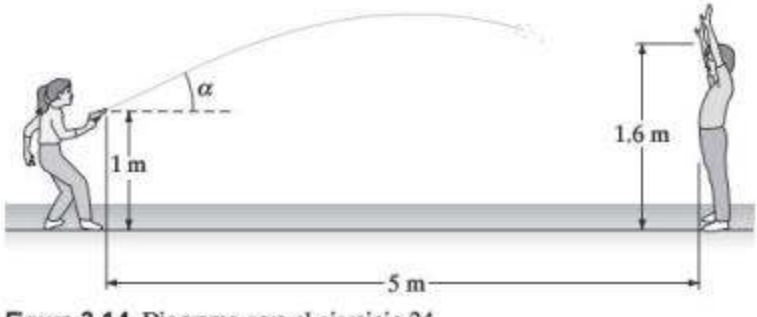


Figura 3.14 Diagrama para el ejercicio 24.

31. Considere la trayectoria

$$\begin{cases} x = (a + b\cos\omega t)\cos t \\ y = (a + b\cos\omega t)\operatorname{sen} t, \\ z = b\operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

donde a, b y ω son constantes positivas y $a > b$.

T *a*) Use una computadora para graficar esta trayectoria cuando

i. $a = 3, b = 1$ y $\omega = 15$.

ii. $a = 5, b = 1$ y $\omega = 15$.

iii. $a = 5, b = 1$ y $\omega = 25$.

Haga comentarios acerca de la forma en que los valores de a, b y ω afectan las formas de las curvas imagen.

b) Demuestre que la curva imagen se encuentra en el toro siguiente:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2.$$

(Un **toro** es la superficie de una dona).

32. Para la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$ demuestre que el ángulo entre $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}'(t)$ permanece constante. ¿Cuál es ese ángulo?

33. Considere la trayectoria $\mathbf{x}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (t^2, t^3 - t)$.

a) Demuestre que esta trayectoria se interseca a sí misma, es decir, que hay números t_1 y t_2 tales que $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$.

b) En el punto en el que la trayectoria se interseca a sí misma tiene sentido decir que la curva imagen tiene *dos* rectas tangentes. ¿Cuál es el ángulo entre dichas rectas tangentes?

34. Aunque la trayectoria $\mathbf{x}$: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ puede ser la manera más familiar de dar una descripción paramétrica de un círculo unitario, en este problema el lector desarrollará un conjunto diferente de ecuaciones paramétricas que da las coordenadas x y y de un punto sobre el círculo en términos de funciones racionales del parámetro (esta parametrización particular es útil en la rama de las matemáticas conocida como teoría de números).

Para aclarar las cosas comience con el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y considere todas las rectas que pasan por el punto $(-1, 0)$ (véase la figura 3.15). Note que cada recta distinta de la vertical $x = 1$ interseca el círculo en un punto (x, y) distinto de $(-1, 0)$. Sea el parámetro t la pendiente de la recta que une $(-1, 0)$ y un punto (x, y) sobre el círculo.

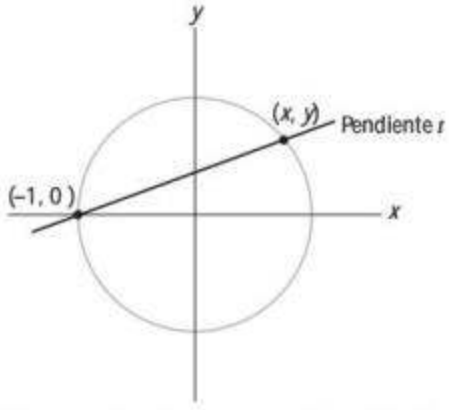


Figura 3.15 Diagrama para el ejercicio 34.

a) Dé una ecuación de la recta con pendiente t, que une a $(-1, 0)$ con (x, y) (su respuesta debe involucrar a x, y y t).

b) Use su respuesta del inciso a) para escribir y en términos de x y t. Después sustituya esta expresión para y en la ecuación del círculo unitario. Resuelva las ecuaciones resultantes para x en términos de t. Su(s) respuesta(s) para x darán los puntos de intersección de la recta con el círculo.

c) Utilice el resultado del inciso anterior para dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para puntos (x, y) que estén sobre el círculo unitario.

d) ¿La parametrización que hizo el lector en el inciso *c*) cubre todo el círculo? ¿Cuáles puntos no son cubiertos, si acaso los hubiera?

35. Sea $\mathbf{x}(t)$ una trayectoria de clase C^1 que no pasa por el origen en $\mathbf{R}^3$. Si $\mathbf{x}(t_0)$ es el punto sobre la imagen de $\mathbf{x}$ más cercano al origen, y $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, demuestre que el vector de posición $\mathbf{x}(t_0)$ es ortogonal al vector velocidad $\mathbf{x}'(t_0)$.

3.2 Longitud de arco y geometría diferencial

En esta sección se continúa el estudio general de las curvas paramétricas en $\mathbf{R}^3$, considerando la manera de medir propiedades geométricas como la longitud y curvatura. Esto puede hacerse definiendo vectores unitarios mutuamente perpendiculares que formen lo que se conoce como marco móvil adaptado de manera especial a una trayectoria $\mathbf{x}$. Nuestro estudio nos adentrará un poco en la rama de las matemáticas llamada **geometría diferencial**, área en la que se emplean el cálculo y el análisis para entender la geometría de curvas, superficies y ciertos objetos de dimensión mayor (llamados **variedades**).

Longitud de una trayectoria

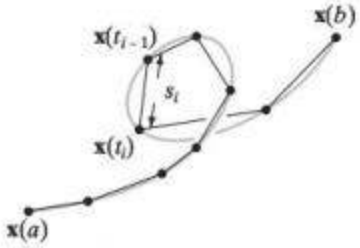


Figura 3.16 Aproximación de la longitud de una trayectoria C^1.

Por ahora, sea $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria C^1 en $\mathbf{R}^3$. Entonces, es posible aproximar la longitud L de $\mathbf{x}$ como sigue: comience por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos. Es decir, escoja números $t_0, t_1, \ldots, t_n$, tales que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Si para $i = 1, \ldots, n$, hacemos que Δs_i denote la distancia entre los puntos $\mathbf{x}(t_{i-1})$ y $\mathbf{x}(t_i)$ sobre la trayectoria, entonces

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i. \tag{1}$$

(Véase la figura 3.16). Se tiene $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, por lo que la fórmula de la distancia, es decir, el teorema de Pitágoras, implica que

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2},$$

donde $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, $\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$ y $\Delta z_i = z(t_i) - z(t_{i-1})$. Es totalmente razonable esperar que la aproximación en (1) mejore a medida que las Δt_i se acerquen más a cero. Así, *definimos* la longitud L de $\mathbf{x}$ como

$$L = \lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2 + \Delta z_i{}^2}. \tag{2}$$

Ahora encontramos una manera de escribir la ecuación (2) como una integral. Aplicamos (tres veces) el teorema del valor medio sobre cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para concluir lo siguiente:

1. Debe existir algún número t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_i^*)(t_i - t_{i-1});$$

que es $\Delta x_i = x'(t_i^*)\Delta t_i$.

2. Debe existir otro número t_i^{**} en $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\Delta y_i = y'(t_i^{**})\Delta t_i.$$

3. Debe existir un tercer número t_i^{***} en $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\Delta z_i = z'(t_i^{***})\Delta t_i.$$

Por lo tanto, con un poco de álgebra la ecuación (2) se convierte en la siguiente:

$$L = \lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2 + z'(t_i^{***})^2}\, \Delta t_i. \tag{3}$$

Cuando el límite que aparece en la ecuación (3) es finito da el valor de la integral definida

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Observe que el integrando es precisamente $\|\mathbf{x}'(t)\|$, la velocidad de la trayectoria (esto tiene mucho sentido, por supuesto. La velocidad mide la tasa de distancia recorrida por unidad de tiempo, por lo que la integración de la velocidad durante el intervalo de tiempo transcurrido debe arrojar la distancia total recorrida). Además, no es difícil ver cómo debiera definirse la longitud de una trayectoria en $\mathbf{R}^n$ para un valor arbitrario de n.

DEFINICIÓN 2.1 La **longitud** $L(\mathbf{x})$ de una trayectoria C^1, $\mathbf{x}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ se encuentra integrando su velocidad:

$$L(\mathbf{x}) = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt.$$

EJEMPLO 1 Para verificar nuestra definición en una situación bien conocida calculemos la longitud de la trayectoria

$$\mathbf{x}: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, \qquad \mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t), \qquad a > 0.$$

Tenemos

$$\mathbf{x}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j},$$

por lo que

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t} = a.$$

De manera que la definición 2.1 da

$$L(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a.$$

Como la trayectoria traza un círculo de radio a una vez, la integral de longitud resulta ser la circunferencia del círculo, como tendría que ser.

EJEMPLO 2 Para la hélice $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$, tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} + b\, \mathbf{k},$$

por lo que $\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, y

$$L(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Cuando $b = 0$, la hélice se revierte a un círculo y la integral de longitud concuerda con el ejemplo anterior. ◆

Figura 3.17 Una trayectoria C^1.

Aunque hemos definido la integral de longitud solo para trayectorias C^1 (o "de aspecto suave"), no hay problema con extender nuestra definición al caso C^1 **por partes**. Por definición, una trayectoria C^1 es la que tiene un vector velocidad que varía continuamente, por lo que es común que tenga una apariencia como la que se ilustra en la figura 3.17. Una trayectoria por partes C^1 podría no ser C^1 sino constar de un número grande pero finito de fragmentos C^1. Es común que una trayectoria continua, por partes, C^1, que *no* sea C^1, se parezca a la que aparece en la figura 3.18. Cada una de las tres partes de la trayectoria definida por (i) $a \le t \le t_1$, (ii) $t_1 \le t \le t_2$ y (iii) $t_2 \le t \le b$, es de clase C^1, pero la velocidad, si es distinta de cero, sería discontinua en $t = t_1$ y en $t = t_2$. Todo lo que necesitamos hacer para definir la longitud de una trayectoria por partes C^1 es descomponerla en sus elementos C^1, calcular la longitud de cada uno y sumarlos para obtener la longitud total. Para la trayectoria C^1 por partes que se ilustra en la figura 3.18 esto significa que tomaríamos

$$\int_a^{t_1} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt + \int_{t_2}^{b} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt$$

como la longitud.

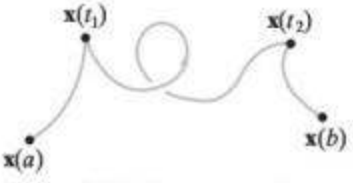


Figura 3.18 Una trayectoria por partes C^1, $\mathbf{x}: [a, b] \to \mathbf{R}^3$.

ADVERTENCIA Incluso si una trayectoria es continua, cabe la posibilidad de que no exista la integral definida de la definición 2.1. Un ejemplo de esa situación desafortunada la ilustra la trayectoria $\mathbf{x}$: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$,

$$\mathbf{x}(t) = (t, y(t)), \quad \text{donde} \quad y(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Dicha trayectoria se llama **no rectificable**. Es un hecho que cualquier trayectoria C^1 con puntos extremos es rectificable, que es la razón por la que establecimos dicha condición en la definición 2.1.

El parámetro de la longitud de arco

El cálculo de la longitud de una trayectoria no solo es útil (y algo interesante) en sí mismo, también proporciona una forma de **reparametrizar** la trayectoria con un parámetro que dependa solo de la geometría de la curva trazada por la trayectoria, no de la forma en que se trace la curva.

Establezca que $\mathbf{x}$ es cualquier trayectoria C^1 y suponga que la velocidad $\mathbf{x}'$ nunca es igual a cero. Fijemos un punto P_0 sobre la trayectoria y establezcamos a tal que $\mathbf{x}(a) = P_0$. Definimos una función de una variable s del parámetro t dado que mide la longitud de la trayectoria de P_0 a cualquier otro punto (móvil) P, por medio de

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{x}'(\tau)\| \, d\tau. \tag{4}$$

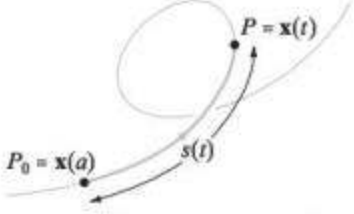


Figura 3.19 Reparametrización de la longitud de arco.

(Véase la figura 3.19. Se usa la letra griega tau, τ, solo como variable muda —la convención estándar es nunca tener a la misma variable en el integrando y en alguno de los límites de la integración). Si ocurre que t sea menor que a, entonces el valor de s en la fórmula (4) sería negativo. Esto no es más que una consecuencia de cómo se elija el "punto base" P_0.

Para obtener el nuevo parámetro se procede como sigue: de la fórmula (4) y del teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t \|\mathbf{x}'(\tau)\| \, d\tau = \|\mathbf{x}'(t)\| = \text{rapidez}. \tag{5}$$

Como asumimos que $\mathbf{x}'(t) \neq 0$, se sigue que ds/dt es distinta de cero. Por ello es que ds/dt siempre es positiva, de modo que s es una función de t estrictamente creciente. Entonces, s es en realidad una función invertible; lo cual significa que, al menos en teoría, es posible resolver la ecuación $s = s(t)$ para t en términos de s. Si hacemos eso, entonces es posible reparametrizar la trayectoria $\mathbf{x}$ utilizando el parámetro de la longitud de arco s como variable independiente.

EJEMPLO 3 Para la hélice $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, si escogemos el "punto base" P_0 como $\mathbf{x}(0) = (a, 0, 0)$, tenemos lo siguiente:

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(\tau)\| \, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, d\tau = \sqrt{a^2 + b^2}\, t,$$

por lo que

$$s = \sqrt{a^2 + b^2}\, t,$$

o bien,

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(Lo que indica la ecuación anterior es que esta reparametrización solo ajusta la escala de la variable del tiempo). Entonces, podemos escribir la trayectoria helicoidal como sigue:

$$\mathbf{x}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a\,\text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right). \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 4 La determinación explícita del parámetro de la longitud para una trayectoria parametrizada dada es un asunto delicado. Considere la trayectoria

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right).$$

Entonces, $\mathbf{x}'(t) = (1, \sqrt{2}t, t^2)$ y, si tomamos el punto base como $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + 2\tau^2 + \tau^4}\, d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{(1 + \tau^2)^2}\, d\tau = \int_0^t (1 + \tau^2)\, d\tau = t + \frac{t^3}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la trayectoria $\mathbf{y}(t) = (t, t^2, t^3)$ es muy parecida a la de $\mathbf{x}$, pero no tiene un parámetro de longitud de arco que se calcule con facilidad. En este caso, $\mathbf{y}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ y la integral resultante para $s(t)$ es

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2 + 9\tau^4}\, d\tau.$$

Puede demostrarse que esta integral no tiene una fórmula de "forma cerrada", es decir, una fórmula que involucre solo un número finito de funciones algebraicas y trascendentales. $\blacklozenge$

La significancia del parámetro longitud de arco s es que es un parámetro **intrínseco**; solo depende de cómo se flexiona la curva, no de la rapidez (o lentitud) con la que se trace. Para ver con más precisión lo que esto significa reacomodemos la regla de la cadena. Consideremos s una variable intermedia y t una variable final. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{x}'(s)\frac{ds}{dt} && \text{según la regla de la cadena,} \\ &= \mathbf{x}'(s)\|\mathbf{x}'(t)\| && \text{por la ecuación (5).} \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}'(t) \neq 0$, podemos resolver para $\mathbf{x}'(s)$ para encontrar

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}. \tag{6}$$

Entonces, $\mathbf{x}'(s)$ es precisamente la normalización del vector de velocidad original, y por ello es unitario. Así, la trayectoria reparametrizada $\mathbf{x}(s)$ tiene **rapidez unitaria**, sin importar la velocidad de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$. (Este resultado también tiene mucho sentido geométrico. Si la longitud de arco, y no el tiempo, es el parámetro, entonces la velocidad se mide en unidades de "longitud por longitud", que necesariamente tiene que ser igual a 1).

La única observación desafortunada en esta historia es que por lo general es imposible calcular con exactitud la integral de la fórmula (4), lo que impide calcular s como una función simple de t (el caso de la hélice es una excepción conveniente y

especial). Por lo común es preferible trabajar indirectamente y permitir que la regla de la cadena venga al rescate. A continuación estudiaremos este enfoque indirecto.

El vector tangente unitario y la curvatura

Establezca que $\mathbf{x}: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ es una trayectoria C^3 y suponga que $\mathbf{x}'$ nunca es igual a cero.

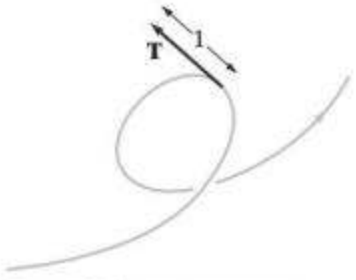


Figura 3.20 Vector tangente unitario.

DEFINICIÓN 2.2 El **vector tangente unitario T** de la trayectoria **x** es la normalización del vector velocidad; es decir,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

A partir de la definición 2.2 se observa que el vector tangente unitario no está definido cuando la velocidad de la trayectoria es igual cero. Advierta también que, de la ecuación (6), **T** es $d\mathbf{x}/ds$, donde s es el parámetro de la longitud de arco. Geométricamente, **T** es el vector tangente de longitud igual a uno que apunta en la dirección en que se incrementa la longitud de arco, como lo sugiere la figura 3.20.

EJEMPLO 5 Para la hélice $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{-a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} + b\, \mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Por otro lado, si parametrizamos la hélice usando la longitud de arco de modo que

$$\mathbf{x}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

entonces

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{x}'(s) = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{k}.$$

Esto va de acuerdo (como debería ser) con la primera expresión para **T**, ya que $s = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$, como se vio en el ejemplo 3. ◆

Utilizando el vector tangente unitario podemos definir una cantidad que mida cuánto se flexiona una trayectoria a medida que se recorre. Para hacer eso observe los siguientes hechos clave:

PROPOSICIÓN 2.3 Suponga que la trayectoria **x** siempre tiene una velocidad distinta de cero. Entonces,

1. $d\mathbf{T}/dt$ es perpendicular a **T** para toda t en I (el dominio de la trayectoria **x**).
2. $\|d\mathbf{T}/dt\|\,|_{t=t_0}$ es igual a la tasa de cambio de la velocidad angular (cuando t se incrementa) de la dirección de **T** cuando $t = t_0$.

DEMOSTRACIÓN (Si el lector está interesado en el flujo principal de las ideas, de momento podría omitir la lectura de esta demostración). Para demostrar la parte 1 tenemos que

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1,$$

ya que $\mathbf{T}$ es un vector unitario. Entonces,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}) = 0,$$

porque la derivada de una constante es igual a cero. También tenemos que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{T},$$

según la regla del producto (proposición 1.4). Por ello,

$$2\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0.$$

Por lo anterior, $\mathbf{T}$ siempre es perpendicular a $d\mathbf{T}/dt$ (véase la proposición 1.7).

Ahora demostraremos la parte 2. Como $\mathbf{T}$ es un vector unitario para todo t, lo único que puede cambiar cuando t se incrementa es su dirección. Esta tasa angular de cambio de $\mathbf{T}$ es precisamente

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

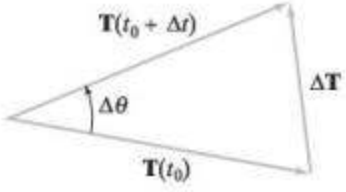


Figura 3.21 Triángulo de vectores usado en la demostración de la proposición 2.3.

donde $\Delta\theta$ proviene del triángulo de vectores que se ilustra en la figura 3.21. Para hacer técnicamente más sencillo el argumento asumiremos que $\Delta\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$. Afirmamos que

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\|\Delta\mathbf{T}\|} = 1. \tag{7}$$

Entonces, de la ecuación (7)

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\|\Delta\mathbf{T}\|}\frac{\|\Delta\mathbf{T}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\|\Delta\mathbf{T}\|}\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\|\Delta\mathbf{T}\|}{\Delta t}$$

$$= 1\cdot\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\|\Delta\mathbf{T}\|}{\Delta t}.$$

Como se supone que en el límite Δt es positivo, concluimos que

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\left\|\frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta t}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|,$$

como se buscaba.

Para establecer la ecuación (7), cuando se aplica la ley de los cosenos al triángulo de vectores de la figura 3.21 se obtiene que

$$\|\Delta\mathbf{T}\|^2 = \|\mathbf{T}(t+\Delta t)\|^2 + \|\mathbf{T}(t)\|^2 - 2\|\mathbf{T}(t+\Delta t)\|\,\|T(t)\|\cos\Delta\theta$$

$$= 2 - 2\cos\Delta\theta,$$

debido a que $\mathbf{T}$ siempre es un vector unitario. Entonces,

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\|\Delta\mathbf{T}\|} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\sqrt{2-2\cos\Delta\theta}}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\sqrt{2\cdot 2(\operatorname{sen}^2(\Delta\theta/2))}}$$

de la fórmula de los medios ángulos, por lo que

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta}{\|\Delta\mathbf{T}\|} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\Delta\theta/2}{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)} = 1,$$

del muy conocido límite trigonométrico (o regla de L'Hopital). ■

La parte 2 de la proposición 2.3 proporciona una forma precisa de medir la curvatura de una trayectoria.

DEFINICIÓN 2.4 La **curvatura** κ de una trayectoria $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^3$ es la tasa angular de cambio de la dirección de $\mathbf{T}$ por cambio unitario de la distancia a lo largo de la trayectoria.

La razón para tomar la tasa de cambio de $\mathbf{T}$ *por cambio unitario de la distancia* en la definición de κ es porque la curvatura es una cantidad intrínseca (como queremos que sea). La figura 3.22 ayudará al lector a desarrollar su intuición respecto de κ.

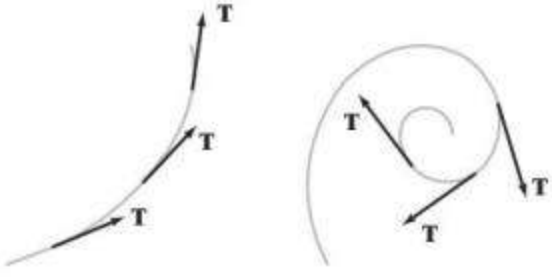


Figura 3.22 En la figura de la izquierda κ no es grande, ya que el vector unitario tangente vira solo un poco por cambio unitario de la distancia a lo largo de la trayectoria. En la figura de la derecha κ es mucho mayor, puesto que $\mathbf{T}$ vira mucho en relación con la distancia recorrida.

Como $\|d\mathbf{T}/dt\|$ mide la tasa de cambio angular de la dirección de $\mathbf{T}$ por cambio unitario en el parámetro (según la parte 2 de la proposición 2.3) y ds/dt es la razón de cambio de la distancia por cambio unitario del parámetro, se observa que

$$\kappa(t) = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{ds/dt} = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|, \tag{8}$$

donde la última igualdad se cumple de acuerdo con la regla de la cadena. Será la fórmula (8) la que usaremos cuando hagamos los cálculos.

EJEMPLO 6 Para el círculo $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t < 2\pi$,

$$\mathbf{x}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j}, \qquad \|\mathbf{x}'(t)\| = \frac{ds}{dt} = a,$$

por lo que

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\kappa = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{ds/dt} = \frac{1}{a} \| -\cos t\, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} \| = \frac{1}{a}.$$

Así, vemos que la curvatura de un círculo siempre es constante con un valor igual al recíproco del radio. Entonces, cuanto más pequeño sea el círculo, mayor será la curvatura (se invita al lector a que haga un dibujo para que se convenza por sí mismo). ◆

EJEMPLO 7 Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes en $\mathbf{R}^3$, y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, la trayectoria

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$$

traza una línea recta. Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{a}$$

por lo que,

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{a}\|.$$

Entonces,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|},$$

que es un vector constante. Entonces, $\mathbf{T}'(t) \equiv \mathbf{0}$ y la fórmula (8) implica de inmediato que κ es igual a cero, lo que está de acuerdo con el hecho intuitivo de que una recta no se curva. ◆

EJEMPLO 8 Volvamos a nuestra amiga la hélice

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt),$$

ya vimos que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}(t) = \frac{-a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} + b\, \mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Así, la fórmula (8) da

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left\| \frac{-a \cos t\, \mathbf{i} - a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Vemos que la curvatura de la hélice es constante, igual que la del círculo. En realidad, cuando b tiende a cero, la hélice degenera en un círculo y la curvatura resultante es consistente con la del ejemplo 6.

También podemos calcular la curvatura de la parametrización dada por la longitud de arco. La misma hélice también queda descrita por

$$\mathbf{x}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

y tenemos que

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k}.$$

Entonces, podemos calcular

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} - \frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j},$$

y así, a partir de la fórmula (8), calculamos:

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

lo que concuerda. ◆

El marco móvil y la torsión

Ahora introduciremos una tripleta de vectores unitarios mutuamente ortogonales que "recorren" una trayectoria dada $\mathbf{x}$: $I \to \mathbf{R}^3$, conocida como el **marco móvil** de la trayectoria. (Nota: en general el término "marco" significa una colección ordenada de vectores unitarios ortogonales entre sí en $\mathbf{R}^n$). Estos vectores deben considerarse como un conjunto de vectores especiales que son "ejes coordenados" que se mueven de punto a punto a lo largo de la trayectoria.

Para comenzar, supongamos que (i) $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ y que (ii) $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) \neq \mathbf{0}$ para toda t en I (la primera condición asegura que $\mathbf{x}$ nunca tiene velocidad igual a cero, y la segunda que $\mathbf{x}$ no es una trayectoria rectilínea). Entonces, el primer vector del marco móvil tan solo es el vector unitario tangente,

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

(Ahora el lector verá por qué se necesita la condición (i)). Para un segundo vector ortogonal a $\mathbf{T}$ recuerde la parte 1 de la proposición 2.3 que dice que $d\mathbf{T}/dt$ debe ser perpendicular a $\mathbf{T}$. Entonces, definimos

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|}. \tag{9}$$

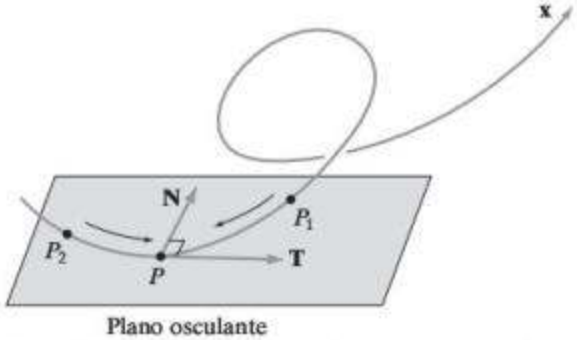
(De las suposiciones (i) y (ii) se concluye que $d\mathbf{T}/dt$ no es igual a cero). El vector $\mathbf{N}$ recibe el nombre de **vector normal principal** de $\mathbf{x}$. Por la regla de la cadena $\mathbf{N}$ también es dado por

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{\|d\mathbf{T}/ds\|}. \tag{10}$$

Como $\kappa = \|d\mathbf{T}/ds\|$ según la fórmula (8), también se ve que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}. \tag{11}$$

En un punto dado P a lo largo de la trayectoria, los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ (y también los vectores $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$) determinan lo que se conoce como **plano osculante** de la trayectoria en P (véase la figura 3.23). Este es el plano que contiene "instantáneamente" la



Plano osculante

Figura 3.23 Plano osculante de la trayectoria $\mathbf{x}$ en el punto P.

trayectoria en P (más precisamente, es el plano que se obtiene al tomar los puntos P_1 y P_2 sobre la trayectoria cerca de P y encontrar la posición limitante del plano a través de P, P_1 y P_2 cuando P_1 y P_2 tienden a P a lo largo de $\mathbf{x}$. La palabra "osculante" se deriva del latín *osculare*, que significa "besar".

Ahora que hemos definido dos vectores unitarios ortogonales $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, podemos producir un tercero que sea perpendicular a ambos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}. \tag{12}$$

El vector $\mathbf{B}$, llamado **vector binormal**, se define para que la tripleta ordenada $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ sea un sistema de mano derecha. Así, $\mathbf{B}$ es un vector unitario porque

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{T}\| \, \|\mathbf{N}\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

EJEMPLO 9 Para que la hélice $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, los vectores del marco móvil son

$$\mathbf{T}(t) = \frac{-a \operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + a \cos t \, \mathbf{j} + b \, \mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(como ya vimos).

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{(-a \cos t \, \mathbf{i} - a \operatorname{sen} t \, \mathbf{j})/\sqrt{a^2 + b^2}}{a/\sqrt{a^2 + b^2}} = -\cos t \, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t \, \mathbf{j},$$

y

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} t/\sqrt{a^2 + b^2} & a \cos t/\sqrt{a^2 + b^2} & b/\sqrt{a^2 + b^2} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} t \right) \mathbf{i} - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) \mathbf{j} + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{k}. \quad \blacklozenge$$

La ecuación (11) dice que la derivada de $\mathbf{T}$ (con respecto de la longitud de arco) es una función escalar, es decir, la curvatura, múltiple de la normal principal $\mathbf{N}$. Esto no es de sorprender, ya que $\mathbf{N}$ se define como paralela a la derivada de $\mathbf{T}$. Un resultado más notable (véase el apéndice al final de esta sección) es que la derivada del vector binormal también es siempre paralelo a la normal principal; es decir:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = (\text{función escalar})\mathbf{N}.$$

La convención estándar es escribir esta función escalar con signo negativo, por lo que se tiene

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}. \tag{13}$$

La función escalar τ así definida se llama **torsión** de la trayectoria $\mathbf{x}$. Hablando en términos aproximados, la torsión mide cuánto gira la trayectoria fuera del plano,

qué tan "tridimensional" es $\mathbf{x}$. Observe el lector que, de acuerdo con nuestras convenciones, la curvatura κ siempre es no negativa (explique por qué), mientras que τ puede ser positiva, negativa o cero.

EJEMPLO 10 Considere de nuevo el caso del movimiento circular. Así, sea $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t)$. Entonces, como se mostró en el ejemplo 6,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \frac{1}{a}.$$

Ahora calculamos

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \mathbf{k}, \quad \text{un vector constante.}$$

Así, $d\mathbf{B}/ds \equiv \mathbf{0}$, por lo que no hay torsión. Esto tiene sentido, ya que un círculo no gira hacia fuera del plano. ◆

EJEMPLO 11 Sea $\mathbf{x}(t) = (e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t, e^t)$. Calculamos $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ e identificamos la curvatura y la torsión de $\mathbf{x}$.

Para comenzar tenemos

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{e^t(\cos t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{i} + e^t(\cos t + \text{sen}\,t)\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}}{\sqrt{3}\,e^t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}((\cos t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (\cos t + \text{sen}\,t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

A partir de esto calculamos

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(-(\text{sen}\,t + \cos t)\,\mathbf{i} + (\cos t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{j})}{\sqrt{3}\,e^t}$$

$$= \frac{e^{-t}}{3}(-(\text{sen}\,t + \cos t)\,\mathbf{i} + (\cos t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{j}),$$

por lo que la curvatura es

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \frac{\sqrt{2}\,e^{-t}}{3}.$$

Ahora determinamos el resto del marco móvil:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(\text{sen}\,t + \cos t)\,\mathbf{i} + (\cos t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{j}),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{6}}((\text{sen}\,t - \cos t)\,\mathbf{i} - (\text{sen}\,t + \cos t)\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Por último, para encontrar la torsión calculamos

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}((\cos t + \text{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (\text{sen}\,t - \cos t)\,\mathbf{j})}{\sqrt{3}\,e^t}$$

$$= \frac{e^{-t}}{3\sqrt{2}}((\cos t + \text{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (\text{sen}\,t - \cos t)\,\mathbf{j})$$

$$= -\frac{e^{-t}}{3}\mathbf{N},$$

por lo tanto,

$$\tau = \frac{e^{-t}}{3}.$$

◆

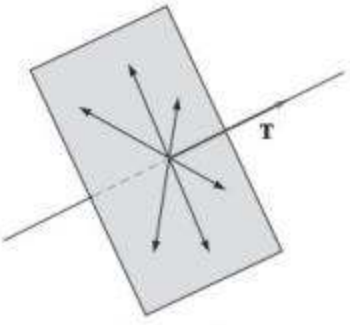


Figura 3.24 Cualquier vector en el plano perpendicular a **T** puede ser usado para **N**.

EJEMPLO 12 Si **a** y **b** son vectores en $\mathbf{R}^3$, entonces la trayectoria rectilínea $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ tiene, como vimos en el ejemplo 7, $\mathbf{T} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$. Así, tanto $d\mathbf{T}/dt$ como $d\mathbf{T}/ds$ son idénticamente iguales a cero. Entonces, $\kappa \equiv 0$ (como se vio en el ejemplo 7) y **N** no puede definirse usando la fórmula (9). A partir de consideraciones geométricas cualquier vector unitario perpendicular a **T** puede, en principio, usarse para **N** (véase la figura 3.24). Si escogemos uno de tales vectores, entonces **B** se puede calcular a partir de la fórmula (12). Puesto que **T**, **N** y **B** son todos constantes, τ debe ser igual a cero. Este es un ejemplo de un marco móvil que *no* es determinado solo por la trayectoria **x** y sirve para ilustrar por qué se hicieron las suposiciones de que $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$. ◆

Es importante darse cuenta de que el marco móvil, la curvatura y la torsión son cantidades *intrínsecas* a la curva trazada por la trayectoria. Es decir, cualquier trayectoria parametrizada que trace la misma curva (en la misma dirección) debe necesariamente tener las mismas funciones vectoriales **T**, **N** y **B**, y la misma curvatura y torsión. Esto se debe a que todas esas cantidades se pueden definir por completo en términos del parámetro intrínseco longitud de arco s (véase la definición 2.2 y las fórmulas (6), (8), (10), (11), (12) y (13).

Otro hecho importante es que la función curvatura κ y la función torsión τ determinan juntas toda la información geométrica acerca de la forma de la curva, excepto la posición particular de la curva en el espacio. Para ser más precisos tenemos el teorema siguiente, el cual no se demostrará:

TEOREMA 2.5 Establezca s como el parámetro de la longitud de arco y suponga que C_1 y C_2 son dos curvas de clase C^3 en $\mathbf{R}^3$. Suponga que las funciones correspondientes de curvatura κ_1 y κ_2 son estrictamente positivas. Entonces, si $\kappa_1(s) \equiv \kappa_2(s)$ y $\tau_1(s) \equiv \tau_2(s)$, las dos curvas deben ser congruentes (en el sentido de la geometría del bachillerato). En efecto, dadas dos funciones continuas cualesquiera κ y τ, donde $\kappa(s) > 0$ para toda s en el intervalo cerrado $[0, L]$, existe una curva única parametrizada por medio de la longitud de arco en $[0, L]$ (hasta la posición en el espacio) cuya curvatura y torsión son κ y τ, respectivamente.

Componentes tangencial y normal de la velocidad y aceleración. Otras fórmulas de la curvatura

Como hemos visto, el marco móvil proporciona un conjunto intrínseco de vectores, como ejes coordenados, que son especiales para la curva particular trazada por una trayectoria. En contraste, los vectores de velocidad y aceleración de una trayectoria definitivamente *no* son cantidades intrínsecas sino que dependen de la parametrización particular escogida y de la forma de la trayectoria (la velocidad de una trayectoria es por completo independiente de la geometría de la curva trazada). Podemos obtener una sensación de la relación entre el concepto intrínseco del marco móvil, y las cantidades extrínsecas de la velocidad y aceleración si expresamos estas dos últimas funciones vectoriales en términos de los vectores del marco móvil.

Así, comenzamos con una trayectoria C^2 $\mathbf{x}$: $I \to \mathbf{R}^3$ que tiene $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$. Por conveniencia de la notación, sea que $\dot{s}$ denote a ds/dt y que $\ddot{s}$ denote a d^2s/dt^2. De la definición 2.2 sabemos que $\mathbf{T} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ y entonces, como la velocidad $\dot{s} = ds/dt = \|\mathbf{v}\|$, tenemos que

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}\mathbf{T}. \tag{14}$$

Esta fórmula dice que la velocidad siempre es paralela al vector tangente unitario, algo que el lector conoce muy bien. Para obtener un resultado similar para la aceleración podemos diferenciar la ecuación (14) y aplicar la regla del producto:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{T}) = \ddot{s}\mathbf{T} + \dot{s}\frac{d\mathbf{T}}{dt}. \tag{15}$$

A continuación expresamos $d\mathbf{T}/dt$ en términos del marco **T**, **N** y **B**. La fórmula (11) da la derivada de $d\mathbf{T}/ds$ en términos de **N**. La regla de la cadena dice que $d\mathbf{T}/ds = (d\mathbf{T}/dt)/(ds/dt)$. Así, de la fórmula (11) tenemos que

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \dot{s}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \dot{s}\kappa\mathbf{N}.$$

Entonces, la ecuación (15) puede escribirse como

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}\mathbf{T} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{N}. \tag{16}$$

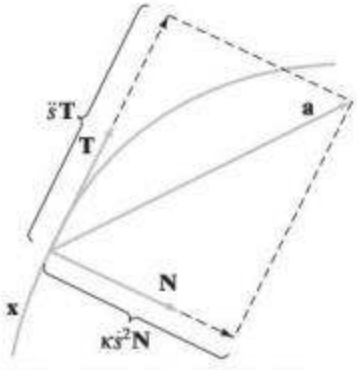


Figura 3.25 Descomposición de la aceleración **a** en sus componentes tangencial y normal.

ADVERTENCIA $\ddot{s} = d^2s/dt^2$ es la derivada de la rapidez, que es una función escalar. La aceleración **a** es la derivada de la *velocidad*, por lo que es una función vectorial.

Advierta que la fórmula (16) muestra que la aceleración no tiene componente en la dirección del vector binormal **B**. Por consiguiente, tanto la velocidad como la aceleración son vectores que se encuentran en el plano osculante de la trayectoria (véase la figura 3.25).

A primera vista puede no parecer especialmente fácil usar la fórmula (16) para resolver la aceleración en sus componentes tangencial y normal debido al término de la curvatura. Sin embargo,

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = (\ddot{s}\mathbf{T} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{N})\cdot(\ddot{s}\mathbf{T} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{N}) = \ddot{s}^2 + (\kappa\dot{s}^2)^2,$$

puesto que **T** y **N** son vectores perpendiculares. En consecuencia, podemos calcular las componentes como sigue:

$$\text{Componente tangencial de la aceleración} = a_{\text{tang}} = \ddot{s}.$$

$$\text{Componente normal de la aceleración} = a_{\text{norm}} = \kappa\dot{s}^2 = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\text{tang}}^2}.$$

EJEMPLO 13 Sea $\mathbf{x}(t) = (t, 2t, t^2)$. Entonces $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{k}$. Se tiene que $\dot{s} = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{5 + 4t^2}$. Por lo tanto,

$$a_{\text{tang}} = \ddot{s} = \frac{4t}{\sqrt{5 + 4t^2}}.$$

Como $\|\mathbf{a}\| = 2$, se observa que

$$a_{\text{norm}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\text{tang}}^2} = \sqrt{4 - \frac{16t^2}{5 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5 + 4t^2}}. \quad \blacklozenge$$

Las fórmulas (14) y (16) nos permiten encontrar una ecuación alternativa para la curvatura de la trayectoria. Solo calculamos que

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = (\dot{s}\mathbf{T})\times(\ddot{s}\mathbf{T} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{N}) = \dot{s}\ddot{s}(\mathbf{T}\times\mathbf{T}) + \kappa\dot{s}^3(\mathbf{T}\times\mathbf{N}) = \kappa\dot{s}^3\mathbf{B}.$$

Al recordar que $\dot{s} = \|\mathbf{v}\|$, al tomar magnitudes tenemos que

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = \kappa \|\mathbf{v}\|^3 \|\mathbf{B}\| = \kappa \|\mathbf{v}\|^3,$$

puesto que $\mathbf{B}$ es un vector unitario. Entonces

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}. \tag{17}$$

Esta fórmula relativamente sencilla expresa la curvatura (una cantidad intrínseca) en términos de las cantidades no intrínsecas de la velocidad y aceleración.

EJEMPLO 14 Para la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (2t^3 + 1, t^4, t^5)$ tenemos que

$$\mathbf{v}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 5t^4\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = 12t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + 20t^3\mathbf{k}.$$

El lector puede comprobar que

$$\|\mathbf{v}\| = t^2\sqrt{25t^4 + 16t^2 + 36}$$

y

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = \|4t^4(5t^2\mathbf{i} - 15t\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\| = 4t^4\sqrt{25t^4 + 225t^2 + 36}.$$

Por lo tanto, la fórmula (17) produce

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{4(25t^4 + 225t^2 + 36)^{1/2}}{t^2(25t^4 + 16t^2 + 36)^{3/2}},$$

que en este caso es visiblemente una forma más conveniente de determinar la curvatura. ◆

Resumen

En esta sección se han visto muchas fórmulas, y a primera vista puede parecer difícil generar los primeros enunciados de los resultados secundarios. A continuación se listan los hechos más fundamentales:

Para una trayectoria $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^3$:

Cantidades no intrínsecas:

$$\text{Velocidad } \mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t).$$

$$\text{Rapidez } \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{v}(t)\|.$$

$$\text{Aceleración } \mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t).$$

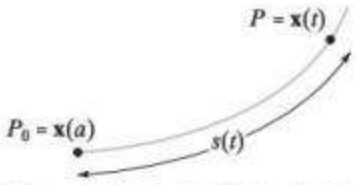


Figura 3.26 La función longitud de arco.

Función longitud de arco: (Véase la figura 3.26).

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{x}'(\tau)\|\, d\tau \quad \text{(El punto base es } P_0 = \mathbf{x}(a)\text{)}.$$

Cantidades intrínsecas:

El arco móvil:

$$\text{Vector unitario tangente } \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

$$\text{Vector normal principal } \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{\|d\mathbf{T}/ds\|} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|}.$$

$$\text{Vector binomial } \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}.$$

$$\text{Curvatura } \kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{ds/dt}.$$

$$\text{La torsión } \tau \text{ se define de modo que } \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}.$$

Fórmulas adicionales:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}\,\mathbf{T} \quad (\dot{s} \text{ es la rapidez}).$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \kappa \dot{s}^2 \mathbf{N} \quad (\ddot{s} \text{ es la derivada de la rapidez}).$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}.$$

Apéndice. Algo más sobre la torsión y las fórmulas de Frenet-Serret

Ahora obtendremos la fórmula (13), la base para definir la torsión de una curva. Es decir, demostramos que la derivada del vector binormal **B** (con respecto de la longitud de arco) siempre es paralela a la normal principal **N**, es decir, que $d\mathbf{B}/ds$ es una función escalar multiplicada por **N**. Los dos ingredientes principales en nuestra obtención son la parte 1 de la proposición 2.3 y la regla del producto.

Comenzamos por hacer notar que, como la tripleta ordenada de vectores (**T**, **N**, **B**) forma un marco para $\mathbf{R}^3$, cualquier vector móvil, inclusive $d\mathbf{B}/ds$, puede ser expresado como una **combinación lineal** de estos vectores; es decir, debemos tener

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = a(s)\mathbf{T} + b(s)\mathbf{N} + c(s)\mathbf{B}, \tag{18}$$

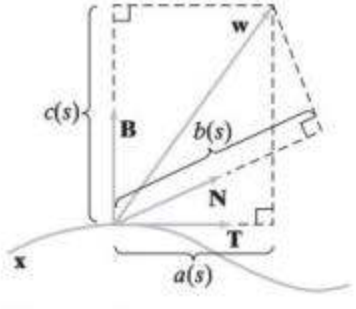


Figura 3.27 $\mathbf{w}(s) = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$.

donde a, b y c son funciones de variable escalar apropiadas [puesto que **T**, **N** y **B** son vectores unitarios mutuamente perpendiculares, cualquier vector (móvil) **w** en $\mathbf{R}^3$ puede descomponerse en sus componentes con respecto de **T**, **N** y **B** en una forma muy parecida a como puede descomponerse en sus componentes **i**, **j** y **k**, véase la figura 3.27]. Para encontrar los valores particulares de las funciones componentes a,

b y c se observa que podemos resolver para cada función aplicando productos punto apropiados a las ecuaciones (18). En específico,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{T} &= a(s)\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} + b(s)\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} + c(s)\mathbf{B}\cdot\mathbf{T}\\ &= a(s)\cdot 1 + b(s)\cdot 0 + c(s)\cdot 0\\ &= a(s),\end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{N} = b(s), \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{B} = c(s).$$

A partir de la proposición 1.7, $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y, por lo tanto, c debe ser igual a cero. Para determinar a se utiliza un ingenioso truco con la regla del producto. Como $\mathbf{T}\cdot\mathbf{B} = 0$, se sigue que $d/ds(\mathbf{T}\cdot\mathbf{B}) = 0$. Ahora, según la regla del producto,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{B}.$$

En consecuencia, $(d\mathbf{B}/ds)\cdot\mathbf{T} = -(d\mathbf{T}/ds)\cdot\mathbf{B}$. Así,

$$\begin{aligned}a(s) = \frac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{T} &= -\frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{B}\\ &= -\kappa\mathbf{N}\cdot\mathbf{B} \qquad \text{según la fórmula (11),}\\ &= 0,\end{aligned}$$

y la ecuación (18) se reduce a

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = b(s)\mathbf{N}.$$

No es posible hacer más reducciones y hemos demostrado que la derivada de $\mathbf{B}$ es paralela a $\mathbf{N}$. La torsión τ puede, entonces, definirse como $\tau/(s) = -b(s)$.

Las fórmulas (11) y (13) dan expresiones intrínsecas para $d\mathbf{T}/ds$ y $d\mathbf{B}/ds$, respectivamente. Podemos completar el conjunto al encontrar una expresión para $d\mathbf{N}/ds$. El método es el mismo que el que acabamos de usar. Comenzamos por escribir

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = a(s)\mathbf{T} + b(s)\mathbf{N} + c(s)\mathbf{B}, \tag{19}$$

donde a, b y c son funciones escalares apropiadas. Al tomar el producto punto de la ecuación (19) con cada una de $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ se obtiene lo siguiente:

$$a(s) = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\mathbf{T}, \qquad b(s) = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\mathbf{N}, \qquad c(s) = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\mathbf{B}.$$

El "truco de la regla del producto" que se usó aquí revela que

$$\begin{aligned}a(s) = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\mathbf{T} &= -\mathbf{N}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds}\\ &= -\mathbf{N}\cdot\kappa\mathbf{N} \qquad \text{por la fórmula (11)}\\ &= -\kappa,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}c(s) = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\mathbf{B} &= -\mathbf{N}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds}\\ &= -\mathbf{N}\cdot(-\tau\mathbf{N}) \qquad \text{por la fórmula (13)}\\ &= \tau.\end{aligned}$$

Además podemos diferenciar la ecuación $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ para encontrar

$$b(s) = \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds},$$

lo que implica que $b(s)$ es igual a cero. Entonces, la ecuación (19) se convierte en

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}.$$

Las fórmulas para $d\mathbf{T}/ds$, $d\mathbf{N}/ds$ y $d\mathbf{B}/ds$ por lo general se toman juntas como

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = \kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}'(s) = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}'(s) = -\tau\mathbf{N} \end{cases}$$

y se conocen como las **fórmulas de Frenet-Serret** para una curva en el espacio. Se llaman así en honor de Frédéric Frenet y Joseph Alfred Serret, quienes las publicaron por separado en 1852 y 1851, respectivamente. Las fórmulas de Frenet-Serret dan un sistema de ecuaciones diferenciales para una curva y son clave para obtener un resultado como el del teorema 2.5. Es frecuente que se escriban en forma matricial, en cuyo caso tienen un aspecto especialmente atractivo, como se ve a continuación,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

3.2 Ejercicios

Calcule la longitud de cada una de las trayectorias dadas en los ejercicios 1 a 8.

1. $\mathbf{x}(t) = (2t + 1, 7 - 3t), -1 \le t \le 2$
2. $\mathbf{x}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{2}{3}(2t + 1)^{3/2}\mathbf{j}, 0 \le t \le 4$
3. $\mathbf{x}(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 2t^{3/2}), 0 \le t \le 2$
4. $\mathbf{x}(t) = 7\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, 1 \le t \le 3$
5. $\mathbf{x}(t) = (t^3, 3t^2, 6t), -1 \le t \le 2$
6. $\mathbf{x}(t) = (\ln(\cos t), \cos t, \operatorname{sen} t), \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$
7. $\mathbf{x}(t) = (\ln t, t^2/2, \sqrt{2}t), 1 \le t \le 4$
8. $\mathbf{x}(t) = (2t\cos t, 2t\operatorname{sen} t, 2\sqrt{2}t^2), 0 \le t \le 3$
9. La trayectoria $\mathbf{x}(t) = (a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t)$, donde a es una constante positiva, traza una curva conocida como **astroide** o **hipocicloide de cuatro picos**. Dibuje esta curva y encuentre su longitud total (tenga cuidado cuando lo haga).
10. Si f es una función continuamente diferenciable, demuestre cómo puede usarse la definición 2.1 para establecer la fórmula siguiente:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

para la longitud de la curva $y = f(x)$, entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

11. Utilice el ejercicio 10 o la definición 2.1 (o ambas), para calcular la longitud del segmento de recta $y = mx + b$, entre (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Explique su resultado con un dibujo apropiado.
12. *a*) Calcule la longitud del segmento de recta determinado por la trayectoria

$$\mathbf{x}(t) = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)$$

Cuando t varía de t_0 a t_1.

b) Compare su resultado con el del ejercicio 11.

c) Ahora calcule la longitud del segmento de recta determinado por la trayectoria $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ a medida que t varía de t_0 a t_1.

13. Este problema tiene que ver con la trayectoria $\mathbf{x} = |t - 1|\,\mathbf{i} + |t|\,\mathbf{j}, -2 \le t \le 2$.

a) Dibuje la trayectoria.

b) La trayectoria no es de clase C^1, pero es por partes C^1. Explique esto.

c) Calcule la longitud de la trayectoria.

14. Considere la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$.

a) Explique por qué las espirales de la trayectoria tienden hacia el origen cuando $t \to +\infty$.

b) Demuestre que para cualquier valor de a, la integral impropia

$$\int_a^{\infty} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt$$

converge.

c) Interprete lo que dice el resultado del inciso anterior acerca de la trayectoria $\mathbf{x}$.

15. Suponga que una curva es dada en coordenadas polares por una ecuación de la forma $r = f(\theta)$, donde f es de clase C^1. Use la definición 2.1 para obtener la fórmula

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta$$

para la longitud de la curva entre los puntos $(f(\alpha), \alpha)$ y $(f(\beta), \beta)$ (dados en coordenadas polares).

16. *a*) Encuentre el parámetro de la longitud de arco $s = s(t)$ para la trayectoria

$$\mathbf{x}(t) = e^{at}\cos bt\,\mathbf{i} + e^{at}\operatorname{sen} bt\,\mathbf{j} + e^{at}\,\mathbf{k}.$$

b) Exprese el parámetro original t en términos de s y, así, reparametrice $\mathbf{x}$ en términos de s.

Determine el marco móvil $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ *y calcule la curvatura y torsión para las trayectorias dadas en los ejercicios 17 a 20.*

17. $\mathbf{x}(t) = 5\cos 3t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 5\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t - t\cos t)\,\mathbf{i} + (\cos t + t\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $t \geq 0$

19. $\mathbf{x}(t) = \left(t, \frac{1}{3}(t+1)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}\right)$, $-1 < t < 1$

20. $\mathbf{x}(t) = (e^{2t}\operatorname{sen} t, e^{2t}\cos t, 1)$

21. *a*) Use la fórmula (17) de esta sección para establecer la siguiente fórmula, bien conocida, de la curvatura de una curva plana $y = f(x)$:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}},$$

(Suponga que f es de clase C^2).

b) (Use su resultado del inciso anterior para encontrar la curvatura de $y = \ln(\operatorname{sen} x)$.

22. *a*) Sea $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))$ una curva plana parametrizada por medio de la longitud de arco. Demuestre que la curvatura es dada por la fórmula

$$\kappa = |x'y'' - x''y'|.$$

b) Demuestre que $\mathbf{x}(s) = \left(\frac{1}{2}(1-s^2), \frac{1}{2}(\cos^{-1} s - s\sqrt{1-s^2})\right)$ está parametrizada por la longitud de arco y calcule su curvatura.

En los ejercicios 23 a 26 a) use un sistema de álgebra por computadora para calcular la curvatura κ *de la trayectoria indicada* $\mathbf{x}$ *y b) grafique la trayectoria* $\mathbf{x}$ *y, por separado, grafique la curvatura* κ *como función de t sobre el intervalo indicado para t y los valores de las constantes.*

23. $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $a = 2, b = 1$

24. $\mathbf{x}(t) = (2a(1+\cos t)\cos t, 2a(1+\cos t)\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $a = 1$

25. $\mathbf{x}(t) = (2a\cos t(1+\cos t) - a, 2a\operatorname{sen} t(1+\cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $a = 1$

26. $\mathbf{x}(t) = (a\operatorname{sen} nt, b\operatorname{sen} mt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $a = 3$, $b = 2, n = 4, m = 3$

Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración para las trayectorias dadas en los ejercicios 27 a 32.

27. $\mathbf{x}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}$

28. $\mathbf{x}(t) = (2t, e^{2t})$

29. $\mathbf{x}(t) = (e^t\cos 2t, e^t\operatorname{sen} 2t)$

30. $\mathbf{x}(t) = (4\cos 5t, 5\operatorname{sen} 4t, 3t)$

31. $\mathbf{x}(t) = (t, t, t^2)$

32. $\mathbf{x}(t) = \frac{3}{5}(1-\cos t)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\cos t\,\mathbf{k}$

33. *a*) Demuestre que las componentes tangencial y normal de la aceleración a_{tang} y a_{norm} satisfacen las ecuaciones

$$a_{\text{tang}} = \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}'\|}, \qquad a_{\text{norm}} = \frac{\|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''\|}{\|\mathbf{x}'\|}.$$

b) Use estas fórmulas para encontrar las componentes tangencial y normal de la aceleración para la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (t+2)\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$.

34. Use el ejercicio 33 para demostrar que para la curva plana $y = f(x)$,

$$a_{\text{tang}} = \frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$

$$a_{\text{norm}} = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}.$$

35. Establezca la siguiente fórmula para la torsión:

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}'}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|^2}.$$

36. Demuestre que $\kappa\tau = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{B}'$, donde la diferenciación es con respecto del parámetro de la longitud de arco s.

37. Demuestre que si $\mathbf{x}$ es una trayectoria parametrizada por medio de la longitud de arco con $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\kappa^2\tau = (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \cdot \mathbf{x}'''.$$

38. Suponga que $\mathbf{x}$: $I \to \mathbf{R}^3$ es una trayectoria con $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) \neq \mathbf{0}$ para toda $t \in I$. El **plano osculante** a la trayectoria en $t = t_0$ es el que contiene $\mathbf{x}(t_0)$ y es determinado por (es decir, es paralelo a), los vectores tangente y normal $\mathbf{T}(t_0)$ y $\mathbf{N}(t_0)$.

El **plano rectificador** en $t = t_0$ es el que contiene $\mathbf{x}(t_0)$ y es determinado por los vectores tangente y binormal $\mathbf{T}(t_0)$ y $\mathbf{B}(t_0)$. Por último, el **plano normal** en $t = t_0$ es el que contiene a $\mathbf{x}(t_0)$ y es determinado por los vectores normal y binormal $\mathbf{N}(t_0)$ y $\mathbf{B}(t_0)$. Observe que los dos planos, el osculante y el rectificador, pueden considerarse tangentes a la trayectoria en t_0, puesto que son paralelos a $\mathbf{T}(t_0)$.

a) Demuestre que $\mathbf{B}(t_0)$ es perpendicular al plano osculante en t_0, que $\mathbf{N}(t_0)$ es perpendicular al plano rectificador en t_0, y que $\mathbf{T}(t_0)$ es perpendicular al plano normal en t_0.

b) Calcule las ecuaciones para los planos osculante, rectificador y normal a la hélice $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ en cualquier t_0. (Sugerencia: para acelerar sus cálculos, use los resultados del ejemplo 9).

39. Recuerde que la ecuación de una esfera de radio $a > 0$ y centro en $\mathbf{x}_0$ puede escribirse como $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = a$ (véase el ejemplo 15 de la sección 2.1). Explique por qué la imagen de una trayectoria $\mathbf{x}$ con la propiedad de que

$$(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0) = a^2$$

para toda t debe estar sobre una esfera de radio a.

40. Establezca $\mathbf{x}$ como una trayectoria con $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$ y suponga que existe un punto $\mathbf{x}_0$ que está sobre cada plano normal a $\mathbf{x}$. Demuestre que la imagen de $\mathbf{x}$ está sobre una esfera (véase el ejercicio 38 acerca de planos normales a trayectorias).

41. Utilice el resultado del ejercicio 40 para demostrar que $\mathbf{x}(t) = (\cos 2t, -\operatorname{sen} 2t, 2 \cos t)$ está sobre una esfera probando que $(1, 0, 0)$ se encuentra sobre cada plano normal a $\mathbf{x}$.

42. Use el resultado del ejercicio 27 de la sección 1.4 para demostrar que

$$\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}.$$

Como resultado, podemos arreglar $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en un círculo de modo que correspondan, respectivamente, a los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ que aparecen en la figura 1.54 y, por lo tanto, podemos usar un truco nemotécnico para identificar productos cruz que sean similares al descrito en el ejemplo 1 de la sección 1.4.

Sea $\mathbf{x}$ una trayectoria de clase C^3, parametrizada por medio de la longitud de arco s, con $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$. Definimos el ***vector de rotación de Darboux*** *(también llamado* ***vector de velocidad angular****) por medio de*

$$\mathbf{w} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}.$$

Advierta que $\mathbf{w}(s_0)$ es paralelo al plano rectificador a $\mathbf{x}(s_0)$. La dirección del vector de Darboux $\mathbf{w}$ da el eje del movimiento "en tornillo" de la trayectoria $\mathbf{x}$ y su longitud da la velocidad angular del movimiento. Los ejercicios 43 a 45 se refieren al vector de Darboux.

43. Demuestre que $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$. (Sugerencia: los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ son ortogonales por parejas).

44. *a*) Utilice las fórmulas de Frenet-Serret para establecer las **fórmulas de Darboux**:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{w} \times \mathbf{T}$$

$$\mathbf{N}' = \mathbf{w} \times \mathbf{N}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{w} \times \mathbf{B}.$$

b) Use las fórmulas de Darboux para establecer las de Frenet-Serret. De ahí que los dos conjuntos de ecuaciones sean equivalentes. (Sugerencia: use el ejercicio 42).

45. Demuestre que $\mathbf{x}$ es una hélice si y solo si $\mathbf{w}$ es un vector constante. (Sugerencia: considere $\mathbf{w}'$ y use el teorema 2.5).

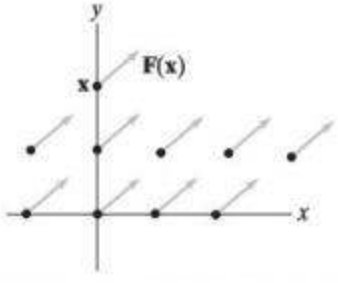


Figura 3.28 El campo vectorial constante $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

3.3 Campos vectoriales. Una introducción

Comenzaremos con una definición sencilla.

DEFINICIÓN 3.1 Un **campo vectorial** sobre $\mathbf{R}^n$ es un mapeo

$$\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Nos ocuparemos sobre todo de campos vectoriales sobre $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. En tales casos, adoptamos el punto de vista de que un campo vectorial asigna a cada *punto* $\mathbf{x}$ en X un *vector* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{R}^n$ representado por una flecha cuyo origen está en el punto $\mathbf{x}$. Este punto de vista nos permite visualizar los campos vectoriales en una forma razonable.

EJEMPLO 1 Suponga que $\mathbf{F}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es definido por $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante. Entonces, $\mathbf{F}$ asigna $\mathbf{a}$ a cada punto de $\mathbf{R}^2$ y, por consiguiente, podemos representar $\mathbf{F}$ con un dibujo del mismo vector (por supuesto, trasladado en forma paralela) que emana de cada punto en el plano como se aprecia en la figura 3.28. ◆

(x, y)	$\mathbf{G}(x, y)$
$(0, 0)$	$\mathbf{0}$
$(1, 0)$	$-\mathbf{j}$
$(0, 1)$	$\mathbf{i}$
$(1, 1)$	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$

EJEMPLO 2 Ilustremos $\mathbf{G}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{G}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Podemos comenzar a hacer esto calculando algunos valores específicos de $\mathbf{G}$, como se observa en la tabla adyacente. Sin embargo, de esta forma es difícil lograr la percepción de $\mathbf{G}$ como un todo. Para entender mejor a $\mathbf{G}$ necesitamos "jugar" un poco. Advierta que

$$\|\mathbf{G}(x, y)\| = \|y\mathbf{i} - x\mathbf{j}\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|\mathbf{r}\|,$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, que es el vector de posición del punto (x, y). De esta observación se sigue que $\mathbf{G}$ tiene una longitud constante a sobre el círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Además, tenemos que

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}(x, y) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) = 0.$$

De ahí que $\mathbf{G}(x, y)$ siempre es perpendicular al vector de posición del punto (x, y). Estos hechos, junto con una tabla como la precedente, permiten ver que $\mathbf{G}$ tiene un aspecto como el que se ilustra en la figura 3.29. ◆

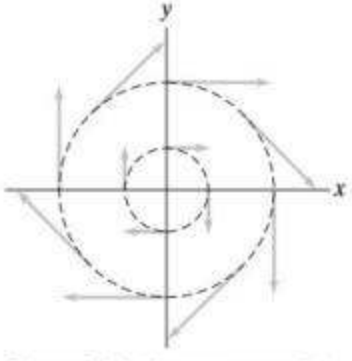


Figura 3.29 El campo vectorial $\mathbf{G}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ del ejemplo 2.

COMENTARIO En ocasiones una función de variable escalar f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ se denomina **campo escalar**. Se piensa en un campo vectorial en $\mathbf{R}^n$ como algo que contiene información vectorial (como la velocidad del viento) en cada punto, y en un campo escalar como algo que tiene información sobre números reales (como la temperatura o la presión). Usaremos la expresión "campo escalar" solo ocasionalmente pero no queremos sorprender al lector cuando lo hagamos.

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. El llamado campo vectorial del **cuadrado inverso** en $\mathbf{R}^3$ es una función $\mathbf{F}$: $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

donde c es cualquier constante (distinta de cero). Si el término "cuadrado inverso" parece inapropiado para el lector, trataremos de convencerlo de otra manera. Hagamos $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ de modo que $\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|\mathbf{u}$. Entonces, $\mathbf{F}$ es dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} = \left(\frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\right)\left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}. \tag{1}$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuya dirección en el punto $P(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ es paralela al vector que va del origen a P y cuya magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen a P. Advierta que si c es positiva, $\mathbf{F}$ apunta hacia fuera del origen, y si c es negativa, apunta hacia el origen.

En la sección 3.1 vimos un ejemplo de un cuadrado inverso —que era el campo gravitacional newtoniano entre dos cuerpos. Si uno de los cuerpos se halla en el origen y el otro en (x, y, z), entonces tenemos que

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.$$

En este caso, la constante de proporcionalidad c es $-GMm$, que es negativa. Esto significa que la fuerza gravitacional es de atracción, es decir, apunta en la dirección que *reduce* la distancia entre los dos cuerpos. En la figura 3.30 se ilustra dicho campo vectorial. Un ejemplo de campo de repulsión del inverso cuadrado es la fuerza

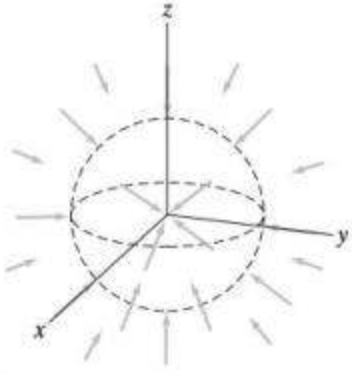


Figura 3.30 Un campo vectorial del cuadrado inverso.

electrostática entre dos partículas con cargas estáticas iguales (ambas positivas o ambas negativas). Esta fuerza es expresada por la ley de Coulomb,

$$\mathbf{F} = \frac{kq_1q_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u},$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector que va de la partícula 1 (en el origen) a la partícula 2, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, q_1 y q_2 son las cargas respectivas (positivas o negativas) sobre las partículas y k es una constante apropiada para las unidades usadas. En unidades del sistema mks la distancia se mide en metros, la carga en coulombs y la fuerza en newtons, de modo que k es igual a $8.9875 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$. ◆

Campo gradiente y campo potencial

Los campos del cuadrado inverso son interesantes no solo por su origen en situaciones de la física básica, sino también porque son ejemplos de campos gradiente. Un **campo gradiente** sobre $\mathbf{R}^n$ es un campo vectorial $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función (diferenciable) de variable escalar $f: X \to \mathbf{R}$. Es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$$

en toda $\mathbf{x}$ en X. La función f se llama **función potencial** (escalar) para el campo vectorial $\mathbf{F}$. Para ver lo que esto significa en el caso del campo del cuadrado inverso (1) escribamos en forma explícita las componentes de $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} = \left(\frac{c}{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

puesto que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Es decir,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}.$$

Se deja al lector como ejercicio comprobar que $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, donde $f: \mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ es dada por

$$f(x,y,z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{c}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Comentario En física e ingeniería es frecuente que se introduzca un signo negativo en la definición de una función potencial, es decir, de modo que una función potencial g para un campo vectorial $\mathbf{F}$ es tal que $\mathbf{F} = -\nabla g$. La motivación atrás de dicha convención es que en las aplicaciones físicas es deseable hacer que la función potencial represente la energía potencial en algún sentido. Por ejemplo, en el caso del campo gravitacional $\mathbf{F} = -(GMm/\|\mathbf{r}\|^2)\mathbf{u}$, un físico tomaría la función potencial como $-GMm/\|\mathbf{r}\|$, y no usaría $+GMm/\|\mathbf{r}\|$ como lo hacemos nosotros. La ventaja para el físico al hacerlo es que la función potencial en la física se incrementa cuando aumenta $\|\mathbf{r}\|$. Esto corresponde al concepto de que cuanto mayor sea la distancia entre dos cuerpos, mayor debe ser la energía potencial gravitacional almacenada.

Del teorema 6.4 del capítulo 2 sabemos que el gradiente de cualquier función de variable escalar C^1, $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es perpendicular a los conjuntos nivel de f. Así, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial gradiente sobre $\mathbf{R}^n$, entonces $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ debe ser perpendicular al conjunto nivel de una función potencial de $\mathbf{F}$ que contenga al punto $\mathbf{x}$. Si f es dicha

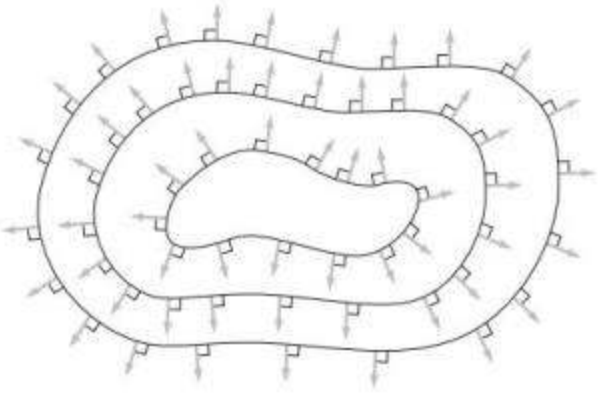


Figura 3.31 Un campo vectorial gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$. Se ilustran las líneas equipotenciales en las que f es constante.

función potencial, el conjunto nivel $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = c\}$ recibe el nombre de **conjunto equipotencial** (o **superficie equipotencial** si $n = 3$, o **línea equipotencial** si $n = 2$) del campo vectorial $\mathbf{F}$ (véase la figura 3.31).

Cada vez que el lector ha observado un mapa del clima, ha visto ejemplos de líneas equipotenciales. Por lo general aparecen dibujadas las curvas de presión barométrica constante (llamadas **isobaras**), o de temperatura constante (**isotermas**) (véase la figura 3.32). Asociadas a dichas líneas equipotenciales, perpendiculares a ellas, están campos vectoriales gradiente que apuntan en dirección del incremento más rápido de presión o temperatura.

Líneas de flujo de campos vectoriales

Cuando se dibuja un campo vectorial sobre $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ es fácil imaginar que las flechas representan la velocidad de algún fluido que se mueve a través del espacio, como en la figura 3.33. Es natural permitir que las flechas se flexionen en curvas completas.

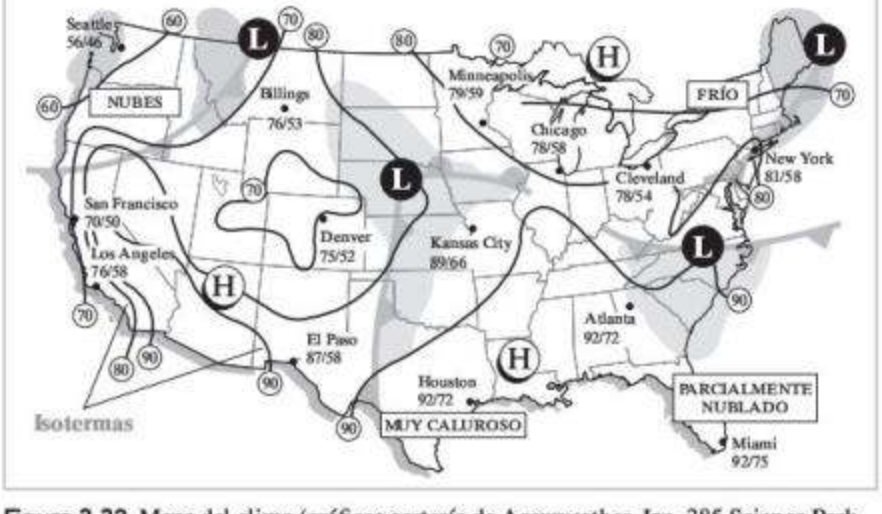


Figura 3.32 Mapa del clima (gráficas cortesía de Accuweather, Inc. 385 Science Park Road, State College, PA 16803. (814) 237-0309. © 2011. Se usa con permiso).

Figura 3.33 Fluido que se mueve a través del espacio.

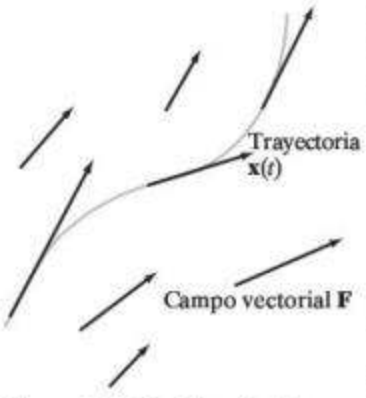


Figura 3.34 Una línea de flujo.

Lo que se está haciendo analíticamente es dibujar trayectorias cuyos vectores de velocidad coinciden con los del campo vectorial.

DEFINICIÓN 3.2 Una **línea de flujo** de un campo vectorial $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una trayectoria diferenciable $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)).$$

Es decir, el vector velocidad de $\mathbf{x}$ en el momento t es dado por el valor del campo vectorial $\mathbf{F}$ en el punto sobre $\mathbf{x}$ en el momento t (véase la figura 3.34).

EJEMPLO 4 Calcularemos las líneas de flujo del campo vectorial constante $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Un dibujo de este campo vectorial (figura 3.35) facilita creer que las líneas de flujo son trayectorias rectilíneas. Entonces, si $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una línea de flujo, entonces, por la definición 3.2, debemos tener que

$$\mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2, -3, 1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)).$$

Al igualar componentes se observa que

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = -3 \\ z'(t) = 1 \end{cases}.$$

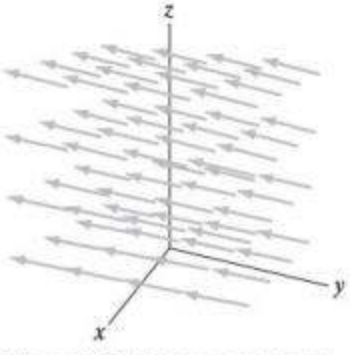


Figura 3.35 El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ del ejemplo 4.

Estas ecuaciones diferenciales se resuelven con facilidad mediante una integración directa y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} x(t) = 2t + x_0 \\ y(t) = -3t + y_0 \\ z(t) = t + z_0 \end{cases},$$

donde x_0, y_0 y z_0 son constantes arbitrarias. En consecuencia, como se esperaba, se obtienen las ecuaciones paramétricas de una trayectoria rectilínea que pasa por un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0) con el vector velocidad $(2, -3, 1)$. ◆

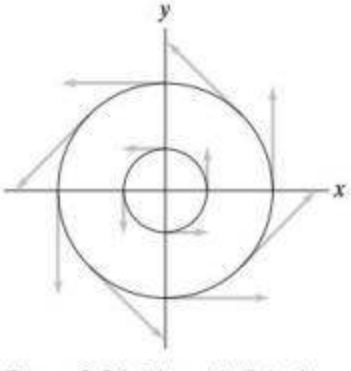


Figura 3.36 Líneas de flujo de $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 La intuición del amable lector lo habrá hecho sospechar que una línea de flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ debe ser circular como se aprecia en la figura 3.36. En efecto, si $\mathbf{x}: [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^2$ es dada por $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$, donde a es una constante, entonces

$$\mathbf{x}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} = \mathbf{F}(a \cos t, a \operatorname{sen} t),$$

de manera que tales trayectorias son en verdad líneas de flujo.

Encontrar todas las líneas de flujo posible de $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es una tarea más difícil. Si $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ es una línea de flujo, entonces, según la definición 3.2, debemos tener:

$$\mathbf{x}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = -y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)).$$

Al igualar las componentes,

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}.$$

Este es un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se sabe que *todas* las soluciones de este sistema son de la forma

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t - b \operatorname{sen} t, a \operatorname{sen} t + b \cos t),$$

donde a y b son constantes arbitrarias. No es difícil ver que dichas trayectorias trazan círculos cuando al menos una de a o b son distintas de cero. ◆

En general, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial sobre $\mathbf{R}^n$, encontrar las líneas de flujo es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = F_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

para las funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, que son las componentes de la línea de flujo $\mathbf{x}$. (La función F_i tan solo es la i-ésima función componente del campo vectorial $\mathbf{F}$). Este problema nos remite directamente al ámbito de la teoría de las ecuaciones diferenciales, un tema fascinante pero que no es de nuestro principal interés en este momento.

3.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 dibuje los campos vectoriales dados sobre $\mathbf{R}^2$.

1. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F} = (-x, y)$
4. $\mathbf{F} = (x, x^2)$
5. $\mathbf{F} = (x^2, x)$
6. $\mathbf{F} = (y^2, y)$

En los ejercicios 7 a 12 dibuje el campo vectorial dado sobre $\mathbf{R}^3$.

7. $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = (y, -x, 0)$
9. $\mathbf{F} = (0, z, -y)$
10. $\mathbf{F} = (y, -x, 2)$
11. $\mathbf{F} = (y, -x, z)$
12. $\mathbf{F} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$

En los ejercicios 13 a 16 use una computadora para graficar los campos vectoriales dados en los rangos que se indican.

13. $\mathbf{F} = (x - y, x + y)$; $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$
14. $\mathbf{F} = (y^3x, x^2y)$; $-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$
15. $\mathbf{F} = (x \operatorname{sen} y, y \cos x)$; $-2\pi \le x \le 2\pi, -2\pi \le y \le 2\pi$
16. $\mathbf{F} = (\cos(x - y), \operatorname{sen}(x + y))$; $-2\pi \le x \le 2\pi, -2\pi \le y \le 2\pi$

En los ejercicios 17 a 19 compruebe que la trayectoria dada sea una línea de flujo del campo vectorial indicado. Justifique su respuesta en forma geométrica con el dibujo que sea apropiado.

17. $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$, $\mathbf{F} = (y, -x, 0)$
18. $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 2t)$, $\mathbf{F} = (y, -x, 2)$
19. $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, e^{2t})$, $\mathbf{F} = (y, -x, 2z)$

En los ejercicios 20 a 22 calcule la línea de flujo $\mathbf{x}(t)$ *del campo vectorial dado* $\mathbf{F}$ *que pasa por el punto indicado en el valor que se especifica para* t.

20. $\mathbf{F}(x, y) = -x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$; $\mathbf{x}(0) = (2, 1)$
21. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y)$; $\mathbf{x}(1) = (1, e)$
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\,\mathbf{i} - 3y\,\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; $\mathbf{x}(0) = (3, 5, 7)$
23. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
    a) Demuestre que $\mathbf{F}$ es un campo gradiente.
    b) Describa las superficies equipotenciales de $\mathbf{F}$ en palabras y con dibujos.
24. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
    a) Demuestre que $\mathbf{F}$ es un campo gradiente.
    b) Describa las superficies equipotenciales de $\mathbf{F}$ en palabras y con dibujos.
25. Si $\mathbf{x}$ es una línea de flujo de un campo vectorial gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$, demuestre que la función $G(t) = f(\mathbf{x}(t))$ es una función creciente de t. (Sugerencia: demuestre que $G'(t)$ siempre es no negativa). Así, vemos que una partícula que se mueva a lo largo de una línea de flujo del campo gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$ se moverá de los valores menores a los mayores de la función potencial f. Esa es la razón por la que los físicos definen una función potencial de un campo vectorial gradiente $\mathbf{F}$ como una función g tal que $\mathbf{F} = -\nabla g$, es decir, de modo que las partículas que se mueven a lo largo de líneas de flujo se muevan de los valores mayores hacia los menores de g).

Sea $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *un campo vectorial continuo. Sea* (a, b) *el intervalo en* $\mathbf{R}$ *que contiene a* 0 *(piense en* (a, b) *como un "intervalo de tiempo"). Un* ***flujo*** *de* $\mathbf{F}$ *es una función diferenciable* $\phi: X \times (a, b) \to \mathbf{R}^n$ *de* $n + 1$ *variables tales que*

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)); \quad \phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}.$$

Intuitivamente pensamos en $\phi(\mathbf{x}, t)$ *como el punto en el momento* t *sobre la línea de flujo de* $\mathbf{F}$ *que pasa por* $\mathbf{x}$ *en el momento* 0 *(consulte la figura 3.37). Así, el flujo de* $\mathbf{F}$ *es, en cierto sentido, la colección de todas las líneas de flujo de* $\mathbf{F}$. *Los ejercicios 26 a 31 se refieren a flujos de campos vectoriales.*

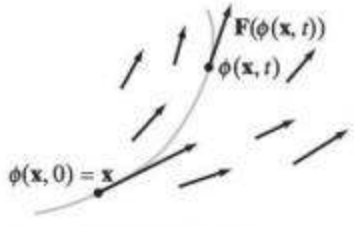


Figura 3.37 El flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$.

26. Compruebe que

$$\phi: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,$$

$$\phi(x, y, t) = \left(\frac{x+y}{2}e^t + \frac{x-y}{2}e^{-t}, \frac{x+y}{2}e^t + \frac{y-x}{2}e^{-t}\right)$$

es un flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$.

27. Compruebe que

$$\phi: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,$$

$$\phi(x, y, t) = (y \operatorname{sen} t + x \cos t, y \cos t - x \operatorname{sen} t)$$

es un flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$.

28. Verifique que

$$\phi: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3,$$

$$\phi(x, y, z, t) = (x \cos 2t - y \operatorname{sen} 2t, y \cos 2t + x \operatorname{sen} 2t, ze^{-t})$$

es un flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$.

29. Demuestre que si $\phi: X \times (a, b) \to \mathbf{R}^n$ es un flujo de $\mathbf{F}$, entonces, para un punto fijo x_0 en X, el mapa $\mathbf{x}: (a, b) \to \mathbf{R}^n$ dado por $\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{x}_0, t)$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$.

30. Si ϕ es un flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$, explique por qué $\phi(\phi(\mathbf{x}, t), s) = \phi(\mathbf{x}, s + t)$. (Sugerencia: relacione el valor del flujo ϕ en $(\mathbf{x}, t)$ con la línea de flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathbf{x}$. Suponga que la línea de flujo de un campo vectorial continuo en un punto y tiempo dados es determinada en forma única.

31. Obtenga la **ecuación de la primera variación** para un flujo de un campo vectorial. Es decir, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 con flujo ϕ de clase C^2, demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t) = D\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)) D_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t).$$

Aquí, la expresión "$D_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t)$" significa diferenciar ϕ con respecto de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir, se mantiene fija a t.

3.4 El gradiente, la divergencia, el rotacional y el operador nabla

En esta sección se consideran ciertos tipos de operaciones de diferenciación sobre campos vectoriales y escalares. Estas operaciones son las siguientes:

1. El gradiente, que convierte un campo escalar en uno vectorial.
2. La divergencia, que transforma un campo vectorial en uno escalar.
3. El rotacional, que cambia un campo vectorial en otro vectorial. (Nota: el rotacional solo puede definirse para campos vectoriales en $\mathbf{R}^3$).

Comenzaremos por definir estas operaciones exclusivamente desde el punto de vista de su cálculo. De manera gradual pasaremos a entender su significado geométrico.

El operador nabla

El **operador nabla**, que se denota con ∇, es una criatura extraña. Tiene una doble vida, es un operador diferencial al mismo tiempo que es un vector. En coordenadas

cartesianas sobre $\mathbf{R}^3$ nabla se define por la curiosa expresión siguiente:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

Las derivadas parciales "vacías" son las componentes de un vector que esperan campos escalares y vectoriales sobre los cuales actuar. Nabla opera, es decir, transforma, sobre campos por medio de la "multiplicación" de vectores interpretados utilizando diferenciación parcial.

Por ejemplo, si f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es una función diferenciable (campo escalar), el gradiente de f puede considerarse como el resultado de multiplicar el vector ∇ por el escalar f, excepto que cuando cada componente de ∇ se "multiplica" por f, en realidad se calcula la derivada parcial correspondiente:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

El operador nabla también puede definirse en $\mathbf{R}^n$ para un valor arbitrario de n. Si tomamos a $(x_1, x_2, \ldots, x_n$ como las coordenadas para $\mathbf{R}^n$, entonces nabla es tan solo:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ es el vector básico estándar para $\mathbf{R}^n$.

La divergencia de un campo vectorial

Mientras que obtener el gradiente de un campo escalar produce un campo vectorial, el proceso de calcular la divergencia hace justamente lo contrario: convierte un campo vectorial en uno escalar.

DEFINICIÓN 4.1 Sea $\mathbf{F}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un campo vectorial diferenciable. Entonces, la **divergencia** de $\mathbf{F}$ se denota como div $\mathbf{F}$ o $\nabla \cdot \mathbf{F}$ (esta expresión se lee "nabla punto $\mathbf{F}$") y es el campo escalar

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas cartesianas para $\mathbf{R}^n$ y $F_1, \ldots, F_n$ son las funciones componentes de $\mathbf{F}$.

Es esencial que en la fórmula de la definición 4.1 se utilicen coordenadas cartesianas (más adelante, en esta sección, veremos cómo se ve div $\mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas para $\mathbf{R}^3$).

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, entonces

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy. \quad \blacklozenge$$

La notación para la divergencia que involucra el producto punto y el operador nabla es especialmente apropiada: si escribimos

$$\mathbf{F} = F_1 e_1 + F_2 e_2 + \cdots + F_n e_n,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + F_n \mathbf{e}_n) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},\end{aligned}$$

donde, una vez más, interpretamos la "multiplicación" como una función por medio de un operador diferencial parcial como si se hiciera dicha diferenciación parcial sobre la función dada.

Intuitivamente, el valor de la divergencia de un campo vectorial en un punto particular da una medida del "flujo neto de masa" o "densidad de flujo" del campo vectorial hacia dentro o fuera de dicho punto. Para entender el significado de este enunciado imagine el lector que el campo vectorial $\mathbf{F}$ representa la velocidad de un fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es igual a cero en cierto punto, entonces la velocidad a la que el fluido está fluyendo en ese punto es igual a la velocidad a la que fluye hacia fuera. La divergencia positiva en un punto significa que sale más fluido que el que entra, mientras que la divergencia negativa significa exactamente lo contrario. Cuando dispongamos de algunas herramientas del cálculo integral vectorial seremos más precisos en los enunciados anteriores, e incluso los demostraremos. Sin embargo, por ahora hacemos notar que un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ en todo lugar recibe el nombre de **incompresible** o **solenoidal**.

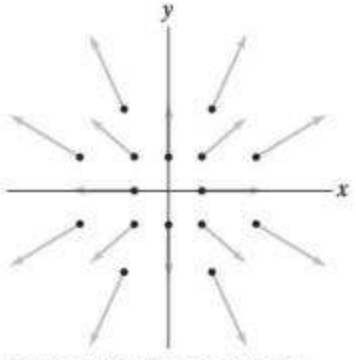


Figura 3.38 Campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 El campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2.$$

Este campo vectorial se ilustra en la figura 3.38. En cualquier punto en $\mathbf{R}^2$ la flecha cuyo origen está en ese punto es más larga que aquella cuya punta se encuentra ahí mismo. Entonces, hay una cantidad mayor de flujo *hacia fuera* de cada punto que hacia dentro; es decir, $\mathbf{F}$ "diverge" en cada punto. (Por consiguiente, vemos el origen del término "divergencia").

El campo vectorial $\mathbf{G} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ apunta en dirección opuesta al campo vectorial $\mathbf{F}$ de la figura 3.38 (véase la figura 3.39) y debe ser evidente cómo la divergencia de $\mathbf{G}$ de -2 se refleja en el diagrama. ◆

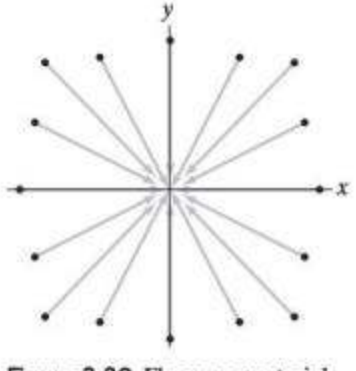


Figura 3.39 El campo vectorial $\mathbf{G} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 El campo vectorial constante $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}$ que se ilustra en la figura 3.40 es incompresible. De manera intuitiva podemos ver que cada punto en $\mathbf{R}^3$ tiene una flecha que representa a $\mathbf{a}$ con su origen en ese punto, y otra flecha que también representa a $\mathbf{a}$ con su punta ahí mismo.

El campo vectorial $\mathbf{G} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) \equiv 0.$$

Un dibujo de $\mathbf{G}$ revela que se parece al campo de velocidad de un fluido en rotación, sin ninguna fuente ni sumidero (véase la figura 3.41). ◆

El rotacional de un campo vectorial

Si el gradiente es el resultado de efectuar una "multiplicación escalar" con el operador nabla y un campo escalar, y la divergencia resulta de realizar el "producto punto" de nabla con un campo vectorial, entonces al parecer solo hay una operación

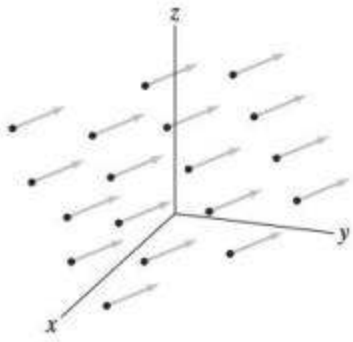


Figura 3.40 Campo vectorial constante $\mathbf{F} = \mathbf{a}$.

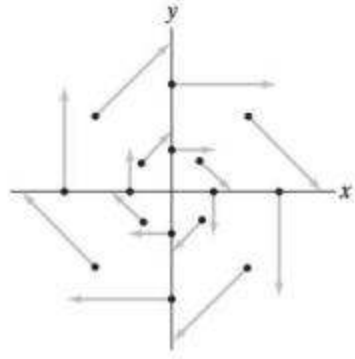


Figura 3.41 El campo vectorial $\mathbf{G} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ parece el campo de velocidad de un fluido en rotación.

diferencial simple por construir con el operador nabla. La llamamos **rotacional** de un campo vectorial y se define como sigue:

DEFINICIÓN 4.2 Sea $\mathbf{F}$: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vectorial diferenciable *solamente sobre* $\mathbf{R}^3$. El **rotacional** de $\mathbf{F}$, que se denota rot $\mathbf{F}$ o $\nabla \times \mathbf{F}$ (se lee "nabla cruz $\mathbf{F}$"), es el campo vectorial

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

No hay una buena razón para recordar la fórmula de los componentes del rotacional, en lugar de ello tan solo se calcula el producto cruz de manera explícita.

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2y & -2xz & x+y-z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y-z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2xz)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y-z)\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)\mathbf{k} \\ &= (1+2x)\mathbf{i} - \mathbf{j} - (x^2+2z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

◆

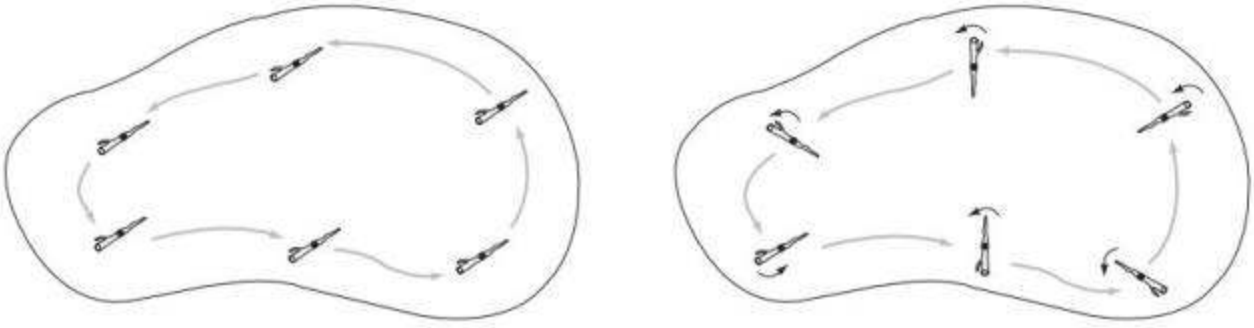


Figura 3.42 Una ramita en un estanque en el que el agua se mueve con una velocidad dada por un campo vectorial $\mathbf{F}$. En la figura de la izquierda la rama no rota cuando avanza, por lo que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. En la figura de la izquierda rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, ya que la rama sí gira.

Podría pensarse que, con el nombre de "rotacional", $\nabla \times \mathbf{F}$ debería medir cuánto rota un campo vectorial. En realidad el rotacional, en cierto sentido, sí mide el giro o circulación de un campo vectorial, pero de una manera sutil; imagine el lector que $\mathbf{F}$ representa la velocidad de una corriente o lago. Se deja caer una ramita en el agua y se observa su recorrido. La rama tal vez sea impulsada por la corriente de manera que describa un círculo amplio, pero el rotacional no detecta esto. Lo que mide rot $\mathbf{F}$ es qué tan rápido y en qué orientación gira la rama sobre sí misma conforme avanza. (Véase la figura 3.42). Mucho más adelante en el libro demostraremos esta afirmación, cuando sepamos hacer integrales de línea y de superficie. Por ahora simplemente puntualicemos cierta terminología: se dice que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es **irrotacional** si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todo lugar.

EJEMPLO 5 Sea $\mathbf{F} = (3x^2z + y^2)\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (x^3 - 2z)\mathbf{k}$. Entonces,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x^2z + y^2 & 2xy & x^3 - 2z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(3x^2z + y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2z)\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2z + y^2)\right)\mathbf{k}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (3x^2 - 3x^2)\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por consiguiente, $\mathbf{F}$ es irrotacional. ◆

Resultados analíticos para dos vectores

Se observa que el campo vectorial $\mathbf{F}$ del ejemplo 5 también es un campo gradiente. En realidad, $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y, z) = x^3z + xy^2 - z^2$. (Dejamos la verificación de esto como ejercicio para el lector). De hecho, no es ninguna coincidencia, sino la ilustración de un resultado básico acerca de las funciones de variable escalar y el operador nabla:

TEOREMA 4.3 Sea f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de clase C^2. Entonces, rot (grad f) $= \mathbf{0}$. Es decir, los campos gradiente son irrotacionales.

DEMOSTRACIÓN Utilizando el operador nabla reescribimos la conclusión como sigue:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0},$$

lo que tal vez haría pensar al lector que la demostración no involucra nada más que notar que ∇f es un "escalar" multiplicado por ∇ y, en consecuencia, "paralelo" a ∇, de modo que el producto cruz debe ser igual al vector cero. Sin embargo, ∇ no es un vector ordinario y las multiplicaciones involucradas no son las habituales. Se requiere una verdadera demostración.

Dicha demostración no es difícil de realizar: solo necesitamos comenzar con el cálculo de $\nabla \times (\nabla f)$. Tenemos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k}.$$

Como f es de clase C^2 sabemos que las segundas parciales mixtas no dependen del orden de diferenciación. Entonces, cada componente de $\nabla \times (\nabla f)$ es igual a cero, como se buscaba. ■

Hay otro resultado acerca de los campos vectoriales y el operador nabla que es similar al teorema 4.3:

TEOREMA 4.4 Sea $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^2. Entonces, div (rot $\mathbf{F}$) = 0. Es decir, rot $\mathbf{F}$ es un campo vectorial incompresible.

La demostración se deja al lector como ejercicio.

EJEMPLO 6 Si $\mathbf{F} = (xz - e^{2x}\cos z)\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + e^{2x}(\operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} z)\mathbf{k}$, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz - e^{2x}\cos z) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{2x}(\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} z)\right)$$

$$= z - 2e^{2x}\cos z - z + 2e^{2x}\cos z = 0$$

para toda $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. En consecuencia, $\mathbf{F}$ es incompresible. Se deja al lector como ejercicio comprobar que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, donde $\mathbf{G}(x, y, z) = e^{2x}\cos y\,\mathbf{i} + e^{2x}\operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, por lo que, en vista del teorema 4.4, no es ninguna sorpresa la incompresibilidad de $\mathbf{F}$. ◆

Otras formulaciones coordenadas (opcional)

Ya hemos introducido el gradiente, la divergencia y el rotacional por medio de fórmulas en coordenadas cartesianas, y hemos analizado, al menos brevemente, su significado geométrico. Como en ciertas situaciones puede requerirse el empleo de coordenadas cilíndricas o esféricas, a continuación se listan las fórmulas del gradiente, la divergencia y el rotacional en dichos sistemas coordenados. Sin embargo, antes de proceder haremos un comentario acerca de la notación. Recuerde el lector que en coordenadas cilíndricas hay tres vectores unitarios $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ que apuntan en

las direcciones en que se incrementan las coordenadas r, θ y z, respectivamente. Por consiguiente, un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{R}^3$ puede escribirse como

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_z\mathbf{e}_z.$$

En general, las funciones componente, F_r, F_θ y F_z son funciones de las tres coordenadas r, θ y z; los subíndices solo indican a cuál de los vectores $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ debe asociarse esa componente particular de la función. Por supuesto, a las coordenadas esféricas se aplican comentarios similares: hay tres vectores unitarios $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\theta$ y cualquier campo vectorial puede escribirse como

$$\mathbf{F} = F_\rho\mathbf{e}_\rho + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi + F_\theta\mathbf{e}_\theta.$$

TEOREMA 4.5 Sean $f\colon X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{F}\colon Y \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ campos vectoriales diferenciables escalar y vectorial, respectivamente. Entonces,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z; \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]; \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Solo se probará la fórmula (4), ya que el argumento debe ser suficientemente claro, de modo que pueda modificarse para hacer las demostraciones de las fórmulas (3) y (5). La idea es tan solo volver a escribir todos los símbolos de coordenadas rectangulares en términos de las cilíndricas.

De las ecuaciones (8) de la sección 1.7,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \end{cases}. \tag{6}$$

A partir de la regla de la cadena se tienen las relaciones siguientes entre los operadores diferenciales rectangulares y cilíndricos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}.$$

Estas relaciones pueden resolverse algebraicamente para $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, y se produce lo siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}. \tag{7}$$

En consecuencia, podemos usar las ecuaciones (6) y (7) para reescribir la expresión que explica la divergencia de un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z) \\ &= \left[\mathbf{i}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \mathbf{j}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \\ &\quad \cdot [(F_r \cos\theta - F_\theta \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (F_r \operatorname{sen}\theta + F_\theta \cos\theta)\mathbf{j} + F_z \mathbf{k}].\end{aligned}$$

(En la ecuación (7) usamos las ecuaciones para reescribir los operadores parciales $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ que aparecen en nabla y las ecuaciones en (6) para sustituir los vectores básicos cilíndricos $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ por expresiones que involucren **i**, **j** y **k**). Al realizar el producto punto y usar la regla del producto se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)(F_r \cos\theta - F_\theta \operatorname{sen}\theta) \\ &\quad + \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)(F_r \operatorname{sen}\theta + F_\theta \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial z}F_z \\ &= \cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial F_r}{\partial r} + F_r \frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)\right) - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left(\cos\theta \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + F_r \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta)\right) \\ &\quad - \cos\theta\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + F_\theta \frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{sen}\theta)\right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + F_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta)\right) \\ &\quad + \operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial F_r}{\partial r} + F_r \frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{sen}\theta)\right) + \frac{\cos\theta}{r}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + F_r \frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta)\right) \\ &\quad + \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + F_\theta \frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)\right) + \frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + F_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta)\right) \\ &\quad + \frac{\partial F_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Después de hacer un poco de álgebra se encuentra que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\frac{\partial F_r}{\partial r} + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{r}\right)F_r \\ &\quad + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{r}\right)\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r}\left(\underbrace{r\frac{\partial F_r}{\partial r} + F_r}_{\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right),\end{aligned}$$

como se buscaba. ■

En coordenadas esféricas el procedimiento para el gradiente, la divergencia y el rotacional es más complicado en cuanto al álgebra, aunque las ideas en que se basa

la demostración son las mismas en esencia. A continuación se dan los resultados relevantes y se deja al lector la tediosa tarea de verificarlos.

TEOREMA 4.6 Sean $f: X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{F}: Y \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ campos escalar y vectorial diferenciables, respectivamente. Entonces se cumplen las fórmulas siguientes:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta; \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\operatorname{sen}\varphi\, F_\varphi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}; \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\,\mathbf{e}_\varphi & \rho \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{e}_\theta \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial\theta \\ F_\rho & \rho F_\varphi & \rho \operatorname{sen}\varphi\, F_\theta \end{vmatrix}. \tag{10}$$

3.4 Ejercicios

Calcule la divergencia de los campos vectoriales dados en los ejercicios 1 a 6.

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = z\cos(e^{y^2})\mathbf{i} + x\sqrt{z^2 + 1}\,\mathbf{j} + e^{2y}\operatorname{sen} 3x\,\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F} = x_1^2\mathbf{e}_1 + 2x_2^2\mathbf{e}_2 + \cdots + nx_n^2\mathbf{e}_n$
6. $\mathbf{F} = x_1\mathbf{e}_1 + 2x_1\mathbf{e}_2 + \cdots + nx_1\mathbf{e}_n$

Encuentre el rotacional de los campos vectoriales dados en los ejercicios 7 a 11.

7. $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} - xe^y\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F} = (\cos yz - x)\mathbf{i} + (\cos xz - y)\mathbf{j} + (\cos xy - z)\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = y^2z\,\mathbf{i} + e^{xyz}\,\mathbf{j} + x^2y\,\mathbf{k}$
12. *a*) Otra vez considere el campo vectorial del ejercicio 8 y su rotacional. Haga el dibujo del campo vectorial y úselo para explicar geométricamente por qué el rotacional es como usted lo calculó.

    b) Use geometría para determinar $\nabla \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{F} = \dfrac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

    c) Para $\mathbf{F}$, como en el inciso anterior, verifique su intuición calculando explícitamente $\nabla \times \mathbf{F}$.
13. ¿Podría decir en qué partes de $\mathbf{R}^2$ los campos vectoriales ilustrados en las figuras 3.43 a 3.46 tienen divergencia positiva? ¿Y negativa?

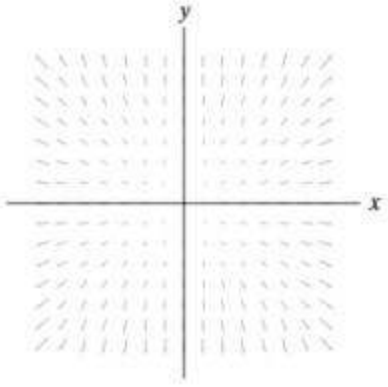


Figura 3.43 Campo vectorial para el ejercicio 13 *a*).

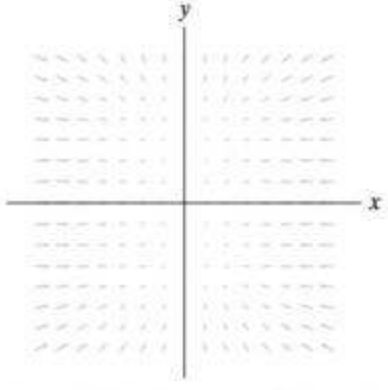


Figura 3.44 Campo vectorial para el ejercicio 13 *b*).

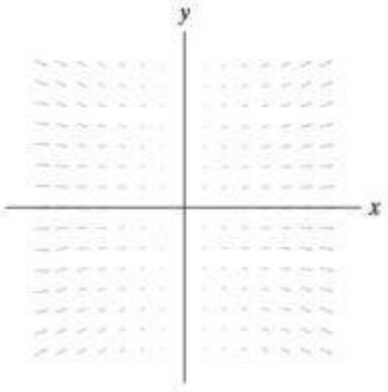


Figura 3.45 Campo vectorial para el ejercicio 13 *c*).

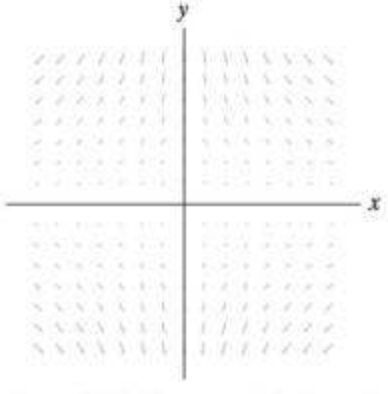


Figura 3.46 Campo vectorial para el ejercicio 13 *d*).

14. Compruebe que si $f(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \cos z$, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

15. Verifique que si $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} - e^z \cos x\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$, entonces

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

16. Demuestre el teorema 4.4.

En los ejercicios 17 a 20, sea $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ *y sea que* r *denote* $\|\mathbf{r}\|$. *Verifique lo siguiente:*

17. $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$

18. $\nabla(\ln r) = \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$

19. $\nabla \cdot (r^n\mathbf{r}) = (n + 3)r^n$

20. $\nabla \times (r^n\mathbf{r}) = \mathbf{0}$

En los ejercicios 21 a 25 establezca las identidades dadas. (Puede suponer que cualesquiera funciones y campos vectoriales son apropiadamente diferenciables.)

21. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$

22. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$

23. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

24. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$

25. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$

26. Demuestre las fórmulas (3) y (5) del teorema 4.5.

27. Establezca la fórmula para el gradiente de una función en coordenadas esféricas dada en el teorema 4.6.

28. El **operador laplaciano**, que se denota con ∇^2, es el operador diferencial parcial de segundo orden definido por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

a) Explique por qué tiene sentido considerar que ∇^2 es $\nabla \cdot \nabla$.

b) Demuestre que si f y g son funciones de clase C^2, entonces

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g).$$

c) Demuestre que

$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f.$$

29. Demuestre que $\nabla \cdot (f\nabla f) = \|\nabla f\|^2 + f\nabla^2 f$.

30. Pruebe que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$ (aquí, $\nabla^2\,\mathbf{F}$ significa tomar el laplaciano de cada función componente de $\mathbf{F}$).

Sea X *un conjunto abierto en* $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *un campo vectorial sobre* X, *y* $\mathbf{a} \in X$. *Si* $\mathbf{v}$ *es un vector unitario en* $\mathbf{R}^n$, *definimos la* ***derivada direccional*** *de* $\mathbf{F}$ *en* $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{v}$, *que se denota con* $D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a})$, *mediante*

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{F}(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})),$$

demuestre que el límite existe. Los ejercicios 31 a 34 involucran derivadas direccionales de campos vectoriales.

31. *a*) En forma análoga con la derivada direccional de una función de variable escalar definida en la sección 2.6 demuestre que

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})\bigg|_{t=0}.$$

b) Use el resultado del inciso anterior y la regla de la cadena para demostrar que si $\mathbf{F}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = D\mathbf{F}(\mathbf{a})\mathbf{v},$$

donde $\mathbf{v}$ se interpreta como una matriz de $n \times 1$. (Observe que este resultado es muy apropiado para calcular derivadas direccionales de campos vectoriales).

32. Demuestre que la derivada direccional de un campo vectorial $\mathbf{F}$ es el vector cuyas componentes son las de-

rivadas direccionales de las funciones componente $F_1, \ldots, F_n$ de $\mathbf{F}$, es decir, que

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = (D_{\mathbf{v}}F_1(\mathbf{a}), D_{\mathbf{v}}F_2(\mathbf{a}), \ldots, D_{\mathbf{v}}F_n(\mathbf{a})).$$

33. Sea $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$. Halle $D_{(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{3}}\mathbf{F}(3, 2, 1)$. (Sugerencia: véase el ejercicio 31).

34. Sea $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Demuestre que $D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}$ para cualquier punto $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ y cualquier vector unitario $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Más generalmente, si $\mathbf{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, demuestre que $D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}$.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 3

1. Si una trayectoria $\mathbf{x}$ permanece a una distancia constante del origen, entonces la velocidad de $\mathbf{x}$ es perpendicular a $\mathbf{x}$.

2. Si una trayectoria es parametrizada por medio de la longitud de arco, entonces su vector velocidad es constante.

3. Si una trayectoria es parametrizada por medio de la longitud de arco, entonces su velocidad y aceleración son ortogonales.

4. $\dfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{x}'(t)\|$.

5. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} + \mathbf{y}\times\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$.

6. $\kappa = \left\|\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|$.

7. $|\tau| = \left\|\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\right\|$.

8. La curvatura κ siempre es no negativa.

9. La torsión τ siempre es no negativa.

10. $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$.

11. Si una trayectoria $\mathbf{x}$ tiene curvatura igual a cero, entonces su aceleración siempre es paralela a su velocidad.

12. Si una trayectoria $\mathbf{x}$ tiene un vector binormal constante $\mathbf{B}$, entonces $\tau \equiv 0$.

13. $\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \kappa^2\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^4 = \|\mathbf{a}(t)\|^2$.

14. El grad f es un campo escalar.

15. La div $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.

16. El rot $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.

17. El grad(div $\mathbf{F}$) es un campo vectorial.

18. La div(rot(grad f)) es un campo vectorial.

19. El grad $f\times$ div $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.

20. La trayectoria $\mathbf{x}(t) = (2\cos t, 4\operatorname{sen} t, t)$ es una línea de flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = -\dfrac{y}{2}\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

21. La trayectoria $\mathbf{x}(t) = (e^t\cos t, e^t(\cos t + \operatorname{sen} t), e^t \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$.

22. El campo vectorial $\mathbf{F} = 2xy\cos z\,\mathbf{i} - y^2\cos z\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$ es incompresible.

23. El campo vectorial $\mathbf{F} = 2xy\cos z\,\mathbf{i} - y^2\cos z\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$ es irrotacional.

24. $\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$ para todas las funciones $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

25. Si $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ y $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

26. $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$.

27. Si $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{F}$ es solenoidal.

28. El campo vectorial $\mathbf{F} = 2x\operatorname{sen} y\cos z\,\mathbf{i} + x^2\cos y\cos z\,\mathbf{j} + x^2\operatorname{sen} y\operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$ es el gradiente de una función f de clase C^2.

29. Hay un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^2 sobre $\mathbf{R}^3$ tal que $\nabla\times\mathbf{F} = x\cos^2 y\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} - xyz^2\,\mathbf{k}$.

30. Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son campos gradiente, entonces $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ es incompresible.

Ejercicios varios para el capítulo 3

1. La figura 3.47 muestra las gráficas de seis trayectorias $\mathbf{x}$ en el plano. Relacione cada descripción paramétrica con la gráfica correcta.

a) $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 3t)$

b) $\mathbf{x}(t) = (t + \operatorname{sen} 5t, t^2 + \cos 6t)$

c) $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 1, t^3 - t)$

d) $\mathbf{x}(t) = (2t + \operatorname{sen} 4t, t - \operatorname{sen} 5t)$

e) $\mathbf{x}(t) = (t - t^2, t^3 - t)$

f) $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 3t), \cos t)$

2. La figura 3.48 muestra las gráficas de seis trayectorias $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^3$. Relacione cada descripción paramétrica con la gráfica correcta.

a) $\mathbf{x}(t) = (t + \cos 3t, t^2 + \operatorname{sen} 5t, \operatorname{sen} 4t)$

b) $\mathbf{x}(t) = (2\cos^3 t, 3\operatorname{sen}^3 t, \cos 2t)$

c) $\mathbf{x}(t) = (15\cos t, 23\operatorname{sen} t, 4t)$

d) $\mathbf{x}(t) = (\cos 3t, \cos 5t, \operatorname{sen} 4t)$

e) $\mathbf{x}(t) = (2t\cos t, 2t\operatorname{sen} t, 4t)$

f) $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 1, t^3 - t, t^4 - t^2)$

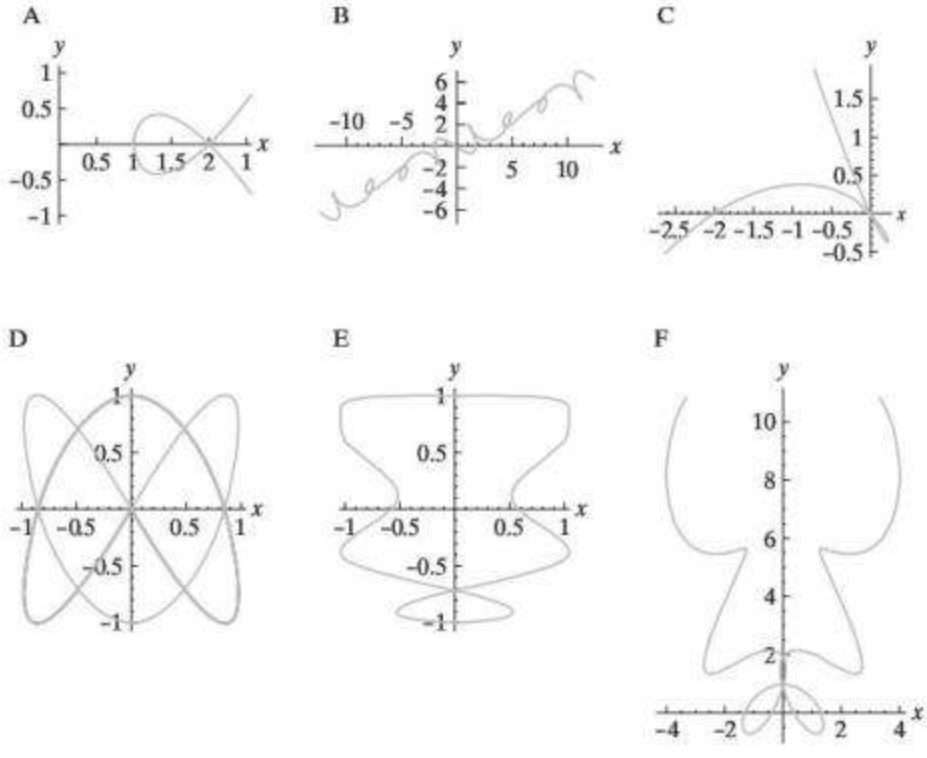


Figura 3.47 Diagramas para el ejercicio 1.

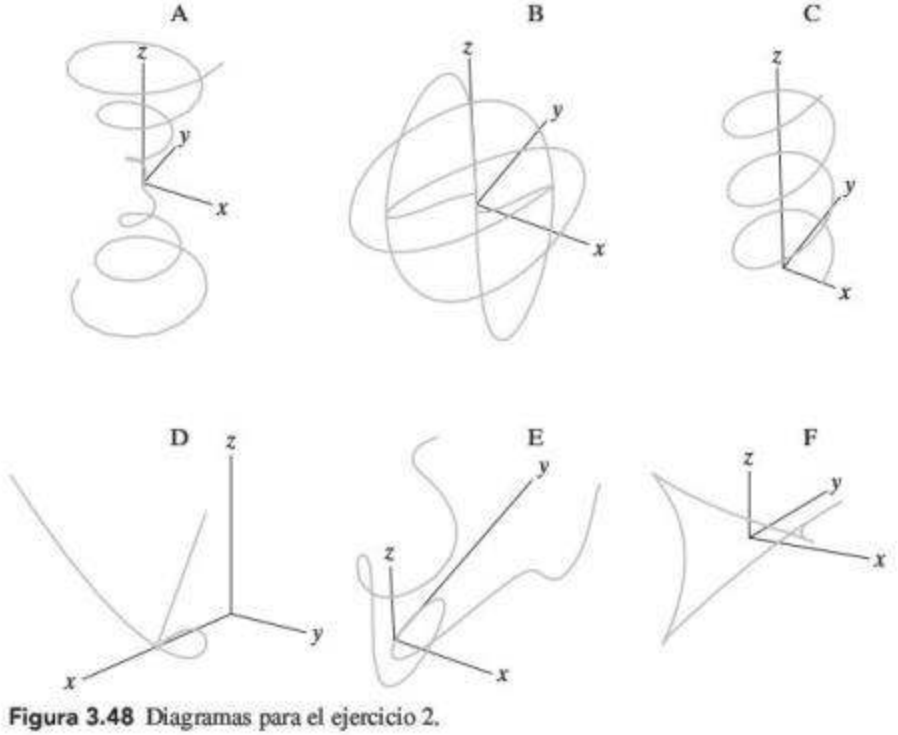


Figura 3.48 Diagramas para el ejercicio 2.

3. Suponga que $\mathbf{x}$ es una trayectoria C^2 con velocidad distinta de cero. Demuestre que $\mathbf{x}$ tiene velocidad constante si y solo si sus vectores de velocidad y aceleración siempre son perpendiculares entre sí.

4. El lector se encuentra en el Parque de Diversiones Vértigo en la nueva montaña rusa llamada Vector. La trayectoria de su carro es dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^{t/60}\cos\frac{\pi t}{30}, e^{t/60}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{30}, 80 + \frac{2t(10-t)(t-90)^2}{10^6}\right),$$

donde $t = 0$ corresponde al principio de su viaje de tres minutos, medido en segundos, y las dimensiones espaciales se miden en pies. Es un día tranquilo, pero después de 90 segundos de su viaje sus anteojos salen volando de su rostro.

a) Ignore el efecto de la gravedad, ¿dónde se encontrarán sus anteojos después de 2 segundos?

b) ¿Qué ocurre si se toma en cuenta la gravedad?

5. Demuestre que la curva trazada en forma paramétrica por

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos(t-1), t^3 - 1, \frac{1}{t} - 2\right)$$

es tangente a la superficie $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$ cuando $t = 1$.

6. Gregor, la cucaracha, está sobre el borde de una rueda de Ferry que gira a razón de 2 rev/min (en sentido contrario a las manecillas del reloj, según lo ve usted). Gregor se mueve a lo largo de una aleta hacia el centro de la rueda a razón de 3 pulg/min.

a) Usando coordenadas polares con el centro de la rueda como el origen, suponga que Gregor comienza (en el momento $t = 0$) en el punto $r = 20$ pies, $\theta = 0$. Dé las ecuaciones paramétricas para las coordenadas polares de Gregor r y θ en el momento t (en minutos).

b) Diga las ecuaciones paramétricas para las coordenadas cartesianas de Gregor en el momento t.

c) Determine la distancia que ha recorrido Gregor una vez que llega al centro de la rueda. Exprese su respuesta como una integral y evalúela numéricamente.

Si el lector ha usado alguna vez un programa de dibujo por computadora, es probable que haya trabajado con una curva conocida como ***curva de Bézier.***[2] *Dicha curva es definida en forma paramétrica por medio de varios* ***puntos de control*** *en el plano para trazar la curva. En los ejercicios 7 a 12 se analizan varios aspectos de curvas cuadráticas de Bézier. Estas se definen utilizando tres puntos de control fijos* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3), *y una constante* w *no negativa. La curva de Bézier definida por esta información es dada por* $\mathbf{x}: [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, *donde*

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(1-t)^2x_1 + 2wt(1-t)x_2 + t^2x_3}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2} \\ y(t) = \dfrac{(1-t)^2y_1 + 2wt(1-t)y_2 + t^2y_3}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2} \end{cases}, \quad 0 \le t \le 1. \tag{1}$$

7. Sean los puntos de control (1, 0), (0, 1) y (1, 1). Use una computadora para graficar la curva de Bézier para $w = 0, 1/2, 1, 2, 5$. ¿Qué pasa conforme se incrementa w?

8. Repita el ejercicio 7 para los puntos de control $(-1, -1)$, (1, 3) y (4, 1).

9. *a*) Demuestre que la curva de Bézier dada por las ecuaciones paramétricas en (1) tiene (x_1, y_1) como punto inicial y (x_3, y_3) como punto terminal.

b) Demuestre que $\mathbf{x}(\frac{1}{2})$ se encuentra en el segmento de recta que une a (x_2, y_2) con el punto medio del segmento de recta que une a (x_1, y_1) con (x_3, y_3).

10. En general, los puntos de control (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) formarán un triángulo, conocido como **polígono de control** para la curva. Suponga en este problema que $w > 0$. Con el cálculo de $\mathbf{x}'(0)$ y $\mathbf{x}'(1)$, demuestre que las rectas tangentes a la curva en $\mathbf{x}(0)$ y en $\mathbf{x}(1)$ se intersecan en (x_2, y_2). Entonces, el triángulo de control tiene dos de sus lados tangentes a la curva.

11. En este problema el lector establecerá el significado geométrico de la constante w que aparece en las ecuaciones en (1).

a) Calcule la distancia a entre $\mathbf{x}(\frac{1}{2})$ y (x_2, y_2).

b) Calcule la distancia b entre $\mathbf{x}(\frac{1}{2})$ y el punto medio del segmento de recta uniendo (x_1, y_1) y (x_3, y_3).

c) Demuestre que $w = b/a$. Según el inciso *b*) del ejercicio 9, $\mathbf{x}(\frac{1}{2})$ divide el segmento de recta uniendo (x_2, y_2) con el punto medio del segmento de recta uniendo (x_1, y_1) con (x_3, y_3) en dos partes, y w representa la razón de las longitudes de las dos piezas.

12. Determine la parametrización de Bézier para la parte de la parábola $y = x^2$ entre los puntos $(-2, 4)$ y (2, 4), como sigue:

a) Dos de los tres puntos de control deben ser $(-2, 4)$ y (2, 4). Encuentre el tercer punto de control usando el resultado del ejercicio 10.

b) Con el inciso anterior y el ejercicio 9 debemos tener que $\mathbf{x}(\frac{1}{2})$ está sobre el eje y y, en consecuencia,

[2] P. Bézier fue un ingeniero diseñador de automóviles que trabajó para Renault. Consulte D. Cox, J. Little y D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 3ª ed. (Springer-Verla, Nueva York, 2007), pp. 28-29. Ejercicios 7 a 11 adaptados con permiso.

en el punto (0, 0). Use el resultado del ejercicio 11 para determinar la constante w.

c) Ahora escriba la parametrización de Bézier. El lector debe ser capaz de comprobar que su respuesta es correcta.

13. Sea $\mathbf{x}: [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$ la trayectoria dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t + \ln \tan \tfrac{t}{2}\right),$$

donde t es el ángulo que forma el eje y con el vector $\mathbf{x}(t)$. La imagen de $\mathbf{x}$ se llama **tractriz** (véase la figura 3.49).

a) Demuestre que $\mathbf{x}$ tiene velocidad distinta de cero excepto cuando $t = \pi/2$.

b) Demuestre que la longitud del segmento de la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y siempre es igual a 1. Esto significa que la curva imagen tiene la descripción siguiente: sea un caballo que jala una carga muy pesada con una cuerda de longitud 1.

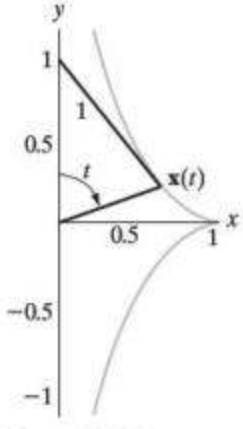


Figura 3.49 La tractriz del ejercicio 13.

Suponga que el caballo inicialmente se encuentra en (0, 0), la carga en (1, 0) y establezca que el caballo camine a lo largo del eje y. La carga sigue la imagen de la tractriz.

14. Otra manera de parametrizar la trayectoria tractriz distinta de la que se da en el ejercicio 13 es la siguiente:

$$\mathbf{y}: (-\infty, 0) \to \mathbf{R}^2,$$

$$\text{donde} \quad \mathbf{y}(r) = \left(e^r, \int_0^r \sqrt{1 - e^{2\rho}}\, d\rho\right).$$

a) Demuestre que $\mathbf{y}$ satisface la propiedad descrita en el inciso *b*) del ejercicio 13.

b) En realidad $\mathbf{y}$ es una reparametrización de la *parte* de la trayectoria $\mathbf{x}$ del ejercicio 13. Sin demostrar esto con detalle indique cuál parte de la imagen de $\mathbf{x}$ cubre la imagen de $\mathbf{y}$.

15. Suponga que una curva plana está dada en coordenadas polares por medio de la ecuación $r = f(\theta)$, donde f es una función de clase C^2. Use la ecuación (17) de la sección 3.2 para obtener la fórmula de la curvatura

$$\kappa(\theta) = \frac{\left|r^2 - rr'' + 2r'^2\right|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

(Sugerencia: primero dé las ecuaciones paramétricas para la curva en coordenadas cartesianas usando θ como parámetro).

16. Use el resultado del ejercicio 15 para calcular la curvatura de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.

Sea $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^2$ *una trayectoria de clase* C^2 *que no es una línea recta, y tal que* $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$. *Escoja algún* $t_0 \in I$, *y sea*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - s(t)\mathbf{T}(t),$$

donde $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(\tau)\|\, d\tau$ *es la función longitud de arco y* $\mathbf{T}$ *es el vector unitario tangente. La trayectoria* $\mathbf{y}: I \to \mathbf{R}^2$ *se llama* ***involuta*** *de* $\mathbf{x}$. *Los ejercicios 17 a 19 tienen que ver con involutas de trayectorias.*

17. *a*) Calcule la involuta de la trayectoria circular de radio a, es decir $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$. (Tome t_0 como 0).

b) Establezca $a = 1$ y use una computadora para graficar la trayectoria $\mathbf{x}$ y la trayectoria involuta $\mathbf{y}$ sobre el mismo conjunto de ejes.

18. Demuestre que el vector unitario tangente a la involuta en t es el opuesto del vector unitario normal $\mathbf{N}(t)$ a la trayectoria original $\mathbf{x}$. (Sugerencia: use las fórmulas de Frenet-Serret y el hecho de que una curva plana tiene torsión igual a cero en cualquier parte).

19. Demuestre que la involuta $\mathbf{y}$ de la trayectoria $\mathbf{x}$ se forma desdoblando una cadena tensa que se ha enrollado alrededor del eje x, como sigue:

a) Demuestre que la distancia en $\mathbf{R}^2$ entre un punto $\mathbf{x}(t)$ sobre la trayectoria original y el punto correspondiente $\mathbf{y}(t)$ sobre la involuta es igual a la distancia recorrida de $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{x}(t)$ a lo largo de la curva subyacente de $\mathbf{x}$.

b) Demuestre que la distancia entre un punto $\mathbf{x}(t)$ sobre la trayectoria y el punto correspondiente $\mathbf{y}(t)$ sobre la involuta es igual a la distancia de $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$ medida a lo largo de la tangente que emana de $\mathbf{x}(t)$. Ahora concluya el argumento.

Sea $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^2$ *una trayectoria de clase* C^2 *que no es rectilínea y tal que* $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$. *Sea*

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}(t).$$

Esta es la trayectoria trazada por el centro del círculo osculante de la trayectoria $\mathbf{x}$. *La cantidad* $\rho = 1/\kappa$ *es el radio del círculo osculante y se llama* ***radio de curvatura*** *de la trayectoria* $\mathbf{x}$. *La trayectoria* $\mathbf{e}$ *se llama* ***evoluta*** *de la trayectoria* $\mathbf{x}$. *Los ejercicios 20 a 25 se refieren a evolutas de trayectorias.*

20. Sea $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$ una trayectoria parabólica (véase la figura 3.50).

a) Encuentre el vector unitario tangente $\mathbf{T}$, el vector unitario normal $\mathbf{N}$ y la curvatura κ como funciones de t.

b) Calcule la evoluta de $\mathbf{x}$.

T c) Use una computadora para graficar $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{e}(t)$ sobre el mismo conjunto de ejes.

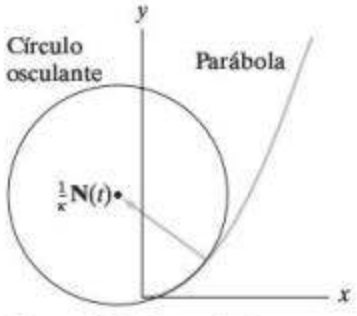


Figura 3.50 La parábola y su círculo osculante en un punto. Los centros de los círculos osculantes en todos los puntos de la parábola trazan la evoluta de la parábola como se describe en el ejercicio 20.

21. Demuestre que la evoluta de una trayectoria circular es un punto.

T **22.** *a*) Use un sistema de álgebra por computadora para calcular la fórmula para la evoluta de la trayectoria elíptica $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$.

b) Use una computadora para graficar $\mathbf{x}(t)$ y la evoluta $\mathbf{e}(t)$ en el mismo conjunto de ejes para distintos valores de las constantes a y b. ¿Qué le pasa a la evoluta cuando el valor de a se acerca al de b?

T **23.** Use un sistema de álgebra por computadora para calcular la fórmula para la evoluta del cicloide $\mathbf{x}(t) = (at - a \operatorname{sen} t, a - a \cos t)$. ¿Qué es lo que observa?

T **24.** Use un sistema de álgebra por computadora para calcular la fórmula de la evoluta del cardioide $\mathbf{x}(t) = (2a \cos t(1 + a \cos t), 2a \operatorname{sen} t(1 + a \cos t))$.

25. Suponga que $\kappa'(t) \neq 0$, demuestre que el vector unitario tangente a la evoluta $\mathbf{e}(t)$ es paralelo al vector unitario normal $\mathbf{N}(t)$ a la trayectoria original $\mathbf{x}(t)$.

26. Suponga que una trayectoria C^1 $\mathbf{x}(t)$ es tal que tanto su velocidad como su aceleración son vectores unitarios para toda t. Demuestre que $\kappa = 1$ para toda t.

27. Considere la curva plana parametrizada por

$$x(s) = \int_0^s \cos g(t)\,dt, \quad y(s) = \int_0^s \operatorname{sen} g(t)\,dt,$$

donde g es una función diferenciable.

a) Demuestre que el parámetro s es el parámetro de la longitud de arco.

b) Calcule la curvatura $\kappa(s)$.

c) Utilice el inciso anterior para explicar cómo puede crearse una curva plana parametrizada con cualquier función $\kappa(s)$ de curvatura especificada, continua y no negativa.

d) Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para una curva cuya curvatura es $\kappa(s) = |s|$ (su respuesta debe involucrar integrales).

T *e*) Use una computadora para graficar la curva que encontró en el inciso anterior, conocida como **clotoide** o **espiral de Cornu**. (Nota: las integrales involucradas se conocen como **integrales de Fresnel** y surgen en el estudio de la óptica. El lector debe evaluar dichas integrales en forma numérica a fin de graficar la curva.

28. Suponga que $\mathbf{x}$ es una trayectoria C^3 en $\mathbf{R}^3$ con torsión τ siempre igual a 0.

a) Explique por qué $\mathbf{x}$ debe tener un vector binormal constante, es decir, uno cuya dirección debe permanecer fija para toda t.

b) Suponga que hemos elegido coordenadas de modo que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ y que $\mathbf{v}(0)$ y $\mathbf{a}(0)$ están en el plano xy, es decir, no tienen componente $\mathbf{k}$. Entonces, ¿cuál debe ser el vector binormal $\mathbf{B}$?

c) Usando las suposiciones de coordenadas del inciso anterior demuestre que $\mathbf{x}(t)$ debe estar en el plano xy para toda t. (Sugerencia: Comience por explicar por qué $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{k} = 0$ para toda t. Después demuestre que si

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

debemos tener $z(t) = 0$ para toda t).

d) Ahora explique cómo puede concluirse que las curvas con torsión igual a cero deben estar en un plano.

29. Suponga que $\mathbf{x}$ es una trayectoria C^3 en $\mathbf{R}^3$, parametrizada por la longitud de arco, con $\kappa \neq 0$. Suponga que la imagen de $\mathbf{x}$ está en el plano xy.

a) Explique por qué $\mathbf{x}$ debe tener un vector binormal constante.

b) Demuestre que la torsión τ siempre debe ser igual a cero.

Observe que en realidad no hay nada de especial respecto de la imagen de $\mathbf{x}$ que está en el plano xy, por lo que este ejercicio, combinado con los resultados del ejercicio 28, demuestra que la imagen de $\mathbf{x}$ es una curva plana si y solo si τ siempre es igual a cero, y si y solo si $\mathbf{B}$ es un vector constante.

30. En el ejemplo 7 de la sección 3.2 vimos que si $\mathbf{x}$ es una trayectoria rectilínea, entonces $\mathbf{x}$ tiene una curvatura de cero. Demuestre la controversia; es decir, si $\mathbf{x}$ es una trayectoria C^2 parametrizada por la longitud de arco s y tiene una curvatura de cero para toda s, entonces $\mathbf{x}$ traza una línea recta.

31. Un elemento grande de tubo metálico cilíndrico va a fabricarse para que incluya una **aleta**, que es un borde metálico en espiral que da apoyo estructural al tubo (véase la figura 3.51). Los elementos de aleta van a fabricarse a partir de piezas planas de metal flexible cuyos lados curvados son arcos de círculos, como se ilustra en la figura 3.52. Suponga que el tubo tiene un

radio de a pies y que la aleta forma una revolución completa alrededor del tubo a cada h pies.[3]

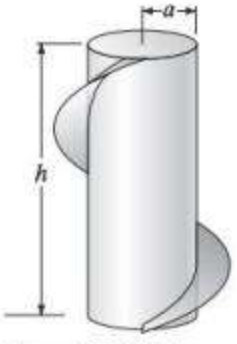


Figura 3.51 Tubo cilíndrico con una aleta adosada.

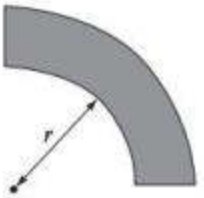


Figura 3.52 Sección de la aleta (véase el ejercicio 31).

a) En términos de a y h, ¿cuál debe ser el radio interno r para que la aleta se ajuste perfectamente al tubo?

b) Suponga que $a = 3$ pies y $h = 25$ pies. ¿Cuál es r?

Suponga el lector que $\mathbf{x}$: $I \to \mathbf{R}^3$ *es una trayectoria de clase* C^3 *parametrizada por la longitud de arco. Entonces el vector unitario tangente* $\mathbf{T}(s)$ *define una función de variable vectorial* $\mathbf{T}$: $I \to \mathbf{R}^3$ *que también puede considerarse una trayectoria (aunque no por fuerza una parametrizada por la longitud de arco, ni tampoco necesariamente con velocidad distinta de cero). Como* $\mathbf{T}$ *es un* vector unitario, *la imagen de la trayectoria* $\mathbf{T}$ *debe estar sobre una esfera de radio* 1 *con centro en el origen. Esta curva imagen se llama* ***imagen tangente esférica*** *de* $\mathbf{x}$. *Entonces podemos considerar las funciones definidas por el vector normal y el binormal* $\mathbf{N}$ *y* $\mathbf{B}$ *para que den trayectorias llamadas, respectivamente,* ***imagen normal esférica*** *e* ***imagen binormal esférica*** *de* $\mathbf{x}$. *Los ejercicios 32 a 35 se refieren a estos conceptos.*

32. Encuentre la imagen tangente esférica, la imagen normal esférica y la imagen binormal esférica de la hélice circular $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$. (Nota: la trayectoria $\mathbf{x}$ no está parametrizada por la longitud de arco).

33. Suponga que $\mathbf{x}$ está parametrizada por la longitud de arco. Demuestre que $\mathbf{x}$ es una trayectoria rectilínea si y solo si su imagen tangente esférica es una trayectoria constante (véase el ejemplo 7 de la sección 3.2 y el ejercicio 30).

34. Suponga que $\mathbf{x}$ está parametrizada por la longitud de arco. Demuestre que la imagen de $\mathbf{x}$ está en un plano si y solo si su imagen binormal esférica es constante (consulte los ejercicios 28 y 29).

35. Suponga que $\mathbf{x}$ está parametrizada por la longitud de arco. Demuestre que la imagen normal esférica de $\mathbf{x}$ nunca puede ser una constante.

36. En este problema encontraremos expresiones para la velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas. Comenzamos con la expresión

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

para la trayectoria en coordenadas cartesianas.

a) Recuerde que los vectores básicos estándar para las coordenadas cilíndricas son los siguientes:

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

Use los hechos de que $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ para demostrar que podemos escribir $\mathbf{x}(t)$ como

$$\mathbf{x}(t) = r(t)\,\mathbf{e}_r + z(t)\,\mathbf{e}_z.$$

b) Use las definiciones de $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ que se dieron y la regla de la cadena para encontrar $d\mathbf{e}_r/dt$, $d\mathbf{e}_\theta/dt$ y $d\mathbf{e}_z/dt$ en términos de $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$.

c) Ahora use la regla del producto para dar expresiones que definan $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en términos de la base estándar aplicable a coordenadas cilíndricas.

37. Suponga que la trayectoria

$$\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} 2t, \sqrt{2}\cos 2t, \operatorname{sen} 2t - 2)$$

describe la posición de la nave espacial Inercia en el momento t.

a) La teniente comandante Agnes nota que la nave está trazando un rizo cerrado. ¿Cuál es la longitud del rizo?

b) El alférez Egbert reporta que la trayectoria de la nave en realidad es una línea de flujo del campo vectorial marciano $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, pero al introducir esta información en su bitácora omitió un factor constante. Ayúdelo a corregir el error encontrando el campo vectorial correcto.

38. Suponga que la temperatura en puntos dentro de una habitación es dada por una función diferenciable $T(x, y, z)$. Livinia, la mosca (que se restablece de un resfriado grave), está en el cuarto y desea calentarse lo más rápido posible.

a) Demuestre que la trayectoria de Livinia $\mathbf{x}(t)$ debe ser una línea de flujo de $k\nabla T$, donde k es una constante positiva.

b) Si $T(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ y Livinia está inicialmente en el punto $(2, 3, -1)$, describa su trayectoria en forma explícita.

39. Sea $\mathbf{F} = u(x, y)\,\mathbf{i} - v(x, y)\,\mathbf{j}$ un campo vectorial incompresible irrotacional de clase C^2.

a) Demuestre que u y v (que determina las funciones componente de $\mathbf{F}$) satisfacen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[3] Consulte F. Morgan, *Riemannian Geometry: A Beginner's Guide*, 2ª ed. (A. K. Peters, Wellesley, 1998), pp. 7 a 10. Figuras 3.51 y 3.52 adaptadas con permiso.

b) Demuestre que u y v son **armónicas**, es decir, que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

40. Suponga que una partícula de masa m se mueve a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}$ de acuerdo con la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\mathbf{F}$ es un campo vectorial gradiente. Si la partícula también está restringida a estar sobre una superficie equipotencial de $\mathbf{F}$, demuestre que entonces debe tener velocidad constante.

41. Sea una partícula de masa m que se mueve a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}$ diferenciable en un campo vectorial newtoniano $\mathbf{F}$, es decir, uno que satisface la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es la aceleración de $\mathbf{x}$. Definimos el **momento angular** $\mathbf{l}(t)$ de la partícula como el producto cruz del vector de posición y el momento lineal $m\mathbf{v}$, es decir,

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}(t) \times m\mathbf{v}(t).$$

(Aquí, $\mathbf{v}$ denota la velocidad de $\mathbf{x}$). El **par** con respecto del origen del sistema de coordenadas debido a la fuerza $\mathbf{F}$ es el producto cruz de la posición y la fuerza:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{x}(t) \times \mathbf{F}(t) = \mathbf{x}(t) \times m\mathbf{a}(t).$$

(Asimismo, consulte la sección 1.4 acerca del concepto de *par*). Demuestre que

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Así, vemos que la tasa de cambio del momento angular es igual al par impartido a la partícula por el campo vectorial $\mathbf{F}$.

42. Considere la situación descrita en el ejercicio 41 y suponga que $\mathbf{F}$ es una fuerza central (es decir, que siempre apunta directamente hacia dentro o hacia fuera del origen). Demuestre que en este caso el momento angular se *conserva*, es decir, que debe permanecer constante.

43. ¿Puede el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (e^x \cos y + e^{-x} \operatorname{sen} z)\,\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + e^{-x} \cos z\,\mathbf{k}$$

ser el gradiente de una función $f(x, y, z)$ de clase C^2? Justifique su respuesta.

44. ¿Puede el campo vectorial

$$\mathbf{F} = x(y^2 + 1)\,\mathbf{i} + (ye^x - e^z)\,\mathbf{j} + x^2 e^z\,\mathbf{k}$$

ser el rotacional de otro campo vectorial $\mathbf{G}(x, y, z)$ de clase C^2? Justifique su respuesta.

4 Máximos y mínimos con varias variables

4.1 Las diferenciales y el teorema de Taylor

4.2 Extremos de funciones

4.3 Multiplicadores de Lagrange

4.4 Algunas aplicaciones de los extremos

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 4

Ejercicios varios para el capítulo 4

4.1 Las diferenciales y el teorema de Taylor

Entre todas las clases de funciones de una o varias variables, sin duda los más agradables, en cuanto a que son continuos y diferenciables en todo lugar y en cuanto a que tienen un comportamiento intrincado e interesante, son los polinomios. Nuestro objetivo en esta sección es dar un medio para aproximarse a cualquier función de variable escalar mediante un polinomio de un grado dado, conocido como **polinomio de Taylor**. Debido a la relativa facilidad con que se puede calcular con ellos, los polinomios de Taylor son útiles para trabajar con gráficas de computadora y diseño asistido por computadora, por mencionar solo dos áreas.

El teorema de Taylor en una variable. Recordatorio

Suponga el lector que tiene una función $f: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que es diferenciable en un punto a en X. Entonces, la ecuación de la recta tangente da la mejor aproximación lineal de f cerca de a. Es decir, cuando definimos p_1 como:

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{tenemos que} \quad p_1(x) \approx f(x) \text{ si } x \approx a.$$

(Véase la figura 4.1). Como se expuso en la sección 2.3, la frase "la mejor aproximación lineal" significa que si tomamos $R_1(x, a)$ como $f(x) - p_1(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1(x, a)}{x - a} = 0.$$

Advierta que, en particular, tenemos que $p_1(a) = f(a)$ y $p_1'(a) = f'(a)$.

Por lo general, las rectas tangentes se aproximan a gráficas de funciones solo en vecindades muy pequeñas que contienen el punto de tangencia. Para una aproximación mejor podemos tratar de ajustar una parábola que siga más de cerca a la gráfica de la función, como se ilustra en la figura 4.2. En este caso queremos que p_2 sea la función cuadrática tal que

$$p_2(a) = f(a), \quad p_2'(a) = f'(a) \quad \text{y} \quad p_2''(a) = f''(a).$$

El único polinomio cuadrático que satisface estas tres condiciones es

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Puede demostrarse que si f es de clase C^2, entonces

$$f(x) = p_2(x) + R_2(x, a),$$

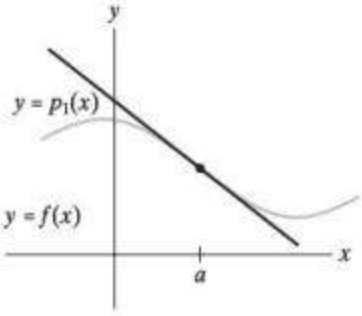


Figura 4.1 Gráfica de $y = f(x)$ y su recta tangente $y = p_1(x)$ en $x = a$.

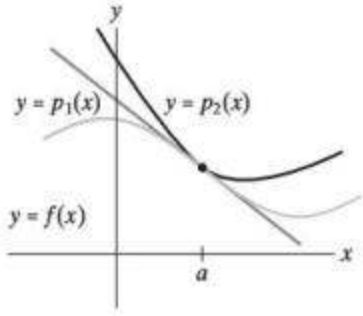


Figura 4.2 Gráficas de la tangente de f, p_1 y p_2.

donde

$$\lim_{x \to a} \frac{R_2(x, a)}{(x - a)^2} = 0.$$

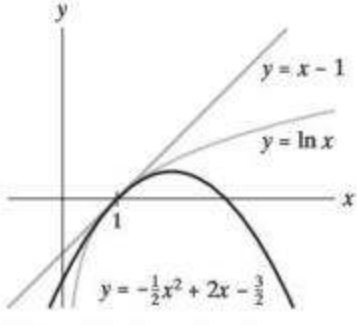


Figura 4.3 Aproximaciones a $f(x) = \ln x$.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = \ln x$, entonces, para $a = 1$ tenemos que

$$f(1) = \ln 1 = 0,$$
$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$
$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Por lo tanto,

$$p_1(x) = 0 + 1(x - 1) = x - 1,$$
$$p_2(x) = 0 + 1(x - 1) - \tfrac{1}{2}(x - 1)^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x - \tfrac{3}{2}.$$

En la figura 4.3 se muestran los polinomios de aproximación p_1 y p_2. ◆

No hay razón para detenerse en los polinomios cuadráticos. Supongamos que deseamos aproximar f con un polinomio p_k de grado k, donde k es un entero positivo. De manera análoga a como se trabajó arriba, requerimos que p_k y sus primeras k derivadas concuerden con f y sus primeras k derivadas en el punto a. Por consiguiente, se pide que

$$p_k(a) = f(a),$$
$$p_k'(a) = f'(a),$$
$$p_k''(a) = f''(a),$$
$$\vdots$$
$$p_k^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Dados estos requerimientos, solo tenemos una opción para p_k, establecida en el teorema siguiente:

TEOREMA 1.1 (TEOREMA DE TAYLOR CON UNA VARIABLE) Sea X abierto en $\mathbf{R}$, y suponiendo que f: $X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es diferenciable (al menos) hasta el orden k.

Dado $a \in X$, sea

$$p_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \quad (1)$$

Entonces

$$f(x) = p_k(x) + R_k(x, a),$$

donde el término del residuo R_k es tal que $R_k(x, a)/(x-a)^k \to 0$ cuando $x \to a$.

El polinomio definido por la fórmula (1) se llama **polinomio de Taylor de k-ésimo orden de f en a**. La esencia del teorema de Taylor es esta: para una x cerca de a, el polinomio de Taylor p_k se aproxima a f en el sentido de que el error R_k involucrado en hacer esta aproximación tiende a cero incluso más rápido de lo que lo hace $(x-a)^k$. Cuando k es grande, esto en verdad es muy rápido, como se ve gráficamente en la figura 4.4.

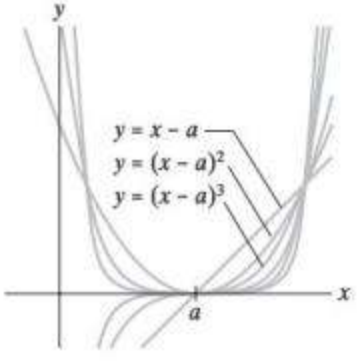


Figura 4.4 Las gráficas de
(1) $y = x - a$
(2) $y = (x-a)^2$ y
(3) $y = (x-a)^3$.
Advierta cómo la gráfica de (3) se ajusta mucho más al eje x de lo que lo hacen la de (1) o (2).

EJEMPLO 2 Considere de nuevo $\ln x$ con $a = 1$. Calculamos

$$f(1) = \ln 1 = 0,$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

Por lo tanto,

$$p_k(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k. \quad \blacklozenge$$

El teorema de Taylor, como se establece en el teorema 1.1, no dice nada explícito sobre el término del residuo R_k. Sin embargo, es posible establecer la siguiente forma de derivada para él:

PROPOSICIÓN 1.2 Si f es de clase C^{k+1}, entonces existe algún número z entre a y x tal que

$$R_k(x, a) = \frac{f^{(k+1)}(z)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}. \quad (2)$$

En la práctica, la fórmula 2 es muy útil para estimar el error involucrado con una aproximación del polinomio de Taylor. Tanto el teorema 1.1 (con la hipótesis ligeramente más fuerte de que f es de clase C^{k+1}) como la proposición 1.2 se demuestran en el apéndice de esta sección.

EJEMPLO 3 El polinomio de Taylor de quinto orden de $f(x) = \cos x$ con respecto de $x = \pi/2$, es

$$p_5(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{120}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5.$$

(Se invita al lector a verificar este cálculo). De acuerdo con la fórmula 2, la diferencia entre p_5 y $\cos x$ es

$$R_5\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{f^{(6)}(z)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 = -\frac{\cos z}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6,$$

donde z es algún número entre $\pi/2$ y x. Como $|\cos x|$ nunca es mayor que 1, tenemos que

$$\left|R_5\left(x, \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{\cos z}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6\right| \leq \frac{(x - \pi/2)^6}{720}.$$

Así, para x en el intervalo $[0, \pi]$ se tiene lo siguiente:

$$\left|R_5\left(x, \frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{(\pi - \pi/2)^6}{720} = \frac{\pi^6}{46{,}080} \approx 0.0209.$$

En otras palabras, el uso del polinomio p_5 anterior en lugar de $\cos x$ será exacto hasta al menos 0.0209 en todo el intervalo $[0, \pi]$. ◆

El teorema de Taylor en varias variables. La fórmula de primer orden

Por el momento, suponga el lector que $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función de dos variables, donde X es abierta en $\mathbf{R}^2$ y de clase C^1. Entonces, cerca del punto $(a, b) \in X$, la mejor aproximación lineal para f la da la ecuación que da el plano tangente en $(a, b, f(a, b))$. Es decir,

$$f(x, y) \approx p_1(x, y),$$

donde

$$p_1(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Observe que el polinomio lineal p_1 tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned} p_1(a, b) &= f(a, b); \\ \frac{\partial p_1}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \\ \frac{\partial p_1}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b). \end{aligned}$$

En la figura 4.5 se ilustra una aproximación como esta.

Para generalizar esta situación al caso de una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de clase C^1 usamos, naturalmente, la ecuación del *hiperplano tangente*. Es decir, si

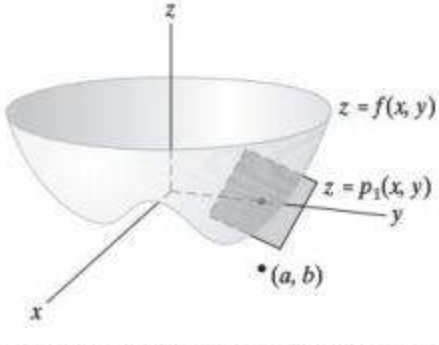


Figura 4.5 Gráfica de $z = f(x, y)$ y de $z = p_1(x, y)$.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$, entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

donde

$$p_1(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{a}) + f_{x_1}(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + f_{x_2}(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{a})(x_n - a_n).$$

Por supuesto, la fórmula para p_1 se puede escribir de manera más compacta utilizando la notación de Σ, o mejor aún, de matrices:

$$p_1(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \tag{3}$$

EJEMPLO 4 Sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_1x_2x_3x_4$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 + x_2x_3x_4, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 + x_1x_3x_4,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3 + x_1x_2x_4, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 4 + x_1x_2x_3.$$

En $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{0}) = 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4}(\mathbf{0}) = 4.$$

Por consiguiente,

$$p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 + 1(x_1 - 0) + 2(x_2 - 0) + 3(x_3 - 0) + 4(x_4 - 0)$$
$$= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4.$$

Advierta el lector que p_1 contiene precisamente los términos lineales de la función original f. Por otro lado, si $\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 2, 3, 4) = 25, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 2, 3, 4) = 14,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(1, 2, 3, 4) = 11, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4}(1, 2, 3, 4) = 10,$$

de modo que en este caso,

$$p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 54 + 25(x_1 - 1) + 14(x_2 - 2) + 11(x_3 - 3) + 10(x_4 - 4). \quad \blacklozenge$$

El teorema relevante con respecto del polinomio de Taylor de primer orden tan solo es un reacomodo de la definición de diferenciabilidad. No obstante, como planeamos considerar polinomios de Taylor de orden superior, enunciaremos el teorema en forma explícita.

TEOREMA 1.3 (FÓRMULA DE TAYLOR DE PRIMER ORDEN CON VARIAS VARIABLES) Establezca X abierta en $\mathbf{R}^n$ y suponga que $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{a}$ en X. Sea

$$p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \tag{4}$$

Entonces

$$f(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) + R_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}),$$

donde $R_1(\mathbf{x}, \mathbf{a})/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

Advierta que también podemos expresar el polinomio de Taylor de primer orden utilizando el gradiente. En lugar de (4) tendríamos

$$p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Diferenciales

Antes de explorar versiones de orden superior del teorema de Taylor con varias variables, consideremos con más detalle la aproximación lineal (de primer orden).

Sea $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Entonces la fórmula (3) se convierte en

$$p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})h_i. \tag{5}$$

Nos centraremos en la sumatoria que aparece en la fórmula (5) y resumiremos sus características principales como sigue:

DEFINICIÓN 1.4 Sean f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{a} \in X$. El **cambio incremental de** f, que se denota Δf, es

$$\Delta f = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}).$$

La **diferencial total de** f, que se denota como $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$, es

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n.$$

Lo significativo de la diferencial es que para $\mathbf{h} \approx \mathbf{0}$,

$$\Delta f \approx df.$$

(Hemos abreviado $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ con df).

En ocasiones se sustituye a h_i con la expresión Δx_i o dx_i para hacer énfasis en que representa un cambio en la i-ésima variable independiente, en cuyo caso escribimos

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

(Como de costumbre, eliminamos la evaluación de las derivadas parciales en $\mathbf{a}$).

EJEMPLO 5 Suponga que $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz) + \cos(xyz)$. Entonces,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \\ &= yz[\cos(xyz) - \operatorname{sen}(xyz)]dx + xz[\cos(xyz) - \operatorname{sen}(xyz)]dy \\ &\quad + xy[\cos(xyz) - \operatorname{sen}(xyz)]dz \\ &= (\cos(xyz) - \operatorname{sen}(xyz))(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz). \end{aligned}$$

◆

La geometría de la diferencial surge, con suficiente naturalidad, de las rectas y planos tangentes. (Véanse las figuras 4.6 y 4.7) En particular, el cambio incremental Δf mide el cambio en la altura de la gráfica de f cuando pasa de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{a} + \mathbf{h}$; el cambio diferencial df mide el cambio correspondiente en la altura de la gráfica del (hiper)

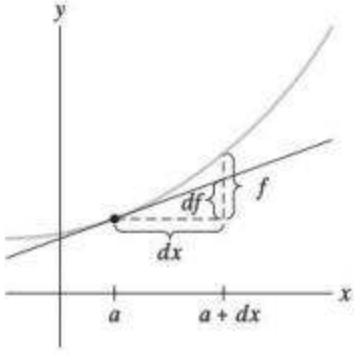


Figura 4.6 El cambio incremental Δf es igual al cambio en la coordenada y de la gráfica de $y = f(x)$, del mismo modo en que la coordenada x de un punto cambia de a a $a + dx$. La diferencial df es igual al cambio en la coordenada y de la gráfica de la recta tangente en a, es decir, la gráfica de $y = p_1(x)$.

Figura 4.7 El cambio incremental Δf es igual al cambio en la coordenada z de la gráfica de $z = f(x, y)$, de la misma manera en que un punto en $\mathbf{R}^2$ cambia de $\mathbf{a} = (a, b)$ a $\mathbf{a} + \mathbf{h} = (a + h, b + k)$. La diferencial df es igual al cambio en la coordenada z de la gráfica del plano tangente en (a, b).

plano tangente a la gráfica en $\mathbf{a}$. Cuando $\|\mathbf{h}\|$ es pequeño, es decir, cuando $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ está cerca de $\mathbf{a}$, la diferencial df se aproxima al incremento Δf, y con frecuencia es más fácil, desde un punto de vista técnico, trabajar con la diferencial.

EJEMPLO 6 Sea $f(x, y) = x - y + 2x^2 + xy^2$. Entonces, para $(a, b) = (2, -1)$, tenemos que el incremento es

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(2 + \Delta x, -1 + \Delta y) - f(2, -1)\\ &= 2 + \Delta x - (-1 + \Delta y) + 2(2 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta x)(-1 + \Delta y)^2 - 13\\ &= 10\Delta x - 5\Delta y + 2(\Delta x)^2 - 2\Delta x\,\Delta y + 2(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}df((2, -1), (\Delta x, \Delta y)) &= f_x(2, -1)\Delta x + f_y(2, -1)\Delta y\\ &= (1 + 4x + y^2)|_{(2,-1)}\Delta x + (-1 + 2xy)|_{(2,-1)}\Delta y\\ &= 10\Delta x - 5\Delta y.\end{aligned}$$

Vemos que df consta de exactamente los términos de Δf que son lineales en Δx y Δy, es decir, aparecen elevados solo a la primera potencia. Este será siempre el caso, por supuesto, ya que es la naturaleza de la aproximación de Taylor de primer orden. En la práctica, a menudo basta con utilizar la aproximación diferencial, cuando Δx y Δy son pequeñas, las potencias de estas serán suficientemente pequeñas como para que sus contribuciones a Δf sean dignas de tomar en cuenta. Por ejemplo, si tanto Δx como Δy son 0.01, entonces

$$df = (0.1 - 0.05) = 0.05$$

y

$$\begin{aligned}\Delta f &= (0.1 - 0.05) + 0.0002 - 0.0002 + 0.0002 + 0.000001\\ &= 0.05 + 0.000201 = 0.050201.\end{aligned}$$

Por consiguiente, los valores de df y Δf son los mismos hasta tres cifras decimales. ◆

EJEMPLO 7 Se va a fabricar un bloque rectangular de madera con dimensiones de 3 pulg × 4 pulg × 6 pulg. Suponga que la posibilidad de cometer errores en la medición es la misma en cada dimensión del bloque. Usaremos diferenciales para estimar con cuánta exactitud debemos medir las dimensiones de modo que el error calculado resultante del volumen no sea más de 0.1 pulg^3.

Sea que las dimensiones del bloque se denoten como x ($\approx$ 3 pulg), y ($\approx$ 4 pulg) y z ($\approx$ 6 pulg). Entonces, el volumen del bloque es

$$V = xyz \quad \text{y} \quad V \approx 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72 \text{ pulgadas}^3.$$

El error en el volumen calculado es ΔV, que es aproximado por la diferencial total dV. Así,

$$\begin{aligned} \Delta V \approx dV &= V_x(3, 4, 6)\Delta x + V_y(3, 4, 6)\Delta y + V_z(3, 4, 6)\Delta z \\ &= 24\Delta x + 18\Delta y + 12\Delta z. \end{aligned}$$

Si el error al medir cada dimensión es ϵ, entonces tenemos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \epsilon$. Por lo tanto,

$$dV = 24\Delta x + 18\Delta y + 12\Delta z = 24\epsilon + 18\epsilon + 12\epsilon = 54\epsilon.$$

Para garantizar (aproximadamente) que $|\Delta V| \leq 0.1$ se pide que

$$|dV| = |54\epsilon| \leq 0.1.$$

Entonces,

$$|\epsilon| \leq \frac{0.1}{54} = 0.0019 \text{ pulgadas.}$$

Lo que significa que las medidas de cada dimensión deben tener una exactitud de 0.0019 pulgadas. ◆

EJEMPLO 8 La fórmula para el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $V(r, h) = \pi r^2 h$. Si las dimensiones cambian en una cantidad pequeña Δr y Δh, entonces el cambio resultante ΔV en el volumen es aproximado por la diferencial de cambio dV. Es decir,

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = 2\pi r h\,\Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Suponga que el cilindro real es una lata de cerveza y que tiene dimensiones aproximadas de $r = 1$ pulg y $h = 5$ pulg. Entonces

$$dV = \pi(10\Delta r + \Delta h).$$

Este enunciado demuestra que para estos valores particulares de r y h, el volumen es aproximadamente 10 veces **más sensible** a los cambios en el radio que a los cambios en la altura. Es decir, si el radio cambia una cantidad ϵ, entonces la altura debe cambiar aproximadamente 10ϵ para mantener constante al volumen, es decir, para hacer que ΔV sea cero. Usamos la palabra "aproximadamente" porque nuestro análisis se basa en considerar el cambio diferencial dV en lugar del cambio incremental real ΔV.

El ejemplo de la lata de cerveza tiene una aplicación real en las estrategias de marketing de productos. Debido a que el volumen es mucho más sensible a los cambios en el radio que a los cambios en la altura, es posible hacer que una lata parezca más grande que el estándar incrementando ligeramente su radio (apenas lo suficiente como para que no se note) e incrementando su altura de modo que no cambie el volumen (véase la figura 4.8). Este análisis de sensibilidad demuestra que incluso una disminución pequeña del radio puede forzar a un incremento apreciable en la altura para compensar aquella. El resultado puede ser muy sorprendente, y aparentemente

Figura 4.8 ¿Cuál compraría usted?

estas ideas han sido adoptadas por al menos una cervecería. En realidad esta es la manera en que la autora llegó a apreciar las diferenciales y el análisis de sensibilidad.[1] ◆

Teorema de Taylor en varias variables. La fórmula de segundo orden

Suponga el lector que $f: X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función C^2 de dos variables. Entonces sabemos que el plano tangente da lugar a una aproximación lineal p_1 de f cerca de un punto dado (a, b) de X. Podemos mejorar este resultado buscando la *superficie cuadrática* que se aproxime mejor a la gráfica de $z = f(x, y)$ cerca de $(a, b, f(a, b))$. Para una ilustración de esto véase la figura 4.9. Es decir, buscamos un polinomio de grado 2 $p_2(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, tal que para $(x, y) \approx (a, b)$,

$$f(x, y) \approx p_2(x, y).$$

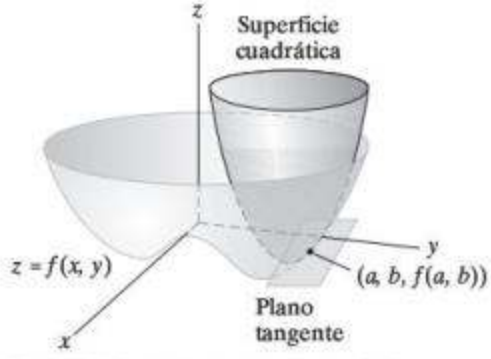


Figura 4.9 Plano tangente y superficie cuadrática.

En forma análoga a la aprovimación lineal p_1, es razonable requerir que p_2 y todas sus derivadas de primer y segundo orden concuerden con las de f en el punto (a, b). Es decir, pedimos que

$$p_2(a, b) = f(a, b),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), & \frac{\partial p_2}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}(a, b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), & \frac{\partial^2 p_2}{\partial x \partial y}(a, b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Después de hacer algo de álgebra vemos que el único polinomio de segundo orden que satisface estos requerimientos es

$$\begin{aligned} p_2(x, y) = {} & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ & + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) \\ & + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

[1] Véase S. J. Colley, *The College Mathematics Journal*, **25** (1994), No. 3, 226-227. Las imágenes se reproducen con permiso de la Mathematical Association of America.

¿Cómo se generaliza la fórmula (7) a funciones de n variables? Necesitamos comenzar por requerir condiciones análogas a las de las ecuaciones (6) para una función: $f\colon X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Para $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$, dichas condiciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} p_2(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}), \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

Si el lector hace un poco de álgebra (que se omite en el texto), encontrará que el único polinomio de grado 2 que satisface las condiciones planteadas por las ecuaciones en (8) es

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j). \tag{9}$$

(Advierta que la segunda suma que aparece en (9) es una doble sumatoria que consta de n^2 términos). Para comprobar que todo es consistente cuando $n = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} p_2(x_1, x_2) = {} & f(a_1, a_2) + f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \\ & + \tfrac{1}{2}\left[f_{x_1x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1)^2 + f_{x_1x_2}(a_1, a_2)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\right. \\ & \left. + f_{x_2x_1}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)(x_1 - a_1) + f_{x_2x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Cuando f es una función C^2, las dos parciales mixtas son iguales, por lo que esta fórmula concuerda con la (7).

EJEMPLO 9 Sean $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ y $\mathbf{a} = (a, b, c) = (0, 0, 0)$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= e^0 = 1, \\ f_x(0, 0, 0) &= f_y(0, 0, 0) = f_z(0, 0, 0) = e^0 = 1, \\ f_{xx}(0, 0, 0) &= f_{xy}(0, 0, 0) = f_{xz}(0, 0, 0) = f_{yy}(0, 0, 0) \\ &= f_{yz}(0, 0, 0) = f_{zz}(0, 0, 0) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} p_2(x, y, z) &= 1 + 1(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 0) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left[1(x - 0)^2 + 2 \cdot 1(x - 0)(y - 0) + 2 \cdot 1(x - 0)(z - 0)\right. \\ &\quad \left. + 1(y - 0)^2 + 2 \cdot 1(y - 0)(z - 0) + 1(z - 0)^2\right] \\ &= 1 + x + y + z + \tfrac{1}{2}x^2 + xy + xz + \tfrac{1}{2}y^2 + yz + \tfrac{1}{2}z^2 \\ &= 1 + (x + y + z) + \tfrac{1}{2}(x + y + z)^2. \end{aligned}$$

Usamos el hecho de que, como f es de clase C^2, un término como

$$f_{xy}(0, 0, 0)(x - 0)(y - 0) \quad \text{es igual a} \quad f_{yx}(0, 0, 0)(y - 0)(x - 0). \qquad \blacklozenge$$

Ahora estableceremos de manera precisa la versión de segundo orden del teorema de Taylor.

TEOREMA 1.5 (FÓRMULA DE TAYLOR DE SEGUNDO ORDEN) Suponga que X es abierto en $\mathbf{R}^n$ y que $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es de clase C^2. Sea

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Entonces

$$f(\mathbf{x}) = p_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}),$$

donde $|R_2|/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

En el apéndice de esta sección se establece una versión del teorema 1.5 con la suposición más fuerte de que f es de clase C^3.

EJEMPLO 10 Sean $f(x, y) = \cos x \cos y$ y $(a, b) = (0, 0)$. Entonces

$$f(0, 0) = 1;$$

$$f_x(0, 0) = -\operatorname{sen} x \cos y|_{(0,0)} = 0, \qquad f_y(0, 0) = -\cos x \operatorname{sen} y|_{(0,0)} = 0;$$

$$f_{xx}(0, 0) = -\cos x \cos y|_{(0,0)} = -1,$$

$$f_{xy}(0, 0) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y|_{(0,0)} = 0,$$

$$f_{yy}(0, 0) = -\cos x \cos y|_{(0,0)} = -1.$$

Así,

$$f(x, y) \approx p_2(x, y) = 1 + \tfrac{1}{2}(-1 \cdot x^2 - 1 \cdot y^2) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2.$$

Existe otra manera de resolver este problema, ya que f es el producto de dos funciones. Podemos multiplicar los dos polinomios de Taylor:

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= (\text{polinomio de Taylor para el cos de } x) \cdot (\text{polinomio de Taylor para el cos de } y) \\ &= \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}y^2\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}x^2y^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 \qquad \text{hasta los términos de grado 2.} \end{aligned}$$

Este método se justifica cuando se nota que si q_2 es el polinomio de Taylor para el coseno y que R_2 es el término del residuo correspondiente, entonces

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= [q_2(x) + R_2(x, 0)][q_2(y) + R_2(y, 0)] \\ &= q_2(x)q_2(y) + q_2(y)R_2(x, 0) + q_2(x)R_2(y, 0) + R_2(x, 0)R_2(y, 0) \\ &= q_2(x)q_2(y) + \text{otras cosas}, \end{aligned}$$

donde (otras cosas)$/\|(x, y)\|^2 \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$, puesto que tanto $R_2(x, 0)$ como $R_2(y, 0)$ también lo hacen. ◆

El hessiano

Recuerde el lector que la fórmula para el polinomio de Taylor de primer orden p_1 se escribió de manera muy concisa en la fórmula (5) utilizando notación de vectores y matrices. Se observa que es posible hacer algo similar para el polinomio de segundo orden p_2.

DEFINICIÓN 1.6 El **hessiano** de una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es la matriz cuyo ij-ésimo elemento es $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$. Es decir,

$$Hf = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}.$$

El término "hessiano" proviene de Ludwig Otto Hesse, el matemático que lo presentó originalmente, no de los mercenarios alemanes que pelearon en la guerra civil de Estados Unidos.

Ahora analizaremos de nuevo la fórmula para p_2 del teorema 1.5:

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\mathbf{a})h_ih_j.$$

(Hemos hecho $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$). Esto puede escribirse como sigue:

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \begin{bmatrix} f_{x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{a}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Así, se ve que

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T Hf(\mathbf{a})\mathbf{h}. \tag{10}$$

(Recuerde el lector que $\mathbf{h}^T$ es la *transpuesta* de la matriz $\mathbf{h}$ de $n \times 1$).

EJEMPLO 11 **(Nueva revisión del ejemplo 10)** Para $f(x, y) = \cos x \cos y$, $\mathbf{a} = (0, 0)$, tenemos que

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \end{bmatrix}$$

y

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos x \cos y & \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & -\cos x \cos y \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= f(0, 0) + Df(0, 0)\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T Hf(0, 0)\mathbf{h} \\ &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}h_1^2 - \tfrac{1}{2}h_2^2. \end{aligned}$$

Una vez que recordamos que $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (x - 0, y - 0) = (x, y)$, vemos que este resultado concuerda con el del ejemplo 10, como debería ser. ◆

Polinomios de Taylor de orden superior

Hasta este momento no hemos dicho nada acerca de los polinomios de Taylor de grado mayor que 2 para el caso de funciones de varias variables. Las principales razones para esto son que (i) la fórmula general es demasiado complicada y no tiene una expresión matricial compacta parecida a la ecuación (10) y que (ii) en este libro tendremos poca necesidad de tales fórmulas. No obstante, si el lector no resiste la curiosidad, aquí tiene el polinomio de Taylor de tercer orden para una función f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de clase C^3 cerca de $\mathbf{a} \in X$:

$$\begin{aligned} p_3(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) &+ \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k). \end{aligned}$$

(El teorema relevante respecto de p_3 es que $f(\mathbf{x}) = p_3(\mathbf{x}) + R_3(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, donde $|R_3(\mathbf{x}, \mathbf{a})|/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3 \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$). Si el lector ha de saber más, el polinomio de Taylor de k-ésimo orden es

$$\begin{aligned} p_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) &+ \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}). \end{aligned}$$

Fórmulas para los términos del residuo (opcional)

Con hipótesis un poco más estrictas que las que se hacen en los teoremas 1.3 y 1.5, las fórmulas integrales para los términos del residuo pueden obtenerse como sigue. Hacemos que $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Si f es de clase C^2, entonces

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1 - t) f_{x_i x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i h_j \, dt \\ &= \int_0^1 \left[\mathbf{h}^T Hf(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}\right](1 - t)\, dt. \end{aligned}$$

Si f es de clase C^3, entonces

$$R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \, dt,$$

y si f es de clase C^{k+1}, entonces

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1}=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k+1}}}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_{k+1}} \, dt.$$

Aunque explícitas, en la práctica estas fórmulas no son muy útiles. Con la aplicación ingeniosa de la fórmula de Taylor con una sola variable podemos llegar a versiones de derivadas de los términos del residuo (lo que se conoce como **forma de Lagrange del residuo**) que son similares a las del caso con una variable.

Forma de Lagrange del residuo. Si f es de clase C^2, entonces en el teorema 1.3 el residuo R_1 es

$$R_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{z}) h_i h_j$$

para un punto apropiado $\mathbf{z}$ en el dominio de f en el segmento de recta que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$. De manera similar, si f es de clase C^3, entonces el residuo R_2 en el teorema 1.5 es

$$R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{z}) h_i h_j h_k$$

para un punto $\mathbf{z}$ apropiado en el segmento de recta que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$. Más en general, si f es de clase C^{k+1}, entonces el residuo R_k es

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k+1}}}(\mathbf{z}) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_{k+1}}$$

para un punto $\mathbf{z}$ apropiado en el segmento de recta que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$.

En el apéndice de esta sección se establecen las fórmulas del residuo anteriores.

EJEMPLO 12 Para $f(x, y) = \cos x \cos y$ tenemos

$$|R_2(x, y, 0, 0)| = \frac{1}{3!} \left| \sum_{i,j,k=1}^{2} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{z}) h_i h_j h_k \right|$$

$$\leq \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{2} 1 \cdot |h_i h_j h_k|,$$

ya que todas las derivadas parciales de f serán productos de senos y cosenos, y por ello de magnitud no mayor que 1. Al expandir la sumatoria se obtiene

$$|R_2(x, y, 0, 0)| \leq \tfrac{1}{6} \left(|h_1|^3 + 3h_1^2 |h_2| + 3|h_1| h_2^2 + |h_2|^3 \right).$$

Si tanto $|h_1|$ como $|h_2|$ no son mayores que, digamos, 0.1, entonces

$$|R_2(x, y, 0, 0)| \leq \tfrac{1}{6} \left(8 \cdot (0.1)^3 \right) = 0.00\overline{13}.$$

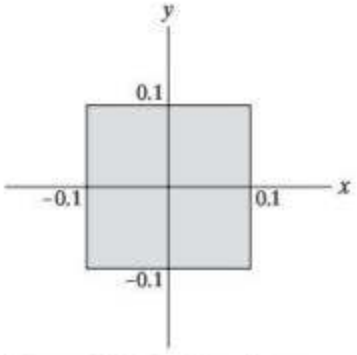


Figura 4.10 El polinomio p_2 se aproxima a f en un $0.001\bar{3}$ del cuadrado que se muestra (véase el ejemplo 12).

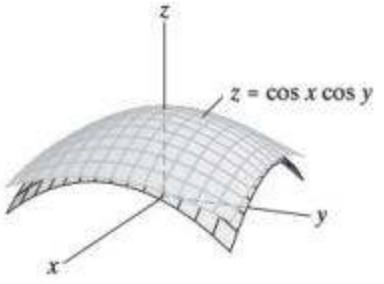


Figura 4.11 Gráfica de $f(x, y) = \cos x \cos y$ y su polinomio de Taylor $p_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ sobre el cuadrado $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

Así que, a través del cuadrado de lado 0.2 con centro en el origen mostrado en la figura 4.10, el polinomio de Taylor de segundo orden es exacto hasta al menos $0.001\bar{3}$, es decir, hasta dos cifras decimales, como una aproximación de $f(x, y) = \cos x \cos y$. En la figura 4.11 se muestra la gráfica de $f(x, y) = \cos x \cos y$ en el dominio del cuadrado $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, junto con la gráfica de su polinomio de Taylor de segundo orden $p_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ (calculado en el ejemplo 10). Advierta lo cercano de la coincidencia de las superficies cerca del punto (0, 0, 1), exactamente como lo indica el análisis anterior. ◆

Apéndice. Demostraciones del teorema 1.1, la proposición 1.2 y el teorema 1.5

A continuación se establecen algunos de los resultados fundamentales que se usan en esta sección. Comenzaremos por demostrar el teorema 1.1, el de Taylor para funciones de una variable, y la proposición 1.2 acerca del término del residuo en el teorema 1.1. Después usaremos estos resultados para "descubrir" una prueba del resultado multivariable del teorema 1.5 y obtener la fórmula de Lagrange del término del residuo que aparece en él.

Demostración del teorema 1.1 Demostramos el resultado con la fuerte suposición de que f es de clase C^{k+1} en vez de asumir que f solo es diferenciable hasta un orden k (en la práctica esto tiene poca importancia).

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt. \tag{11}$$

Evaluamos la integral en el lado derecho de (11) mediante integración por partes. Recuerde el lector que la fórmula de esta técnica es

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Esta expresión se usa con $u = f'(t)$ y $v = x - t$, de modo que $dv = -dt$ (advierta que en el lado derecho de (11), la x desempeña el papel de una constante). Obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\,dt &= -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Al combinar (11) y (12) se tiene

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt. \tag{13}$$

Así, hemos demostrado que cuando f es diferenciable hasta (al menos) el segundo orden,

$$R_1(x,a) = \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

Esto demuestra una fórmula de integración para el residuo que aparece en la fórmula (1) del teorema 1.1 cuando $k = 1$, aunque aún no hemos establecido que $R_1(x,a)/(x-a) \to 0$ cuando $x \to a$.

Para obtener la fórmula de segundo orden, el caso en que $k = 2$ de (1), nos centramos en que $R_1(x,a) = \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$ y de nuevo integramos por partes, esta vez con $u = f''(t)$ y $v = (x-t)^2/2$, por lo que $dv = -(x-t)dt$. Se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt &= -\frac{f''(t)(x-t)^2}{2}\bigg|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt \\ &= \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt.\end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (13) se convierte en

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que cuando f es diferenciable hasta (al menos) el tercer orden,

$$R_2(x,a) = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt.$$

Podemos continuar con esta argumentación o usar inducción matemática para demostrar que la fórmula (1) se cumple en general con

$$R_k(x,a) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\,dt, \tag{14}$$

dando por hecho que f es diferenciable hasta el orden (al menos) $k+1$.

Queda por ver que $R_k(x,a)/(x-a)^k \to 0$ cuando $x \to a$. En la fórmula (14) solo consideramos t entre a y x, por lo que $|x-t| \le |x-a|$. Además, como suponemos que f es de Clase C^{k+1}, tenemos que $f^{(k+1)}(t)$ es continua y por ello está acotada por t entre a y x, es decir, que $|f^{(k+1)}(t)| \le M$ para cierta constante M. Por consiguiente,

$$|R_k(x,a)| \le \left|\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\,dt\right| \le \pm\int_a^x \left|\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\right| dt,$$

donde se aplica el signo más si $x \ge a$, y el signo menos si $x < a$,

$$\le \pm\int_a^x \frac{M}{k!}|x-a|^k\,dt = \frac{M}{k!}|x-a|^{k+1}.$$

Entonces,

$$\left|\frac{R_k(x,a)}{(x-a)^k}\right| \le \frac{M}{k!}|x-a| \to 0$$

cuando $x \to a$, como se buscaba. ■

Demostración de la proposición 1.2 Establecemos la proposición 1.2 por medio de una versión general del teorema del valor medio para las integrales. Este teorema establece que para funciones continuas g y h tales que h no cambia de signo en $[a, b]$ (es decir, ya sea que $h(t) \geq 0$ en $[a, b]$, o que $h(t) \leq 0$ en $[a, b]$), hay algún número z entre a y b tal que

$$\int_a^b g(t)h(t)\,dt = g(z)\int_a^b h(t)\,dt.$$

(Omitimos la demostración pero recalcamos que este teorema es consecuencia del teorema del valor medio). Al aplicar este resultado a la fórmula (14) con $g(t) = f^{(k+1)}(t)$ y $h(t) = (x-t)^k/k!$, encontramos que debe haber alguna z entre a y x tal que

$$\begin{aligned} R_k(x,a) &= f^{(k+1)}(z)\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!}\,dt = f^{(k+1)}(z)\left(-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(z)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}. \end{aligned}$$

■

Demostración del teorema 1.5 Como en la demostración del teorema 1.1, establecemos el teorema 1.5 con la fuerte suposición de que f es de clase C^3. Comenzamos por hacer $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, y consideramos que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{h}$ son fijas. Definimos la función de una variable F por medio de $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$. Como se supone que f es de clase C^3 en un conjunto abierto X, si tomamos a $\mathbf{x}$ suficientemente cercana a $\mathbf{a}$, entonces F es de clase C^3 en un intervalo abierto que contenga a $[0, 1]$. Por consiguiente, se aplica el teorema 1.1 con $k = 2$, $a = 0$ y $x = 1$ para dar

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0)(1-0) + \frac{F''(0)}{2!}(1-0)^2 + R_2(1,0) \\ &= F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + R_2(1,0), \end{aligned} \tag{15}$$

donde $R_2(1,0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}F'''(t)\,dt$. Ahora usamos la regla de la cadena para calcular las derivadas de F en términos de las derivadas parciales de f:

$$F'(t) = Df(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_i;$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f_{x_ix_j}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_j\right]h_i = \sum_{i,j=1}^n f_{x_ix_j}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_ih_j;$$

$$F'''(t) = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n f_{x_ix_jx_k}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_ih_j\right]h_k = \sum_{i,j,k=1}^n f_{x_ix_jx_k}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_ih_jh_k.$$

De manera que la ecuación (15) se convierte en

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) &+ \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{a})h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n f_{x_ix_j}(\mathbf{a})h_ih_j \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}f_{x_ix_jx_k}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_ih_jh_k\,dt, \end{aligned}$$

o, de manera equivalente,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}),$$

donde el residuo multivariado es

$$R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \, dt. \tag{16}$$

Todavía falta demostrar que $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})|/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, o, de manera equivalente, que $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})|/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Para demostrar esto, observe el lector que en el caso de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{h}$ fijos, la expresión $(1-t)^2 f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ es continua para t en $[0, 1]$ (puesto que se supone que f es de clase C^3) y, por lo tanto, es acotada. Además, para $i = 1, \ldots, n$, tenemos que $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} |R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})| &= \left| \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \, dt \right| \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^2}{2} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \right| dt \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 M\|h\|^3 \, dt = n^3 M \|\mathbf{h}\|^3 = n^3 M \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \leq n^3 M \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0$$

cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

Por último, se hace énfasis en que pueden darse argumentos muy similares con el fin de establecer resultados para los polinomios de Taylor de órdenes mayores que dos. ■

Fórmula de Lagrange para el residuo (véase la página 257) Utilizando la función $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ definida en la demostración del teorema 1.5, la proposición 1.2 implica que debe haber algún número c entre 0 y 1 tal que el residuo con una variable sea

$$R_2(1, 0) = \frac{F'''(c)}{3!}(1 - 0)^3.$$

Ahora, el término del residuo $R_2(1, 0)$ de la proposición 1.2 es precisamente $R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ en el teorema 1.5 y

$$F'''(c) = \sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a} + c\mathbf{h}) h_i h_j h_k = \sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{z}) h_i h_j h_k,$$

donde $\mathbf{z} = \mathbf{a} + c\mathbf{h}$. Puesto que c está entre 0 y 1, el punto $\mathbf{z}$ está en el segmento de recta que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, y así

$$R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{z}) h_i h_j h_k,$$

que es el resultado deseado. La obtención de la fórmula $R_k(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ para $k > 2$ es análoga. ■

4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 7 encuentre los polinomios de Taylor p_k del orden k dado en el punto a indicado.

1. $f(x) = e^{2x}, a = 0, k = 4$
2. $f(x) = \ln(1 + x), a = 0, k = 3$
3. $f(x) = 1/x^2, a = 1, k = 4$
4. $f(x) = \sqrt{x}, a = 1, k = 3$
5. $f(x) = \sqrt{x}, a = 9, k = 3$
6. $f(x) = \operatorname{sen} x, a = 0, k = 5$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x, a = \pi/2, k = 5$

En los ejercicios 8 a 15 encuentre los polinomios de Taylor de primero y segundo orden para la función f dada en el punto **a** *dado.*

8. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1), \mathbf{a} = (0, 0)$
9. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1), \mathbf{a} = (1, -1)$
10. $f(x, y) = e^{2x+y}, \mathbf{a} = (0, 0)$
11. $f(x, y) = e^{2x} \cos 3y, \mathbf{a} = (0, \pi)$
12. $f(x, y, z) = ye^{3x} + ze^{2y}, \mathbf{a} = (0, 0, 2)$
13. $f(x, y, z) = xy - 3y^2 + 2xz, \mathbf{a} = (2, -1, 1)$
14. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2 + 1), \mathbf{a} = (0, 0, 0)$
15. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} xyz, \mathbf{a} = (0, 0, 0)$

En los ejercicios 16 a 20 calcule la matriz hessiana $Hf(\mathbf{a})$ para la función f indicada en el punto **a** *indicado.*

16. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1), \mathbf{a} = (0, 0)$
17. $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y, \mathbf{a} = (\pi/4, \pi/3)$
18. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{xy}}, \mathbf{a} = (1, 2, -4)$
19. $f(x, y, z) = x^3 + x^2y - yz^2 + 2z^3, \mathbf{a} = (1, 0, 1)$
20. $f(x, y, z) = e^{2x-3y} \operatorname{sen} 5z, \mathbf{a} = (0, 0, 0)$
21. Para f y **a**, como se dan en el ejercicio 8, exprese el polinomio de Taylor de segundo orden $p_2(x, y)$ utilizando la matriz de derivadas y la hessiana como en la fórmula (10) de esta sección.
22. Para f y **a**, como se dan en el ejercicio 11, exprese el polinomio de Taylor de segundo orden $p_2(x, y)$ por medio de la matriz de derivadas y la hessiana como en la fórmula (10) de esta sección.
23. Para f y **a**, como se dan en el ejercicio 12, exprese el polinomio de Taylor de segundo orden $p_2(x, y, z)$ utilizando la matriz de derivadas y la hessiana como en la fórmula (10) de esta sección.
24. Para f y **a**, como se dan en el ejercicio 19, exprese el polinomio de Taylor $p_2(x, y, z)$ utilizando la matriz de derivadas y la hessiana como en la fórmula (10) de esta sección.
25. Considere la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}.$$

   a) Calcule $Df(0, 0, \ldots, 0)$ y $Hf(0, 0, \ldots, 0)$.

   b) Determine el polinomio de Taylor de primero y segundo orden de f en **0**.

   c) Use las fórmulas (3) y (10) para escribir el polinomio de Taylor en términos de la matriz de derivadas y hessiana.

26. Encuentre el polinomio de Taylor de tercer orden $p_3(x, y, z)$ de

$$f(x, y, z) = e^{x+2y+3z}$$

   en (0, 0, 0).

27. Encuentre el polinomio de Taylor de tercer orden de

$$f(x, y, z) = x^4 + x^3y + 2y^3 - xz^2 + x^2y + 3xy - z + 2$$

   a) en (0, 0, 0).

   b) en (1, −1, 0).

Determine la diferencial total de las funciones dadas en los ejercicios 28 a 32.

28. $f(x, y) = x^2y^3$
29. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^3$
30. $f(x, y, z) = \cos(xyz)$
31. $f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} z$
32. $f(x, y, z) = 1/\sqrt{xyz}$
33. Use el hecho de que la diferencial total df se aproxima al cambio incremental Δf para dar estimaciones de las cantidades siguientes:

   a) $(7.07)^2(1.98)^3$

   b) $1/\sqrt{(4.1)(1.96)(2.05)}$

   c) $(1.1)\cos((\pi - 0.03)(0.12))$

34. Cerca del punto (1, −2, 1) la función $g(x, y, z) = x^3 - 2xy + x^2z + 7z$, ¿es más sensible a cambios en x, y o z?
35. ¿A cuál elemento de la matriz es más sensible el determinante que sigue?

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

36. Si la medida que obtiene el lector del radio de un cilindro es 2 pulgadas, con un error posible de ± 0.1 pulgadas, y la de la altura es de 3 pulgadas con un error posible de ± 0.05 pulgadas, use diferenciables para determinar el error aproximado de

a) el volumen calculado de un cilindro.

b) el área superficial calculada.

37. Una lata de hongos se fabrica por lo común con un diámetro de 5 cm y una altura de 12 cm. El fabricante planea reducir el diámetro en 0.5 cm. Use diferenciales para estimar hasta qué punto habría que incrementar la altura de la lata para no alterar su volumen.

38. Considere un triángulo con lados de longitudes a y b que forman un ángulo interior θ.

a) Si $a = 3$, $b = 4$ y $\theta = \pi/3$, ¿a cuáles cambios en cuál de estas mediciones es más sensible el área del triángulo?

b) Si las mediciones de la longitud en el inciso anterior tienen un error máximo de 5%, y la del ángulo otro máximo de 2%, estime el máximo porcentaje de error que resulta en el área calculada.

39. Para estimar el volumen de un cono de radio aproximado de 2 m y altura aproximada de 6 m, ¿con cuánta exactitud deben medirse el radio y la altura para que el error en el volumen calculado no exceda a 0.2m^3? Suponga que los errores posibles en la medida del radio y la altura son iguales.

40. Suponga el lector que mide las dimensiones de un bloque de tofu y obtiene (aproximadamente) $3 \times 4 \times 2$ pulgadas. Suponga que la posibilidad de cometer errores es la misma en cada una de las mediciones, ¿qué tan exactas deben ser las mediciones para que el error en el volumen calculado del tofu no rebase las $0.2\ \text{pulg}^3$? ¿Qué porcentaje de error en el volumen representa esto?

41. *a*) Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$ en el punto $(0, \pi/2)$.

b) Si $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (x, y) - (0, \pi/2)$ es tal que $|h_1|$ y $|h_2|$ no son más de 0.3, estime qué tan exacta es su aproximación de Taylor.

42. *a*) Determine el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x, y) = e^{x+2y}$ en el origen.

b) Estime la exactitud de la aproximación si $|x|$ y $|y|$ no son más de 0.1.

43. *a*) Determine el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x, y) = e^{2x} \cos y$ en el punto $(0, \pi/2)$.

b) Si $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (x, y) - (0, \pi/2)$ es tal que $|h_1| \leq 0.2$ y $|h_2| \leq 0.1$, estime la exactitud de la aproximación a la f dada por el polinomio de Taylor obtenido en el inciso anterior.

4.2 Extremos de funciones

El poder del cálculo reside, al menos en parte, en el auxilio que presta para resolver una amplia variedad de problemas de optimización. Para cualquier cantidad que cambie es natural preguntarse cuándo, si es que lo hace en algún momento, el cambio alcanza su máximo, su mínimo o es más rápido o más lento. El lector ya sabe cómo encontrar los máximos y mínimos de funciones de una variable, y sin duda ha aplicado esas técnicas a numerosas situaciones. Sin embargo, muchos fenómenos no pueden modelarse apropiadamente con funciones de solo una variable, lo cual hace indispensable adaptar y extender los métodos de optimización al caso de funciones de más de una variable. En esta sección y la siguiente desarrollaremos la teoría necesaria, y en la sección 4.4 estudiaremos algunas aplicaciones.

Puntos críticos de funciones

Establezca X abierta en $\mathbf{R}^n$ y suponga que $f\colon \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de variable escalar.

Figura 4.12 Gráfica de $z = f(x, y)$.

DEFINICIÓN 2.1 Decimos que f tiene un **mínimo local** en el punto $\mathbf{a}$ en X si existe alguna vecindad U de $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ para toda $\mathbf{x}$ en U. En forma similar, decimos que f tiene un **máximo local** en $\mathbf{a}$ si hay alguna vecindad U de $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ para toda $\mathbf{x}$ en U.

Cuando $n = 2$, los extremos locales de $f(x, y)$ son precisamente los valles y crestas de la superficie dada por la gráfica de $z = f(x, y)$, como lo ilustra la figura 4.12.

Hacemos énfasis en el uso que damos al adjetivo "local". Cuando en una función f ocurre un máximo local en el punto **a**, significa que los valores de f en los puntos *cerca* de **a** no son mayores que este, *no que todos* los valores de f no lo sean. En realidad, f podría tener máximos locales y ningún máximo **global** (o **absoluto**). Considere las gráficas de la figura 4.13. (Por supuesto, se aplican comentarios similares a los mínimos locales y globales).

Figura 4.13 Ejemplos de máximos locales y globales.

Recuerde el lector que si una función diferenciable de una variable tiene un extremo local en un punto, entonces la derivada no existe ahí, lo que significa que la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal. Las figuras 4.12 y 4.13 sugieren fuertemente que si una función de dos variables tiene un máximo o mínimo local en un punto del dominio, entonces el plano tangente a ese punto de la gráfica debe ser horizontal. En efecto, ése es el caso, como implica el siguiente resultado general (junto con la fórmula (4) de la sección 2.3).

TEOREMA 2.2 Sea X abierto en $\mathbf{R}^n$ y sea $f\colon \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenciable. Si f tiene un extremo local en $\mathbf{a} \in X$, entonces $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN Suponga, para facilitar la argumentación, que f tiene un máximo local en **a**. Entonces, la función F de una variable definida por $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ debe tener un máximo local en $t = 0$ para *cualquier* **h** (geométricamente la función F solo es la restricción de f para la recta que pasa por **a** y es paralela a **h**, como se muestra en la figura 4.14). A partir del cálculo de una variable debemos, por lo tanto, tener que $F'(0) = 0$. Por la regla de la cadena

$$F'(t) = \frac{d}{dt}[f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})] = Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}.$$

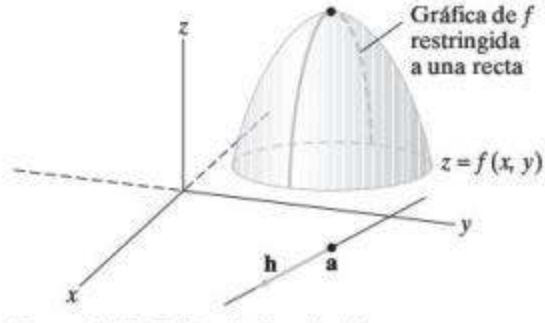


Figura 4.14 Gráfica de f restringida a una recta.

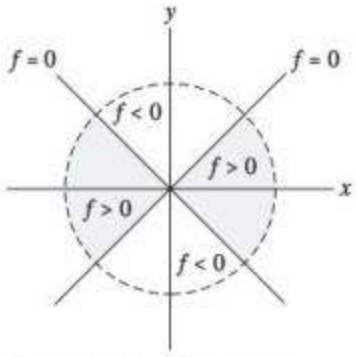


Figura 4.15 La función f es estrictamente positiva en la región sombreada, estrictamente negativa en la no sombreada y cero a lo largo de las rectas $y = \pm x$.

En consecuencia,

$$0 = F'(0) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = f_{x_1}(\mathbf{a})h_1 + f_{x_2}(\mathbf{a})h_2 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{a})h_n.$$

Como este último resultado debe cumplirse para toda $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$, encontramos que al volver a igualar $\mathbf{h}$ a $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots 0, 1)$, tenemos

$$f_{x_1}(\mathbf{a}) = f_{x_2}(\mathbf{a}) = \cdots = f_{x_n}(\mathbf{a}) = 0.$$

Por lo tanto, $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, como se buscaba. ■

Un punto $\mathbf{a}$ en el dominio de f, donde $Df(\mathbf{a})$ es cero o es indefinida, se llama **punto crítico** de f. El teorema 2.2 indica que cualquier extremo de f debe ocurrir en un punto crítico. Sin embargo, no hay manera de que ocurra el caso de que todo punto crítico esté situado en un extremo.

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^2 - y^2$, entonces $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \end{bmatrix}$, de manera que es evidente que el único punto crítico es $(0, 0)$. No obstante, en $(0, 0)$ no ocurre ningún máximo ni mínimo. En verdad, en cualquier disco abierto con centro en $(0, 0)$, sin importar lo pequeño que sea, hay puntos para los que $f(x, y) > f(0, 0) = 0$ y también puntos en los que $f(x, y) < f(0, 0)$ (véase la figura 4.15). ◆

Este tipo de puntos críticos se llama **punto silla**. Su nombre proviene del hecho de que la gráfica de $z = f(x, y)$ se asemeja a una silla de montar (véase la figura 4.16).

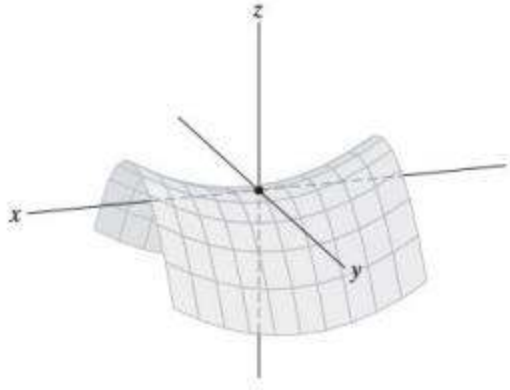


Figura 4.16 Un punto silla.

EJEMPLO 2 Sea $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. El dominio de f es todo de $\mathbf{R}^2$. Obtenemos que $Df(x, y) = \left[\dfrac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \dfrac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \right]$; advierta que Df es indefinida en $(0, 0)$ y distinta de cero en todos los demás $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Así, $(0, 0)$ es el único punto crítico. Como $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) y tiene un valor de 0 solo en $(0, 0)$, vemos que f tiene un mínimo (global) único en $(0, 0)$. ◆

La naturaleza de un punto crítico. Criterio del hessiano

El ejemplo siguiente ilustra nuestro conocimiento actual sobre los extremos:

EJEMPLO 3 Encontramos los extremos de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 5.$$

Como f es un polinomio, es diferenciable en todo lugar, y el teorema 2.2 implica que cualquier extremo debe ocurrir donde $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ desaparezcan de manera simultánea. Por consiguiente, resolvemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 2 = 0 \end{cases},$$

y encontramos que la única solución es $x = -2$, $y = 2$. En consecuencia, el único punto crítico de esta función es $(-2, 2)$.

Para determinar si $(-2, 2)$ es un máximo o mínimo (o ni lo uno ni lo otro), podríamos graficar la función y sacar lo que esperamos sea una conclusión obvia. Por supuesto, esta técnica no se extiende a funciones de más de dos variables, por lo que en el mejor de los casos el método gráfico tiene poco valor. En vez de ello veremos cómo cambia f a medida que nos alejamos del punto crítico:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(-2 + h, 2 + k) - f(-2, 2) \\ &= [(-2 + h)^2 + (-2 + h)(2 + k) + (2 + k)^2 \\ &\quad + 2(-2 + h) - 2(2 + k) + 5] - 1 \\ &= h^2 + hk + k^2. \end{aligned}$$

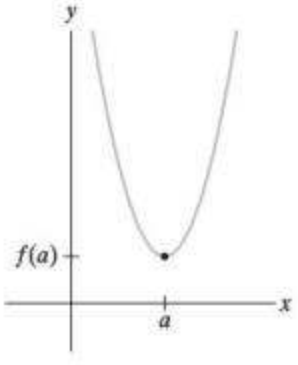


Figura 4.17 Parábola que abre hacia arriba.

Si la cantidad $\Delta f = h^2 + hk + k^2$ es no negativa para todos los valores pequeños de h y de k, entonces $(-2, 2)$ es un mínimo local. En forma similar, si Δf siempre es no positiva, entonces $(-2, 2)$ debe ser un máximo local. Por último, si Δf es positiva para ciertos valores de h y k, y negativa para otros, significa que $(-2, 2)$ es un punto silla. Para determinar de cuál posibilidad se trata completamos al cuadrado:

$$\Delta f = h^2 + hk + k^2 = h^2 + hk + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{3}{4}k^2 = \left(h + \tfrac{1}{2}k\right)^2 + \tfrac{3}{4}k^2.$$

Entonces, $\Delta f \geq 0$ para todos los valores de h y k, de modo que $(-2, 2)$ necesariamente genera un mínimo local. ◆

El ejemplo 3 con toda su álgebra demuestra con claridad la necesidad que hay de contar con un mejor modo de determinar cuándo un punto crítico genera un máximo o un mínimo local (o ni lo uno ni lo otro). En el caso de una función diferenciable dos veces: $f: X \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, el lector ya conoce un método rápido, que consiste en el análisis del signo de la segunda derivada. Este método proviene de buscar en el polinomio de Taylor de segundo orden de f cercano al punto crítico a, es decir:

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_2(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \\ &= f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2, \end{aligned}$$

ya que f' es cero en el punto crítico a de f. Si $f''(a) > 0$, la gráfica de $y = p_2(x)$ es una parábola que abre hacia arriba, como se aprecia en la figura 4.17, en tanto que si $f''(a) < 0$, entonces la gráfica de $y = p_2(x)$ es como la que se muestra en la figura 4.18. Si $f''(a) = 0$, entonces la gráfica de $y = p_2(x)$ es una recta horizontal, y necesitaríamos usar un polinomio de Taylor de orden superior para determinar si f tiene un extremo en a (el lector tal vez recuerde que cuando $f''(a) = 0$, la prueba de la segunda derivada del cálculo con una variable no da información acerca de la naturaleza del punto crítico a).

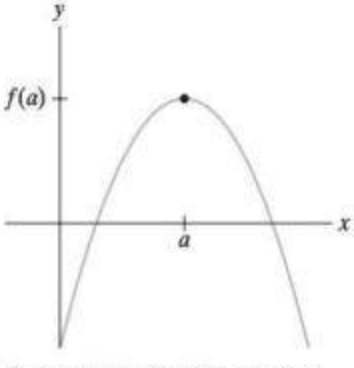


Figura 4.18 Parábola que abre hacia abajo.

El concepto es similar en el contexto de n variables. Suponga que

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

es de clase C^2 y que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un punto crítico de f. Entonces, la aproximación de Taylor de segundo orden para f da

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \approx p_2(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \\ &= Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\end{aligned}$$

cuando $\mathbf{x} \approx \mathbf{a}$ (véase el teorema 1.5 y la fórmula (10) de la sección 4.1). Como f es de clase C^2 y $\mathbf{a}$ es un punto crítico, todas las derivadas parciales desaparecen en $\mathbf{a}$, por lo que tenemos que $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ y, en consecuencia,

$$\Delta f \approx \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \tag{1}$$

La aproximación en (1) sugiere que podemos ver si el incremento Δf permanece positivo (o negativo) para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{a}$ y, entonces, si f tiene un mínimo local (o un máximo local) en $\mathbf{a}$ observando lo que pasa en el lado derecho.

Advierta que el lado derecho de (1), cuando se expande, es cuadrático en los términos $(x_i - a_i)$. Más en general, una **forma cuadrática** en $h_1, h_2, \ldots, h_n$ es una función Q que puede escribirse así:

$$Q(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} h_i h_j,$$

Donde las b_{ij} son constantes. La forma cuadrática Q también se puede escribir en términos de matrices como:

$$Q(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \mathbf{h}^T B \mathbf{h}, \tag{2}$$

donde $B = (b_{ij})$. Advierta que la función Q no cambia si se reemplazan todas las b_{ij} por $\frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$. En consecuencia, siempre podemos asumir que la matriz B asociada a Q es **simétrica**, es decir, que $b_{ij} = b_{ji}$ (o, dicho en forma equivalente, que $B^T = B$). Si se pasa por alto el factor de $1/2$, se ve que el lado derecho de (1) es la forma cuadrática en $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, correspondiente a la matriz $B = Hf(\mathbf{a})$.

Se dice que una forma cuadrática Q (o su matriz simétrica asociada B) está **positivamente definida** si $Q(\mathbf{h}) > 0$ para toda $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, y **negativamente definida** si $Q(\mathbf{h}) < 0$ para toda $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Observe que si Q está positivamente definida, entonces Q tiene un mínimo global (de 0) en $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. De manera similar, si Q está negativamente definida, entonces Q tiene un máximo global en $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

La importancia de las formas cuadráticas es que podemos determinar si f tiene un extremo local en un punto crítico $\mathbf{a}$ con solo ver si la forma cuadrática en el lado derecho de (1) tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. El resultado preciso, cuya prueba se da en el apéndice de esta sección, es el siguiente:

TEOREMA 2.3 Establezca $U \subseteq \mathbf{R}^n$ abierto y suponga que $f: U \to \mathbf{R}$ es una función de clase C^2. Suponga también que $\mathbf{a} \in U$ es un punto crítico de f.

1. Si el hessiano $Hf(\mathbf{a})$ está positivamente definido, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$.
2. Si el hessiano $Hf(\mathbf{a})$ está negativamente definido, entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$.
3. Si $\det Hf(\mathbf{a}) \neq 0$ pero $Hf(\mathbf{a})$ no está positiva ni negativamente definido, entonces f tiene un punto silla en $\mathbf{a}$.

En vista del teorema 2.3, la cuestión principal es determinar cuándo el hessiano $Hf(\mathbf{a})$ está positiva o negativamente definido. Por fortuna, el álgebra lineal nos da un medio efectivo para hacer tal determinación, el cual expondremos sin demostrarlo. Dada una matriz simétrica B (que, como hemos visto, corresponde a una forma cuadrática Q), sea que B_k para $k = 1, \ldots, n$, denote la submatriz del extremo superior izquierdo de $k \times k$ de B. Se calcula la secuencia siguiente de determinantes:

$$\det B_1 = b_{11}, \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \det B_n = \det B.$$

Si esta secuencia consta por completo de números positivos, entonces B y Q están positivamente definidas. Si esta secuencia es tal que $B_k < 0$ para k impar y $\det B_k > 0$ para k par, entonces B y Q están negativamente definidas. Por último, si $\det B \neq 0$, pero la secuencia de determinantes $\det B_1, \det B_2, \ldots, \det B_n$ no es de los dos primeros tipos, entonces B y Q no están positiva ni negativamente definidas. La combinación de estos resultados con el teorema 2.3 nos permite establecer la prueba siguiente para ubicar extremos locales:

Prueba de la segunda derivada para ubicar extremos locales. Dado un punto crítico $\mathbf{a}$ de una función f de clase C^2, se analiza la matriz hessiana evaluada en $\mathbf{a}$:

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{a}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{a}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

A partir del hessiano se calcula la **secuencia de los menores principales** de $Hf(\mathbf{a})$. Esta es la secuencia de los determinantes de las submatrices cuadradas del extremo superior izquierdo de $Hf(\mathbf{a})$. Más explícitamente, esta es la secuencia $d_1, d_2, \ldots, d_n$, donde $d_k = \det H_k$, y H_k es la submatriz de orden $k \times k$ del extremo superior izquierdo de $Hf(\mathbf{a})$. Es decir,

$$d_1 = f_{x_1x_1}(\mathbf{a}),$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_3}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_3}(\mathbf{a}) \\ f_{x_3x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_3x_2}(\mathbf{a}) & f_{x_3x_3}(\mathbf{a}) \end{vmatrix}, \ldots, d_n = |Hf(\mathbf{a})|.$$

La prueba numérica es como sigue:
Suponga que $d_n = \det Hf(\mathbf{a}) \neq 0$.

1. Si $d_k > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$.
2. Si $d_k < 0$ para k impar y $d_k > 0$ para k par, entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$.
3. Si no es el caso que se cumplan las condiciones 1 y 2, entonces f tiene un punto silla en $\mathbf{a}$.

En el caso de que $Hf(\mathbf{a}) = 0$, se dice que el punto crítico $\mathbf{a}$ es **degenerado** y debe usarse otro método para determinar si ocurre o no un extremo de f en el sitio que se está analizando.

EJEMPLO 4 Considere la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 5$$

del ejemplo 3. Ya vimos que $(-2, 2)$ es el único punto crítico. El hessiano es

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La secuencia de los menores principales es $d_1 = f_{xx}(-2, 2) = 2\ (> 0)$, $d_2 = |Hf(-2, 2)| = 3\ (> 0)$. Por lo que f tiene un mínimo en $(-2, 2)$, como ya habíamos visto, pero este método usa menos álgebra. ◆

EJEMPLO 5 **(Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables)** Generalizaremos el ejemplo 4. Suponga que $f(x, y)$ es una función de dos variables de clase C^2 y también suponga que f tiene un punto crítico en $\mathbf{a} = (a, b)$. La matriz hessiana de f evaluada en (a, b) es

$$Hf(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}.$$

Advierta que para construir el hessiano usamos el hecho de que $f_{xy} = f_{yx}$ (porque f es de clase C^2). La secuencia de menores principales, por consiguiente, consta de dos números:

$$d_1 = f_{xx}(a, b) \quad \text{y} \quad d_2 = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2.$$

Por lo tanto, en este caso la prueba de la segunda derivada nos dice que

1. f tiene un mínimo local en (a, b) si

$$f_{xx}(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0.$$

2. f tiene un máximo local en (a, b) si

$$f_{xx}(a, b) < 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0.$$

3. f tiene un punto silla en (a, b) si

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 < 0.$$

Advierta que si $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 = 0$, entonces f tiene un punto crítico *degenerado* en (a, b) y no se puede determinar de inmediato si en (a, b) existe un extremo local de f. ◆

EJEMPLO 6 Sea $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 + 3z^2$. Para encontrar cualquier extremo local de f primero se deben identificar los puntos críticos. Para ello se resuelve

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 + 2x & 2xy + 2y & 6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de esto no es difícil darse cuenta de que hay dos puntos críticos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$. El hessiano de f es

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x + 2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

En el punto crítico (0, 0, 0) tenemos

$$Hf(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

y su secuencia de menores principales es $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = 24$. Como todos estos determinantes son positivos, concluimos que f tiene un mínimo local en (0, 0, 0). Para $\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ calculamos que

$$Hf\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

La secuencia de menores es $-2, -\frac{4}{3}, -8$. En consecuencia, f tiene un punto silla en $\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$. ◆

EJEMPLO 7 Para tener una idea de lo que pasa en el caso de un punto crítico degenerado, es decir, un punto crítico **a** tal que $\det Hf(\mathbf{a}) = 0$, considere las tres funciones

$$f(x, y) = x^4 + x^2 + y^4,$$
$$g(x, y) = -x^4 - x^2 - y^4,$$

y

$$h(x, y) = x^4 - x^2 + y^4.$$

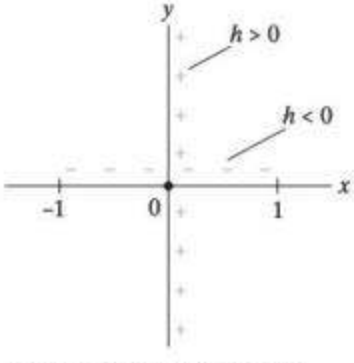


Figura 4.19 Fuera del origen la función f del ejemplo 7 es negativa a lo largo del eje x y positiva a lo largo del eje y.

Se invita al lector a comprobar que el origen (0, 0) es un punto crítico degenerado de cada una de las funciones anteriores (en realidad, los hessianos se ven muy similares). Como f es 0 en (0, 0) y estrictamente positivo en todos los demás puntos $(x, y) \neq (0, 0)$, vemos que f tiene un mínimo estricto en el origen. Un razonamiento similar demuestra que g tiene un máximo estricto en el origen. Para h la situación es un poco más complicada. A lo largo del eje y tenemos que $h(0, y) = y^4$, que es cero en $y = 0$ (el origen) y estrictamente positiva en todos los demás lugares. A lo largo del eje x,

$$h(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(x - 1)(x + 1).$$

Para $-1 < x < 1$ y $x \neq 0$, $h(x, 0) < 0$. Tenemos la situación que se ilustra en la figura 4.19. Por consiguiente, toda vecindad de (0, 0) contiene algunos puntos (x, y) donde h es positiva y también algunos puntos en los que h es negativa. Por lo tanto, h tiene un punto silla en el origen. La "moraleja del cuento" es que un punto crítico degenerado puede tener cualquier tipo de comportamiento, y para entender su naturaleza como el sitio en que ocurre un extremo es necesario hacer un análisis más detallado de la función misma, más que del hessiano. ◆

Extremos globales en regiones compactas

Hasta este momento nuestro análisis se ha limitado solo al estudio de extremos locales. No hemos dicho nada acerca de cómo identificar extremos globales, ya que en realidad no existe un método eficaz para buscar en una función arbitraria y determinar si tiene, y dónde, un valor máximo o mínimo absoluto. Para fines de las aplicaciones esto es muy desafortunado, ya que para ello es esencial conocer dónde se encuentran los máximos o mínimos absolutos. No obstante, podemos decir algo sobre los extremos globales de funciones definidas en cierto tipo de dominio.

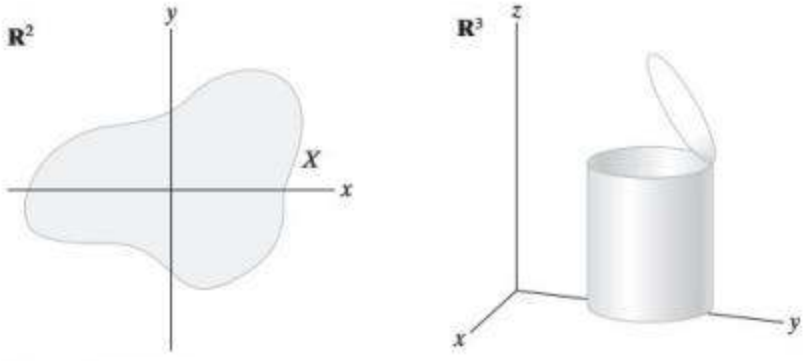


Figura 4.20 Regiones compactas.

DEFINICIÓN 2.4 Se dice que un subconjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ es **compacto** si es tanto cerrado como acotado.

Recuerde el lector que X es cerrado si contiene a todos los puntos que constituyen su frontera (véase la definición 2.3 de la sección 2.2). Decir que X está acotado significa que hay algún entorno (abierto o cerrado) que lo contiene, es decir, X está acotado si hay algún número positivo M tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para toda $\mathbf{x} \in X$. Así, los conjuntos compactos contienen a sus fronteras (una consecuencia de ser cerrados) y solo tienen extensión finita (una consecuencia de ser acotados). En la figura 4.20 se muestran algunos conjuntos compactos comunes en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Para nuestros fines la notación de compacidad es valiosa debido al resultado siguiente, que enunciaremos sin demostrarlo.

TEOREMA 2.5 (**Teorema del valor extremo**) Si $X \subseteq \mathbf{R}^n$ es compacto y f: $X \to \mathbf{R}$ es continuo, entonces f debe tener tanto un máximo global como un mínimo global en alguna parte de X. Es decir, deben existir puntos $\mathbf{a}_{\text{máx}}$ y $\mathbf{a}_{\text{mín}}$ en X tales que para toda $\mathbf{x} \in X$,

$$f(\mathbf{a}_{\text{mín}}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}_{\text{máx}}).$$

Necesitamos la hipótesis de compacidad debido a que una función definida sobre un dominio no compacto puede aumentar o disminuir sin límite y, en consecuencia, no tener ningún extremo global, como lo sugiere la figura 4.21. Esto es análogo a la situación con una variable en la que una función continua definida en un intervalo abierto puede no tener ningún extremo, pero una definida en un intervalo cerrado (que es un subconjunto compacto de $\mathbf{R}$) debe tener valores tanto máximos como mínimos (véase la figura 4.22). En el caso de una variable, los extremos ocurren ya sea en el interior del intervalo o en cualquiera de los puntos extremos. Por lo tanto, se deben comparar los valores de f en cualesquiera puntos interiores críticos con aquellos en los puntos extremos para determinar cuál es el más grande y cuál el más pequeño. En el caso de funciones de n variables se hace algo similar, es decir, se comparan los valores de f en cualesquiera puntos críticos con los valores en puntos críticos restringidos que puedan ocurrir a lo largo de la frontera del dominio.

Figura 4.21 Gráfica que carece de un mínimo global.

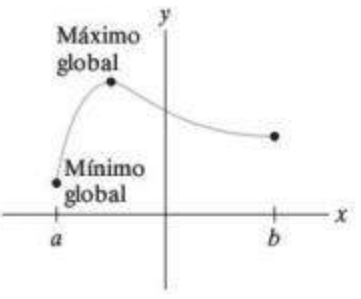


Figura 4.22 La función ilustrada por la gráfica de la izquierda no tiene extremos globales —está definida en el intervalo abierto (a, b). En contraste, la función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y que tiene la gráfica de la derecha, tiene tanto un máximo global como un mínimo global.

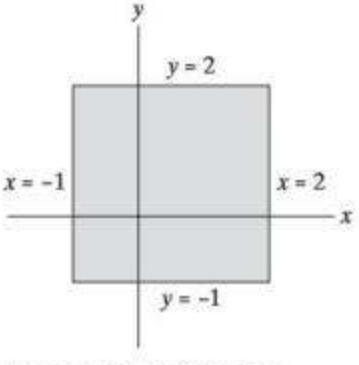


Figura 4.23 Dominio de la función T del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Sea T: $X \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por

$$T(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1,$$

donde X es el cuadrado cerrado de la figura 4.23. (Advierta que X es compacto). Imagine que el cuadrado representa una placa de metal y que la función T es su temperatura en cada punto. Encontrar los extremos globales equivale a encontrar los puntos más caliente y más frío de la placa. De acuerdo con el teorema 2.5, tales puntos deben existir.

Necesitamos encontrar todos los posibles puntos críticos de T. De momento, considerando a T como una función en todo $\mathbf{R}^2$ encontramos los puntos críticos usuales a través de igualar $DT(x, y)$ a $\mathbf{0}$. El resultado es el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0' \end{cases}$$

que tiene a (0, 0) como única solución. Por ahora no es importante si se trata de un máximo o un mínimo local, ya que buscamos los extremos globales. Debido a que solo hay un punto crítico, a lo largo de la frontera de X debe ocurrir al menos un extremo global (que consta de las cuatro aristas del cuadrado). Ahora encontraremos todos los puntos críticos de la *restricción* de T para esta frontera:

1. La arista inferior de X es el conjunto

$$E_1 = \{(x, y) \mid y = -1,\ -1 \le x \le 2\}.$$

La restricción de T para E_1 define una nueva función f_1: $[-1, 2] \to \mathbf{R}$ dada por

$$f_1(x) = T(x, -1) = x^2 + x + 2.$$

Como $f_1'(x) = 2x + 1$, la función f_1 tiene un punto crítico en $x = -\frac{1}{2}$. Así, debemos examinar los siguientes puntos de X en busca de posibles extremos: $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(-1, -1)$ y $(2, -1)$. (El primero es el punto crítico de f_1 y los otros dos son los vértices de X que se encuentran en E_1).

2. La arista superior de X es dada por

$$E_2 = \{(x, y) \mid y = 2,\ -1 \le x \le 2\}.$$

En consecuencia, definimos f_2: $[-1, 2] \to \mathbf{R}$ con

$$f_2(x) = T(x, 2) = x^2 - 2x + 5.$$

(f_2 es la restricción de T para E_2). Calculamos $f_2'(x) = 2x - 2$, que implica que $x = 1$ es un punto crítico de f_2. Entonces, debemos considerar $(1, 2)$, $(-1, 2)$ y $(2, 2)$ como las posibles ubicaciones de los extremos globales de T (los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 2)$ son los dos vértices faltantes de X).

3. La arista izquierda de X es

$$E_3 = \{(x, y) \mid x = -1, -1 \leq y \leq 2\}.$$

Por lo tanto, definimos f_3: $[-1, 2] \to \mathbf{R}$ por medio de

$$f_3(y) = T(-1, y) = y^2 + y + 2.$$

Tenemos que $f_3'(y) = 2y + 1$, por lo que $y = -\frac{1}{2}$ es el único punto crítico de f_3. Así, el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ es una ubicación potencial de un extremo global (de nuevo no necesitamos preocuparnos por los vértices $(-1, -1)$ y $(-1, 2)$).

4. La arista derecha de X es

$$E_4 = \{(x, y) \mid x = 2, -1 \leq y \leq 2\}.$$

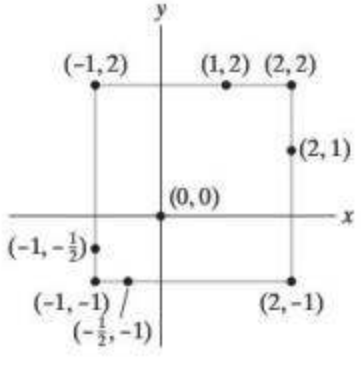
Definimos f_4: $[-1, 2] \to \mathbf{R}$ por medio de

$$f_4(y) = T(2, y) = y^2 - 2y + 5.$$

Tenemos que $f_4'(y) = 2y - 2$, por lo que $y = 1$ es el único punto crítico de f_4. Entonces, debemos incluir en nuestra consideración a $(2, 1)$.

En consecuencia, tenemos las nueve posibles ubicaciones de extremos globales que se ilustran en la figura 4.24. Ahora solo necesitamos comparar los valores reales de T en esos puntos para ver que el punto $(0, 0)$ es el más frío de la placa y que tanto $(2, -1)$ como $(-1, 2)$ son los más calientes. ◆

Si una función está definida en una región no compacta, no existe un resultado general como el teorema del valor extremo (teorema 2.5) que garantice la existencia de cualquier extremo global. Sin embargo, a menudo es posible utilizar argumentos *ad hoc* para identificar extremos globales.



(x,y)	$T(x,y)$
$(0,0)$	1
$(-\frac{1}{2},-1)$	$\frac{7}{4}$
$(-1,-1)$	2
$(2,-1)$	8
$(1,2)$	4
$(-1,2)$	8
$(2,2)$	5
$(-1,-\frac{1}{2})$	$\frac{7}{4}$
$(2,1)$	4

Figura 4.24 Posibles extremos globales de T.

EJEMPLO 9 Considere la función $f(x, y) = e^{1-3x^2-y^2}$ definida en todo $\mathbf{R}^2$ (por lo que es evidente que el dominio no es compacto). Es fácil verificar que f tiene un único punto crítico en (0, 0). Se invita al lector a comprobar que el criterio del hessiano implica que f tiene un máximo local ahí. En cualquier caso, para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tenemos que

$$1 - 3x^2 - y^2 \leq 1.$$

Por lo tanto, debido a que la función exponencial siempre es creciente, es decir, si $u_1 \leq u_2$, entonces $e^{u_1} \leq e^{u_2}$),

$$e^{1-3x^2-y^2} \leq e^1 = e.$$

Como $f(0, 0) = e$, se ve que f tiene un máximo global en (0, 0). ◆

ADVERTENCIA Es tentador suponer que si una función tiene un único punto crítico ha de tratarse de un extremo local, por lo que debe ser también un extremo global. Aunque esto es verdad para el caso de una función de una sola variable, no lo es para funciones de dos o más variables (véase el ejercicio 52 para un ejemplo).

Apéndice. Demostración del teorema 2.3

Paso 1. Demostraremos la siguiente propiedad clave de una forma cuadrática Q, es decir, que si $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces

$$Q(\lambda \mathbf{h}) = \lambda^2 Q(\mathbf{h}). \tag{3}$$

Esto es fácil de establecer si escribimos Q en términos de su matriz B simétrica asociada y usamos algunas de las propiedades de la aritmética de matrices dadas en la sección 1.6:

$$Q(\lambda \mathbf{h}) = (\lambda \mathbf{h})^T B(\lambda \mathbf{h}) = \lambda \mathbf{h}^T B(\lambda \mathbf{h}) = \lambda^2 \mathbf{h}^T B\mathbf{h} = \lambda^2 Q(\mathbf{h}).$$

Paso 2. Demostraremos que si B es la matriz simétrica asociada a una forma cuadrática positiva Q, entonces hay una constante positiva M tal que

$$Q(\mathbf{h}) \geq M \|\mathbf{h}\|^2$$

para toda $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$.

Observemos, en primer lugar, que cuando $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, entonces $Q(\mathbf{h}) = Q(\mathbf{0}) = 0$, por lo que en este caso se trata de la conclusión trivial.

A continuación suponga que $\mathbf{h}$ es un vector unitario, es decir, $\|\mathbf{h}\| = 1$. El conjunto de (puntos extremos de) todos los vectores unitarios en $\mathbf{R}^n$ es una esfera $(n - 1)$ dimensional S, que es un conjunto compacto. Entonces, por el teorema del valor extremo (teorema 2.5), la restricción de Q para S debe lograr un valor mínimo global M en algún lugar de S. Así, $Q(\mathbf{h}) \geq M$ para toda $\mathbf{h} \in S$.

Por último, sea $\mathbf{h}$ un vector distinto de cero en $\mathbf{R}^n$. Entonces su normalización $\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ es un vector unitario y por ello está en S. Por lo tanto, a partir del resultado del paso 1 tenemos

$$Q(\mathbf{h}) = Q\left(\|\mathbf{h}\| \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) = \|\mathbf{h}\|^2 Q\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) \geq \|\mathbf{h}\|^2 M,$$

puesto que $\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ está en S.

Paso 3. Ahora demostraremos el teorema. Según la fórmula de Taylor de segundo orden, el teorema 1.5 y la fórmula (10) de la sección 4.1, tenemos que para el punto crítico $\mathbf{a}$ de f,

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \tag{4}$$

donde $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})| / \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

En primer lugar, suponga que $Hf(\mathbf{a})$ está positivamente definida. Entonces, según el paso 2, con $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ debe existir una constante $M > 0$ tal que

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \geq M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2. \tag{5}$$

Debido a que $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})|/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, debe haber algún valor $\delta > 0$, de modo que si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})|/\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 < M$ o, en forma equivalente,

$$|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{a})| < M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2. \tag{6}$$

Por lo tanto, (4), (5) y (6) implican que para $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$,

$$\Delta f > 0$$

por lo que f tiene un mínimo local (estricto) en $\mathbf{a}$.

Si $Hf(\mathbf{a})$ está negativamente definida, entonces se considera $g = -f$. Vemos que $\mathbf{a}$ también es un punto crítico de g y que $Hg(\mathbf{a}) = -Hf(\mathbf{a})$, por lo que $Hg(\mathbf{a})$ está positivamente definida. Entonces, el argumento en el párrafo precedente demuestra que g tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$, por lo que f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$.

Ahora suponga que $\det Hf(\mathbf{a}) \neq 0$, pero que $Hf(\mathbf{a})$ no está ni positiva ni negativamente definido. Sea $\mathbf{x}_1$ tal que

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) > 0$$

y $\mathbf{x}_2$ tal que

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}) < 0.$$

(Ya que $\det Hf(\mathbf{a}) \neq 0$, tales puntos deben existir). Para $i = 1, 2$ sea

$$\mathbf{y}_i(t) = t(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \mathbf{a},$$

la ecuación vectorial paramétrica para la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}_i$. Aplicando la fórmula (4) con $\mathbf{x} = \mathbf{y}_i(t)$, vemos que

$$\begin{aligned}\Delta f = f(\mathbf{y}_i(t)) - f(\mathbf{a}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{a}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}) + \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}\|^2 \frac{R_2(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{a})}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}\|^2}.\end{aligned}$$

Advierta que $\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a} = t(\mathbf{x}_i - \mathbf{a})$. Por lo tanto, usando la propiedad de las formas cuadráticas dadas en el paso 1 y el hecho de que $\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}\|^2 = \|t(\mathbf{x}_i - \mathbf{a})\|^2 = t^2\|\mathbf{x}_i - \mathbf{a}\|^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}&f(\mathbf{y}_i(t)) - f(\mathbf{a}) \\ &\quad = t^2\left[\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{a}\|^2 \frac{R_2(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{a})}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}\|^2}\right].\end{aligned} \tag{7}$$

Ahora observe que para $i = 1$, el primer término en los corchetes del lado derecho de (7) es un número positivo P, y para $i = 2$ es uno negativo N. Sea

$$M = \text{mín}\left(\frac{P}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\|^2}, -\frac{N}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\|^2}\right).$$

Debido a que sabemos que $|R_2(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{a})|/\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}\|^2 \to 0$ cuando $t \to 0$, podemos encontrar algún $\delta > 0$ de manera que si $0 < t < \delta$, entonces

$$\frac{|R_2(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{a})|}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{a}\|^2} < M.$$

Pero esto implica que para $0 < t < \delta$,

$$\Delta f = f(\mathbf{y}_1(t)) - f(\mathbf{a}) > 0,$$

mientras

$$\Delta f = f(\mathbf{y}_2(t)) - f(\mathbf{a}) < 0.$$

Así, f tiene un punto silla en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. ■

4.2 Ejercicios

1. En relación con la función $f(x, y) = 4x + 6y - 12 - x^2 - y^2$:

a) Hay un único punto crítico. Encuéntrelo.

b) Considerando el incremento Δf, determine si este punto crítico es un máximo, un mínimo o un punto silla.

c) Ahora use el criterio del hessiano para determinar la naturaleza del punto crítico.

2. Este problema se refiere a la función $g(x, y) = x^2 - 2y^2 + 2x + 3$.

a) Encuentre cualesquiera puntos críticos de g.

b) Use el incremento Δg para determinar la naturaleza de los puntos críticos de g.

c) Use el criterio del hessiano para determinar la naturaleza de los puntos críticos.

En los ejercicios 3 a 20 identifique y determine la naturaleza de los puntos críticos de las funciones dadas.

3. $f(x, y) = 2xy - 2x^2 - 5y^2 + 4y - 3$

4. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

5. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy + 3x + 6y$

6. $f(x, y) = y^4 - 2xy^2 + x^3 - x$

7. $f(x, y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y}$

8. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

9. $f(x, y) = e^{-y}(x^2 - y^2)$

10. $f(x, y) = (x + y)(1 - xy)$

11. $f(x, y) = x^2 - y^3 - x^2y + y$

12. $f(x, y) = e^{-x}(x^2 + 3y^2)$

13. $f(x, y) = 2x - 3y + \ln xy$

14. $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$

15. $f(x, y, z) = x^2 - xy + z^2 - 2xz + 6z$

16. $f(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 1)\cos z$

17. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xz$

18. $f(x, y, z) = x^3 + xz^2 - 3x^2 + y^2 + 2z^2$

19. $f(x, y, z) = xy + xz + 2yz + \dfrac{1}{x}$

20. $f(x, y, z) = e^x(x^2 - y^2 - 2z^2)$

21. *a)* Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y) = \dfrac{2y^3 - 3y^2 - 36y + 2}{1 + 3x^2}$.

b) Identifique todos los extremos de f.

22. *a)* ¿En qué condiciones de la constante k la función

$$f(x, y) = kx^2 - 2xy + ky^2$$

tiene un mínimo local no degenerado en (0, 0)? ¿Qué hay de un máximo local?

b) ¿En qué condiciones de la constante k la función

$$g(x, y, z) = kx^2 + kxz - 2yz - y^2 + \frac{k}{2}z^2$$

tendrá un máximo local no degenerado en (0, 0, 0)? ¿Qué puede decirse de un mínimo local no degenerado?

23. *a)* Considere la función $f(x, y) = ax^2 + by^2$, donde a y b son constantes diferentes de cero. Demuestre que el origen es el único punto crítico de f y determine la naturaleza de ese punto crítico en términos de a y b.

b) Considere ahora la función $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, donde a, b y c son distintas de cero. Demuestre que el origen en $\mathbf{R}^3$ es el único punto crítico de f y determine su naturaleza en términos de a, b y c.

c) Por último, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$, donde a_i es una constante diferente de cero para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que el origen en $\mathbf{R}^n$ es el único punto crítico de f y determine su naturaleza.

En ocasiones puede ser difícil determinar el punto crítico de una función f porque el sistema de ecuaciones que surge de igualar ∇f a cero puede ser muy difícil de resolver a mano. Para las funciones dadas en los ejercicios 24 a 27, a) use una computadora para identificar todos los puntos críticos de la función f dada, y b) use una computadora para construir la ma-

triz hessiana y determinar la naturaleza de los puntos críticos encontrados en el inciso a).

24. $f(x, y) = y^4 + x^3 - 2xy^2 - x$

25. $f(x, y) = 2x^3y - y^2 - 3xy$

26. $f(x, y, z) = yz - xyz - x^2 - y^2 - 2z^2$

27. $f(x, y, z, w) = yw - xyz - x^2 - 2z^2 + w^2$

28. Demuestre que el entorno rectangular más grande que tiene un área superficial fija debe ser un cubo.

29. ¿Qué punto del plano $3x - 4y - z = 24$ está más cerca del origen?

30. Encuentre los puntos de la superficie $xy + z^2 = 4$ que estén más cerca del origen. Asegúrese de dar un argumento convincente de que su respuesta es correcta.

31. Suponga el lector que está a cargo de la fabricación de dos tipos de televisión. La función de ingresos, en dólares, es dada por

$$R(x, y) = 8x + 6y - x^2 - 2y^2 + 2xy,$$

donde x denota la cantidad de equipos del modelo X vendidos y y es la cantidad de equipos del modelo y que se venden, ambos en unidades de 100. Determine la cantidad que debe producir de cada tipo de equipo para maximizar el ingreso resultante.

32. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6y$ sobre el rectángulo $\{(x, y) \mid -3 \le x \le 3, 0 \le y \le 5\}$.

33. Encuentre el máximo y mínimo absolutos de

$$f(x, y, z) = x^2 + xz - y^2 + 2z^2 + xy + 5x$$

sobre el bloque $\{(x, y, z) \mid -5 \le x \le 0, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le 2\}$.

34. Una placa de metal tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \le 1$. La placa se calienta de modo que la temperatura en cualquiera de sus puntos (x, y) es indicada por

$$T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 3.$$

Encuentre el punto más caliente y el más frío de la placa, y la temperatura en cada uno de ellos. (Sugerencia: parametrice la frontera de la placa para encontrar cualesquiera puntos críticos ahí).

35. Encuentre los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ en el cuadrado $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi\}$.

36. Calcule los extremos absolutos de $f(x, y) = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen} y$ sobre el rectángulo $\{(x, y) \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 3\}$.

37. Determine los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - y + 3$ sobre la región triangular cerrada con vértices en (0, 0), (2, 0) y (0, 2).

38. Determine los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x, y) = x^2y$ en la región elíptica $D = \{(x, y) \mid 3x^2 + 4y^2 \le 12\}$.

39. Obtenga los extremos absolutos de $f(x, y, z) = e^{1-x^2-y^2+2y-z^2-4z}$ sobre la esfera $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z \le 0\}$.

Cada una de las funciones en los ejercicios 40 a 45 tiene un punto crítico en el origen. Para cada función, a) compruebe que el hessiano falla en dar cualquier información acerca de la naturaleza del punto crítico en el origen, y b) encuentre otra forma de determinar si la función tiene un máximo, un mínimo o ni uno ni otro en el origen.

40. $f(x, y) = x^2y^2$

41. $f(x, y) = 4 - 3x^2y^2$

42. $f(x, y) = x^3y^3$

43. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$

44. $f(x, y, z) = x^2y^2z^4$

45. $f(x, y, z) = 2 - x^4y^4 - z^4$

En los ejercicios 46 a 48, a) encuentre todos los puntos críticos de la función f dada e identifique su naturaleza como extremos locales, y b) determine, con una explicación, cualquier extremo global de f.

46. $f(x, y) = e^{x^2+5y^2}$

47. $f(x, y, z) = e^{2-x^2-2y^2-3z^4}$

48. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 7$

49. Obtenga los extremos globales, si los hubiera, de

$$f(x, y) = xy + 2y - \ln x - 2 \ln y,$$

donde $x, y > 0$.

50. Encuentre todos los extremos locales y globales de la función $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + e^{y^2+1} + z^2 - 3xz$.

51. Sea $f(x, y) = 3 - [(x - 1)(y - 2)]^{2/3}$.

a) Determine todos los puntos críticos de f.

b) Identifique todos los extremos de f.

52. *a)* Suponga que $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función diferenciable de una sola variable. Demuestre que si f tiene un único punto crítico en x_0, que es el sitio de un extremo local estricto de f, entonces f debe tener un extremo global en x_0.

b) Sea $f(x, y) = 3ye^x - e^{3x} - y^3$. Verifique que f tiene un único punto crítico y que f tiene ahí un máximo local. Sin embargo, demuestre que f no tiene un máximo global considerando cómo se comporta f a lo largo del eje y. De ahí que el resultado del inciso *a)* no sea válido para funciones con más de una variable.

53. *a*) Sea f una función continua de una variable. Demuestre que si f tiene dos máximos locales, entonces f debe tener también un mínimo local.

b) El análogo del inciso *a*) no necesariamente se cumple para funciones continuas de más de una variable, como se verá a continuación. Considere la función

$$f(x, y) = 2 - (xy^2 - y - 1)^2 - (y^2 - 1)^2.$$

Demuestre que f tiene solo dos puntos críticos y que ambos son máximos locales.

c) Use una computadora para graficar la función f del inciso *b*).

4.3 Multiplicadores de Lagrange

Extremos restringidos

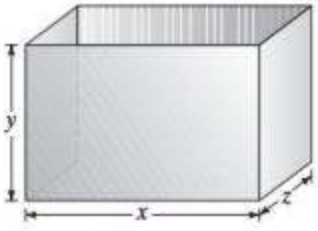


Figura 4.25 La caja abierta del ejemplo 1.

A menudo, al trabajar con aplicaciones del cálculo, se encuentra que no solo se necesita maximizar o minimizar una función, sino que esto se debe hacer sujetándose a una o más restricciones adicionales que dependen de los detalles de la situación. El ejemplo siguiente es una situación común.

EJEMPLO 1 Se va a fabricar una caja rectangular abierta de modo que tenga un volumen (fijo) de 4 pies^3. ¿Qué dimensiones debe tener para minimizar la cantidad de material que se utilice para construirla?

Haremos que las tres dimensiones de la caja sean variables independientes, x, y y z, como se ilustra en la figura 4.25. Para determinar la manera de usar tan poco material como sea posible necesitamos minimizar la función de área superficial A dada por

$$A(x, y, z) = \underbrace{2xy}_{\text{frente y atrás}} + \underbrace{2yz}_{\text{lados}} + \underbrace{xz}_{\text{base}}.$$

Para $x, y, z > 0$ esta función no tiene mínimos ni máximos. Sin embargo, no hemos usado el hecho de que el volumen va a mantenerse constante en 4 pies^3. Esto proporciona una **ecuación de restricción**,

$$V(x, y, z) = xyz = 4.$$

Si hemos de resolver el problema, esta restricción es absolutamente esencial. En particular, la restricción nos permite resolver para z en términos de x y y:

$$z = \frac{4}{xy}.$$

Podemos crear una función nueva para el área con solo dos variables:

$$\begin{aligned} a(x, y) &= A\left(x, y, \frac{4}{xy}\right) \\ &= 2xy + 2y\left(\frac{4}{xy}\right) + x\left(\frac{4}{xy}\right) \\ &= 2xy + \frac{8}{x} + \frac{4}{y}. \end{aligned}$$

Ahora podemos encontrar los puntos críticos de a igualando Da a $\mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = 2y - \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = 2x - \dfrac{4}{y^2} = 0 \end{cases}.$$

La primera ecuación implica que

$$y = \frac{4}{x^2},$$

por lo que la segunda ecuación se convierte en

$$2x - 4\left(\frac{x^4}{16}\right) = 0$$

o, de manera equivalente,

$$x\left(1 - \frac{1}{8}x^3\right) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 0$ (que rechazamos) y $x = 2$. Así, el punto crítico de a que es de interés es (2, 1) y el **punto crítico restringido** de la función original A es (2, 1, 2).

Podemos usar el criterio del hessiano para comprobar que $x = 2, y = 1$ proporcionan un mínimo local de a:

$$Ha(x, y) = \begin{bmatrix} 16/x^3 & 2 \\ 2 & 8/y^3 \end{bmatrix} \quad \text{así que} \quad Ha(2, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

La secuencia de menores es 2, 12, por lo que concluimos que (2, 1) sí genera un mínimo local de a. Debido a que $a(x, y) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, $y \to 0^+$, $x \to \infty$ o $y \to \infty$, concluimos que el punto crítico también debe generar un mínimo global. Por consiguiente, la solución del problema original es hacer la caja con una base cuadrada que mida 2 pies por lado y 1 pie de altura. ◆

El planteamiento abstracto para la situación estudiada en el ejemplo 1 es encontrar los máximos o mínimos de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeta a la **restricción** de que $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ para alguna función g y constante c. (En el ejemplo 1, la función f es $A(x, y, z)$ y la restricción es $xyz = 4$). En el ejemplo 1 se empleó de manera implícita un método para encontrar puntos críticos restringidos: usar la ecuación de restricción $g(\mathbf{x}) = c$ para resolver una de las variables en términos de las otras. Después se sustituye esta variable en la expresión de $f(\mathbf{x})$, con lo que se crea una función nueva con una variable menos. Esta nueva función puede maximizarse o minimizarse utilizando las técnicas de la sección 4.2. En teoría esta es una forma muy apropiada para abordar tales problemas, pero en la práctica tiene una gran desventaja: puede ser imposible resolver explícitamente para cualquiera de las variables en términos de las otras. Por ejemplo, si se deseara maximizar

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + y^2z^4$$

sujeta a

$$g(x, y, z) = e^{xy} - x^5y^2z + \cos\left(\frac{x}{yz}\right) = 2,$$

No hay manera de despejar x, y o z en uno de los lados de la ecuación de restricción, por lo que resulta imposible proceder como en el ejemplo 1.

El multiplicador de Lagrange

El análisis anterior indica que es deseable tener otro método para resolver problemas de optimización restringida. La clave de dicho método alternativo es el teorema siguiente:

TEOREMA 3.1 Sea X abierto en $\mathbf{R}^n$ y $f, g: X \to \mathbf{R}$ funciones de clase C^1. Sea $S = \{\mathbf{x} \in X \mid g(\mathbf{x}) = c\}$, que denota el conjunto de nivel de g en la altura c. Entonces, si $f|_S$ (la restricción de f a S) tiene un extremo en un punto $\mathbf{x}_0 \in S$, tal que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, debe haber algún escalar λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

La conclusión del teorema 3.1 implica que para encontrar posibles ubicaciones de los extremos de f sujetos a la restricción de que $g(\mathbf{x}) = c$, podemos proceder de la manera siguiente:

1. Construir la ecuación vectorial $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$.
2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

para $\mathbf{x}$ y λ. Cuando este se expande, es en realidad un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$, es decir,

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda g_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda g_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda g_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \end{cases}$$

Las soluciones de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el sistema anterior, junto con cualesquiera otros puntos $\mathbf{x}$ que satisfagan la restricción $g(\mathbf{x}) = c$, y tal que ∇f es indefinido, o ∇g no existe o es indefinido, son los candidatos para ser los extremos del problema.

3. Determine la naturaleza de f (como máximo, mínimo o ni uno ni otro) en los puntos críticos encontrados en el paso 2.

El escalar λ que aparece en el teorema 3.1 se llama **multiplicador de Lagrange** en honor de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), el matemático francés nacido en Italia que fue el primero en desarrollar este método para resolver problemas de optimización restringida. En la práctica, el paso 2 involucra un poco de álgebra, por lo que es importante mantener organizado el trabajo. (Una alternativa para resolver el sistema es utilizar una computadora). De hecho, como por lo general el multiplicador de Lagrange, λ, no es lo que más nos interesa, podemos evitar resolverlo explícitamente, lo cual reduce un poco el álgebra y la aritmética. La determinación de la naturaleza de un punto crítico restringido (paso 3) puede ser algo tortuoso. Diremos más acerca de esto en los ejemplos y análisis que siguen.

EJEMPLO 2 Usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para identificar el punto crítico encontrado en el ejemplo 1. Por consiguiente, queremos encontrar el mínimo de

$$A(x, y, z) = 2xy + 2yz + xz$$

sujeta a la restricción

$$V(x, y, z) = xyz = 4.$$

El teorema 3.1 sugiere que formemos la ecuación

$$\nabla A(x, y, z) = \lambda \nabla V(x, y, z).$$

Esta relación de gradientes acoplados con la ecuación de restricción da lugar al sistema

$$\begin{cases} 2y + z = \lambda yz \\ 2x + 2z = \lambda xz \\ 2y + x = \lambda xy \\ xyz = 4 \end{cases}.$$

Como no es esencial obtener λ para obtener la solución final podemos eliminarla por medio de cualquiera de las primeras tres ecuaciones. Así,

$$\lambda = \frac{2y + z}{yz} = \frac{2x + 2z}{xz} = \frac{2y + x}{xy}.$$

Esta simplificación implica que

$$\frac{2}{z} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{y}.$$

La primera igualdad produce

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{x} \quad \text{o bien} \quad x = 2y,$$

mientras que la segunda igualdad implica que

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{y} \quad \text{o bien} \quad z = 2y.$$

Al sustituir estas relaciones en la ecuación de restricción $xyz = 4$ se obtiene

$$(2y)(y)(2y) = 4,$$

por lo que encontramos que la única solución es $y = 1$, $x = z = 2$, lo cual coincide con lo que hicimos en el ejemplo1. (Advierta que $\nabla V = \mathbf{0}$ solo a lo largo de los ejes coordenados y tales puntos no satisfacen la restricción $V(x, y, z) = 4$). ◆

Una consecuencia interesante del teorema 3.1 es esta: según el teorema 6.4 del capítulo 2 sabemos que el gradiente ∇g, cuando es distinto de cero, es perpendicular a los conjuntos de nivel de g. Entonces, la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ da la condición para el vector normal de que un conjunto de nivel de f sea paralelo a un conjunto de nivel de g. Así, para que un punto $\mathbf{x}_0$ sea el lugar en que ocurre un extremo de f en el conjunto de nivel $S = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = c\}$, donde $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, debemos tener que el conjunto de nivel R de f que contenga $\mathbf{x}_0$ sea tangente a S en $\mathbf{x}_0$.

EJEMPLO 3 Considere el problema de encontrar los extremos de $f(x, y) = x^2/4 + y^2$, sujeta a la condición de que $x^2 + y^2 = 1$. Hacemos $g(x, y) = x^2 + y^2$, de esta manera la ecuación del multiplicador de Lagrange es $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, junto

con la ecuación de restricción, genera el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

(No hay puntos que satisfagan simultáneamente $g(x, y) = 1$ y $\nabla g(x, y) = (0, 0)$). La primera ecuación del sistema implica que $x = 0$ o que $\lambda = \frac{1}{4}$. Si $x = 0$, entonces las otras dos ecuaciones, tomadas juntas, implican que $y = \pm 1$ y $\lambda = 1$. Si $\lambda = \frac{1}{4}$, entonces las otras dos ecuaciones implican que $y = 0$ y $x = \pm 1$. Por lo tanto, existen cuatro puntos críticos restringidos: $(0, \pm 1)$, correspondiente a $\lambda = 1$ y $(\pm 1, 0)$, que corresponde a $\lambda = \frac{1}{4}$.

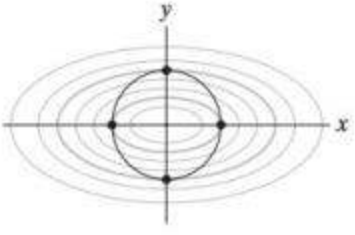


Figura 4.26 Los conjuntos de nivel de la función $f(x, y) = x^2/4 + y^2$ definen una familia de elipses. Los extremos de f sujetos a la restricción de que $x^2 + y^2 = 1$, es decir, que están en el círculo unitario, ocurren en los puntos donde una elipse de la familia es tangente al círculo unitario.

Podemos entender la naturaleza de estos puntos críticos utilizando geometría y los comentarios anteriores. La colección de conjuntos de nivel de la función f es la familia de elipses $x^2/4 + y^2 = k$, cuyos ejes mayor y menor están a lo largo de los ejes x y y, respectivamente. De hecho, el valor $f(x, y) = x^2/4 + y^2 = k$ es el cuadrado de la longitud del semieje menor de la elipse $x^2/4 + y^2 = k$. El problema de optimización, entonces, es encontrar aquellos puntos en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ que, cuando se consideran como puntos en la familia de elipses, minimizan y maximizan la longitud del eje menor. Cuando consideramos en esta forma el problema, vemos que esos puntos deben ocurrir donde el círculo es tangente a una de las elipses de la familia. Un dibujo muestra que los mínimos restringidos de f ocurren en $(\pm 1, 0)$ y los máximos restringidos en $(0, \pm 1)$. En este caso, el multiplicador de Lagrange λ representa el cuadrado de la longitud del semieje menor (véase la figura 4.26). ◆

EJEMPLO 4 Considere el problema de determinar los extremos de $f(x, y) = 2x + y$, sujeta a la restricción de que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$. Hacemos que $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, de manera que la ecuación del multiplicador de Lagrange $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, junto con la ecuación de la restricción, produce el sistema

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \\ 1 = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}.$$

Las dos primeras ecuaciones de este sistema implican que $\lambda = 4\sqrt{x} = 2\sqrt{y}$, por lo que $\sqrt{y} = 2\sqrt{x}$. Utilizando esto en la última ecuación encontramos que $3\sqrt{x} = 3$ y, en consecuencia, $x = 1$. Así, el sistema de ecuaciones anterior produce la solución única $(1, 4)$.

Como la restricción define un segmento de curva cerrado y acotado, el teorema del valor extremo (teorema 2.5) garantiza que f debe tener en este segmento *tanto* un máximo global *como* un mínimo global. Sin embargo, el método de los multiplicadores de Lagrange ha demostrado que solo hay un punto crítico. Pero advierta que los puntos $(9, 0)$ y $(0, 9)$ satisfacen la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$; ambos son puntos donde ∇g es indefinida. Además, tenemos que $f(1, 4) = 2$, mientras que $f(9, 0) = 18$ y $f(0, 9) = 9$. Evidentemente, el mínimo de f ocurre en $(1, 4)$ y el máximo en $(9, 0)$.

Podemos entender la geometría de la situación de la siguiente manera. La colección de conjuntos de nivel de la función f es la familia de rectas paralelas $2x + y = k$. Observe que la altura k de cada conjunto de nivel tan solo es la intersección y de la recta correspondiente en la familia. Por consiguiente, el problema consiste en encontrar las intersecciones con el eje y que sean más grande y más pequeña de cualquiera de

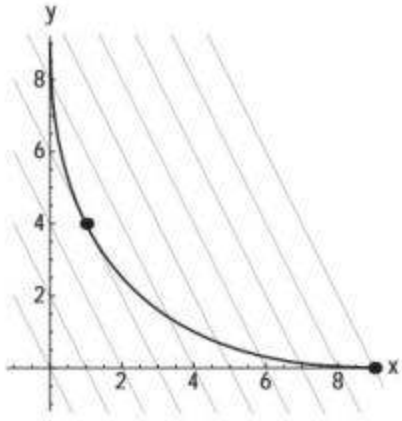


Figura 4.27 Los conjuntos de nivel de la función $f(x, y) = 2x + y$ definen una familia de rectas. El mínimo de f sujeto a la restricción de que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ ocurre en un punto en donde una de las rectas es tangente a la curva de la restricción y el máximo ocurre en uno de los puntos extremos de la curva.

las rectas en la familia que interseca la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$. Estos valores extremos de k ocurren cuando una de las rectas es tangente a la curva de restricción o a un punto extremo de la curva (véase la figura 4.27).

Este ejemplo ilustra la importancia que tiene ubicar todos los puntos donde puedan ocurrir los extremos considerando los lugares donde ∇f o ∇g estén indefinidas, o donde $\nabla g = \mathbf{0}$, así como las soluciones del sistema de ecuaciones determinado utilizando los multiplicadores de Lagrange. ◆

Dibujo de una demostración del teorema 3.1 Presentamos las ideas clave de la demostración, que son de naturaleza geométrica. Intente el lector visualizar la situación para el caso en que $n = 3$, donde la ecuación de restricción $g(x, y, z) = c$ define una superficie S en $\mathbf{R}^3$ (véase la figura 4.28). En general, si S está definida como $\{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = c\}$ con $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, entonces S es una hipersuperficie en $\mathbf{R}^n$ (al menos localmente cerca de $\mathbf{x}_0$). La demostración de que este es el caso involucra el teorema de la función implícita (teorema 6.5 en la sección 2.6), por lo cual nuestra demostración aquí es solo un dibujo.

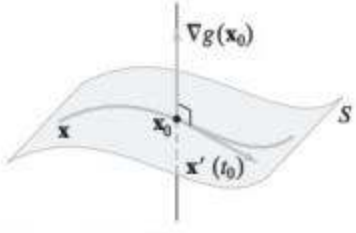


Figura 4.28 Entonces, el gradiente $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a $S = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = c\}$, en consecuencia, al vector tangente en $\mathbf{x}_0$ a cualquier curva $\mathbf{x}(t)$ que esté en S y que pase por $\mathbf{x}_0$. Si f tiene un extremo en $\mathbf{x}_0$, entonces la restricción de f a la curva también tiene un extremo en $\mathbf{x}_0$.

Entonces, suponga que $\mathbf{x}_0$ es un extremo de f restringido a S. Consideramos una restricción adicional de f—a una curva que está en S y que pasa por $\mathbf{x}_0$. Esto nos permitirá usar resultados del cálculo con una variable. La notación y particularidades analíticas son las siguientes: sea $\mathbf{x}$: $I \subseteq \mathbf{R} \to S \subset \mathbf{R}^3$ una trayectoria C^1 que está en S con $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para algún $t_0 \in I$. Entonces la restricción de f para $\mathbf{x}$ es dada por la función F, donde

$$F(t) = f(\mathbf{x}(t)).$$

Puesto que $\mathbf{x}_0$ es un extremo de f en S, también debe ser un extremo en $\mathbf{x}$. En consecuencia, debemos tener $F'(t_0) = 0$, y la regla de la cadena implica que

$$0 = F'(t_0) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(\mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0).$$

Por consiguiente, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a cualquier curva en S que pasa por $\mathbf{x}_0$; es decir, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es normal a S en $\mathbf{x}_0$. En la sección 2.6 vimos que el gradiente $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ también es normal a S en $\mathbf{x}_0$. Como la dirección normal al conjunto de nivel S es

determinado en forma única y $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, debemos concluir que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ son vectores paralelos. Por lo tanto,

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$$

para algún escalar $\lambda \in \mathbf{R}$ como se buscaba. ■

El caso de más de una restricción

Es natural generalizar la situación de encontrar los extremos de una función f sujeta a una sola ecuación de restricción a la de hallar extremos sujetos a varias restricciones. En otras palabras, queremos maximizar o minimizar f sujeta a k condiciones simultáneas de la forma

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ g_2(\mathbf{x}) = c_2 \\ \quad\vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases}.$$

El resultado que generaliza el teorema 3.1 es el siguiente:

TEOREMA 3.2 Sea X abierto en $\mathbf{R}^n$ y sea $f, g_1, \ldots, g_k$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ las funciones C^1, donde $k < n$. Sea $S = \{\mathbf{x} \in X \mid g_1(\mathbf{x}) = c_1, \ldots, g_k(\mathbf{x}) = c_k\}$. Si $f|_S$ tiene un extremo en un punto $\mathbf{x}_0$, donde $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ son vectores linealmente independientes, entonces deben existir escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, tales que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0).$$

(Nota: se dice que los k vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ en $\mathbf{R}^n$ son **linealmente independientes** si la única manera de satisfacer $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ para los escalares $a_1, \ldots, a_k$ es si $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$).

Ideas de demostración En primer lugar, observe que S es la intersección de las k hipersuperficies $S_1, \ldots, S_k$, donde $S_j = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) = c_j\}$. Por lo tanto, cualquier vector tangente a S también debe ser tangente a cada una de estas hipersuperficies, de modo que, según el teorema 6.4 del capítulo 2, perpendicular a cada uno de los ∇g_j. Dados estos comentarios, las ideas principales de la demostración del teorema 3.1 se pueden adaptar con facilidad para dar una demostración del teorema 3.2.

Por lo tanto, hacemos que $\mathbf{x}_0 \in S$ sea un extremo de f restringido a S y consideramos la función de una variable obtenida por restringir f a una curva en S que pasa a través de $\mathbf{x}_0$. Así, sea $\mathbf{x}$: $I \to S \subset \mathbf{R}^n$ una curva C^1 en S con $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para algún $t_0 \in I$. Entonces, como en la demostración del teorema 3.1, definimos F con

$$F(t) = f(\mathbf{x}(t)).$$

Como se supuso que $\mathbf{x}_0$ era un extremo restringido, se infiere que

$$F'(t_0) = 0.$$

Entonces, la regla de la cadena dice que

$$0 = F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0).$$

Es decir, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a todos los vectores tangentes a S en $\mathbf{x}_0$. Por lo tanto, se puede demostrar que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ está en el plano k-dimensional generado por

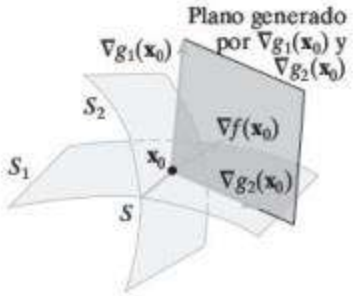


Figura 4.29 Ilustración de la prueba del teorema 3.2. Las restricciones $g_1(\mathbf{x}) = c_1$ y $g_2(\mathbf{x}) = c_2$ son las superficies S_1 y S_2. Cualquier extremo de f debe ocurrir en los puntos donde ∇f está en el plano generado por ∇g_1 y ∇g_2.

los vectores normales a las hipersuperficies individuales $S_1, \ldots, S_k$ cuya intersección es S. Se infiere (con un poco de álgebra lineal) que debe haber escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0).$$

Una sugerencia de la geometría de esta demostración la da la figura 4.29, donde $k = 2$ y $n = 3$. ■

EJEMPLO 5 Suponga que el cono $z^2 = x^2 + y^2$ es cortado por el plano $z = x + y + 2$ de modo que se crea una sección cónica C. Usamos multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos en C que sean los más cercanos y más lejanos del origen en $\mathbf{R}^3$.

El problema es encontrar las distancias mínima y máxima de (0, 0, 0) a los puntos (x, y, z) en C. Por simplicidad algebraica analizaremos el cuadrado de la distancia y no la distancia real. Por consiguiente, deseamos encontrar los extremos de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

(el cuadrado de la distancia del origen a (x, y, z)) sujeto a las restricciones

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + y - z = -2 \end{cases}.$$

Advierta que

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) \quad \text{y que} \quad \nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, -1).$$

Estos vectores son linealmente dependientes solo cuando $x = y = z$. Sin embargo, no hay un punto de la forma (x, x, x) que satisfaga simultáneamente $g_1 = 0$ y $g_2 = -2$. Entonces, ∇g_1 y ∇g_2 son linealmente independientes en todos los puntos que satisfacen las dos restricciones. Por lo tanto, según el teorema 3.2, sabemos que cualesquiera puntos críticos restringidos (x_0, y_0, z_0) deben satisfacer

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0),$$

así como a las dos ecuaciones de restricción. Entonces, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2y = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z = -2\lambda_1 z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + y - z = -2 \end{cases}.$$

Al eliminar λ_2 de las primeras dos ecuaciones se obtiene

$$\lambda_2 = 2x - 2\lambda_1 x = 2y - 2\lambda_1 y,$$

lo cual implica que

$$2(x - y)(1 - \lambda_1) = 0.$$

Por lo tanto,

$$x = y \quad \text{o bien} \quad \lambda_1 = 1.$$

La condición $\lambda_1 = 1$ implica de inmediato que $\lambda_2 = 0$ y la tercera ecuación del sistema se convierte en $2z = -2z$, por lo que z debe ser igual a 0. Si $z = 0$, entonces

x y y deben ser cero, de acuerdo con la cuarta ecuación. Sin embargo, (0, 0, 0) no es un punto en el plano $z = x + y + 2$. Así, la condición $\lambda_1 = 1$ no conduce a un punto crítico. Por otro lado, si $x = y$, entonces las ecuaciones de restricción (las dos últimas en el sistema original de cinco) se convierten en

$$\begin{cases} 2x^2 - z^2 = 0 \\ 2x - z = -2 \end{cases}.$$

Al sustituir $z = 2x + 2$ se produce

$$2x^2 - (2x + 2)^2 = 0,$$

equivalente a

$$2x^2 + 8x + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son $x = -2 \pm \sqrt{2}$. Por lo tanto, existen dos puntos críticos restringidos

$$\mathbf{a}_1 = \left(-2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\right)$$

y

$$\mathbf{a}_2 = \left(-2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}\right).$$

Puede comprobarse que

$$f(\mathbf{a}_1) = 24 - 16\sqrt{2}, \qquad f(\mathbf{a}_2) = 24 + 16\sqrt{2},$$

por lo que parece que $\mathbf{a}_1$ debe ser el punto en C que está más cerca del origen y $\mathbf{a}_2$, el que está más lejos. Sin embargo, no sabemos *a priori* si existe un punto más lejano. Si la sección cónica C es una hipérbola o una parábola, entonces no hay un punto que sea el más lejano del origen. Para entender la clase de curva que es C, note que $\mathbf{a}_1$ tiene una coordenada z positiva y $\mathbf{a}_2$ la tiene negativa. Por lo tanto, el plano $z = x + y + 2$ interseca ambas napas del cono $z^2 = x^2 + y^2$. La única sección cónica que interseca ambas napas de un cono es una hipérbola. En consecuencia, C es una hipérbola, y vemos que el punto $\mathbf{a}_1$ en efecto es el más cercano al origen, pero el punto $\mathbf{a}_2$ no es el más lejano. En vez de ello, $\mathbf{a}_2$ es el punto más cercano al origen en la rama de la hipérbola que no contiene a $\mathbf{a}_1$. Es decir, ocurren mínimos locales restringidos tanto en $\mathbf{a}_1$ como en $\mathbf{a}_2$, pero solo $\mathbf{a}_1$ es el sitio donde ocurre un mínimo global (véase la figura 4.30). ◆

Figura 4.30 El punto $\mathbf{a}_1$ es el punto de la hipérbola más cercano al origen. El punto $\mathbf{a}_2$ es el punto en la rama inferior de la hipérbola más cercano al origen.

Criterio del hessiano para extremos restringidos (opcional) —

Como lo indica el ejemplo 5, con frecuencia es posible determinar la naturaleza de un punto crítico (restringido o no) a partir de consideraciones particulares del problema de que se trate. En ocasiones no es difícil de hacer en la práctica y se obtiene una visión útil del problema. No obstante, a veces tiene ventajas tener más de un medio automático para discernir la naturaleza de un punto crítico restringido. Por esto presentamos el criterio del hessiano para puntos críticos restringidos. Igual que para el caso no restringido, este criterio solo determina la naturaleza *local* de un punto crítico. No da información acerca de extremos globales restringidos.[2]

[2] Para un análisis más completo invitamos al lector a consultar a D. Spring, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985), No. 9, 631-643.

En general, el contexto del criterio del hessiano es este: se buscan extremos de una función $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sujeta a las k restricciones

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_k \end{cases}.$$

Suponemos que $f, g_1, \ldots, g_k$ son todas de clase C^2, y por simplicidad, que las f y las g_j tienen todas el mismo dominio X. Por último, suponemos que $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_k$ son linealmente independientes en el punto crítico restringido $\mathbf{a}$. Entonces, de acuerdo con el teorema 3.2, cualquier extremo restringido $\mathbf{a}$ debe satisfacer

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Podemos considerar que un punto crítico restringido es la pareja de vectores

$$(\lambda; \mathbf{a}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k; a_1, \ldots, a_n)$$

que satisfacen la ecuación mencionada. En efecto, podemos comprobar que $(\lambda; \mathbf{a})$ es un punto crítico **no restringido** de la función llamada el lagrangiano L, la cual es definida por

$$L(l_1, \ldots, l_k; x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} l_i(g_i(x_1, \ldots, x_n) - c_i).$$

El criterio del hessiano proviene de considerar el hessiano de L en el punto crítico $(\lambda; \mathbf{a})$. Antes de dar el criterio notemos el siguiente hecho del álgebra lineal: como se supone que $\nabla g_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla g_k(\mathbf{a})$ son linealmente independientes, la matriz de derivadas de $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ en $\mathbf{a}$,

$$D\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix},$$

tiene una submatriz de orden $k \times k$ con determinante distinto de cero, que se obtiene eliminando $n - k$ columnas de $D\mathbf{g}(\mathbf{a})$. Al volver a denotar las variables, si fuera necesario, supondremos que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \neq 0$$

es decir, podemos eliminar las *últimas* $n - k$ columnas.

Prueba de la segunda derivada para extremos locales restringidos. Dado un punto crítico restringido $\mathbf{a}$ de f sujeto a las condiciones $g_1(\mathbf{x}) = c_1$, $g_2(\mathbf{x}) = c_2, \ldots, g_k(\mathbf{x}) = c_k$, considere la matriz

$$HL(\lambda; \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & -\dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & -\dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & -\dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix},$$

donde

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) - \lambda_1 \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) - \lambda_2 \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) - \cdots - \lambda_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

(Advierta que $HL(\lambda; \mathbf{a})$ es una matriz de orden $(n + k) \times (n + k)$). Al volver a denotar las variables, si fuera necesario, suponemos que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Como en el caso no restringido, sea H_j la submatriz del extremo superior izquierdo $j \times j$ de $HL(\lambda, \mathbf{a})$. Para $j = 1, 2, \ldots, k + n$, sea $d_j = \det H_j$ y se calcula la secuencia siguiente de $n - k$ números:

$$(-1)^k d_{2k+1}, \quad (-1)^k d_{2k+2}, \ldots, \quad (-1)^k d_{k+n}. \tag{1}$$

Advierta que si $k \geq 1$, la secuencia en (1) *no* es la secuencia completa de menores principales de $HL(\lambda, \mathbf{a})$. Suponga que $d_{k+n} = \det HL(\lambda, \mathbf{a}) \neq 0$. La prueba numérica es como sigue:

1. Si la secuencia en (1) consta totalmente de números positivos, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$ sujeto a las restricciones
$$g_1(\mathbf{x}) = c_1, \quad g_2(\mathbf{x}) = c_2, \ldots, \quad g_k(\mathbf{x}) = c_k.$$
2. Si la secuencia en (1) comienza con un número negativo y a partir de ahí alterna los signos, entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$ sujeto a las restricciones
$$g_1(\mathbf{x}) = c_1, \quad g_2(\mathbf{x}) = c_2, \ldots, \quad g_k(\mathbf{x}) = c_k.$$
3. Si no es el caso que se cumplan las condiciones 1 o 2, entonces f tiene en $\mathbf{a}$ un punto silla restringido.

Suponiendo que $\det HL(\lambda, \mathbf{a}) = 0$, el punto crítico restringido $\mathbf{a}$ es **degenerado**, por lo que debemos usar otro método para determinar si se trata o no de la ubicación de un extremo.

Por último, en el caso en que no haya ecuaciones de restricción $g_i(\mathbf{x}) = c_i$; es decir, $k = 0$, el criterio precedente se convierte en la prueba usual del hessiano para una función f de n variables.

EJEMPLO 6 En el ejemplo 1 encontramos el mínimo de la función de área

$$A(x, y, z) = 2xy + 2yz + xz$$

de una caja rectangular abierta sujeta a la condición

$$V(x, y, z) = xyz = 4.$$

Utilizando multiplicadores de Lagrange encontramos que el único punto crítico restringido era (2, 1, 2). El valor del multiplicador λ correspondiente a este punto es 2. Para usar el criterio del hessiano con el fin de comprobar que (2, 1, 2) realmente produce un mínimo local construimos la función lagrangiana

$$\begin{aligned} L(l; x, y, z) &= A(x, y, z) - l(V(x, y, z) - 4) \\ &= 2xy + 2yz + xz - l(xyz - 4). \end{aligned}$$

Entonces

$$HL(l; x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -yz & -xz & -xy \\ -yz & 0 & 2 - lz & 1 - ly \\ -xz & 2 - lx & 0 & 2 - lx \\ -xy & 1 - ly & 2 - lx & 0 \end{bmatrix}.$$

En el punto crítico restringido (2; 2, 1, 2), tenemos

$$HL(2; 2, 1, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La secuencia de determinantes por considerar es

$$(-1)^1 \det H_{2(1)+1} = -\det \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 32,$$

$$(-1)^1 \det H_4 = -\det \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 48.$$

Como estos números son positivos, vemos que (2, 1, 2) en efecto minimiza el área del entorno sujeto a la restricción de volumen constante. ◆

EJEMPLO 7 En el ejemplo 5 encontramos puntos en la sección cónica C definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + y - z = -2 \end{cases}$$

que son puntos críticos (restringidos) de la función "distancia"

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

En este caso, para aplicar el criterio del hessiano construimos la función lagrangiana

$$L(l, m; x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l(x^2 + y^2 - z^2) - m(x + y - z + 2).$$

Los puntos críticos de L, que se encuentran al igualar a $\mathbf{0}$ a $DL(l, m; x, y, z)$, son

$$(\lambda_1; \mathbf{a}_1) = (-3 + 2\sqrt{2}, -24 + 16\sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$$

y

$$(\lambda_2; \mathbf{a}_2) = (-3 - 2\sqrt{2}, -24 - 16\sqrt{2}; -2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}).$$

El hessiano de L es

$$HL(l, m; x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2x & -2y & 2z \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2x & -1 & 2 - 2l & 0 & 0 \\ -2y & -1 & 0 & 2 - 2l & 0 \\ 2z & 1 & 0 & 0 & 2 + 2l \end{bmatrix}.$$

Después de evaluar esta matriz en cada uno de los puntos críticos es necesario que calculemos

$$(-1)^2 \det H_{2(2)+1} = \det H_5.$$

Invitamos al lector a comprobar que para $(\lambda_1; \mathbf{a}_1)$ este determinante es $128 - 64\sqrt{2} \approx 37.49$, y para $(\lambda_2; \mathbf{a}_2)$ es $128 + 64\sqrt{2} \approx 218.51$. Como ambos números son positivos, los puntos $(-2 \pm \sqrt{2}, -2 \pm \sqrt{2}, -2 \pm 2\sqrt{2})$ son las ubicaciones en donde ocurren mínimos locales. Al comparar los valores de f en dichos puntos, vemos que $(-2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$ debe ser un mínimo global. ◆

4.3 Ejercicios

1. En este problema busque como se indica a continuación el punto del plano $2x - 3y - z = 4$ que esté más cerca del origen:

a) Utilizando los métodos de la sección 4.2, es decir, encontrando el valor mínimo de una función apropiada de dos variables.

b) Empleando un multiplicador de Lagrange.

En los ejercicios 2 a 12 use multiplicadores de Lagrange para identificar los puntos críticos de f sujetos a las restricciones dadas.

2. $f(x, y) = y, \quad 2x^2 + y^2 = 4$

3. $f(x, y) = 5x + 2y, \quad 5x^2 + 2y^2 = 14$

4. $f(x, y) = xy, \quad 2x - 3y = 6$

5. $f(x, y, z) = xyz, \quad 2x + 3y + z = 6$

6. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y - z = 1$

7. $f(x, y, z) = 3 - x^2 - 2y^2 - z^2, \quad 2x + y + z = 2$

8. $f(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6$

9. $f(x, y, z) = 2x + y^2 - z^2, \quad x - 2y = 0, \; x + z = 0$

10. $f(x, y, z) = 2x + y^2 + 2z, \quad x^2 - y^2 = 1, \; x + y + z = 2$

11. $f(x, y, z) = xy + yz, \quad x^2 + y^2 = 1, \; yz = 1$

12. $f(x, y, z) = x + y + z, \quad y^2 - x^2 = 1, \quad x + 2z = 1$

13. *a*) Encuentre los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeto a $x^2 + 2y^2 = 1$.

b) Use el criterio del hessiano para determinar la naturaleza del punto crítico.

14. *a*) Encuentre cualesquiera puntos críticos de $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sujeta a $2x + y + z = 1$, $x - 2z - w = -2$, $3x + y + 2w = -1$.

b) Utilice el criterio del hessiano para determinar la naturaleza del punto crítico. (Nota: tal vez desee usar un sistema de álgebra por computadora para hacer los cálculos).

Así como a veces sucede al encontrar puntos críticos ordinarios (es decir, no restringidos), de funciones, puede ser difícil resolver un problema con multiplicadores de Lagrange debido a que resulta excesivamente difícil resolver a mano el sistema de ecuaciones que resulta. En los ejercicios 15 a 19 use un sistema de álgebra por computadora para encontrar los puntos críticos de la función f dada sujeta a las restricciones indicadas. (Nota: el lector tal vez encuentre útil dar aproximaciones numéricas en ciertos casos).

15. $f(x, y, z) = 3xy - 4z, 3x + y - 2xz = 1$

16. $f(x, y, z) = 3xy - 4yz + 5xz, \quad 3x + y + 2z = 12, \; 2x - 3y + 5z = 0$

17. $f(x, y, z) = y^3 + 2xyz - x^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

18. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz^2, xy + z^2 = 1$

19. $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2, \quad x^2 + y^2 = 1, x + y + z + w = 1, x - y + z - w = 0$

20. Considere el problema de determinar los valores extremos de la función $f(x, y) = x^3 + 3y^2$ sujeto a la restricción de que $xy = -4$.

a) Use un multiplicador de Lagrange para encontrar los puntos críticos de f que satisfagan la restricción.

b) Dé un argumento analítico para determinar si los puntos críticos que encontró en el inciso anterior producen máximos o mínimos (restringidos) de f.

c) Utilice una computadora para graficar en un conjunto único de ejes varias curvas de nivel de f juntas con la curva de la restricción $xy = -4$. Use la gráfica para dar una justificación geométrica de sus respuestas a los incisos *a*) y *b*).

21. Calcule tres números positivos cuya suma sea 18 y cuyo producto sea tan grande como sea posible.

22. Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x + y - z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 81$. Explique cómo sabe que debe haber tanto un máximo como un mínimo asociado.

23. Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el disco cerrado $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

24. El lector va a enviar un regalo de cumpleaños a su maestro de cálculo. La compañía Servicio de Entregas en Vuelo Nocturno insiste en que cualquier paquete que transporte debe ser tal que la suma de la longitud más el contorno debe ser un máximo de 108 pulgadas (el contorno es el perímetro de la sección transversal perpendicular al eje de la longitud, como se puede ver en la figura 4.31). ¿Cuáles son las dimensiones del regalo más grande que puede enviar?

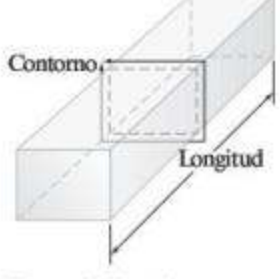


Figura 4.31 Diagrama para el ejercicio 24.

25. Se va a fabricar una lata cilíndrica de metal a partir de una cantidad fija de lámina. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar la razón entre las dimensiones de la lata con la mayor capacidad.

26. Una granjera diligente diseña un silo para guardar sus 900π pies^3 de grano. El silo va a tener forma cilíndrica con techo hemisférico (véase la figura 4.32). Suponga que hacer el techo cuesta (por pie cuadrado de lámina usada) cinco veces lo que cuesta hacer el piso circular, y hacer el piso cuesta lo doble que hacer las paredes. Si el lector fuera consultor en este proyecto, ¿qué dimensiones recomendaría para minimizar el costo *total*? ¿En qué basa su recomendación? (Suponga que todo el silo puede llenarse con grano).

Figura 4.32 El silo para granos del ejercicio 26.

27. El lector está a cargo de la construcción de una nave espacial en el recién descubierto planeta de Nilrebo. Para minimizar la interferencia con los sensores de la nave debe situarla donde el campo magnético del planeta sea lo más débil posible. Nilrebo es perfectamente esférico con un radio de 3 (donde las unidades son miles de millas). Dado un sistema de coordenadas cuyo origen está en el centro del planeta, la intensidad del campo magnético en el espacio es dada por la función $M(x, y, z) = xz - y^2 + 3x + 3$. ¿Dónde debe ubicar la nave?

28. La fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo cuyos lados tienen longitudes x, y y z es

$$\text{Área} = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)},$$

donde $s = \frac{1}{2}(x + y + z)$ es lo que se conoce como semiperímetro del triángulo. Use la fórmula de Herón para demostrar que para un perímetro fijo P, el triángulo con el área más grande es equilátero.

29. Use un multiplicador de Lagrange para encontrar la esfera más grande, con centro en el origen, que puede inscribirse en el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ (tenga cuidado al resolver este problema, quizá le ayude hacer un dibujo).

30. Determine el punto que está más cerca del origen y sobre la recta de intersección de los planos $2x + y + 3z = 9$ y $3x + 2y + z = 6$.

31. Encuentre el punto que está más cerca del punto $(2, 5, -1)$ y en la recta de intersección de los planos $x - 2y + 3z = 8$ y $2z - y = 3$.

32. El plano $x + y + z = 4$ interseca al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encuentre los puntos sobre la elipse que están más cerca y más lejos del origen.

33. Determine los puntos más altos y más bajos de la elipse que se obtiene al intersecar el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $x + y + 2z = 2$.

34. Calcule la distancia mínima entre un punto en la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y un punto en la recta $x + y = 4$. (Sugerencia: considere un punto (x, y) en la elipse y un punto (u, v) en la recta. Minimice el cuadrado de la distancia entre ellos como una función de cuatro variables. Este problema es difícil de resolver sin una computadora).

35. *a*) Use el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar puntos críticos de la función $f(x, y) = x + y$ sujeta a la restricción $xy = 6$.

b) Explique geométricamente por qué f no tiene extremos en el conjunto $\{(x, y) \mid xy = 6\}$.

36. Sea que α, β y γ denoten los ángulos (interiores) de un triángulo. Determine el valor máximo de sen α sen β sen γ.

37. Sea S una superficie en $\mathbf{R}^3$ dada por la ecuación $g(x, y, z) = c$, donde g es una función de clase C^1 con gradiente que no desaparece y c es una constante. Suponga que hay un punto P en S cuya distancia al origen es máxima. Demuestre que el vector de desplazamiento del origen a P debe ser perpendicular a S.

38. El cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $2x + 2y + z = 2$ se intersecan en una elipse. Encuentre los puntos sobre esta que estén más cerca y más lejos del origen.

39. Encuentre los puntos sobre la elipse $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 50$ que estén más cerca y más lejos del origen.

40. Este problema tiene que ver con la determinación de los extremos de $f(x, y) = \sqrt{x} + 8\sqrt{y}$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 17$, donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

a) Explique por qué f debe tener tanto un mínimo global como un máximo global sobre la curva de la restricción dada.

b) Use un multiplicador de Lagrange para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases},$$

donde $g(x, y) = x^2 + y^2$. El lector debe identificar un solo punto crítico de f.

c) Identifique el mínimo global y el máximo global de f sujetos a la restricción.

41. Considere el problema de encontrar los extremos de $f(x, y) = x$ sujetos a la restricción $y^2 - 4x^3 + 4x^4 = 0$.

a) Use un multiplicador de Lagrange y resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases},$$

donde $g(x, y) = y^2 - 4x^3 + 4x^4$. Al hacerlo identificará los puntos críticos de f sujetos a la restricción dada.

b) Grafique la curva $y^2 - 4x^3 + 4x^4 = 0$ y utilícela para determinar dónde ocurren los extremos de $f(x, y) = x$.

c) Compare el resultado del inciso *a*) con el que encontró en el inciso *b*). ¿A qué se debe cualquier diferencia que se observe?

42. Considere el problema de encontrar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $z = c$, donde c es cualquier constante.

a) Use el método de los multiplicadores de Lagrange para identificar los puntos críticos de f sujetos a la restricción dada.

b) Utilice el orden alfabético habitual de las variables, es decir, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ para construir la matriz hessiana $HL(\lambda; a_1, a_2, a_3)$ (donde $L(l; x, y, z) = f(x, y, z) - l(z - c)$) para cada punto crítico que haya encontrado en el inciso *a*). Trate de usar la prueba de la segunda derivada para extremos restringidos a fin de determinar la naturaleza de los puntos críticos encontrados en el inciso *a*). ¿Qué es lo que sucede?

c) Repita el inciso *b*), esta vez utilizando el siguiente orden para las variables: $x_1 = z$, $x_2 = y$, $x_3 = x$. ¿Qué dice ahora la prueba de la segunda derivada?

d) Sin hacer cálculos detallados, analice por qué f debe tener un valor mínimo en el punto $(0, 0, c)$. Después trate de conciliar sus resultados de los incisos *b*) y *c*). Este ejercicio demuestra que la suposición de que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \neq 0$$

es importante.

43. Considere el problema de encontrar puntos críticos de la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeta al conjunto de k restricciones

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \quad g_2(x_1, \ldots, x_n) = c_2, \ldots,$$

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = c_k.$$

Suponga que $f, g_1, g_2, \ldots, g_k$ son de clase C^2.

a) Demuestre que es posible relacionar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar puntos críticos restringidos con las técnicas de la sección 4.2 para encontrar puntos críticos no restringidos como sigue: si

$$(\lambda, \mathbf{a}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k; a_1, \ldots, a_n)$$

es una pareja que consta de k valores para los multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y n valores $a_1, \ldots, a_n$ para las variables $x_1, \ldots, x_n$, tales que $\mathbf{a}$ es un punto crítico restringido, entonces $(\lambda, \mathbf{a})$ es un punto crítico ordinario (o no restringido) de la función

$$L(l_1, \ldots, l_k; x_1, \ldots, x_n)$$

$$= f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} l_i(g_i(x_1, \ldots, x_n) - c_i).$$

b) Calcule el hessiano $HL(\lambda, \mathbf{a})$ y verifique que es la matriz usada en la sección 4.3 para dar el criterio que permite determinar la naturaleza de los puntos críticos restringidos.

44. La hiperesfera unitaria en $\mathbf{R}^n$, con centro en el origen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, es definida por la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Encuentre la pareja de puntos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, cada uno de los cuales está en la hiperesfera unitaria, que maximiza y minimiza la función

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de f?

45. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ cualesquiera vectores en $\mathbf{R}^n$ y, para $i = 1, \ldots, n$, sean

$$u_i = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \quad \text{y} \quad v_i = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

a) Demuestre que $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ están en la hiperesfera unitaria en $\mathbf{R}^n$.

b) Use el resultado del ejercicio 44 para establecer la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|.$$

4.4 Algunas aplicaciones de los extremos

En esta sección se presentan varias aplicaciones de los métodos para encontrar los extremos restringidos y no restringidos estudiados previamente.

Aproximación por mínimos cuadrados

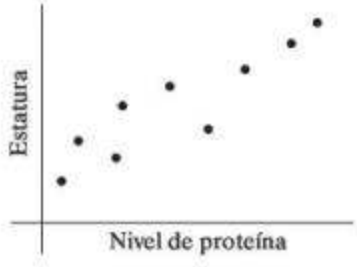


Figura 4.33 Estatura en comparación con nivel de proteína.

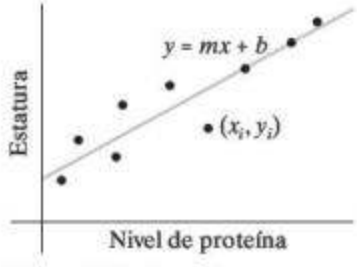


Figura 4.34 Ajuste de una recta a los datos.

La relación más simple entre dos cantidades x y y es, sin duda, la lineal: $y = mx + b$ (donde m y b son constantes). Cuando un biólogo, químico, sicólogo o economista postula la conexión más directa entre dos tipos de datos observados, se asume que dicha conexión es lineal. Suponga que Bob Biólogo y Carol Química han medido los niveles de cierta proteína en la sangre en una población de adultos y los han graficado en comparación con las estaturas de los sujetos, como se aprecia en la figura 4.33. Si el profesor Biólogo y la doctora Química asumen una relación lineal entre las proteínas y la estatura, entonces desearán trazar una línea recta a través de los datos, tan cerca de ellos como sea posible, como lo sugiere la figura 4.34.

Para dar precisión a este método empírico de **regresión lineal** (en vez de que sea solo gráfico e intuitivo), primero necesitamos cierta notación. Suponga que hemos obtenido n pares de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. (En el ejemplo que se acaba de describir, x_i es el nivel de proteína del i-ésimo sujeto y y_i es su estatura). Suponemos que existe alguna relación subyacente de la forma $y = mx + b$ y queremos encontrar los valores de las constantes m y b de modo que la recta se ajuste a los datos con tanta exactitud como sea posible. Normalmente se utiliza el **método de los mínimos cuadrados**. La idea es encontrar los valores de m y b que minimicen la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados de y y los que prediga la fórmula lineal. Es decir, queremos minimizar la cantidad

$$D(m, b) = [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2, \tag{1}$$

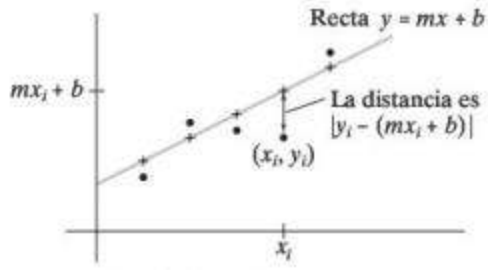


Figura 4.35 El método de los mínimos cuadrados.

donde, para $i = 1, \ldots, n$, la y_i representa el valor observado de y de los datos, y $mx_i + b$ representa el valor y pronosticado por la relación lineal. En consecuencia, cada expresión en D de la forma $y_i - (mx_i + b)$ representa el error entre los valores de y observados y pronosticados (véase la figura 4.35). Se elevan al cuadrado en la expresión para D a fin de evitar la posibilidad de tener términos muy negativos y positivos que se cancelen entre sí, lo cual haría que el "error neto" fuera pequeño o inexistente, lo que constituiría un error. Además, $D(m, b)$ es el cuadrado de la distancia en $\mathbf{R}^n$ entre el punto $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y el punto $(mx_1 + b, mx_2 + b, \ldots, mx_n + b)$.

Por lo tanto, tenemos un problema de minimización ordinario. Para resolverlo necesitamos encontrar los puntos críticos de D. En primer lugar escribimos D como

$$D(m, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b)^2.$$

Entonces,

$$\frac{\partial D}{\partial m} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} 2(mx_i + b)x_i$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^{n} x_i$$

y

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} 2(mx_i + b)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} y_i + 2m \sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb.$$

Cuando ambas derivadas parciales se igualan a cero se obtiene el siguiente par de ecuaciones, que se han simplificado un poco:

$$\begin{cases} \left(\sum x_i^2\right) m + \left(\sum x_i\right) b = \sum x_i y_i \\ \left(\sum x_i\right) m + nb = \sum y_i \end{cases}. \tag{2}$$

(Todas las sumatorias se toman desde $i = 1$ hasta n). Aunque la ecuación (2) puede parecer complicada, solo es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas m y b.

No es difícil ver que el sistema (2) tiene una solución única. Por lo tanto, hemos demostrado lo siguiente:

PROPOSICIÓN 4.1 Dados n datos puntuales $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ donde no todos los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son iguales, la función

$$D(m, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

tiene un solo punto crítico (m_0, b_0) dado por

$$m_0 = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

y

$$b_0 = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Como $D(m, b)$ es un polinomio cuadrático en m y b, la gráfica de $z = D(m, b)$ es una superficie cuadrática (véase la sección 2.1). Las únicas de tales superficies que son gráficas de funciones son paraboloides y paraboloides hiperbólicos. Mostramos que, en el caso presente, la gráfica es la de un paraboloide mediante la demostración de que D tiene un mínimo local en el punto crítico (m_0, b_0) dado en la proposición 4.1.

Podemos usar el criterio del hessiano para comprobar que D tiene un mínimo local en (m_0, b_0). Tenemos

$$HD(m, b) = \begin{bmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2n \end{bmatrix}.$$

Los menores principales son $2\sum x_i^2$ y $4n\sum x_i^2 - 4(\sum x_i)^2$. Es obvio que el primer menor es positivo, pero determinar el signo del segundo requiere un poco más de álgebra (si el lector lo desea, puede omitir la lectura de los detalles del cálculo siguiente y confiar en que la historia tiene un final feliz). Pasamos por alto el factor de 4 y estudiamos la expresión $n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$. Al expandir el segundo término obtenemos

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 &= n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} 2x_i x_j \right) \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i<j} 2x_i x_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Por otro lado, tenemos

$$\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i<j} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) = (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i<j} 2x_i x_j. \tag{4}$$

(Para ver que la ecuación (4) se cumple, el lector necesita convencerse de que

$$\sum_{i<j} (x_i^2 + x_j^2) = (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

contando el número de veces en que aparece un término particular de la forma x_k^2 en la suma del lado izquierdo). Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned}\det HD(m,b) &= 4\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\\ &= 4\left((n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i<j}2x_ix_j\right) \quad \text{según la ecuación (3),}\\ &= 4\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 \quad \text{según la ecuación (4).}\end{aligned}$$

Debido a que esta última expresión es una suma de cuadrados, es no negativa. Por lo tanto, el criterio del hessiano demuestra que D sí tiene un mínimo local en el punto crítico. Entonces, la gráfica de $z = D(m, b)$ es la de un paraboloide. Como el (único) mínimo local de un paraboloide es, en efecto, un mínimo global (considere su gráfica común), vemos que D sí se minimiza en (m_0, b_0).

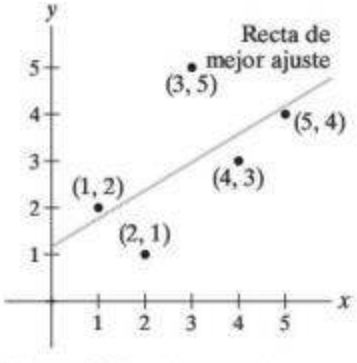


Figura 4.36 Datos para el ejemplo 1 de regresión lineal.

EJEMPLO 1 Para ver cómo se aplica el análisis precedente a un conjunto específico de datos, consideremos la situación ilustrada en la figura 4.36.

Tenemos que $n = 5$ y la función D por minimizar es

$$\begin{aligned}D(m,b) = {} & [2-(m+b)]^2+[1-(2m+b)]^2+[5-(3m+b)]^2\\ & +[3-(4m+b)]^2+[4-(5m+b)]^2.\end{aligned}$$

Calculamos

$$\sum x_i = 15, \qquad \sum x_i^2 = 55, \qquad \sum y_i = 15, \qquad \sum x_i y_i = 51.$$

Por consiguiente, utilizando la proposición 4.1,

$$m = \frac{5\cdot 51 - 15\cdot 15}{5\cdot 55 - 15\cdot 15} = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{55\cdot 15 - 15\cdot 51}{5\cdot 55 - 15\cdot 15} = \frac{6}{5}.$$

La recta de mejor ajuste en términos de la aproximación por mínimos cuadrados es

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}.$$ ◆

Por supuesto, la regresión lineal no siempre es una técnica apropiada. Puede que no sea razonable suponer que los datos puntuales caen cerca de una línea recta. Para describir los datos con cierta exactitud quizá tendría que suponerse alguna fórmula diferente de $y = mx + b$. Esa relación podría ser cuadrática,

$$y = ax^2 + bx + c,$$

o x y y podrían tener una relación inversa,

$$y = \frac{a}{x} + b.$$

El lector podría aplicar el método de los mínimos cuadrados para obtener una función análoga a D en la ecuación (1) para encontrar la relación de una forma dada que se ajuste mejor a los datos.

Otra forma en que se presentan los mínimos cuadrados es si y no depende de una variable sino de varias: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por ejemplo, quizá la estatura de los adul-

tos se mida en comparación con los niveles de 10 proteínas diferentes en la sangre en lugar de solo una. La **regresión múltiple** es el método estadístico para encontrar la función lineal

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b$$

que se ajuste mejor a un conjunto de datos $(n + 1)$ elementos

$$\left\{(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, y_1), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, y_2), \ldots, (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, y_k)\right\}.$$

Es posible encontrar el "hiperplano de mejor ajuste" minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de y provenientes del conjunto de datos y aquellos pronosticados por la fórmula lineal. Se invita al lector a estudiar los detalles del cálculo.[3]

Equilibrio físico

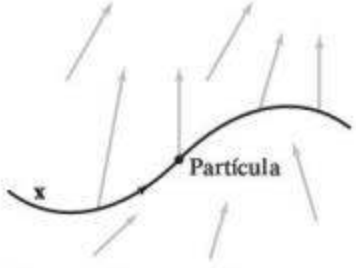


Figura 4.37 Una partícula que se mueve en un campo **F** de fuerzas.

Sea $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo continuo de fuerzas que actúan sobre una partícula que se mueve con una trayectoria $\mathbf{x}: I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, como se aprecia en la figura 4.37. La segunda ley de Newton del movimiento dice que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = m\mathbf{x}''(t), \tag{5}$$

donde m es la masa de la partícula. En el resto de este análisis supondremos que **F** es un campo gradiente, es decir, que $\mathbf{F} = -\nabla V$ para alguna función C^1 de potencial $V: X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. (Véase la sección 3.3 para un comentario breve acerca del signo negativo). Primero estableceremos la ley de conservación de la energía.

TEOREMA 4.2 (CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA) Dada la situación descrita, la cantidad

$$\tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + V(\mathbf{x}(t))$$

es constante.

La forma en que por lo general se denomina al término $\frac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2$ es como la **energía cinética** de la partícula, en tanto que al término $V(\mathbf{x}(t))$ se le conoce como la **energía potencial**. La importancia del teorema 4.2 radica en que establece que la suma de las energías cinética y potencial de una partícula siempre es fija (se conserva) cuando la partícula recorre una trayectoria en un campo vectorial gradiente. Esta es la razón por la que los campos vectoriales gradientes también se llaman **conservativos**.

Demostración del teorema 4.2 Como es usual, demostraremos que la energía total es constante probando que su derivada es igual a cero. Por consiguiente, usando las reglas del producto y de la cadena, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t) + V(\mathbf{x}(t))\right] &= m\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}'(t) + \nabla V(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= m\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}'(t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= m\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}'(t) - m\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= 0,\end{aligned}$$

de las definiciones de **F** y V y mediante la fórmula (5). ■

---

[3] Podría consultar el texto de S. Weisberg, *Applied Linear Regression*, 2a ed., Wiley-Interscience, 1985, capítulo 2. Sin embargo, se advierte al lector que para abordar la regresión múltiple con cierta elegancia se requiere saber un poco más de álgebra lineal de la que se ha presentado en este texto.

En las aplicaciones físicas es importante identificar aquellos puntos en el espacio que son "posiciones en reposo" de las partículas que se mueven bajo la influencia de un campo de fuerzas. Dichas posiciones, conocidas como **puntos de equilibrio**, son tales que el campo de fuerzas no actúa sobre la partícula como para moverla de la posición que ocupe. Los puntos de equilibrio son de dos clases: equilibrio **estable**, a saber, los puntos de equilibrio tales que una partícula a la que se perturbe ligeramente de estas posiciones tiende a permanecer cerca de éstos (por ejemplo, un péndulo en reposo) y equilibrio **inestable**, como el acto de equilibrar una pelota sobre la nariz. La definición precisa es algo técnica.

DEFINICIÓN 4.3 Sea $\mathbf{F}: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ cualquier campo de fuerzas. Entonces $\mathbf{x}_0 \in X$ se llama **punto de equilibrio** de $\mathbf{F}$ si $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0$ es **estable** si, para toda $r, \epsilon > 0$, podemos encontrar otros números $r_0, \epsilon_0 > 0$ tales que si colocamos una partícula en la posición $\mathbf{x}$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_0$, y siempre que tenga una energía cinética menor que ϵ_0, entonces la partícula siempre permanecerá a una distancia r de $\mathbf{x}_0$ con energía cinética menor que ϵ.

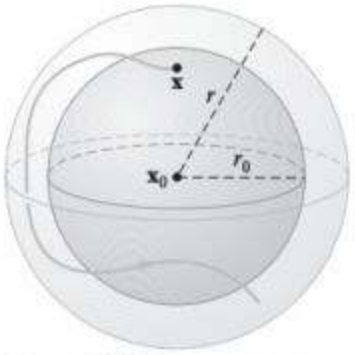


Figura 4.38 Para un punto en equilibrio estable, la trayectoria de una partícula cercana con energía cinética suficientemente pequeña permanecerá cerca con energía cinética acotada.

En otras palabras, un punto $\mathbf{x}_0$ en equilibrio estable tiene la propiedad siguiente: se puede mantener una partícula dentro de una esfera específica con centro en $\mathbf{x}_0$ con poca energía cinética comenzando la partícula dentro de otra esfera (posiblemente más pequeña) con centro alrededor de $\mathbf{x}_0$ e impartiéndole cierta energía cinética inicial (posiblemente más pequeña). (Véase la figura 4.38).

TEOREMA 4.4 Para una función potencial V de clase C^1, de un campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla V$,

1. Los puntos críticos de una función potencial son precisamente los puntos de equilibrio de $\mathbf{F}$.
2. Si $\mathbf{x}_0$ da un mínimo local estricto de V, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto en equilibrio estable de $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 2 El campo vectorial $\mathbf{F} = (-6x - 2y - 2)\mathbf{i} + (-2x - 4y + 2)\mathbf{j}$ es conservativo y tiene

$$V(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + 2y^2 - 2y + 4$$

como función potencial (lo que significa que $\mathbf{F} = -\nabla V$, de acuerdo con nuestra actual convención del signo). Solo hay un punto en equilibrio, que es $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Para ver si es estable analizamos el hessiano de V:

$$HV\left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

La secuencia de menores principales es 6, 20. Por el criterio del hessiano, $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ es un mínimo local estricto de V y, de acuerdo con el teorema 4.4, debe ser un punto en equilibrio estable de $\mathbf{F}$. ◆

Demostración del teorema 4.4 La demostración de la parte 1 es fácil. Como $\mathbf{F} = -\nabla V$, se ve que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ si y solo si $\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Así, los puntos de equilibrio de $\mathbf{F}$ son los puntos críticos de V.

Para demostrar la parte 2, sea $\mathbf{x}_0$ un mínimo local estricto de V y $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria C^1 tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para cierta $t_0 \in I$. Mediante el principio de conservación de la energía debemos tener, para toda $t \in I$, que

$$\tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + V(\mathbf{x}(t)) = \tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t_0)\|^2 + V(\mathbf{x}(t_0)).$$

Para demostrar que $\mathbf{x}_0$ es un punto en equilibrio estable queremos probar que es posible acotar la distancia entre $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ en cualquier cantidad r y la energía cinética en cualquier cantidad ϵ. Es decir, queremos demostrar que se puede lograr

$$\|x(t) - \mathbf{x}_0\| < r$$

o sea, $\mathbf{x}(t) \in B_r(\mathbf{x}_0)$ en la notación de la sección 2.2, y

$$\tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2 < \epsilon.$$

A medida que la partícula se mueve a lo largo de $\mathbf{x}$ desde $\mathbf{x}_0$, la energía potencial debe incrementarse (puesto que se asumió que $\mathbf{x}_0$ es un mínimo local estricto de energía potencial), por lo que la energía cinética debe disminuir en la misma cantidad. Para que la partícula escape de $B_r(\mathbf{x}_0)$, la energía potencial debe aumentar en cierta cantidad. Si se elige ϵ_0 para que sea más pequeño que esa cantidad, entonces la energía cinética no puede disminuir lo suficiente (para que se cumpla la ecuación de conservación) sin que se vuelva negativa. Esto es obviamente imposible, la partícula no puede escapar de $B_r(\mathbf{x}_0)$. ■

Es frecuente que una partícula no solo actúe impulsada por un campo de fuerzas sino también que esté restringida a permanecer en una superficie en el espacio. El planteamiento es como sigue: $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo en $\mathbf{R}^3$ que actúa sobre una partícula que está en la superficie $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid g(\mathbf{x}) = c\}$, donde g es una función C^1 tal que $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ para toda $\mathbf{x}$ en S. La mayoría de los comentarios hechos para el caso sin restricciones siguen siendo verdaderos, siempre que $\mathbf{F}$ se reemplace por la componente vectorial de $\mathbf{F}$ tangente a S. Como en $\mathbf{x} \in S$, $\nabla g(\mathbf{x})$ es normal a S, esta componente tangencial de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{x}$ es

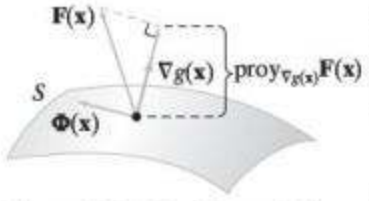


Figura 4.39 Sobre la superficie $S = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = c\}$, la componente de $\mathbf{F}$ que es tangente a S en $\mathbf{x}$ se denota por $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$.

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \text{proy}_{\nabla g(\mathbf{x})}\mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

(Véase la figura 4.39). Entonces, en lugar de la fórmula (5) tenemos, para una trayectoria $\mathbf{x}$: $I \subseteq \mathbf{R} \to S$,

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}(t)) = m\mathbf{x}''(t). \tag{7}$$

Ahora podemos establecer una "versión restringida" del teorema 4.4.

TEOREMA 4.5 Para una función V potencial C^1 de un campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla V$,

1. Si $V|_S$ tiene un extremo en $\mathbf{x}_0 \in S$, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto en equilibrio en S.
2. Si $V|_S$ tiene un mínimo local estricto en $\mathbf{x}_0 \in S$, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto en equilibrio estable.

Bosquejo de la demostración Para la parte 1, si $V|_S$ tiene un extremo en $\mathbf{x}_0$, entonces, de acuerdo con el teorema 3.1, tenemos que para algún escalar λ

$$\nabla V(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Entonces, como $\mathbf{F} = -\nabla V$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = -\lambda \nabla g(\mathbf{x}_0),$$

lo que implica que $\mathbf{F}$ es normal a S en $\mathbf{x}_0$. Así, no puede haber componente de $\mathbf{F}$ tangente a S en $\mathbf{x}_0$, es decir, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Como la partícula está restringida a permanecer en S, vemos que la partícula está en equilibrio en S.

La demostración de la parte 2 en esencia es la misma que la de la parte 2 del teorema 4.4. La modificación principal es que la fórmula de conservación de la energía en el teorema 4.2 debe establecerse nuevamente, ya que su obtención se basa en la fórmula (5), que ha sido reemplazada por la (7). En consecuencia, utilizando la

regla del producto y la de la cadena, verificamos que para $\mathbf{x}: I \to S$,

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + V(\mathbf{x}(t))\right] = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t) + V(\mathbf{x}(t))\right]$$
$$= m\mathbf{x}''(t)\cdot\mathbf{x}'(t) + \nabla V(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t).$$

Entonces, utilizando la fórmula (6) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + V(\mathbf{x}(t))\right] &= \mathbf{x}'(t)\cdot m\mathbf{x}''(t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= \mathbf{x}'(t)\cdot\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= \mathbf{x}'(t)\cdot\left[\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) - \text{proy}_{\nabla g(\mathbf{x}(t))}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\right]\\ &\quad - \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\\ &= -\mathbf{x}'(t)\cdot\text{proy}_{\nabla g(\mathbf{x}(t))}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\end{aligned}$$

después de la cancelación. Por lo tanto, concluimos que

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + V(\mathbf{x}(t))\right] = 0,$$

puesto que $\mathbf{x}'(t)$ es tangente a la trayectoria en S y, por lo tanto, tangente a S en sí en $\mathbf{x}(t)$, mientras que $\text{proy}_{\nabla g(\mathbf{x}(t))}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ es paralelo a $\nabla g(\mathbf{x}(t))$ y, en consecuencia, perpendicular a S en $\mathbf{x}(t)$. ■

EJEMPLO 3 Cerca de la superficie de la tierra el campo gravitacional es aproximadamente

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}.$$

(Suponemos que localmente la superficie de la tierra es representada por el plano $z = 0$). Advierta que $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde

$$V(x, y, z) = mgz.$$

Ahora suponga que una partícula de masa m está en una esfera pequeña con ecuación

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 2r)^2 = r^2.$$

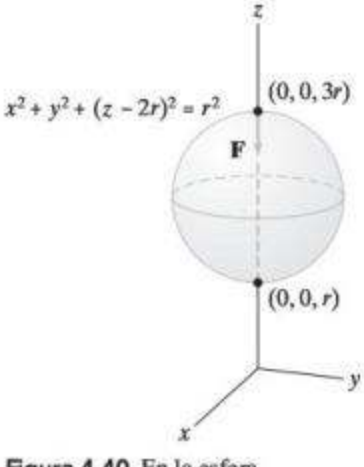


Figura 4.40 En la esfera $x^2 + y^2 + (z - 2r)^2 = r^2$, los puntos $(0, 0, r)$ y $(0, 0, 3r)$ son puntos de equilibrio para el campo de fuerza gravitacional $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$.

En esta situación podemos encontrar equilibrio restringido utilizando un multiplicador de Lagrange. La ecuación gradiente $\nabla V = \lambda\nabla h$, junto con la restricción, dan el sistema

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ mg = 2\lambda(z - 2r) \\ x^2 + y^2 + (z - 2r)^2 = r^2 \end{cases}$$

Como m y g son distintas de cero, λ no puede ser cero. Las dos primeras ecuaciones implican $x = y = 0$. Por lo tanto, la última ecuación se convierte en

$$(z - 2r)^2 = r^2,$$

lo que implica que

$$z = r, 3r$$

son las soluciones. En consecuencia, las posiciones de equilibrio son $(0, 0, r)$ y $(0, 0, 3r)$ (que corresponden a $\lambda = -mg/2r$ y a $+mg/2r$, respectivamente). A partir de consideraciones geométricas vemos que V se minimiza estrictamente en S en $(0, 0, r)$ y se maximiza en $(0, 0, 3r)$, como se aprecia en la figura 4.40. A partir de consideraciones

físicas se observa que $(0, 0, r)$ está en equilibrio estable y $(0, 0, 3r)$ en equilibrio inestable (trate de equilibrar una canica sobre una pelota). ◆

Aplicaciones a la economía

Presentamos dos ilustraciones de la manera en que ocurren los multiplicadores de Lagrange en problemas que involucran modelos económicos.

EJEMPLO 4 La utilidad de las cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de diferentes bienes de capital (respectivamente), $G_1, G_2, \ldots, G_n$ en ocasiones puede medirse con una función $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ llamada **utilidad** de esos bienes. Quizá los bienes sean componentes electrónicos individuales que se necesitan para manufacturar un equipo de sonido o computadora, o tal vez U mida la utilidad de un consumidor respecto de distintos artículos disponibles a diferentes precios. Si el artículo G_i cuesta a_i por unidad, y si M es la cantidad total de dinero asignada a la compra de estos n artículos, entonces el consumidor o la empresa necesitan maximizar $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeta a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = M.$$

Este es un problema de optimización restringida estándar que se resuelve fácilmente con el método de los multiplicadores de Lagrange.

Por ejemplo, suponga el lector que su empleo consiste en ordenar los suministros de papelería para una oficina. Se necesitan tres tipos de productos, a, b y c, que se ordenarán en las cantidades x, y y z, respectivamente. Lo necesario que resulta cada producto para la correcta operación de la oficina se modela muy bien por medio de la función de utilidad $U(x, y, z) = xy + xyz$. Si el producto a, el b y el c cuestan \$3, \$2 y \$1 por unidad, respectivamente, y el presupuesto permite un gasto total no mayor de \$899, ¿qué habría que hacer? La respuesta es evidente: lo que se necesita es maximizar

$$U(x, y, z) = xy + xyz \quad \text{sujeta a} \quad B(x, y, z) = 3x + 2y + z = 899.$$

La ecuación del multiplicador de Lagrange $\nabla U(x, y, z) = \lambda \nabla B(x, y, z)$ y la restricción del presupuesto generan el sistema

$$\begin{cases} y + yz = 3\lambda \\ x + xz = 2\lambda \\ xy = \lambda \\ 3x + 2y + z = 899 \end{cases}$$

Al resolver para λ en las primeras tres ecuaciones se obtiene

$$\lambda = y\left(\frac{z+1}{3}\right) = x\left(\frac{z+1}{2}\right) = xy.$$

La última desigualdad implica que $x = 0$ o que $y = (z + 1)/2$. Podemos rechazar la primera posibilidad, puesto que $U(0, y, z) = 0$, y la utilidad es $U(x, y, z) > 0$ siem-pre que x, y y z sean positivas. Así, nos quedamos con $y = (z + 1) / 2$. Esto a su vez implica que $\lambda = (z + 1)^2/6$. Cuando se sustituye para y en la ecuación de restricción se obtiene $x = (898 - 2z)/3$, por lo que la ecuación $xy = \lambda$ se convierte en

$$\left(\frac{898 - 2z}{3}\right)\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{(z+1)^2}{6},$$

que se satisface para $z = -1$ (lo que se rechaza) o cuando $z = 299$. El único punto crítico realista para este problema es $(100, 150, 299)$. Invitamos al lector a comprobar que este punto en verdad es la ubicación de un valor máximo de la utilidad. ◆

EJEMPLO 5 En 1928 C. W. Cobb y P. M. Douglas desarrollaron un modelo sencillo para el producto interno bruto Q de una empresa o país, denotado por la función

$$Q(K, L) = AK^a L^{1-a},$$

donde K representa la inversión de capital (en la forma de maquinaria u otros equipos), L es la cantidad de trabajo utilizado, y A y a son constantes positivas para las que $0 < a < 1$. (La función Q se conoce ahora como la **función de producción Cobb-Douglas**). Si usted fuera el presidente de una empresa o país, sería natural que deseara maximizar el producto, pero el equipo y el trabajo cuestan dinero y usted dispone de una cantidad total de M dólares para invertir. ¿Qué haría si el precio del capital fuera p dólares por unidad y el costo del trabajo (en forma de salarios) fuera w dólares por unidad, de modo que usted estuviera restringido por

$$B(K, L) = pK + wL \leq \mathrm{M},$$

De nuevo tenemos una situación perfecta para aplicar los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, antes de considerar las formalidades técnicas, consideremos una solución gráfica. Dibuje las curvas de nivel de Q, llamadas **isocuantas**, como se aprecia en la figura 4.41. Advierta que Q se incrementa cuando nos alejamos del origen en el primer cuadrante. La restricción del presupuesto significa que solo se pueden considerar valores de K y L que estén dentro del triángulo sombreado. Es evidente que la solución óptima ocurre en el punto (K, L) en que la curva de nivel es tangente a la recta de la restricción $pK + wL = M$.

La solución analítica es esta: a partir de la ecuación $\nabla Q(K, L) = \lambda \nabla B(K, L)$, más la restricción, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} Aa K^{a-1} L^{1-a} = \lambda p \\ A(1-a) K^a L^{-a} = \lambda w \\ pK + wL = M \end{cases}.$$

Se resuelven las dos primeras ecuaciones para p y w, y se obtiene

$$p = \frac{Aa}{\lambda} K^{a-1} L^{1-a} \quad \text{y} \quad w = \frac{A(1-a)}{\lambda} K^a L^{-a}.$$

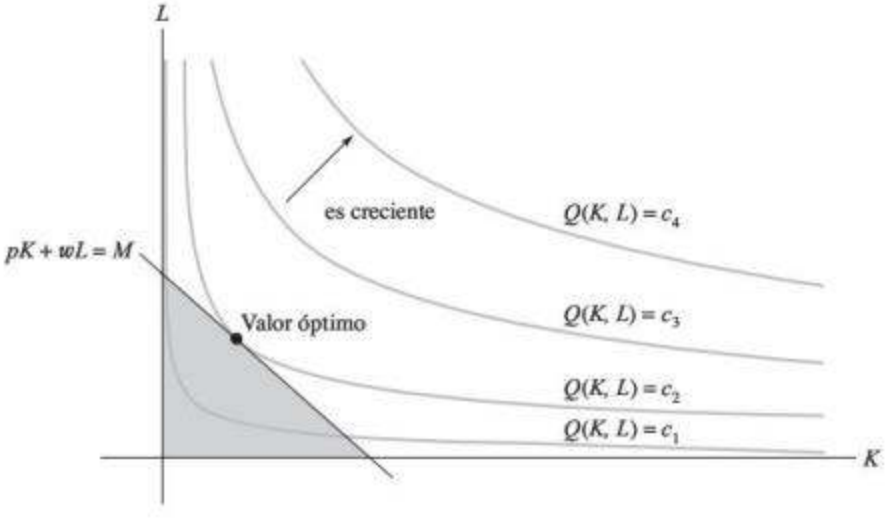


Figura 4.41 Familia de isocuantas. El valor óptimo de $Q(K, L)$ sujeto a la restricción $pK + wL = M$ ocurre donde una curva de la forma $Q = c$ es tangente a la recta de la restricción.

La sustitución de estos valores en la tercera ecuación da

$$\frac{Aa}{\lambda}K^aL^{1-a} + \frac{A(1-a)}{\lambda}K^aL^{1-a} = M.$$

Entonces,

$$\lambda = \frac{A}{M}K^aL^{1-a},$$

y el único punto crítico es

$$(K, L) = \left(\frac{Ma}{p}, \frac{M(1-a)}{w}\right).$$

A partir de este análisis geométrico sabemos que el punto crítico debe producir el máximo producto Q.

A partir de la ecuación de multiplicadores de Lagrange, en los valores óptimos de L y K, tenemos

$$\lambda = \frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{w}\frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Esta relación dice que, en los valores óptimos, el cambio marginal en el producto por dólar de beneficio de capital adicional es igual al cambio marginal por dólar de beneficio del trabajo adicional. En otras palabras, en los valores óptimos, intercambiar trabajo por capital (o viceversa) no cambiará el producto. Este de ninguna manera es el caso fuera de los valores óptimos.

No hay mucho de especial respecto a la función Q elegida. La mayoría de nuestras observaciones son válidas para cualquier función C^2 Q que satisfaga las condiciones

$$\frac{\partial Q}{\partial K}, \frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0.$$

Si se considera el significado cualitativo de estas relaciones para el comportamiento de la función de producción con respecto de los aumentos de capital y trabajo, verá que se trata de suposiciones por completo razonables.[4] ◆

4.4 Ejercicios

1. Encuentre la recta que se ajusta mejor a los siguientes datos: (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 2), (5, 7), (6, 7).

2. Demuestre que si solo se tienen dos datos puntuales (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces la recta de mejor ajuste que produce el método de mínimos cuadrados es, en realidad, la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

3. Suponga que se dan n pares de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) y se busca ajustar a ellos una función de la forma $y = a/x + b$.

a) Use el método de los mínimos cuadrados que se estudió en esta sección para construir una función $D(a, b)$ que dé la suma de los cuadrados de las distancias entre los valores de y observados en los datos y los pronosticados.

b) Demuestre que la curva de "mejor ajuste" de la forma $y = a/x + b$ debe tener

$$a = \frac{n\sum y_i/x_i - \left(\sum 1/x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum 1/x_i^2 - \left(\sum 1/x_i\right)^2}$$

y

$$b = \frac{\left(\sum 1/x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum 1/x_i\right)\left(\sum y_i/x_i\right)}{n\sum 1/x_i^2 - \left(\sum 1/x_i\right)^2}.$$

(Todas las sumas son de $i = 1$ a n).

[4] Para saber más sobre la historia y obtención de la función de Cobb-Douglas, consulte R. Geitz, "The Cobb-Douglas production function", *UMAP Module No. 509*, Birkhäuser, 1981.

4. Encuentre la curva de la forma $y = a/x + b$ que se ajuste mejor a los siguientes datos $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ y $(3, -\frac{1}{2})$. (Véase el ejercicio 3).

5. Suponga que tiene n pares de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) y desea que una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se ajuste a ellos. Demuestre que la parábola de "mejor ajuste" debe tener coeficientes a, b y c que satisfagan

$$\begin{cases} \left(\sum x_i^4\right)a + \left(\sum x_i^3\right)b + \left(\sum x_i^2\right)c = \sum x_i^2 y_i \\ \left(\sum x_i^3\right)a + \left(\sum x_i^2\right)b + \left(\sum x_i\right)c = \sum x_i y_i \\ \left(\sum x_i^2\right)a + \left(\sum x_i\right)b + nc = \sum y_i \end{cases}.$$

(Todas las sumatorias van de $i = 1$ a n).

6. (Nota: este ejercicio será más fácil si se emplea una hoja de cálculo o sistema de álgebra por computadora). Egbert registró el número de horas que dormía la noche antes de un examen de su licenciatura y las comparó con la calificación que obtenía, como se muestra en la tabla adjunta.

a) Encuentre la recta que se ajuste mejor a los datos.

b) Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que se ajuste mejor a los datos. (Véase el ejercicio 5).

c) La última noche Egbert durmió 6.8 horas. ¿Qué calificación pronostican las respuestas de los incisos *a*) y *b*) para la calificación que obtendrá en el examen final de cálculo que presentará hoy?

Horas de sueño	Calificación en el examen
8	85
8.5	72
9	95
7	68
4	52
8.5	75
7.5	90
6	65

7. Sea $\mathbf{F} = (-2x - 2y - 1)\mathbf{i} + (-2x - 6y - 2)\mathbf{j}$.

a) Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo y que tiene la función de potencial

$$V(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y$$

es decir, $\mathbf{F} = -\nabla V$).

b) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio de $\mathbf{F}$? ¿Y del equilibrio estable?

8. Suponga que una partícula se mueve en un campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^2$ con potencial físico

$$V(x, y) = 2x^2 - 8xy - y^2 + 12x - 8y + 12.$$

Encuentre todos los puntos de equilibrio de $\mathbf{F}$ e indique cuáles, si los hay, están en equilibrio estable.

9. Sea una partícula que se mueve en el campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^3$, cuyo potencial físico es dado por

$$V(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + z^2 - 2yz + 3x + 5y - 10.$$

Determine el equilibrio de $\mathbf{F}$ e identifique aquellos que son estables.

10. Suponga que una partícula de masa m está restringida a moverse en el elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ sujeta a una fuerza gravitacional $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, así como a un potencial adicional $V(x, y, z) = 2x$.

a) Encuentre los puntos de equilibrio en esta situación.

b) ¿Están en equilibrio estable?

11. Sukolux Vacuum Cleaner Company manufactura y vende tres tipos de aspiradoras de vacío: estándar, ejecutivo y de lujo. Los ingresos anuales, en dólares, como una función de los números x, y y z (respectivamente) de los modelos vendidos estándar, ejecutivo y de lujo, son:

$$R(x, y, z) = xyz^2 - 25{,}000x - 25{,}000y - 25{,}000z.$$

La planta de manufactura puede producir un total de 200,000 unidades anualmente. Suponiendo que todo lo que se fabrica se vende, ¿cómo debería distribuirse la producción entre los tres modelos a fin de maximizar los ingresos anuales?

12. Van a diseñarse algunos dispositivos electrónicos sencillos para incluir tres módulos de componentes digitales, tipos 1, 2 y 3, que se mantendrán en inventario en cantidades x_1, x_2 y x_3, respectivamente. Suponga que la importancia relativa de estos componentes para los diferentes dispositivos es modelada por la función de utilidad

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1x_2x_3.$$

El lector está autorizado a comprar \$90 de estas partes para construir dispositivos de prueba. Si el tipo 1 cuesta \$1 por componente, el tipo 2, \$4 por componente y el tipo 3, \$2 por componente, ¿cómo debería estar compuesta la orden de compra del lector?

13. Una granjera determinó la producción de maíz de su campo (en bushels) de acuerdo con la fórmula

$$B(x, y) = 4x^2 + y^2 + 600,$$

donde x denota la cantidad de agua (medida en cientos de galones) usada para regar el campo, y y es el número de libras de fertilizante que se aplica. El fertilizante cuesta \$10 por libra y el agua \$15 por cada 100 galones. Si puede asignar \$500 a la preparación del campo, con irrigación y fertilización, utilice un multiplicador de Lagrange para determinar cuánta agua y fertilizante debe comprar a fin de maximizar su producción.

14. Un fabricante de textiles planea producir una tela de casimir y algodón para hacer suéteres. La cantidad de tela que puede producirse es dada por

$$f(x, y) = 4xy - 2x - 8y + 3,$$

donde x denota el número de libras de casimir en bruto usado y y es el número de libras de algodón en bruto. El algodón cuesta \$2 por libra y el casimir \$8 por libra.

a) Si el fabricante puede gastar \$1000 en materias primas use un multiplicador de Lagrange para que lo asesore sobre cómo debe ajustar la razón de los materiales para producir la máxima cantidad de ropa.

b) Ahora suponga que el fabricante tiene un presupuesto de B dólares. ¿Cuál debe ser la razón de algodón a casimir (en términos de B)? ¿Cuál es el valor límite de esta razón cuando aumenta B?

15. El director general de Wild Widget Company decidió invertir \$360,000 en su fábrica de Michigan. Sus economistas observaron que la producción de esta fábrica estaba modelada por la función $Q(K, L) = 60K^{1/3}L^{2/3}$, donde K representa la cantidad (en miles de dólares) gastada en bienes de capital y L representa la cantidad (también en miles de dólares) gastada en mano de obra.

a) ¿Cómo debería el director general asignar los \$360,000 entre la mano de obra y los bienes de capital?

b) Compruebe que $\partial Q/\partial K = \partial Q/\partial L$ en los valores óptimos para K y L.

16. Sea $Q(K, L)$ una función de producción para una empresa, en donde K y L representan las cantidades respectivas gastadas en bienes de capital y mano de obra. Suponga que p denota el precio de los bienes de capital por unidad y w el costo de la mano de obra por unidad. Demuestre que, sujeto a una producción fija, $Q(K, L) = c$, el costo total M de la producción se minimiza cuando K y L son tales que:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{w}\frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 4

1. Si f es una función de clase C^2 y p_2 denota el polinomio de Taylor de segundo orden de f en $\mathbf{a}$, entonces $f(\mathbf{x}) \approx p_2(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \approx \mathbf{a}$.

2. El incremento Δf de una función $f(x, y)$ mide el cambio en la coordenada z del plano tangente a la gráfica de f.

3. La diferencial df de una función $f(x, y)$ mide el cambio en la coordenada z del plano tangente a la gráfica de f.

4. El polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x, y, z) = x^2 + 3xz + y^2$ en $(1, -1, 2)$ es $p_2(x, y, z) = x^2 + 3xz + y^2$.

5. El polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x, y) = x^3 + 2xy + y$ en $(0, 0)$ es $p_2(x, y) = 2xy + y$.

6. El polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x, y) = x^3 + 2xy + y$ en $(1, -1)$ es $p_2(x, y) = 2xy + y$.

7. Cerca del punto $(1, 3, 5)$ la función $f(x, y, z) = 3x^4 + 2y^3 + z^2$ es más sensible a los cambios en z.

8. La matriz hessiana $Hf(x_1, \ldots, x_n)$ de f tiene la propiedad de que $Hf(x_1, \ldots, x_n)^T = Hf(x_1, \ldots, x_n)$.

9. Si $\nabla f(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{0}$, entonces f tiene un extremo local en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

10. Si f es diferenciable y tiene un extremo local en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

11. El conjunto $\{(x, y, z) \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ es compacto.

12. El conjunto $\{(x, y) \mid 2x - 3y = 1\}$ es compacto.

13. Cualquier función continua $f(x, y)$ debe tener un máximo global en el disco $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

14. Cualquier función continua $f(x, y, z)$ debe tener un máximo global en la esfera $\{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 \leq 4\}$.

15. Si $f(x, y)$ es de clase C^2, tiene un punto crítico en (a, b) y $f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 < 0$, entonces f tiene un punto silla en (a, b).

16. Si $\det Hf(\mathbf{a}) = 0$, entonces f tiene un punto silla en $\mathbf{a}$.

17. La función $f(x, y, z) = x^3y^2z - x^2(y + z)$ tiene un punto silla en $(1, -1, 2)$.

18. La función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz$ tiene un máximo local en $(0, 0, 0)$.

19. La función $f(x, y, z) = xy^3 - x^2z + z$ tiene un punto crítico degenerado en $(-1, 0, 0)$.

20. La función $F(x_1, \ldots, x_n) = 2(x_1 - 1)^2 - 3(x_2 - 2)^2 + \cdots + (-1)^{n+1}(n + 1)(x_n - n)^2$ tiene un punto crítico en $(1, 2, \ldots, n)$.

21. La función $F(x_1, \ldots, x_n) = 2(x_1 - 1)^2 - 3(x_2 - 2)^2 + \cdots + (-1)^{n+1}(n + 1)(x_n - n)^2$ tiene un mínimo en $(1, 2, \ldots, n)$.

22. Todos los extremos locales de una función de más de una variable ocurren donde todas las derivadas parciales desaparecen simultáneamente.

23. Todos los puntos $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_2)$ donde la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene un extremo sujeto a la restricción de que $g(x_1, \ldots, x_n) = c$ son soluciones del sistema de

ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ g(x_1, \ldots, x_n) = c \end{cases}$$

24. Cualquier solución $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, x_1, \ldots, x_n)$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ \quad \vdots \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_k \end{cases}$$

genera un punto $(x_1, \ldots, x_n)$ que es un valor extremo de f sujeto a las restricciones simultáneas $g_1 = c_1, \ldots, g_k = c_k$.

25. Para encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y, z, w)$ sujeta a las restricciones simultáneas $g(x, y, z, w) = c$, $h(x, y, z, w) = d$, $k(x, y, z, w) = e$ utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, se tendría que resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

26. Suponga que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son de clase C^1, y que (x_0, y_0, z_0) es un punto en que que f tiene un valor máximo sujeto a la restricción de que $g(x, y, z) = c$ y que $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ es distinto de cero. Entonces el conjunto de nivel de f que contiene a (x_0, y_0, z_0) debe ser tangente al conjunto de nivel $S = \{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = c\}$.

27. Los puntos críticos de $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sujeta a la restricción de que $xyz = 4$ son los mismos que los puntos críticos de la función $F(x, y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$.

28. Dados los datos (3, 1), (4, 10), (5, 8), (6, 12), para encontrar la recta de mejor ajuste mediante regresión se encuentra el valor mínimo de la función $D(m, b) = (3m + b - 1)^2 + (4m + b - 10)^2 + (5m + b - 8)^2 + (6m + b - 12)^2$.

29. Todos los puntos de equilibrio de un campo vectorial gradiente son puntos mínimos de la función de potencial del campo vectorial.

30. Dada una función de producción de una empresa, el cambio marginal en el producto por dólar de inversión en capital es el mismo que el cambio marginal en el producto por dólar de inversión en mano de obra.

Ejercicios varios para el capítulo 4

1. Sea $V = \pi r^2 h$, donde $r \approx r_0$ y $h \approx h_0$. ¿Qué relación debe cumplirse entre r_0 y h_0 para que V sea igual de sensible a pequeños cambios en r y h?

2. *a*) Encuentre el único punto crítico de la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}.$$

b) Use el criterio del hessiano para determinar la naturaleza de este punto crítico.

3. Java Joint Gourmet Coffee House vende café supremo Moka Árabe y Kona Hawaiano. Si el Moka se vende a x dólares por libra y el Kona a y dólares por libra, entonces un estudio de mercado detectó que cada semana se venderían aproximadamente $80 - 100x + 40y$ libras de Moka y $20 + 60x - 35y$ libras de Kona. El costo al mayoreo para los propietarios de Java Joint es de \$2 por libra por el Moka y \$4 por libra para el Kona. ¿En cuánto deberían los dueños vender el café para maximizar sus utilidades?

4. Crispy Crunchy Cereal Company produce tres marcas de cereal para el desayuno, X, Y y Z. Cada mes se venden (respectivamente) x, y y z cajas de 1000 paquetes de las marcas X, Y y Z a los precios siguientes (por paquete):

Marca	Número de cajas vendidas	Precio de venta por paquete
X	x	$4.00 - 0.02x$
Y	y	$4.50 - 0.05y$
Z	z	$5.00 - 0.10z$

a) ¿Cuál es el ingreso total R si se venden x cajas de la marca X, y cajas de la marca Y y z cajas de la marca Z?

b) Suponga que durante el mes de noviembre la marca X se vende a \$3.88 por paquete, la marca Y a \$4.25 y la marca Z a \$4.60. Si el precio de cada marca se incrementa \$0.10, ¿qué efecto tendrá esto en el ingreso total?

c) ¿Cuáles precios de venta maximizarán el ingreso total?

5. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

$$f(x, y, z) = x - \sqrt{3}\, y$$

sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en dos formas:

a) Utilizando un multiplicador de Lagrange;

b) Sustituyendo coordenadas esféricas, es decir, describiendo el punto (x, y, z) sobre la esfera cuando $x = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $z = 2 \cos \varphi$) para luego encontrar los extremos ordinarios, es decir, no restringidos, de $f(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$.

6. Suponga que la temperatura en un espacio es dada por la función

$$T(x, y, z) = 200xyz^2.$$

Encuentre los puntos más calientes en la esfera unitaria en dos formas:

a) Utilizando multiplicadores de Lagrange;

b) Con $x = \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $z = \cos \varphi$ y maximizando T como una función de las dos variables independientes φ y θ. (Nota: quizá le sirva de ayuda usar identidades trigonométricas adecuadas donde sea posible).

7. Considere la función $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$.

a) Demuestre que f tiene un solo punto crítico en el origen.

b) Demuestre que dicho punto crítico es *degenerado*. Entonces, requerirá otros medios distintos del hessiano para determinar la naturaleza del punto crítico como un extremo local.

c) Demuestre que cuando se restringe a cualquier recta que pasa por el origen, f tiene un mínimo en $(0, 0)$. Es decir, considere la función $F(x) = f(x, mx)$, donde m es una constante y la función $G(y) = f(0, y)$.

d) Sin embargo, demuestre que cuando se restringe a la parábola $y = \frac{3}{2}x^2$, la función f tiene un máximo global en $(0, 0)$. Así, el origen debe ser un punto silla.

e) Use una computadora para graficar la superficie $z = f(x, y)$.

8. *a*) Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y) = xy$ que satisfagan $x^2 + y^2 = 1$.

b) Dibuje un conjunto de curvas de nivel de f y, en los mismos ejes coordenados, la curva de restricción $x^2 + y^2 = 1$, y los puntos críticos que haya encontrado en el inciso *a*).

c) Utilice la gráfica obtenida en el inciso *b*) y un argumento geométrico para determinar la naturaleza de los puntos críticos encontrados en el inciso *a*).

9. *a*) Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = xy$ que satisfagan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Elabore un dibujo aproximado de una colección de superficies de nivel de f y, con los mismos ejes coordenados, la superficie de restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y los puntos críticos encontrados en el inciso *a*).

c) Use el inciso *b*) y un argumento geométrico para determinar la naturaleza de los puntos críticos encontrados en el inciso *a*).

10. Encuentre el área A del rectángulo más grande de modo que dos cuadrados con área total igual a 1 se puedan colocar juntos dentro del rectángulo sin traslaparse, excepto por sus aristas (véase la figura 4.42).

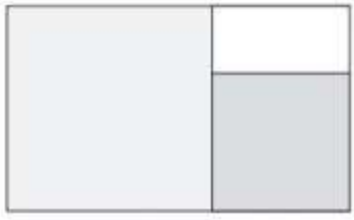


Figura 4.42 Figura para el ejercicio 10.

11. Encuentre el valor mínimo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

sujeto a la restricción de que $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$, suponiendo que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$.

12. Encuentre el valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2,$$

sujeto a $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Suponga que no todas las a_i son cero.

13. Encuentre las dimensiones de la caja rectangular más grande que pueda inscribirse en el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 12$. Suponga que las caras de la caja son paralelas a los planos coordenados.

14. Su empresa debe diseñar un tanque de almacenamiento para el detergente líquido de lavandería Super Suds. Las especificaciones del cliente piden un tanque cilíndrico con extremos hemisféricos (véase la figura 4.43) y el tanque va a contener 8000 galones de detergente. Suponga que fabricar los extremos hemisféricos del tanque cuesta lo doble (por pie cuadrado de lámina metálica usada) que fabricar la parte cilíndrica. ¿Qué radio y altura recomienda usted para la parte cilíndrica de modo que se minimice el costo *total* de manufactura del tanque?

Figura 4.43 Tanque de almacenamiento del ejercicio 14.

15. Encuentre la distancia mínima del origen a la superficie $x^2 - (y - z)^2 = 1$.

16. Determine las dimensiones del cono más grande que puede inscribirse en una esfera de radio a.

17. Encuentre las dimensiones de la caja rectangular más grande (cuyas caras sean paralelas a los planos coordenados) que pueda inscribirse en el tetraedro que

tiene tres de sus caras en los planos coordenados y la cuarta en el plano cuya ecuación es $bcx + acy + abz = abc$, donde a, b y c son constantes positivas. (Véase la figura 4.44).

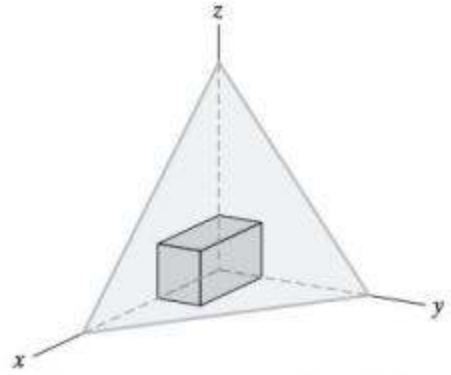


Figura 4.44 Figura para el ejercicio 17.

18. Usted quiere enviarle a un amigo un cartel como regalo. Lo enrolla y coloca en un tubo cilíndrico de diámetro x y longitud y. Las regulaciones postales piden que la suma de la longitud del tubo más su contorno, es decir, la circunferencia del tubo, mida como máximo 108 pulgadas.

a) Use el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del tubo de volumen más grande que puede enviar.

b) Utilice técnicas del cálculo con una variable para resolver este problema de otra manera.

19. Encuentre la distancia entre la recta $y = 2x + 2$ y la parábola $x = y^2$ minimizando la distancia entre un punto (x_1, y_1) sobre la recta y un punto (x_2, y_2) sobre la parábola. Haga un dibujo que indique que encontró el valor mínimo.

20. Un rayo de luz viaja a velocidad constante en un medio uniforme, pero en medios diferentes (como el aire y el agua) la luz viaja a diferentes velocidades. Por ejemplo, si un rayo de luz pasa del aire al agua, se curva (o **refracta**) como se ilustra en la figura 4.45. Suponga que la velocidad de la luz en el medio 1 es v_1 y en el medio 2 es v_2. Entonces, de acuerdo con el principio del tiempo mínimo de Fermat, la luz tocará la frontera entre el medio 1 y el medio 2 en un punto P tal que se minimice el tiempo total de su viaje.

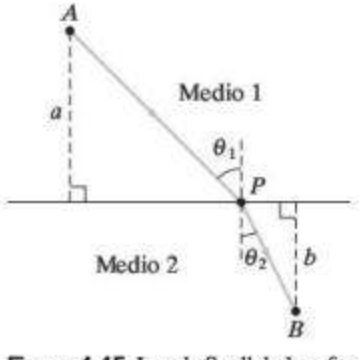


Figura 4.45 Ley de Snell de la refracción.

a) Determine el tiempo total que viaja la luz para ir del punto A al B por el punto P, como se muestra en la figura 4.45.

b) Use el método de los multiplicadores de Lagrange para establecer la **ley de Snell de la refracción**: que el tiempo total de recorrido se minimiza cuando

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

(Sugerencia: las separaciones horizontal y vertical de A y B son constantes).

21. Use multiplicadores de Lagrange para establecer la fórmula

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

para la distancia D del punto (x_0, y_0) a la recta $ax + by = d$.

22. Use multiplicadores de Lagrange para establecer la fórmula

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

para la distancia D del punto (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz = d$.

23. *a*) Demuestre que el valor máximo de $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ sujeta a la restricción de que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ es

$$\frac{a^6}{27} = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3.$$

b) Use el inciso *a*) para demostrar que para toda x, y y z,

$$(x^2y^2z^2)^{1/3} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}.$$

c) Demuestre que para cualesquiera números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

La cantidad en el lado derecho de la desigualdad es la **media aritmética** de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y la cantidad en el lado izquierdo se denomina **media geométrica**. La desigualdad en sí recibe el apropiado nombre de **desigualdad aritmética-geométrica**.

d) ¿En qué condiciones se cumplirá la igualdad en la desigualdad aritmética-geométrica?

En los ejercicios 24 a 27 el lector explorará la manera en que algunas ideas del álgebra de matrices y la técnica de los multiplicadores de Lagrange interactúan para abordar el problema de encontrar los puntos en la hiperesfera unitaria

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

que da valores extremos de la forma cuadrática

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

donde las a_{ij} son constantes.

24. *a*) Use un multiplicador de Lagrange λ para plantear un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n, \lambda$, cuyas soluciones den los puntos críticos restringidos apropiados.

b) Recuerde que la fórmula (2) de la sección 4.2 demuestra que la forma cuadrática f puede escribirse en términos de matrices como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \qquad (1)$$

donde el vector $\mathbf{x}$ se escribe como la matriz de orden $n \times 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y A es la matriz de orden $n \times n$ cuyo ij-ésimo elemento es a_{ij}. Además, como se dijo en el análisis de la sección 4.2, la matriz A puede tomarse como simétrica, es decir, de modo que $A^T = A$, y por ello supondremos, por lo tanto, que A es simétrica. Demuestre que la ecuación del gradiente $\nabla f = \lambda \nabla g$ es equivalente a la ecuación matricial

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \qquad (2)$$

Debido a que el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ satisface la restricción $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, el vector $\mathbf{x}$ es distinto de cero. Si el lector ha estudiado algo de álgebra lineal reconocerá que ha demostrado que un punto crítico restringido $(x_1, \ldots, x_n)$ para este problema corresponde precisamente a un **eigenvector** de la matriz A asociado con el **eigenvalor** λ.

c) Ahora suponga que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es uno de los eigenvectores de la matriz simétrica A, con eigenvalor λ asociado. Use las ecuaciones (1) y (2) para demostrar que si $\mathbf{x}$ es un vector unitario, entonces

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda.$$

En consecuencia, el valor mínimo (absoluto) que f adopta en la hiperesfera unitaria debe ser el eigenvalor más pequeño de A y el valor máximo (absoluto) debe ser el eigenvalor más grande.

25. Sea $n = 2$ en la situación del ejercicio 24, por lo que estamos considerando el problema de encontrar puntos en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ que den valores extremos de la función

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

a) Encuentre los eigenvalores de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ por identificación de los puntos críticos restringidos del problema de optimización descrito arriba.

b) Ahora use algo de álgebra para demostrar que los eigenvalores que halló en el inciso *a*) deben ser reales. Es un hecho (el cual el lector no necesita demostrar) que cualquier matriz simétrica de $n \times n$ siempre tiene eigenvalores reales.

26. En el ejercicio 25 notó que los eigenvalores λ_1, λ_2 que obtuvo son reales.

a) ¿En qué condiciones $\lambda_1 = \lambda_2$?

b) Suponga que λ_1 y λ_2 son positivos. Explique por qué f debe ser positiva en todos los puntos del círculo unitario.

c) Suponga que λ_1 y λ_2 son negativos. Explique por qué f debe ser negativa en todos los puntos del círculo unitario.

27. Sea f una forma cuadrática general en n variables determinadas por una matriz simétrica A de orden $n \times n$, es decir, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

a) Demuestre, para cualquier número real k, que $f(kx_1, \ldots, kx_n) = k^2 f(x_1, \ldots, x_n)$. (Esto significa que una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 2 —consulte los ejercicios 37 a 44 de los ejercicios varios del capítulo 2 para saber más sobre funciones homogéneas).

b) Use el inciso a) para demostrar que si f tiene un mínimo positivo en la hiperesfera unitaria, entonces f debe ser positiva para *todo* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y que si f tiene un máximo negativo en la hiperesfera unitaria, entonces f debe ser negativa para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ distinto de cero. (Sugerencia: para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, sea $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, por lo que $\mathbf{x} = k\mathbf{u}$, donde $k = \|\mathbf{x}\|$).

c) Recuerde de la sección 4.2, que se dice que una forma cuadrática f es **positivamente definida** si $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ distinto de cero, y es **negativamente definida** si $f(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ distinto de cero. Use el inciso *b*) y el ejercicio 24 para demostrar que la forma cuadrática f es positivamente definida si y solo si todos los eigenvalores de A son positivos, y negativamente definida si y solo si todos los eigenvalores de A son negativos. (Nota: como se dijo en el inciso *b*) del ejercicio 25, todos los eigenvalores de A son reales).

5 Integración múltiple

5.1 Introducción. Áreas y volúmenes

5.2 Integrales dobles

5.3 Cambio del orden de integración

5.4 Integrales triples

5.5 Cambio de variables

5.6 Aplicaciones de la integración

5.7 Aproximaciones numéricas de las integrales múltiples (opcional)

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 5

Ejercicios varios para el capítulo 5

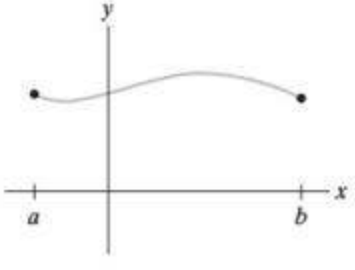


Figura 5.1 Gráfica de $y = f(x)$.

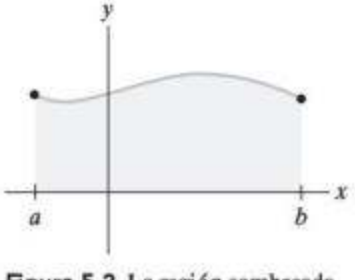


Figura 5.2 La región sombreada tiene un área de $\int_a^b f(x)\,dx$.

5.1 Introducción. Áreas y volúmenes

Nuestro propósito en este capítulo es encontrar formas de generalizar el concepto de integral definida de una función de una variable a los casos de funciones de dos o tres variables. También exploraremos cómo se utilizan estas integrales múltiples para representar varias cantidades físicas de manera que tengan algún significado.

Establezca f como una función continua de una variable definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y suponga que f solo tiene valores no negativos. Entonces, la gráfica de f tendrá el aspecto que se ilustra en la figura 5.1. Que f es continua se confirma con el hecho de que la gráfica consta de una curva ininterrumpida. Que f solo adopta valores no negativos significa que la curva no cae por debajo del eje x. Sabemos del cálculo de una variable que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y representa el área bajo la curva, como se muestra en la figura 5.2.

Ahora suponga el lector que f es una función continua de dos variables no negativa definida en el **rectángulo cerrado**

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

en $\mathbf{R}^2$. Entonces la gráfica de f sobre R semeja una superficie continua que nunca pasa abajo del plano xy, como se aprecia en la figura 5.3. Como en el caso de una variable, debe haber alguna clase de integral que represente al **volumen** bajo la parte de la gráfica que se encuentra en R (véase la figura 5.4). Podemos encontrar dicha integral utilizando el **principio de Cavalieri**, que no es otra cosa que un término elegante para referirse al método de hacer rebanadas. Suponga que rebanamos por el plano vertical $x = x_0$, donde x_0 es una constante entre a y b. Sea que $A(x_0)$, denote el área de la sección transversal de esa rebanada. Entonces, en forma aproximada, puede pensarse que la cantidad $A(x_0)\,dx$ da el volumen de una rebanada "infinitamente delgada" de espesor dx y área de sección transversal $A(x_0)$ (véase la figura 5.5). Por consiguiente, la integral definida

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

da una "suma" de los volúmenes de dichas rebanadas y puede considerarse que proporciona una definición razonable del volumen total del sólido.

Pero, ¿qué pasa con el valor de $A(x_0)$? Advierta que $A(x_0)$ no es otra cosa que el área bajo la curva $z = f(x_0, y)$ obtenida al rebanar la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$. Por lo tanto,

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\,dy$$

Figura 5.3 Gráfica de $z = f(x, y)$.

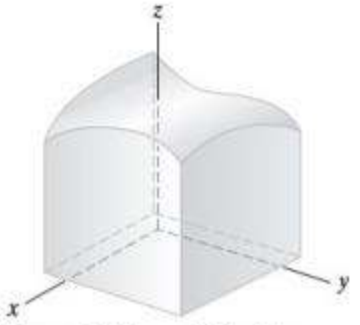


Figura 5.4 La región bajo la parte de la gráfica de f que se encuentra en R tiene un volumen dado por una integral.

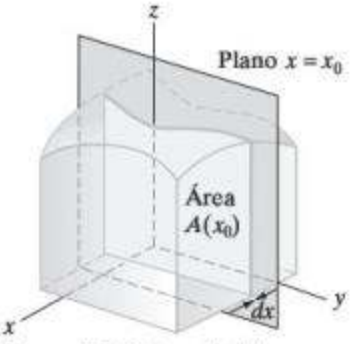


Figura 5.5 Rebanada del "volumen" $dV = A(x_0)\,dx$.

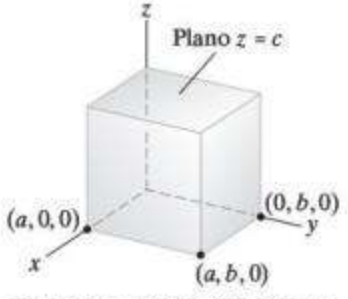


Figura 5.6 Cálculo del volumen de la caja del ejemplo 1.

(recuerde que x_0 es una constante) y así encontramos que

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{1}$$

El lado derecho de la fórmula (1) se llama **integral iterada**. Para calcularla primero se encuentra una "antiderivada" de $f(x, y)$ con respecto de y (tratando a x como una constante), después se evalúa con los límites de integración $y = c$ y $y = d$, y luego se repite el proceso con respecto de x.

EJEMPLO 1 Asegurémonos de que la integral iterada definida en la fórmula (1) da la respuesta correcta en un caso bien conocido, que es el de una caja. La caja es como la que aparece en la figura 5.6. Es decir, por arriba y por abajo está limitada por los planos $z = c$ (donde $c > 0$) y $z = 0$, por la izquierda y la derecha está limitada por los planos $y = 0$ y $y = b$ (donde $b > 0$), y por delante y por detrás por los planos $x = 0$ y $x = a$ (con $a > 0$). Por consiguiente, el volumen de la caja se puede encontrar calculando el volumen bajo la gráfica de $z = c$ sobre el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}.$$

Utilizando la fórmula 1 obtenemos

$$V = \int_0^a \int_0^b c\,dy\,dx = \int_0^a \left(cy\big|_{y=0}^{y=b}\right) dx = \int_0^a cb\,dx = cbx\big|_{x=0}^{x=a} = cba.$$

Este resultado coincide, como debería ser, con el volumen que ya sabíamos resultaría. ◆

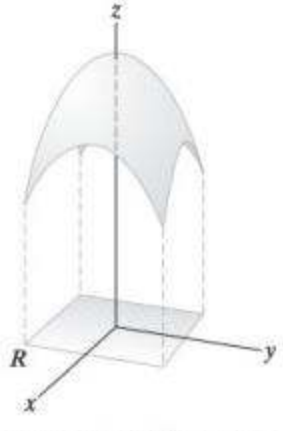


Figura 5.7 Gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$ del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Calculemos el volumen bajo la gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$ (véase la figura 5.7) por arriba del cuadrado

$$R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

Volvemos a usar la fórmula 1 y calculamos el volumen empezando por integrar con respecto de y, es decir, tratando a x como una constante en la integral interior, y

después integrando con respecto de x. Los detalles son los siguientes:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(4 - x^2 - y^2)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left(4y - x^2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\left(4 - x^2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 + x^2 + \frac{1}{3}\right)\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(8 - 2x^2 - \frac{2}{3}\right)dx$$

$$= \left(\frac{22}{3}x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{22}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{22}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{40}{3}. \quad \blacklozenge$$

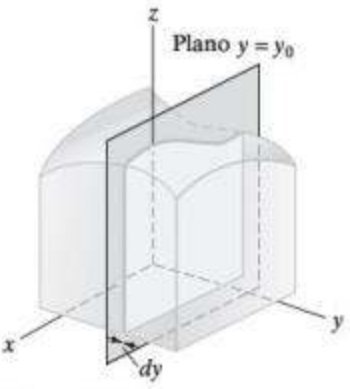


Figura 5.8 Primero se cortan rebanadas mediante $y = y_0$.

Cuando desarrollamos la fórmula (1) también hubiéramos podido comenzar por rebanar el sólido con el plano $y = y_0$ (en lugar de con el plano $x = x_0$), como se ilustra en la figura 5.8. Entonces, en lugar de la fórmula (1) habría resultado la fórmula

$$V = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

Como las dos integrales iteradas de las fórmulas (1) y (2) representan el volumen del mismo objeto geométrico, el análisis anterior se resume como sigue.

PROPOSICIÓN 1.1 Sea R el rectángulo $\{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$, y sea f continua y no negativa en R. Entonces el volumen V bajo la gráfica de f sobre R es

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx\,dy.$$

EJEMPLO 3 Encontramos el volumen bajo la gráfica de $z = \cos x \operatorname{sen} y$ sobre el rectángulo

$$R = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}.$$

(Véase la figura 5.9). A partir de la fórmula (1) calculamos que el volumen es

$$V = \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/4} \cos x \operatorname{sen} y\,dy\,dx = \int_{0}^{\pi/2} (-\cos x \cos y)\Big|_{y=0}^{y=\pi/4} dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - (-\cos x)\right)dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}(1 - 0) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Figura 5.9 La superficie $z = \cos x \operatorname{sen} y$ del ejemplo 3.

Si usamos la fórmula (2) en lugar de la (1), obtenemos lo siguiente

$$V = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} dy$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} y - 0) \, dy = -\cos y \Big|_0^{\pi/4}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Dada la proposición 1.1 no es de sorprender que este resultado coincida con el primer cálculo realizado. ◆

5.1 Ejercicios

Evalúe las integrales iteradas que se dan en los ejercicios 1 a 6.

1. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^3 (x^2 + y) \, dy \, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_1^2 y \operatorname{sen} x \, dy \, dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^4 \int_0^1 x e^y \, dy \, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 e^x \cos y \, dx \, dy$
5. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 (e^{x+y} + x^2 + \ln y) \, dx \, dy$
6. $\displaystyle\int_1^9 \int_1^e \frac{\ln \sqrt{x}}{xy} \, dx \, dy$
7. Encuentre el volumen de la región que está bajo la gráfica del paraboloide $z = x^2 + y^2 + 2$ y sobre el rectángulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ de dos modos:
   a) utilizando el principio de Cavalieri para escribir el volumen como una integral iterada que resulta de rebanar la región mediante planos paralelos de la forma $x =$ constante;
   b) empleando el principio de Cavalieri para escribir el volumen como una integral iterada que surge de rebanar la región mediante planos paralelos que tengan la forma $y =$ constante.
8. Calcule el volumen de la región que tiene la parte superior acotada por el plano $z = x + 3y + 1$, la parte inferior por el plano xy y los lados por los planos $x = 0, x = 3, y = 1$ y $y = 2$.
9. Determine el volumen de la región acotada por la gráfica de $f(x, y) = 2x^2 + y^4 \operatorname{sen} \pi x$, el plano xy y los planos $x = 0, x = 1, y = -1, y = 2$.

En los ejercicios 10 a 15 calcule las integrales iteradas que se plantean e indique la región en $\mathbf{R}^3$ *cuyo volumen se podría considerar que representan.*

10. $\int_0^2 \int_1^3 2\,dx\,dy$

11. $\int_1^3 \int_{-2}^2 (16 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

12. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos y\,dx\,dy$

13. $\int_0^5 \int_{-2}^2 (4 - x^2)\,dx\,dy$

14. $\int_{-2}^3 \int_0^1 |x| \operatorname{sen} \pi y\,dy\,dx$

15. $\int_{-5}^5 \int_{-1}^2 (5 - |y|)\,dx\,dy$

16. Suponga que f es una función continua de variable no negativa, definida en $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Si $f(x, y) \leq M$ para algún número positivo M, explique por qué el volumen V bajo la gráfica de f sobre R se maximiza en $M(b - a)(d - c)$.

5.2 Integrales dobles

En la sección anterior vimos cómo obtener los volúmenes de ciertos sólidos utilizando integrales iteradas. La mayoría de las ideas eran fáciles, pero la situación era muy específica: solo resolvimos el problema de calcular volúmenes de un sólido definido como la región bajo la gráfica de una función $f(x, y)$ continua, de variable no negativa y sobre un rectángulo en el plano xy. La forma en que se podría determinar el volumen de un sólido más general a partir de lo que hemos visto no salta a la vista de inmediato.

Por lo anterior, en esta sección definimos un concepto más general de la integral de una función de dos variables que nos permitirá describir

1. integrales de funciones arbitrarias, es decir, funciones que no necesariamente son no negativas o continuas, y
2. integrales sobre regiones arbitrarias en el plano, es decir, en lugar de solo integrales sobre rectángulos.

Primero nos centraremos en el caso 1. Para ello comenzamos por establecer con precisión algunas definiciones y notación. Las ideas involucradas en las definiciones 2.1 a 2.3 difieren de las que se expusieron en la sección anterior. Sin embargo, veremos que hay una conexión clave (el **teorema de Fubini**) entre el concepto de **integral iterada** estudiado en la sección 5.1 y el de **integral doble**, el cual se describirá en la definición 2.3.

La integral sobre un rectángulo

Un rectángulo (cerrado)

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

también se denota con $[a, b] \times [c, d]$. Esta notación pretende ser análoga a la que se utiliza para un intervalo cerrado.

DEFINICIÓN 2.1 Dado un rectángulo cerrado $R = [a, b] \times [c, d]$, una **partición de R de orden n** consta de dos colecciones de **puntos en la partición** que dividen R en una unión de n^2 subrectángulos. Con más precisión, para $i, j = 0, \ldots, n$ introducimos las colecciones $\{x_i\}$ y $\{y_j\}$, de manera que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

y

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots < y_n = d.$$

Sean $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (para $i = 1, \ldots, n$) y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ (para $j = 1, \ldots, n$). Advierta que Δx_i y Δy_j solo son el ancho y la altura (respectivamente) del ij-ésimo rectángulo (leídos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba) de la partición.

En la figura 5.10 se presenta un ejemplo de rectángulo con partición. No suponemos que la partición sea **regular**, es decir, no damos por hecho que todos los subrectángulos tienen las mismas dimensiones.

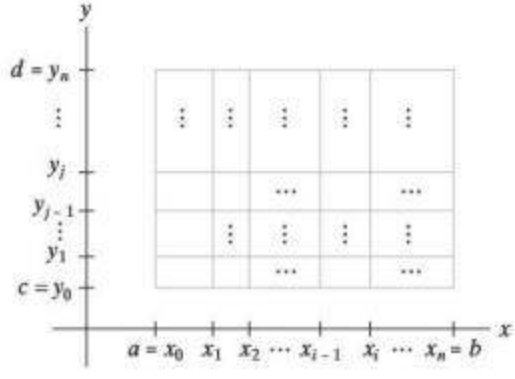


Figura 5.10 Partición del rectángulo $[a, b] \times [c, d]$.

DEFINICIÓN 2.2 Suponga que f es cualquier función definida en $R = [a, b] \times [c, d]$ y cierta partición R. Sea $\mathbf{c}_{ij}$ cualquier punto en el subrectángulo

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \ (i, j = 1, \ldots, n).$$

Entonces la cantidad

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ij}) \Delta A_{ij},$$

donde $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ es el área de R_{ij} se llama **suma de Riemann** de f sobre la R que corresponde a la partición.

La suma de Riemann

$$S = \sum_{i,j} f(\mathbf{c}_{ij}) \, \Delta A_{ij}$$

depende de la función f, de la elección de la partición y de la elección del "punto de prueba" $\mathbf{c}_{ij}$ en cada subrectángulo R_{ij} de la partición. La suma de Riemann en sí solo es una *suma ponderada de áreas* ΔA_{ij} de subrectángulos del rectángulo original R y la ponderación es dada por el valor $f(\mathbf{c}_{ij})$.

Si ocurre que f es no negativa sobre R, entonces, para $i, j = 1, \ldots, n$, los términos individuales $f(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij}$ en S pueden considerarse los volúmenes de cajas que tienen

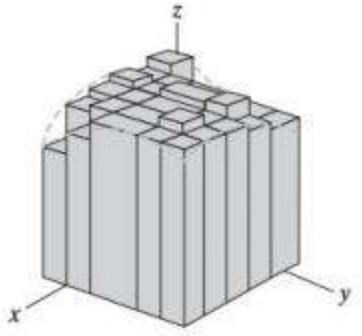


Figura 5.11 El volumen bajo la gráfica de f se aproxima mediante la suma de Riemann.

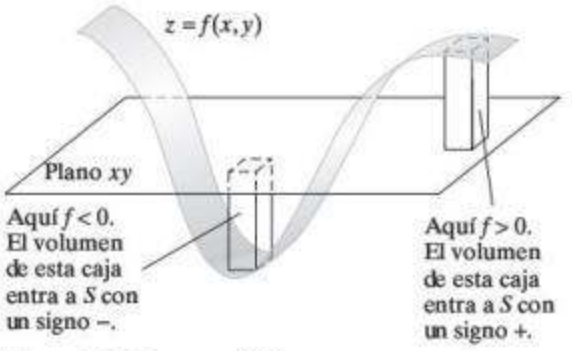


Figura 5.12 La suma de Riemann como una suma con signo de los volúmenes de las cajas.

una superficie $\Delta x_i \Delta y_j$ en su base y una altura $f(\mathbf{c}_{ij})$. Por lo tanto, se puede considerar que S es una aproximación al volumen bajo la gráfica de f sobre R, como lo sugiere la figura 5.11. Si f no necesariamente es negativa, entonces la suma de Riemann S es una suma *con signo* de dichos volúmenes, puesto que con $f(\mathbf{c}_{ij}) < 0$, el término $f(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij}$ es el negativo del volumen de la caja apropiada, véase la figura 5.12.

DEFINICIÓN 2.3 La **integral doble** de f sobre R, que se denota con $\iint_R f\,dA$ (o con $\iint_R f(x, y)\,dA$, o bien, con $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$), es el límite de la suma de Riemann, S, cuando todas las dimensiones Δx_i y Δy_j de los subrectángulos R_{ij} tienden a cero, es decir, cuando

$$\iint_R f\,dA = \lim_{\text{todo } \Delta x_i, \Delta y_j \to 0} \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

por supuesto, siempre que ese límite exista. Cuando existe $\iint_R f\,dA$, vemos que f es **integrable** sobre R.

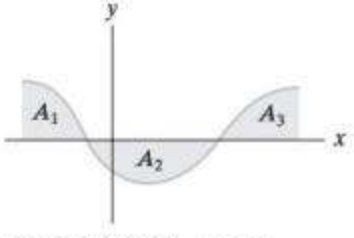


Figura 5.13 Si A_1, A_2 y A_3 representan los valores de las áreas sombreadas, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$.

La idea crucial a recordar, de hecho la idea que la define, es que la integral $\iint_R f\,dA$ es un límite de sumas de Riemann S, ya que este concepto es el que se necesita para aplicar de manera apropiada las integrales dobles a situaciones físicas.

Desde un punto de vista geométrico, así como una integral definida de una sola variable $\int_a^b f(x)\,dx$ puede usarse para calcular el "área neta" bajo la gráfica de una curva $y = f(x)$ (como se aprecia en la figura 5.13), la integral doble $\iint_R f\,dA$ se puede emplear para obtener el "volumen neto" bajo la gráfica de $z = f(x, y)$ (como en la figura 5.14).

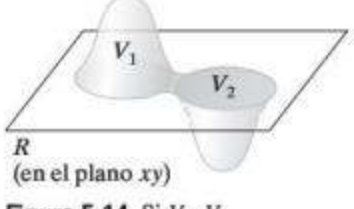


Figura 5.14 Si V_1, V_2 representan los volúmenes de las regiones sombreadas, entonces $\iint_R f(x, y)\,dA = V_1 - V_2$.

Otra forma de ver la integral doble $\iint_R f\,dA$ es algo menos geométrica, pero tiene más que ver con el concepto de la integral que el límite de sumas de Riemann y da una perspectiva que se generaliza a integrales triples de funciones de tres variables. En vez de concebir la gráfica de $z = f(x, y)$ como una superficie y a $S = \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$ como una suma (con signos) de volúmenes de cajas relacionados con la gráfica, considere el lector que S es una suma ponderada de *áreas* y la integral $\iint_R f\,dA$ es el valor límite al que tienden dichas sumas ponderadas cuando las dimensiones de todos los subrectángulos se aproximan a cero. Con este punto de vista no presentamos al integrando f cuando tratamos de visualizar la integral. De este modo se vuelve más fácil distinguir entre los roles del integrando y el rectángulo R sobre el cual integramos (véase la figura 5.15).

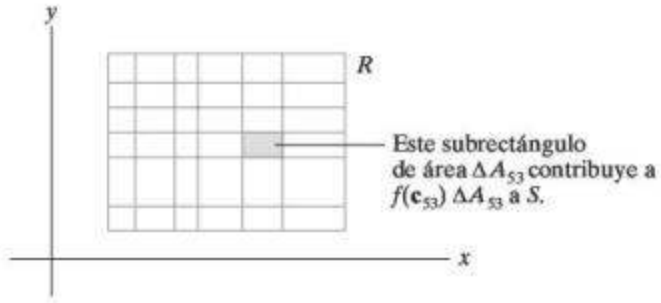


Figura 5.15 $S = \sum_{i,j} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij}$.

EJEMPLO 1 Suponga el lector que se fabrica una placa cuadrada de metal de 3 cm, pero que existen ciertas irregularidades debidas al proceso de manufactura, por lo que la densidad de la masa varía algo a través de la placa. Si conociéramos la función de densidad $\delta(x, y)$ en cada punto de la placa, podríamos calcular la masa total de esta como

$$\text{Masa total} = \iint_D \delta(x, y)\, dA,$$

donde D es la región cuadrada de la placa situada en un sistema de coordenadas apropiado.

Aunque no contemos con una expresión analítica para δ, podemos aproximar la doble integral por medio de una suma de Riemann: hacemos la partición de la región cuadrada de la placa, tomamos lecturas de la densidad como un punto de prueba en cada subregión y combinamos para aproximar la integral y obtener la masa total. (En esencia, lo que estaríamos haciendo sería suponer que la densidad es casi constante en cada subregión, de manera que al multiplicar la densidad por el área obtendríamos la masa aproximada de la subregión; la suma de estas masas aproximadas daría una aproximación de la masa total). Por ejemplo, podríamos modelar el problema como en la figura 5.16, en donde la región de la placa se divide

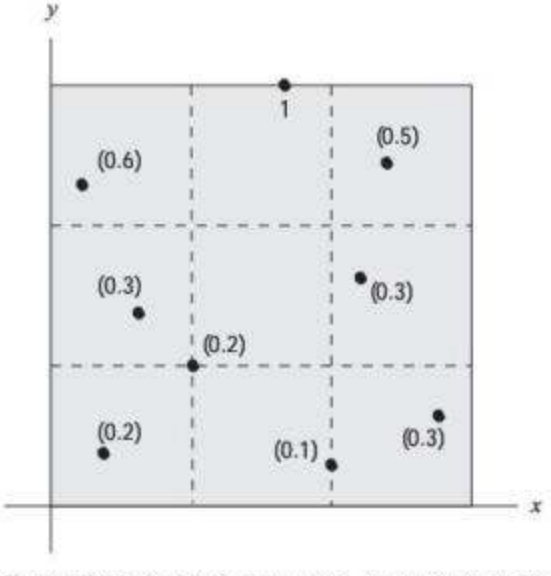


Figura 5.16 Región del ejemplo 1. El cuadrado de 3×3 se divide en nueve subregiones. Los valores de la densidad se indican en puntos de prueba ubicados en cada subregión.

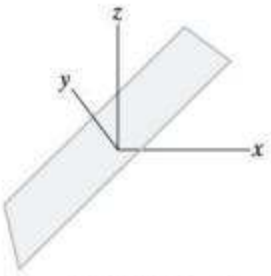


Figura 5.17 Gráfica de $z = x$ del ejemplo 2.

en nueve subregiones cuadradas.

$$\text{Masa total} = \iint_D \delta(x, y)\, dA \approx \sum_{i,j} \delta(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij}$$
$$= (0.2)1 + (0.3)1 + (0.6)1 + (0.1)1 + (0.2)1 + (1)1 + (0.3)1$$
$$+ (0.3)1 + (0.5)1 = 3.5.$$

◆

EJEMPLO 2 Determinamos el valor de $\iint_R x\, dA$, donde $R = [-2, 2] \times [-1, 3]$. Aquí, el integrando es $f(x, y) = x$, y si graficamos $z = f(x, y)$ sobre R, vemos que tenemos una parte de un plano, como se aprecia en la figura 5.17. Advierta que dicha parte se coloca de modo que una mitad quede exactamente sobre el plano xy y la otra quede debajo. Así, si consideramos a $\iint_R x\, dA$ como el volumen neto bajo la gráfica de $z = x$, concluimos que $\iint_R x\, dA$ (si existe) debe ser igual a cero.

Por otro lado, necesitamos no forzar la visualización en tres dimensiones. Considere una suma de Riemann correspondiente a $\iint_R x\, dA$ que se obtiene haciendo la partición $R = [-2, 2] \times [-1, 3]$ de manera simétrica con respecto del eje y, y eligiendo "puntos de prueba" $\mathbf{c}_{ij}$ también simétricos (véase la figura 5.18), de lo cual se infiere que el valor de

$$S = \sum f(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij} = \sum x_{ij}\Delta A_{ij}$$

(donde x_{ij} denota la coordenada x de $\mathbf{c}_{ij}$) debe ser cero, puesto que los términos de la suma se cancelan por pares. Además, podemos acomodar las cosas de modo que, a medida que las dimensiones de los subrectángulos se contraigan hacia cero (como debemos hacer para obtener la integral en sí), se preserve la simetría descrita. En consecuencia, el límite bajo estas restricciones será igual a cero y, por consiguiente, el límite conjunto (donde no se impusieron tales restricciones a la simetría sobre la suma de Riemann), si existe en todo, también debe ser igual a cero. ◆

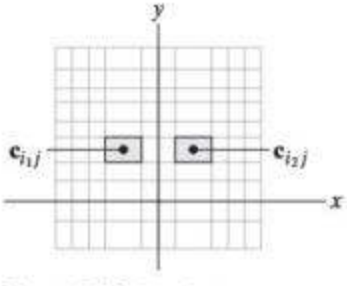


Figura 5.18 Los dos subrectángulos $R_{i_1 j}$ y $R_{i_2 j}$ están colocados de manera simétrica con respecto del eje y. Los puntos de prueba correspondientes, $\mathbf{c}_{i_1 j}$ y $\mathbf{c}_{i_2 j}$ se eligen de modo que tengan las mismas coordenadas y y coordenadas x opuestas.

El ejemplo 2 pone de manifiesto dificultades fundamentales con la definición 2.3, y es que nunca determinamos si $\iint_R f\, dA$ realmente existe. Para hacerlo tendríamos que haber podido calcular el límite de las sumas de Riemann de f sobre *todas las posibles* particiones de R usando *todas las posibles* elecciones de los puntos de prueba, $\mathbf{c}_{ij}$, una tarea prácticamente imposible. Por fortuna, el resultado siguiente (que no demostraremos) da un criterio fácil para la integrabilidad:

TEOREMA 2.4 Si f es continua en el rectángulo cerrado R, entonces existe $\iint_R f\, dA$.

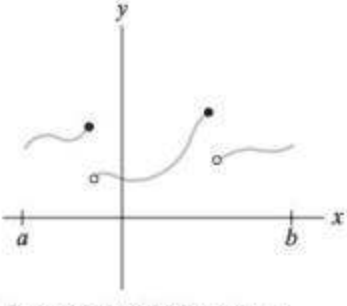


Figura 5.19 Gráfica de una función continua por partes.

En el ejemplo 2, $f(x, y) = x$ es una función continua, en consecuencia, es integrable, de acuerdo con el teorema 2.4. Los argumentos de simetría que se usaron en el ejemplo demuestran que $\iint_R x\, dA = 0$.

Las funciones continuas no son los únicos ejemplos de funciones integrables. En el caso de una función de una sola variable, las funciones continuas por partes también son integrables (recuerde el lector que una función $f(x)$ es **continua por partes** en el intervalo cerrado $[a, b]$ si f es acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de puntos de discontinuidad en el interior de $[a, b]$. Por consiguiente, su gráfica consta de un número finito de "pedazos" continuos, como se ilustra en la figura 5.19). Para una función de dos variables se tiene el resultado siguiente, que generaliza al teorema 2.4.

TEOREMA 2.5 Si f es acotada sobre R y si el conjunto de discontinuidades de f sobre R tiene un área igual a cero, entonces existe $\iint_R f\,dA$.

Decir que un conjunto X tiene un **área igual a cero**, como se propone en el teorema 2.5, significa que podemos cubrir X con rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, es decir, de modo que $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$), la suma de cuyas áreas puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Una función f que satisfaga la hipótesis del teorema 2.5 tiene una gráfica que se parece a la de la figura 5.20. El teorema 2.5 es la condición más general suficiente para la integrabilidad que consideraremos. Esta tendrá un uso particular para nosotros cuando definamos la integral doble de una función sobre una región arbitraria en el plano.

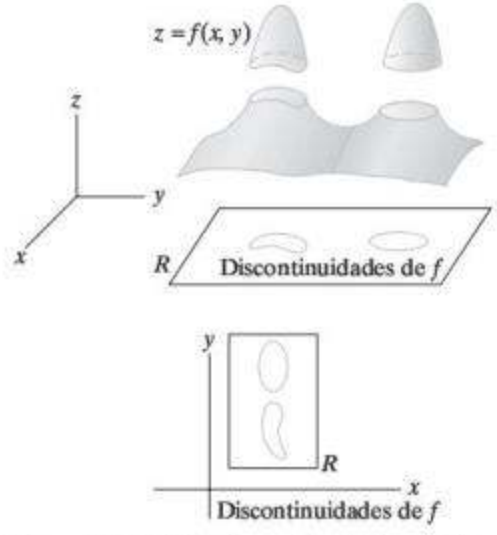


Figura 5.20 Gráfica de una función integrable.

Aunque los teoremas 2.4 y 2.5 facilitan relativamente la comprobación de que una integral dada existe, no son de mucha ayuda para dar su valor numérico. Para mecanizar la evaluación de las integrales dobles usaremos el resultado siguiente:

TEOREMA 2.6 (TEOREMA DE FUBINI) Sea f acotada en $R = [a, b] \times [c, d]$ y suponiendo que el conjunto S de discontinuidades de f sobre R tiene un área igual a cero. Si toda recta paralela a los ejes coordenados interseca S en un número finito de puntos, entonces

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy.$$

El teorema de Fubini demuestra que, bajo ciertas suposiciones, la *integral doble* sobre un rectángulo, es decir, el límite de las sumas de Riemann, puede calcularse utilizando *integrales iteradas* y, además, que no importa el orden de integración de las integrales iteradas. Hacemos énfasis en que la independencia del orden de integración depende mucho del hecho de que la región de integración sea rectangular;

no se generalizará de manera sencilla a regiones más arbitrarias (en el apéndice de esta sección se da una demostración del teorema 2.6).

EJEMPLO 3 En el ejemplo 2 revisamos de nuevo $\iint_R x\,dA$, donde $R = [-2, 2] \times [-1, 3]$. De acuerdo con el teorema 2.6, sabemos que $\iint_R x\,dA$ existe, y por medio del teorema de Fubini calculamos lo siguiente:

$$\iint_R x\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{3} x\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left(xy\Big|_{y=-1}^{y=3}\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} x(3-(-1))\,dx = \int_{-2}^{2} 4x\,dx = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 8-8 = 0,$$

lo cual coincide. Además, también tenemos que

$$\iint_R x\,dA = \int_{-1}^{3}\int_{-2}^{2} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\tfrac{1}{2}x^2\Big|_{x=-2}^{x=2} dy = \int_{-1}^{3}(2-2)\,dy = 0. \quad \blacklozenge$$

PROPOSICIÓN 2.7 (PROPIEDADES DE LA INTEGRAL) Suponga que f y g son integrables en el rectángulo cerrado R. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $f + g$ también es integrable sobre R y

$$\iint_R (f+g)\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA.$$

2. cf también es integrable sobre R, donde $c \in \mathbf{R}$ es cualquier constante y

$$\iint_R cf\,dA = c\iint_R f\,dA.$$

3. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para toda $(x, y) \in R$, entonces,

$$\iint_R f(x,y)\,dA \leq \iint_R g(x,y)\,dA.$$

4. $|f|$ también es integrable sobre R y

$$\left|\iint_R f\,dA\right| \leq \iint_R |f|\,dA.$$

Las propiedades 1 y 2 se llaman de **linealidad** de la integral doble. Pueden demostrarse considerando las sumas de Riemann que sean apropiadas y tomando

los límites. Por ejemplo, para demostrar la propiedad 1, advierta que la suma de Riemann cuyo límite es $\iint_R (f+g)\,dA$ es

$$\sum_{i,j=1}^{n}(f+g)(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}\left(f(\mathbf{c}_{ij})+g(\mathbf{c}_{ij})\right)\Delta A_{ij}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} g(\mathbf{c}_{ij})\Delta A_{ij}$$

$$\to \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA.$$

La propiedad 3 (conocida como de **monotonía**) y la 4 también pueden demostrarse utilizando sumas de Riemann. Para la propiedad 4 se necesita utilizar el hecho de que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

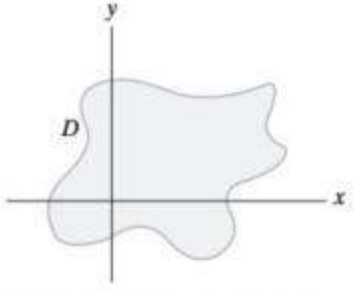


Figura 5.21 Región acotada D en el plano.

Integrales dobles sobre regiones generales del plano

Nuestro paso siguiente es entender la manera de definir la integral de una función sobre una región acotada arbitraria D en el plano. Lo ideal sería dar una definición precisa de $\iint_D f\,dA$, donde D es la zona en forma de ameba que se ilustra en la figura 5.21, y donde f está acotada sobre D. De acuerdo con la definición de la integral sobre un rectángulo, $\iint_D f\,dA$ debe ser un límite de algún tipo de suma de Riemann y debe representar el volumen neto bajo la gráfica de f sobre D. Desafortunadamente los detalles técnicos que implicaría el trabajo si utilizáramos este enfoque directo son tales que complicaría la exposición. En vez de ello debemos considerar solo ciertas regiones especiales (en vez de las totalmente arbitrarias) y suponer que el integrando f es continuo sobre la región de integración (lo que nos permitirá usar lo que ya sabemos acerca de las integrales sobre rectángulos). Aunque este enfoque no nos dará una definición completamente general, en esencia es suficiente para todas las situaciones prácticas que encontraremos.

Para comenzar definimos los tipos de **regiones elementales** que deseamos considerar.

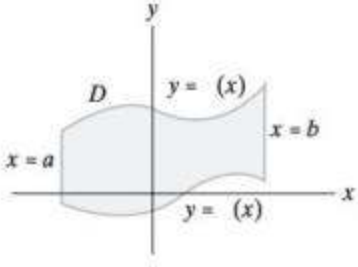


Figura 5.22 Región elemental tipo 1.

DEFINICIÓN 2.8 Decimos que D es una **región elemental** en el plano si puede describirse como un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ de uno de los tres tipos siguientes:

Tipo 1 (véase la figura 5.22):

$$D = \{(x, y) \mid \gamma(x) \le y \le \delta(x),\ a \le x \le b\},$$

donde γ y δ son continuas en $[a, b]$.

Tipo 2 (véase la figura 5.23):

$$D = \{(x, y) \mid \alpha(y) \le x \le \beta(y),\ c \le y \le d\},$$

donde α y β son continuas en $[c, d]$.

Tipo 3 D es de ambos tipos, el 1 y el 2.

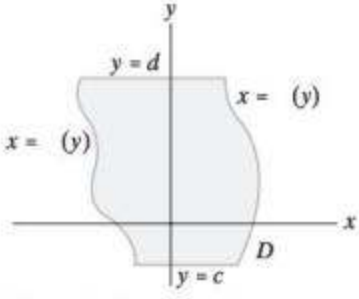


Figura 5.23 Región elemental tipo 2.

Así, una región elemental, D, del tipo 1, tiene una frontera (la cual se denota con ∂D) que consta de segmentos rectilíneos (posiblemente puntos aislados) a la izquierda y la derecha, y gráficas de funciones continuas de x arriba y abajo. Una

región elemental tipo 2 tiene una frontera que es rectilínea arriba y abajo, y consta de gráficas de funciones continuas de y a la izquierda y a la derecha.

EJEMPLO 4 El disco unitario de la figura 5.24 es un ejemplo de una región elemental tipo 3. Es una región tipo 1 porque

$$D = \left\{(x, y) \mid -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\right\}.$$

(Véase la figura 5.25). También es una región tipo 2, ya que

$$D = \left\{(x, y) \mid -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, -1 \le y \le 1\right\}.$$

(Véase la figura 5.26). ◆

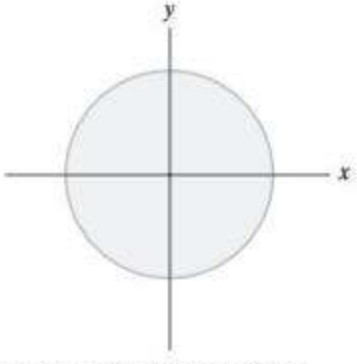


Figura 5.24 El disco unitario $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ es una región tipo 3.

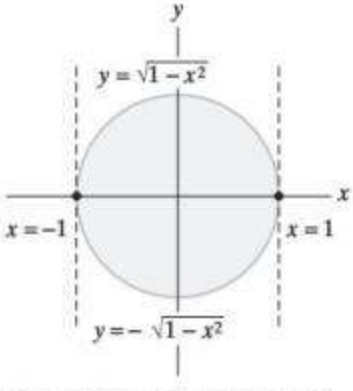


Figura 5.25 El disco unitario D como una región tipo 1.

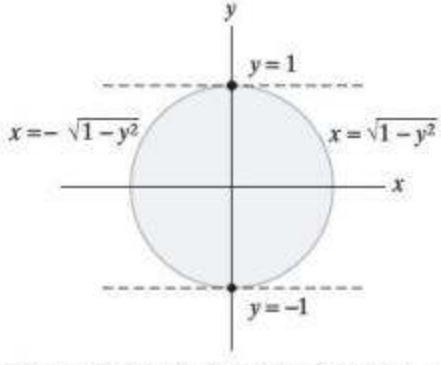


Figura 5.26 El disco unitario D como una región tipo 2.

Ahora estamos listos para definir $\iint_D f\,dA$, donde D es una región elemental y f es continua sobre D. Construimos una función nueva f^{ext}, la **extensión** de f, por medio de

$$f^{\text{ext}}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Observe que, en general, f^{ext} no será continua, pero las discontinuidades de f^{ext} estarán contenidas en ∂D, que no tiene área. Así, según el teorema 2.5, f^{ext} es integrable en cualquier rectángulo cerrado R que contenga a D (véase la figura 5.27).

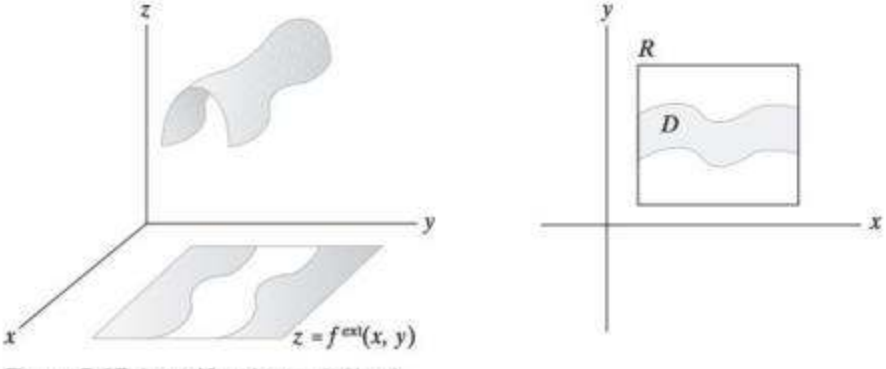


Figura 5.27 La gráfica de $z = f^{\text{ext}}(x, y)$.

DEFINICIÓN 2.9 Con las suposiciones y notación anteriores, si R es cualquier rectángulo que contenga a D, definimos

$$\iint_D f\,dA \quad \text{para que sea} \quad \iint_R f^{\text{ext}}\,dA.$$

Advierta que la definición 2.9 supone de manera implícita que la elección del rectángulo R que contenga a D no afecta el valor de $\iint_R f^{\text{ext}}\,dA$. Esto es casi obvio pero debe demostrarse. No lo haremos directamente, sino que estableceremos el siguiente resultado clave:

TEOREMA 2.10 Sea D una región elemental en $\mathbf{R}^2$ y f una función continua sobre D.

1. Si D es de tipo 1 (como se describió en la definición 2.8), entonces

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y)\,dy\,dx.$$

2. Si D es del tipo 2, entonces

$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

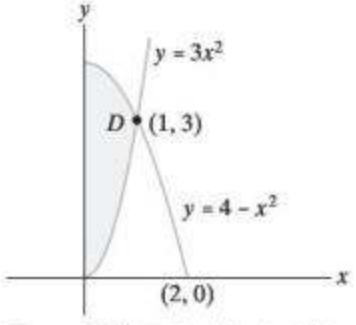


Figura 5.28 El dominio de f del ejemplo 5.

El teorema 2.10 proporciona una manera explícita y directa para evaluar integrales dobles sobre regiones elementales utilizando integrales iteradas. Antes de probar el teorema ilustraremos cómo se usa.

EJEMPLO 5 Sea D la región acotada por las parábolas $y = 3x^2$, $y = 4 - x^2$ y el eje y como se ilustra en la figura 5.28. (Advierta que las parábolas se intersecan en el punto $(1, 3)$). Como D es una región elemental del tipo 1, usamos el teorema 2.10 con $f(x, y) = x^2 y$ para encontrar que

$$\iint_D x^2 y\,dA = \int_0^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} x^2 y\,dy\,dx.$$

Los límites de la primera integración (la interior) provienen de los valores de y de las curvas de la frontera superior e inferior de D. Los límites de la segunda integración (exterior) son los valores de x constantes que corresponden al lado izquierdo y al derecho de D. La evaluación en sí misma es bastante mecánica:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} x^2 y\,dy\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2 y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=3x^2}^{y=4-x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left((4 - x^2)^2 - (3x^2)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(16 - 8x^2 + x^4 - 9x^4\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(8x^2 - 4x^4 - 4x^6\right) dx = \tfrac{8}{3} - \tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{7} = \tfrac{136}{105}.
\end{aligned}$$

Observe que después de integrar y evaluar a y, lo que queda es una sola integral definida en x. El resultado de calcular esta integral de x es, por supuesto, un número. Esta es una situación en la que siempre se debería dar el caso de que el número de variables que aparecen en la integral disminuya con cada integración. ◆

Demostración del teorema 2.10 Para la parte 1 describimos a D como

$$D = \{(x, y) \mid \gamma(x) \leq y \leq \delta(x), a \leq x \leq b\}.$$

Por la definición 2.9 tenemos que

$$\iint_D f\, dA = \iint_R f^{\text{ext}}\, dA,$$

donde R es cualquier rectángulo que contenga a D. Sea $R = [a', b'] \times [c', d']$, donde $a' \leq a$, $b' \geq b$ y $c' \leq \gamma(x)$, $d' \geq \delta(x)$ para toda x en $[a, b]$. Es decir, tenemos la situación ilustrada en la figura 5.29. Como f^{ext} es igual a cero fuera del subrectángulo $R_2 = [a, b] \times [c', d']$,

$$\iint_R f^{\text{ext}}\, dA = \iint_{R_2} f^{\text{ext}}\, dA = \int_a^b \int_{c'}^{d'} f^{\text{ext}}(x, y)\, dy\, dx$$

según el teorema de Fubini. Para un valor fijo de x entre a y b considere la integral de y $\int_{c'}^{d'} f^{\text{ext}}(x, y)\, dy$. Como $f^{\text{ext}}(x, y) = 0$, a menos que $\gamma(x) \leq y \leq \delta(x)$ (en cuyo caso $f^{\text{ext}}(x, y) = f(x, y)$),

$$\int_{c'}^{d'} f^{\text{ext}}(x, y)\, dy = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y)\, dy,$$

y así

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R f^{\text{ext}}\, dA = \int_a^b \int_{c'}^{d'} f^{\text{ext}}(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y)\, dy\, dx,$$

como se buscaba.

La demostración de la parte 2 es muy parecida. ◆

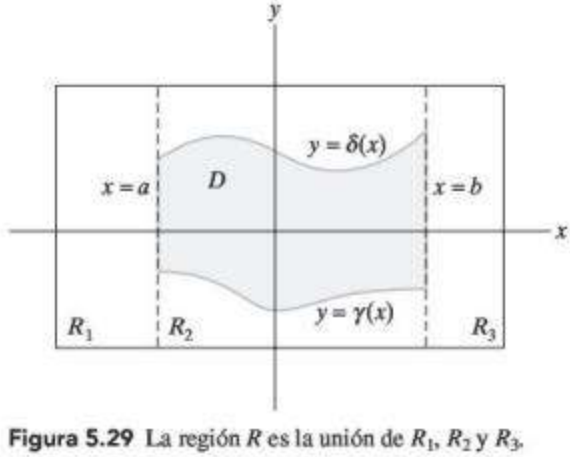


Figura 5.29 La región R es la unión de R_1, R_2 y R_3.

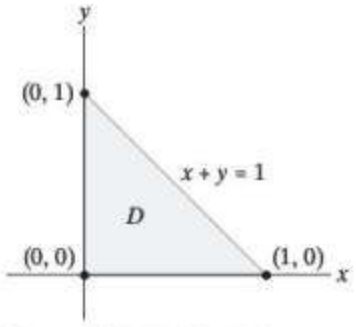


Figura 5.30 Región D del ejemplo 6.

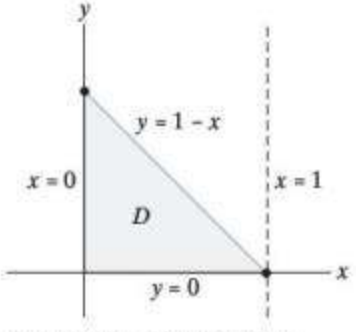


Figura 5.31 La región D del ejemplo 6 como una región tipo 1.

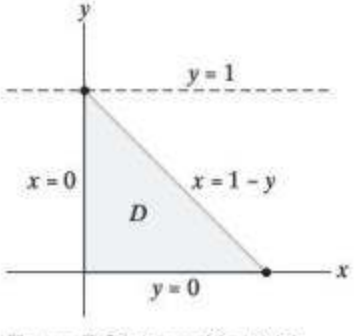


Figura 5.32 La región D del ejemplo 6 como una región tipo 2.

Continuamos el análisis de ejemplos de cálculo de integrales dobles.

EJEMPLO 6 Sea D la región mostrada en la figura 5.30, la cual tiene una frontera triangular. Considere $\iint_D (1 - x - y)\,dA$. Advierta que D es una región elemental tipo 3, por lo que debe haber dos formas de evaluar la integral doble.

Si consideramos a D como una región elemental tipo 1 (véase la figura 5.31), podemos aplicar la parte 1 del teorema 2.10, de modo que

$$\iint_D (1 - x - y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left((1 - x) - x(1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2}\,dx = -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3 \Big|_0^1 = \tfrac{1}{6}.$$

También podemos considerar a D como una región elemental tipo 2, como se aprecia en la figura 5.32. Por consiguiente, utilizando la parte 2 del teorema 2.10, obtenemos

$$\iint_D (1 - x - y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y)\,dx\,dy.$$

Se deja como ejercicio para el lector la comprobación explícita de que esta integral iterada también tiene el valor de $\frac{1}{6}$. En cambio, hacemos notar que

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx$$

puede transformarse en

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y)\,dx\,dy$$

con el cambio de roles de x y y. Por consiguiente, las dos integrales deben tener el mismo valor. En cualquier caso, la integral doble

$$\iint_D (1 - x - y)\,dA$$

representa el volumen bajo la gráfica de $z = 1 - x - y$ sobre la región triangular D. Si ilustramos la situación en $\mathbf{R}^3$ como en la figura 5.33, vemos que la integral doble representa el volumen de un tetraedro. ◆

Por supuesto, no todas las regiones del plano son elementales, inclusive algunas relativamente sencillas. Para integrar funciones continuas en dichas regiones, el mejor consejo es tratar de subdividir la región en un gran número finito de tipo elemental.

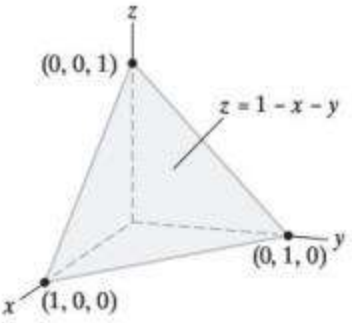


Figura 5.33 La doble integral del ejemplo 6 representa el volumen del tetraedro.

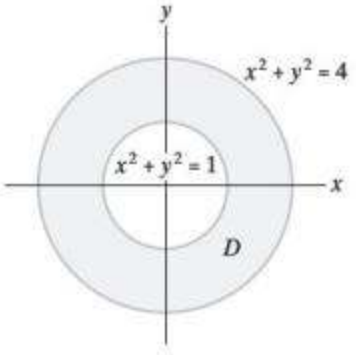


Figura 5.34 La región D del ejemplo 7.

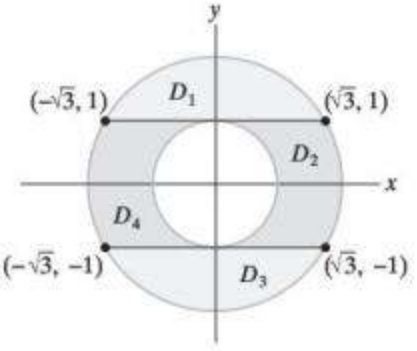


Figura 5.35 La región D del ejemplo 7 subdividida en cuatro regiones elementales.

EJEMPLO 7 Sea D la región anular entre los dos círculos concéntricos de radios 1 y 2, como se ilustra en la figura 5.34. Entonces D *no* es una región elemental, pero podemos descomponerla en cuatro subregiones de tipo elemental (véase la figura 5.35). Si $f(x, y)$ es cualquier función de dos variables que es continua (y, por lo tanto, integrable) sobre D, podemos calcular la doble integral como la suma de las integrales sobre las subregiones, es decir,

$$\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dA + \iint_{D_2} f\,dA + \iint_{D_3} f\,dA + \iint_{D_4} f\,dA.$$

Para las subregiones tipo 1 tenemos el arreglo que se presenta en la figura 5.36:

$$\iint_{D_1} f\,dA = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

y

$$\iint_{D_3} f\,dA = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-1} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Para las subregiones tipo 2 usamos la división ilustrada en la figura 5.37:

$$\iint_{D_2} f\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

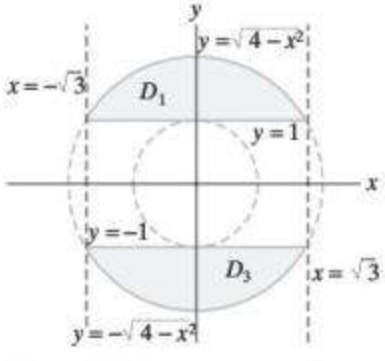


Figura 5.36 Las subregiones D_1 y D_3 del ejemplo 7 son de tipo 1.

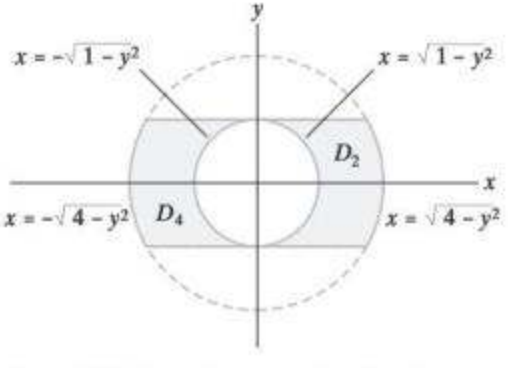


Figura 5.37 Las subregiones D_2 y D_4 del ejemplo 7 son de tipo 2.

y

$$\iint_{D_4} f\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

La dificultad para evaluar cada una de las cuatro integrales iteradas anteriores depende entonces de la complejidad del integrando. ◆

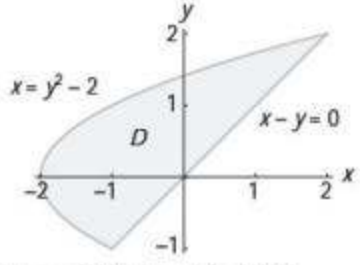


Figura 5.38 La región D del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Calcularemos $\iint_D y\,dA$, donde D es la región acotada por la recta $x - y = 0$ y la parábola $x = y^2 - 2$ (véase la figura 5.38).

En este caso, D es una región elemental tipo 2, donde las curvas de frontera izquierda y derecha se expresan como $x = y^2 - 2$ y $x = y$, respectivamente. Estas curvas se intersecan donde

$$y^2 - 2 = y \iff y^2 - y - 2 = 0 \iff y = -1, 2.$$

Por lo tanto, se aplica la parte 2 del teorema 2.10 para obtener

$$\iint_D y\,dA = \int_{-1}^{2}\int_{y^2-2}^{y} y\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\int_{y^2-2}^{y} xy\Big|_{x=y^2-2}^{x=y}\,dy = \int_{-1}^{2}\left(y^2 - (y^2-2)y\right)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(y^2 - y^3 + 2y\right)\,dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + y^2\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\tfrac{8}{3} - 4 + 4\right) - \left(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + 1\right) = \tfrac{9}{4}.$$

Ahora, aunque D no es una región elemental del tipo 1, puede dividirse en *dos* subregiones tipo 1 a lo largo de la recta vertical $x = -1$ (véase la figura 5.39). La subregión D_1 que está a la izquierda de la recta $x = -1$ se encuentra acotada tanto arriba como abajo por la parábola $x = y^2 - 2$; al resolver para y podemos expresar la frontera inferior de D_1 como $y = -\sqrt{x+2}$ y la frontera superior como $y = \sqrt{x+2}$. La subregión D_2 a la derecha de $x = -1$ está acotada en la parte inferior por $y = x$ y

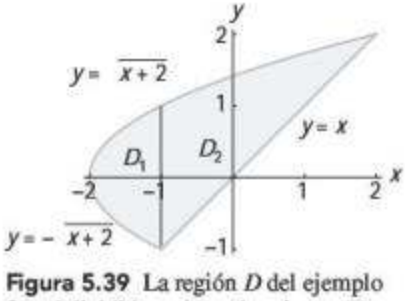


Figura 5.39 La región D del ejemplo 8 está dividida en las subregiones D_1 y D_2 por la recta $x = -1$.

en la superior por $y = \sqrt{x+2}$. Al reunir toda esta información tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dA &= \iint_{D_1} y\,dA + \iint_{D_2} y\,dA \\
&= \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} y\,dy\,dx + \int_{-1}^{2} \int_{x}^{\sqrt{x+2}} y\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{y^2}{2}\Big|_{y=-\sqrt{x+2}}^{y=\sqrt{x+2}} dx + \int_{-1}^{2} \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x}^{y=\sqrt{x+2}} dx \\
&= \int_{-2}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{2} \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= 0 + \left(\frac{x^2}{4} + x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-1}^{2} \\
&= \left(1 + 2 - \tfrac{4}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - 1 + \tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{9}{4}.
\end{aligned}$$

◆

Apéndice. Demostración del teorema 2.6

Paso 1. En primer lugar establecemos el teorema 2.6 en el caso en que f es continua sobre $R = [a, b] \times [c, d]$. De acuerdo con el teorema 2.4, sabemos que existe $\iint_R f\,dA$. Sea F la función de una sola variable definida por

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

(Nota: como f es continua en R, la función parcial en y obtenida manteniendo a x constante es continua en $[c, d]$. Por consiguiente, $\int_c^d f(x, y)\,dy$ existe para toda x en $[a, b]$). Demostraremos que

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx = \iint_R f\,dA.$$

Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Entonces, una suma general de Riemann que aproxime $\int_a^b F(x)\,dx$ es

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i, \tag{1}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Ahora, sea $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ una partición de $[c, d]$. (Las particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$ juntas dan una partición de $R = [a, b] \times [c, d]$). Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_c^d f(x, y)\,dy \\
&= \int_c^{y_1} f(x, y)\,dy + \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy + \cdots + \int_{y_{n-1}}^{d} f(x, y)\,dy \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy.
\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales,[1] en cada subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ existe un número y_j^* tal que

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy = (y_j - y_{j-1})f(x, y_j^*) = f(x, y_j^*)\Delta y_j.$$

La elección de y_j^* en general depende de x, por lo que escribiremos $y_j^*(x)$ para y_j^*. En consecuencia,

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x, y_j^*(x))\Delta y_j,$$

y la suma de Riemann (1) se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*(x_i^*))\Delta y_j\right\}\Delta x_i = \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

donde $\mathbf{c}_{ij} = (x_i^*, y_j^*(x_i^*))$. Advierta que $\mathbf{c}_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ (véase la figura 5.40).

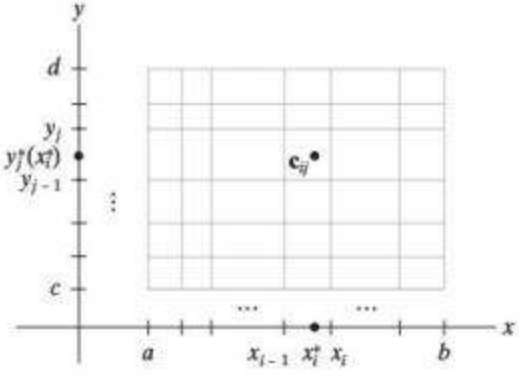


Figura 5.40 El punto $\mathbf{c}_{ij} = (x_i^*, y_j^*(x_i^*))$ usado en la demostración del teorema 2.6.

Hemos demostrado que, dada cualquier partición de $[a, b]$, podemos asociar una partición apropiada de $R = [a, b] \times [c, d]$ tal que la suma de Riemann (1) que aproxima a $\int_a^b F(x)\,dx$ es igual a la suma de Riemann, es decir, $\sum_{i,j} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$ que aproxima $\iint_R f\,dA$. Como f es continua, sabemos que

$$\sum_{i,j} f(\mathbf{c}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \quad \text{aproxima a} \quad \iint_R f\,dA$$

cuando Δx_i y Δy_j tienden a cero. Por consiguiente,

$$\int_a^b F(x)\,dx = \iint_R f\,dA.$$

Al cambiar los roles de x y y en el argumento anterior es posible demostrar que

$$\iint_R f\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy.$$

[1] El teorema del valor medio para integrales dice que si g es continua en $[a, b]$, entonces existe cierto número c con $a \le c \le b$, tal que $\int_a^b g(x)\,dx = (b - a)g(c)$.

Paso 2. Ahora demostraremos el caso general del teorema 2.6, es decir, el caso en que f tiene discontinuidades en $R = [a, b] \times [c, d]$. Por hipótesis, el conjunto S de discontinuidades de f en R son tales que toda recta vertical interseca S en un número grande pero finito de puntos. Así, para cada x en $[a, b]$, la función parcial en y de $f(x, y)$ es continua a través de $[c, d]$, excepto tal vez en puntos limitados. (En otras palabras, la función parcial es continua por partes). Por consiguiente, como f está acotada,

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

existe.

Ahora procedemos como en el paso 1. Es decir, comenzamos con una partición de $[a, b]$ en n subintervalos y la correspondiente suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i.$$

A continuación se hace la partición de $[c, d]$ en n subintervalos. En consecuencia,

$$F(x_i^*) = \int_c^d f(x_i^*, y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy. \tag{2}$$

Como en el paso 1, las particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$ se combinan para dar una partición de R.

Se escribe R como $R_1 \cup R_2$, donde R_1 es la unión de todos los subrectángulos.

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

que intersecan S y R_2 es la unión de los subrectángulos sobrantes. Por consiguiente, podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales a aquellos intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ sobre los cuales $f(x_i^*, y)$ es continua en y, por lo que al reemplazar la integral

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy$$

por

$$f(x_i^*, y_j^*(x_i^*))\Delta y_j = f(\mathbf{c}_{ij})\Delta y_j.$$

Como f está acotada, sabemos que

$$|f(x, y)| \leq M$$

para cierta M y todas las $(x, y) \in R$. Por lo tanto, tenemos que sobre los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$, donde $f(x_i^*, y)$ no es continua, tenemos que

$$\left| \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right| \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x_i^*, y)|\, dy$$

$$\leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} M\, dy = M(y_j - y_{j-1}) = M\Delta y_j. \tag{3}$$

De la ecuación (2) sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right\} \Delta x_i$$

$$= \sum_{R_{ij} \subset R_1 \cup R_2} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right\} \Delta x_i$$

$$= \sum_{R_{ij} \subset R_1} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right\} \Delta x_i$$

$$+ \sum_{R_{ij} \subset R_2} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right\} \Delta x_i.$$

Por lo tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*) \Delta x_i - \sum_{R_{ij} \subset R_2} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right\} \Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{R_{ij} \subset R_1} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i^*, y)\, dy \right\} \Delta x_i \right|. \tag{4}$$

Al aplicar el teorema del valor medio para integrales en el lado izquierdo de la ecuación (4) y la desigualdad (3) al lado derecho, obtenemos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*) \Delta x_i - \sum_{R_{ij} \subset R_2} f(\mathbf{c}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \right| \leq \sum_{R_{ij} \subset R_1} M \Delta x_i \Delta y_j$$

$$= M \cdot \text{área de } R_1.$$

Ahora S tiene un área igual a cero (por hipótesis) y está contenida en R_1. Al hacer que la partición de R sea suficientemente fina, es decir, al hacer que Δx_i, Δy_j sean pequeños, el término $M \cdot$ área de R_1 puede hacerse arbitrariamente pequeño (véase la figura 5.41).

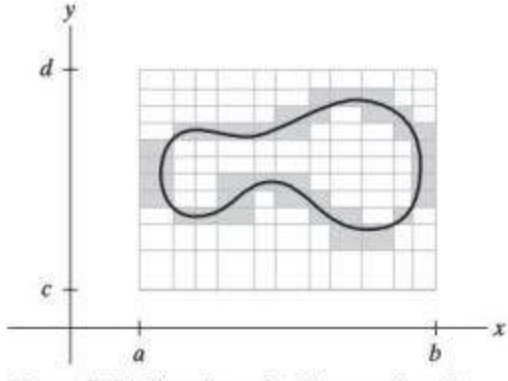


Figura 5.41 El conjunto R_1 (área sombreada) consta de los subrectángulos de la partición de R que satisfacen S, el conjunto de discontinuidades de f sobre R. A medida que la partición se hace más fina, el área de R_1 tiende a cero.

Por lo tanto, cuando Δx_i y Δy_j tienden a cero, tenemos que las sumas

$$\sum_i F(x_i^*) \Delta x_i \quad \text{y} \quad \sum_{R_{ij} \subset R_2} f(\mathbf{c}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

y el término $M \cdot$ área de R_1 convergen (respectivamente) a

$$\int_a^b F(x)\, dx, \quad \iint_R f\, dA \quad \text{y} \quad 0.$$

Concluimos que

$$\int_a^b F(x)\,dx - \iint_R f\,dA = 0,$$

es decir,

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx.$$

De nuevo, al cambiar los roles de x y y también se puede demostrar que

$$\iint_R f\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

◆

5.2 Ejercicios

1. Utilice la definición 2.3 y el teorema 2.4 para determinar el valor de $\iint_R (y^3 + \operatorname{sen} 2y)\,dA$, donde $R = [0, 3] \times [-1, 1]$.

2. Sea $R = [-3, 3] \times [-2, 2]$. Sin evaluar explícitamente ninguna integral iterada determine el valor de $\iint_R (x^5 + 2y)\,dA$.

3. Este problema tiene que ver con la integral doble $\iint_D x^3\,dA$, donde D es la región ilustrada en la figura 5.42.

a) Determine $\iint_D x^3\,dA$ directamente por medio de plantear y evaluar en forma explícita la integral iterada apropiada.

b) Ahora, *por inspección*, es decir, *sin* recurrir a un cálculo explícito, diga cuál debe ser el valor de $\iint_D x^3\,dA$.

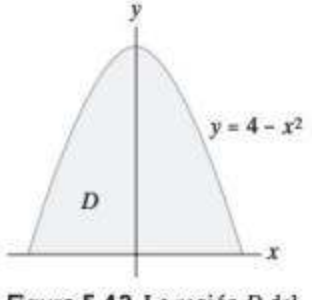


Figura 5.42 La región D del ejercicio 3.

En los ejercicios 4 a 13 evalúe las integrales iteradas dadas. Además, dibuje las regiones D que están determinadas por los límites de integración.

4. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^3} 3\,dy\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y^2} y\,dx\,dy$

6. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{x^2} y\,dy\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-1}^3 \int_x^{2x+1} xy\,dy\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2/4}^{x/2} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{y}} x \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} y \cos x\,dy\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3\,dy\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 3\,dx\,dy$

13. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-e^x}^{e^x} y^3\,dy\,dx$

14. La figura 5.43 muestra las curvas de nivel que indican la profundidad variable (en pies) de una alberca de 25 por 50 pies. Use una suma de Riemann para estimar, a la centena de 100 pies^3 más cercana, el volumen de agua que contiene la alberca.

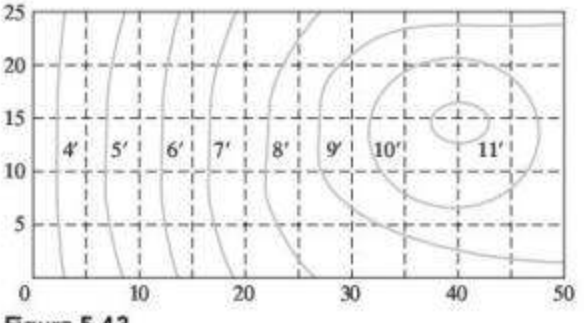


Figura 5.43

15. Integre la función $f(x, y) = 1 - xy$ sobre la región triangular cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (0, 2).

16. Integre la función $f(x, y) = 3xy$ sobre la región acotada por $y = 32x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

17. Integre la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región acotada por $x + y = 2$ y $y^2 - 2y - x = 0$.

18. Evalúe $\iint_D xy\, dA$, donde D es la región acotada por $x = y^3$ y $y = x^2$.

19. Evalúe $\iint_D e^{x^2}\, dA$, donde D es la región triangular con vértices en (0, 0), (1, 0) y (1, 1).

20. Evalúe $\iint_D 3y\, dA$, donde D es la región acotada por $xy^2 = 1$, $y = x$, $x = 0$ y $y = 3$.

21. Evalúe $\iint_D (x - 2y)\, dA$, donde D es la región acotada por $y = x^2 + 2$ y $y = 2x^2 - 2$.

22. Evalúe $\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por $y = x$, $y = 3x$ y $xy = 3$.

23. Demuestre la propiedad 2 de la proposición 2.7.

24. Pruebe la propiedad 3 de la proposición 2.7.

25. Demuestre la propiedad 4 de la proposición 2.7.

26. *a*) Sea D una región elemental en $\mathbf{R}^2$. Use la definición de integral doble para explicar por qué $\iint_D 1\, dA$ da como resultado el área de D.

b) Use el inciso anterior para demostrar que el área dentro de un círculo de radio a es πa^2.

27. Utilice integrales dobles para encontrar el área de la región acotada por $y = x^2$ y $y = x^3$.

28. Use integrales dobles para calcular el área de la región acotada por $y = 2x$, $x = 0$ y $y = 1 - 2x - x^2$.

29. Utilice integrales dobles para calcular el área en el interior de la elipse cuyos semiejes tienen longitudes de a y b (véase la figura 5.44).

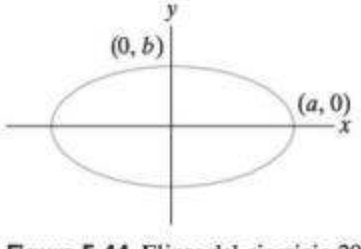


Figura 5.44 Elipse del ejercicio 29.

30. *a*) Plantee una integral iterada apropiada para encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3 - x$ y $y = ax^2$ para $x \geq 0$ (tome a como una constante).

b) Use un sistema de álgebra por computadora para estimar para qué valor de a el área es igual a 1.

31. Utilice integrales dobles para encontrar el área total de la región acotada por $y = x^3$ y $x = y^5$.

32. Utilice integrales dobles para determinar el área de la región limitada por la parábola $y = 2 - x^2$ y las rectas $x - y = 0$, $2x + y = 0$.

33. Sea D la región en $\mathbf{R}^2$ acotada por las rectas $x = 0$, $x + y = 3$ y $x - y = 3$. Sin recurrir a ningún cálculo explícito de una integral iterada, determine, por medio de una explicación, el valor de $\iint_D (y^3 - e^{x^2} \operatorname{sen} y + 2)\, dA$. (Sugerencia: use conceptos de simetría y geometría).

34. Sea D la región en $\mathbf{R}^2$ con $y \geq 0$ que está acotada por $x^2 + y^2 = 9$ y la recta $y = 0$. Sin hacer ningún cálculo explícito de una integral iterada determine, por medio de una explicación, el valor de $\iint_D (2x^3 - y^4 \operatorname{sen} x - 2)\, dA$.

35. Calcule el volumen del sólido bajo el plano $z = 24 - 2x - 6y$ y sobre la región en el plano xy acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 4x - x^2$ y el eje y.

36. Encuentre el volumen bajo la porción del paraboloide $z = x^2 + 6y^2$ que está sobre la región en el plano xy acotada por $y = x$ y $y = x^2 - x$.

37. Encuentre el volumen bajo el plano $z = 4x + 2y + 25$ y sobre la región en el plano xy acotada por $y = x^2 - 10$ y $y = 31 - (x - 1)^2$.

38. *a*) Plantee una integral iterada para calcular el volumen bajo el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2 + 5$ y sobre el disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

en el plano xy.

b) Use un sistema de álgebra por computadora para evaluar la integral.

39. Calcule el volumen de la región bajo la gráfica de

$$f(x, y) = 2 - |x| - |y|$$

y sobre el plano xy.

40. *a*) Demuestre que si $R = [a, b] \times [c, d]$, f es continua sobre $[a, b]$ y g es continua sobre $[c, d]$, por consiguiente

$$\iint_R f(x)g(y)\, dA = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right).$$

b) ¿Qué comentarios puede hacer el lector acerca de

$$\iint_D f(x)g(y)\, dA$$

si D no es un rectángulo? Más específicamente, ¿qué ocurre si D es una región elemental de tipo 1?

41. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional y } y \le 1\\ 2 & \text{si } x \text{ es irracional y } y > 1\end{cases}.$$

a) Demuestre que $\int_0^2 f(x,y)\,dy$ no depende de si x es racional o irracional.

b) Pruebe que $\int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx$ existe y encuentre su valor.

c) Use la partición $R=[0,1]\times[0,2]$ y construya una suma de Riemann por medio de elegir "puntos de prueba" $\mathbf{c}_{ij}$ en cada subrectángulo de la partición para que tenga una coordenada x racional. Después diga a qué valor converge esta suma de Riemann cuando tanto Δx_i como Δy_j tienden a cero.

d) Haga una partición de R y construya una suma de Riemann escogiendo puntos de prueba $\mathbf{c}_{ij}=(x_i^*, y_j^*)$, tales que x_i^* sea racional si $y_j^* \le 1$ y x_i^* sea irracional si $y_j^* > 1$. ¿Qué pasa con esta suma de Riemann si tanto Δx_i como Δy_j tienden a cero?

e) Por medio de la definición 2.3 demuestre que f no es integrable sobre R. Así, vemos que las integrales dobles y las iteradas en realidad son conceptos diferentes.

5.3 Cambio del orden de integración

Con frecuencia es útil pensar en la evaluación de las integrales dobles sobre regiones elementales más que nada como la determinación del orden de integración apropiado. Cuando la región de la integración es un rectángulo, el teorema de Fubini (teorema 2.6) dice que el orden en que se integra no tiene importancia; es decir,

$$\iint_R f\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Véase la figura 5.45). Cuando la región es elemental del tipo 1 solamente, si deseamos evaluar la integral doble por medio de una sola integral iterada, *debemos* integrar primero con respecto de y (y después con respecto de x). (Véase la figura 5.46). Entonces,

$$\iint_D f\,dA=\int_a^b\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

De igual manera, cuando la región es elemental del tipo 2 solamente, lo normal sería que primero se integrara con respecto de x, de manera que

$$\iint_D f\,dA=\int_c^d\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

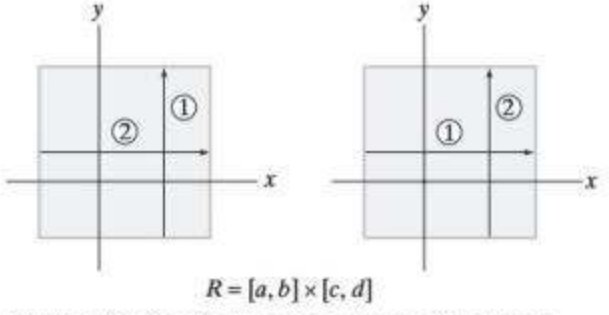


Figura 5.45 Cambio del orden de integración sobre un rectángulo.

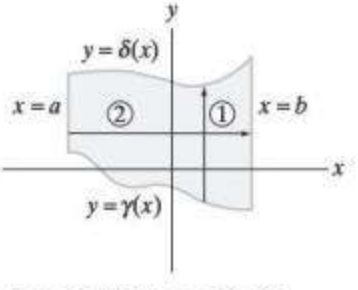


Figura 5.46 Una región tipo 1 lleva a integrar primero con respecto de y.

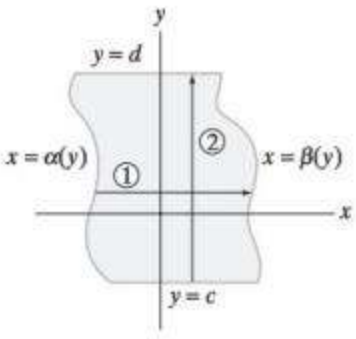


Figura 5.47 Una región de tipo 2 lleva a que primero se integre con respecto de x.

(Véase la figura 5.47). Sin embargo, cuando la región es elemental de tipo 3, podemos elegir cualquier orden de integración, al menos en principio. A menudo esta flexibilidad es una ventaja, como lo ilustran los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 Calculemos el área de la región que se indica en la figura 5.48. Al considerar que D es una región de tipo 1 se obtiene que

$$\text{Área de } D = \iint_D 1\,dA \text{ (¿Por qué?)} = \int_1^e \int_0^{\ln x} 1\,dy\,dx$$

$$= \int_1^e y\Big|_0^{\ln x} dx = \int_1^e \ln x\,dx.$$

La única integral definida que resulta da el área bajo la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo en: x [1, e], como debería ser. Para evaluar esta integral se necesita usar integración por partes. Sea $u = \ln x$ (de modo que $du = 1/x\,dx$) y $dv = dx$ (de modo que $v = x$). Entonces

$$\text{Área de } D = \int_1^e \ln x\,dx = \ln x \cdot x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$$

(recuerde el lector que $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$), por lo que

$$\text{Área de } D = e - 0 - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1.$$

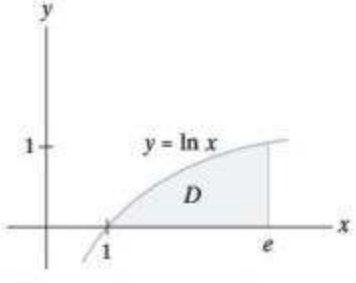


Figura 5.48 La región D del ejemplo 1.

La integración por partes puede evitarse si primero se integra con respecto de x, como se sugiere en forma esquemática en la figura 5.49. Por consiguiente,

$$\text{Área de } D = \iint_D 1\,dA = \int_0^1 \int_{e^y}^e 1\,dx\,dy = \int_0^1 x\Big|_{e^y}^e dy = \int_0^1 (e - e^y)\,dy$$

$$= (ey - e^y)\Big|_0^1 = (e-e) - (0 - e^0) = 1,$$

lo cual coincide (como debería ser). ◆

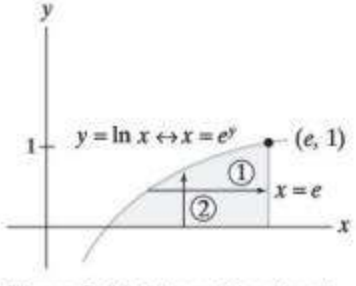


Figura 5.49 Integración sobre la región D del ejemplo 1 integrando primero con respecto de x.

Advierta que las dos integrales iteradas que usamos para calcular el área en el ejemplo 1, que son:

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} dy\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_{e^y}^e dx\,dy,$$

no se obtienen una de la otra con el simple cambio de los límites de integración. El único momento en que se justifica dicho cambio es cuando la región de integración es un rectángulo de la forma $[a, b] \times [c, d]$, de modo que *todos* los límites de integración sean constantes.

EJEMPLO 2 En ocasiones cambiar el orden de la integración permite realizar un cálculo que de otra forma sería imposible. Considere la evaluación de la siguiente integral iterada:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos(x^2)\,dx\,dy.$$

Después de algún trabajo (y tal vez cierto desconcierto), el lector podría encontrar imposible comenzar siquiera este cálculo. En realidad es posible demostrar que $\cos(x^2)$ no tiene una antiderivada que pueda expresarse en términos de funciones elementales. En consecuencia, al parecer es imposible continuar.

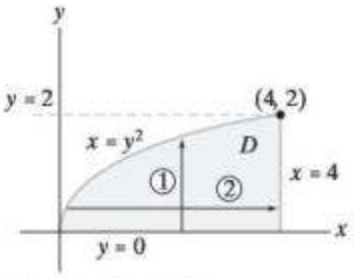


Figura 5.50 Advierta que $x = y^2$ corresponde a $y = \sqrt{x}$ sobre la región mostrada.

Por otro lado, es fácil integrar $y\cos(x^2)$ con respecto de y. Esto sugiere que debemos encontrar una forma de cambiar el orden de integración. Lo haremos en dos pasos:

1. Se usan los límites de integración en la integral iterada original para identificar la región D en $\mathbf{R}^2$ sobre la que tiene lugar la integración (al hacerlo pida el deseo de que D se convierta en una región de tipo 3).
2. Suponiendo que la región D en el paso 1 es de tipo 3, cambiamos el orden de integración.

Los límites de integración en el ejemplo anterior implican que D puede describirse como

$$D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2\},$$

como lo sugiere la figura 5.50, la cual puede usarse para cambiar el orden de integración. Tenemos que

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx.$$

Ahora es posible completar el cálculo; es decir,

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^4 \left(\frac{y^2}{2}\cos(x^2)\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^4 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{16} \cos u\,du,$$

donde $u = x^2$ y $du = 2x dx$, por lo que, finalmente queda

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\,dx\,dy = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u\Big|_0^{16} = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 16. \quad \blacklozenge$$

La técnica de cambiar el orden de integración es muy poderosa, pero no es la panacea para todas las integrales difíciles (o imposibles). Depende de una interacción apropiada entre las integrales y la región de integración, lo que no sucede a menudo en la práctica.

5.3 Ejercicios

1. Considere la integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (2x + 1)\,dy\,dx.$$

a) Evalúe esta integral.

b) Dibuje la región de integración.

c) Escriba una integral iterada equivalente con el orden de integración invertido. Evalúe esta nueva integral y compruebe que su respuesta coincide con la del inciso *a*).

En los ejercicios 2 a 9 dibuje la región de integración, invierta el orden de la integración y evalúe ambas integrales iteradas.

2. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x (2 - x - y)\,dy\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-2x} y\,dy\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-y^2} x\,dx\,dy$

5. $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 (x + y)\,dx\,dy$

6. $\displaystyle\int_0^3 \int_1^{e^x} 2\,dy\,dx$

7. $\int_0^1 \int_y^{2y} e^x \, dx \, dy$

8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dy \, dx$

9. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y \, dx \, dy$

Cuando invierta el orden de integración en los ejercicios 10 y 11 deberá obtener una suma de integrales iteradas. Obtenga las inversas y evalúelas.

10. $\int_{-2}^1 \int_{x^2-2}^{-x} (x - y) \, dy \, dx$

11. $\int_{-1}^4 \int_{y-4}^{4y-y^2} (y + 1) \, dx \, dy$

En los ejercicios 12 y 13 reescriba la suma dada de integrales iteradas como una sola integral iterada invirtiendo el orden de integración y evalúela.

12. $\int_0^1 \int_0^x \operatorname{sen} x \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \operatorname{sen} x \, dy \, dx$

13. $\int_0^8 \int_0^{\sqrt{y/3}} y \, dx \, dy + \int_8^{12} \int_{\sqrt{y-8}}^{\sqrt{y/3}} y \, dx \, dy$

En los ejercicios 14 a 18 evalúe la integral iterada que se da.

14. $\int_0^1 \int_{3y}^3 \cos(x^2) \, dx \, dy$

15. $\int_0^1 \int_y^1 x^2 \operatorname{sen} xy \, dx \, dy$

16. $\int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx \, dy$

17. $\int_0^3 \int_0^{9-x^2} \frac{x e^{3y}}{9 - y} \, dy \, dx$

18. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{-x^2} \, dx \, dy$

Es interesante ver lo que hace un sistema de álgebra por computadora con las integrales iteradas difíciles o imposibles de integrar en el orden dado. En los ejercicios 19 a 21 experimente con una computadora para evaluar las integrales dadas.

19. *a*) Determine el valor de $\int_0^2 \int_{x/2}^1 y^2 \cos(xy) \, dy \, dx$ por medio de una computadora. Observe cuánto tiempo le lleva a la máquina encontrar una respuesta. ¿Obtuvo una solución útil?

b) Si el lector tuviera que calcular con lápiz y papel la integral iterada del inciso anterior, *en el orden en que está escrita*, ¿qué método de integración usaría? (No haga la evaluación, tan solo piense lo que haría para realizarla).

c) Ahora invierta el orden de integración y haga que su computadora evalúe esta integral iterada. ¿La máquina responde con más rapidez que en el inciso *a*)?

20. *a*) Vea si su computadora puede calcular $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x \operatorname{sen}(y^2) \, dy \, dx$ en el orden en que está escrita.

b) Ahora invierta el orden de integración y haga que su computadora evalúe la nueva integral iterada. ¿Cuál de los cálculos en el inciso *a*) y el *b*) es más fácil para la máquina?

21. *a*) ¿Puede su computadora evaluar $\int_0^1 \int_{\operatorname{sen}^{-1} y}^{\pi/2} e^{\cos x} \, dx \, dy$?

b) Invierta el orden de integración y haga que la máquina lo intente de nuevo. ¿Qué sucede?

5.4 Integrales triples

Sea $f(x, y, z)$ una función de tres variables. Como hicimos con la integral doble, definimos la integral triple de f sobre una región sólida en el espacio para que sea el límite de sumas de Riemann apropiadas. Comencemos por definir esta integral sobre regiones en forma de caja y luego procedamos a definirla en regiones sólidas más generales.

La integral sobre una caja

Sea B una **caja cerrada** en $\mathbf{R}^3$ cuyas caras son paralelas a los planos coordenados. Es decir,

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \le x \le b, \ c \le y \le d, \ p \le z \le q\}.$$

(Véase la figura 5.51). También usamos la notación abreviada siguiente para B:

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q],$$

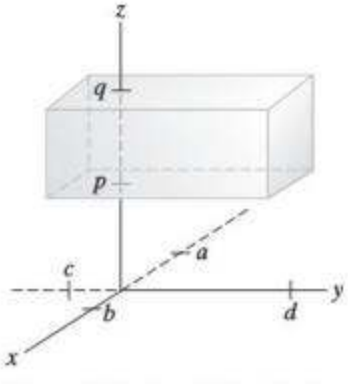


Figura 5.51 La caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

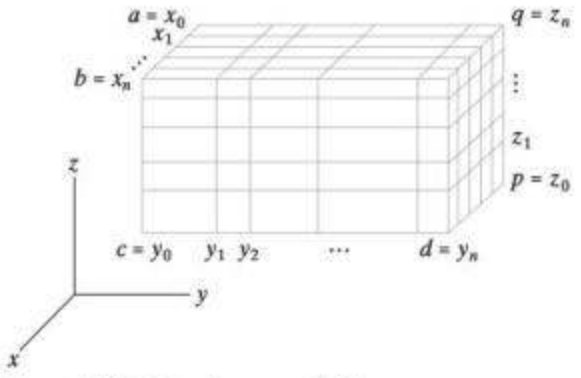


Figura 5.52 Una caja con partición.

DEFINICIÓN 4.1 Una **partición** de B de orden n consta de tres colecciones de **puntos de partición** que fragmentan B en una unión de n^3 subcajas. Es decir, para $i, j, k = 0, \ldots, n$, introducimos colecciones $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ y $\{z_k\}$, tales que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots < y_n = d,$$
$$p = z_0 < z_1 < \cdots < z_{k-1} < z_k < \cdots < z_n = q.$$

(Véase la figura 5.52). Además, para $i, j, k = 1, \ldots, n$, sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \text{y} \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

DEFINICIÓN 4.2 Sea f una función definida sobre $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Con cierta partición de B. Sea $\mathbf{c}_{ijk}$ cualquier punto en la subcaja

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \quad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

Entonces la cantidad

$$S = \sum_{i,j,k=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V_{ijk},$$

donde $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ es el volumen de B_{ijk}, se llama **suma de Riemann** de f sobre B correspondiente a la partición.

Puede concebirse la suma de Riemann $\sum f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V_{ijk}$ como una suma ponderada de volúmenes de subcajas de B, con la ponderación dada por el valor de la función f en "puntos de prueba" particulares $\mathbf{c}_{ijk}$ en cada subcaja.

DEFINICIÓN 4.3 La **integral triple** de f sobre B, denotada con

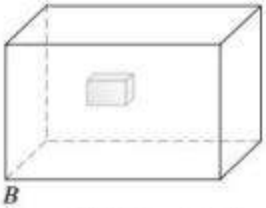
$$\iiint_B f \, dV,$$

por medio de $\iiint_B f(x, y, z) \, dV$, o por medio de $\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$,

es el límite de la suma de Riemann S cuando las dimensiones Δx_i, Δy_j y Δz_k de las subcajas B_{ijk} tienden a cero, es decir,

$$\iiint_B f\,dV = \lim_{\text{todo } \Delta x_i,\ \Delta y_j,\ \Delta z_k \to 0} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ijk})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

siempre que el límite exista. Cuando $\iiint_B f\,dV$ existe, decimos que f es **integrable** sobre B.



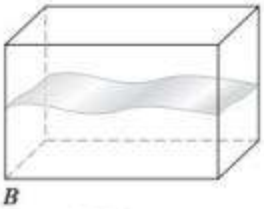
B

Figura 5.53 La subcaja contribuye en $f(\mathbf{c}_{ijk})\Delta V_{ijk}$ a la suma de Riemann S. Si pensamos que f representa una función de densidad, entonces la masa total de toda la caja B es $\iiint_B f\,dV$.

El punto clave es recordar que la integral triple es el límite de sumas de Riemann. Es este concepto el que permite que las integrales tengan aplicaciones útiles e importantes. Por ejemplo, si consideramos al integrando f como un tipo de función de densidad generalizada (¡"generalizada" porque nos permite densidades negativas!), entonces la suma de Riemann S es una suma de masas aproximadas (densidades multiplicadas por volúmenes) de subcajas de B. Estas aproximaciones deben mejorar a medida que las subcajas se hacen cada vez más pequeñas. Por consiguiente, podemos usar la integral triple, $\iiint_B f\,dV$, cuando existe, para calcular la masa total de una caja sólida B cuya densidad varía de acuerdo con f, como se ilustra en la figura 5.53.

De manera análoga al teorema 2.5, tenemos el resultado siguiente acerca de la integrabilidad de funciones:

TEOREMA 4.4 Si f está acotada sobre B y el conjunto de discontinuidades de f sobre B tiene un volumen igual a cero, entonces existe $\iiint_B f\,dV$ (véase la figura 5.54).



B

Figura 5.54 En el teorema 4.4 las discontinuidades de f sobre B (sombreadas) deben tener un volumen igual a cero.

Decir que un conjunto X tiene un **volumen igual a cero**, como en el teorema 4.4, significa que podemos cubrir X con cajas $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, es decir, de modo que $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$), la suma de cuyos volúmenes puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Para evaluar una integral triple sobre una caja podemos usar una versión tridimensional del teorema de Fubini.

TEOREMA 4.5 (TEOREMA DE FUBINI) Establezca f acotada en $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ y suponga que el conjunto S de discontinuidades de f tiene un volumen igual a cero. Si toda recta paralela a los ejes coordenados interseca S en un número finito de puntos, entonces

$$\iiint_B f\,dV$$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$$

$$= \int_c^d \int_a^b \int_p^q f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy = \int_c^d \int_p^q \int_a^b f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

EJEMPLO 1 Sea

$$B = [-2, 3] \times [0, 1] \times [0, 5], \quad \text{y sea} \quad f(x, y, z) = x^2e^y + xyz.$$

Por consiguiente, f es continua y por ello es evidente que satisface la hipótesis del teorema de Fubini. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iiint_B (x^2e^y + xyz)\,dV &= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} (x^2e^y + xyz)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} \left(x^2e^y z + \tfrac{1}{2}xyz^2\right)\Big|_{z=0}^{z=5} dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{1} \left(5x^2e^y + \tfrac{25}{2}xy\right) dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{3} \left(5x^2e^y + \tfrac{25}{4}xy^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_{-2}^{3} \left(5(e-1)x^2 + \tfrac{25}{4}x\right) dx \\
&= \left(\tfrac{5}{3}(e-1)x^3 + \tfrac{25}{8}x^2\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= \left(45(e-1) + \tfrac{225}{8}\right) - \left(-\tfrac{40}{3}(e-1) + \tfrac{25}{2}\right) \\
&= \tfrac{175}{3}(e-1) + \tfrac{125}{8}.
\end{aligned}$$

El lector puede comprobar que la integración en cualquiera de los cinco órdenes posibles produce el mismo resultado. ◆

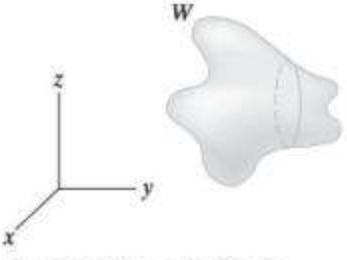


Figura 5.55 La función f es continua en W.

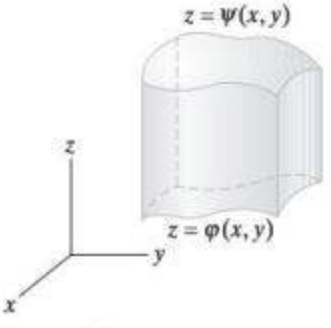


Figura 5.56 Una región elemental de tipo 1.

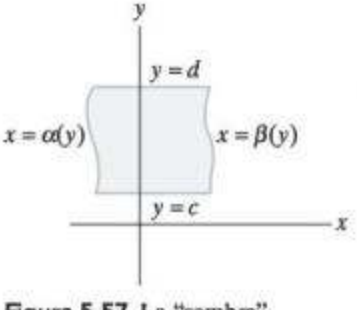


Figura 5.57 La "sombra" (proyección) de W en el plano xy debe ser una región elemental en el plano.

Regiones elementales en el espacio

Ahora suponga que W denota una región sólida arbitraria en el espacio, como una roca o un bloque de tofu. Suponga que f es una función continua definida en W, como una función de densidad de masa (véase la figura 5.55). Entonces la integral triple de f sobre W debe dar la masa total de W. Como fue el caso con las integrales dobles generales, necesitamos encontrar una forma apropiada de definir a $\iiint_W f\,dV$ y de calcularla en situaciones prácticas. El curso de acción es muy parecido al que seguimos antes: vemos el modo de calcular integrales sobre ciertos tipos de regiones elementales y tratamos integrales en regiones más generales subdividiéndolas en regiones de tipo elemental.

DEFINICIÓN 4.6 Decimos que W es una **región elemental** en el espacio si puede describirse como un subconjunto de $\mathbf{R}^3$ de uno de los cuatro tipos siguientes:

Tipo 1 (véanse las figuras 5.56 y 5.57)

a) $W = \{(x, y, z) \mid \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y),\ \gamma(x) \le y \le \delta(x),\ a \le x \le b\}$,

o bien,

b) $W = \{(x, y, z) \mid \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y),\ \alpha(y) \le x \le \beta(y),\ c \le y \le d\}$.

Tipo 2 (véase la figura 5.58)

a) $W = \{(x, y, z) \mid \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z),\ \gamma(z) \leq y \leq \delta(z),\ p \leq z \leq q\}$,
o bien,

b) $W = \{(x, y, z) \mid \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z),\ \varphi(y) \leq z \leq \psi(y),\ c \leq y \leq d\}$.

Tipo 3 (véase la figura 5.59)

a) $W = \{(x, y, z) \mid \gamma(x, z) \leq y \leq \delta(x, z),\ \alpha(z) \leq x \leq \beta(z),\ p \leq z \leq q\}$,
o bien,

b) $W = \{(x, y, z) \mid \gamma(x, z) \leq y \leq \delta(x, z),\ \varphi(x) \leq z \leq \psi(x),\ a \leq x \leq b\}$.

Tipo 4

W es de los tres tipos anteriores.

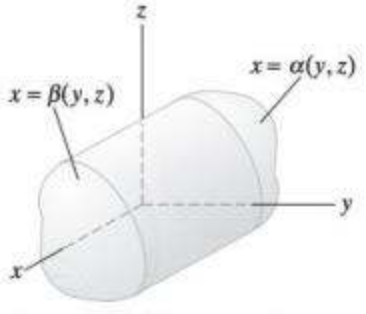


Figura 5.58 Para una región elemental del tipo 2, la sombra en el plano yz debe ser una región elemental en el plano.

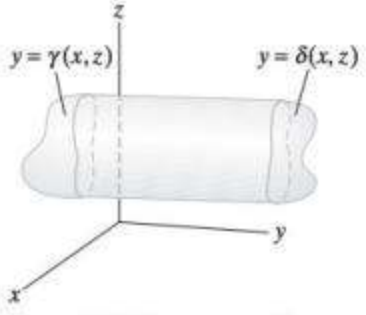


Figura 5.59 Para una región elemental de tipo 3, la sombra en el plano xz debe ser una región elemental en el plano.

Procede dar algunas explicaciones acerca de la definición 4.6. Una región elemental W de tipo 1 es una forma sólida cuyas superficies de frontera superior e inferior pueden describirse con ecuaciones que den a z como funciones de x y de y, *y tales que* la proyección de W en el plano xy (la "sombra"), a su vez, sea una región elemental en $\mathbf{R}^2$ (en el sentido de la definición 2.8). En forma similar, una región elemental de tipo 2 es aquella cuyas superficies de frontera delantera y trasera pueden describirse con ecuaciones que dan a x como funciones de y y z y cuya proyección en el plano yz es una región elemental en $\mathbf{R}^2$. Por último, una región elemental de tipo 3 es aquella cuyas superficies de frontera izquierda y derecha pueden describirse con ecuaciones que dan a y como funciones de x y z, y cuya proyección en el plano xz es una región elemental en $\mathbf{R}^2$. En cada caso, una región elemental en el espacio es aquella para la cual pueden encontrarse superficies de frontera descritas con ecuaciones en las que una de las variables es expresada en términos de las otras dos, y cuya "sombra" en el plano de estas dos últimas variables es una región elemental en $\mathbf{R}^2$ en el sentido de la definición 2.8.

EJEMPLO 2 Sea W la región sólida acotada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, donde $z \leq 0$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ (véase la figura 5.60). Es una región elemental de tipo 1, ya que podemos describirla como

$$W = \left\{(x, y, z) \mid -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2},\ -2 \leq x \leq 2\right\}.$$

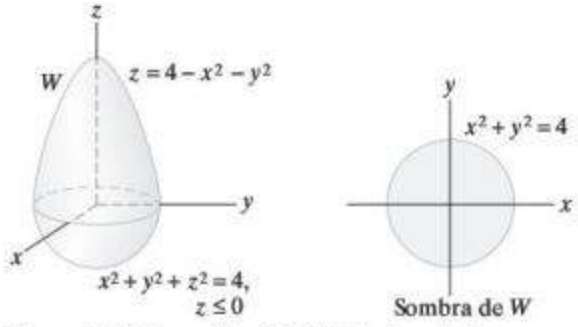


Figura 5.60 La región sólida W del ejemplo 2.

Esta descripción se obtuvo al observar que W está acotada arriba y abajo por un par de superficies, cada una de las cuales es la gráfica de una función de la forma $z = g(x, y)$ y la sombra de W en el plano xy es un disco D de radio 2, que elegimos describir como

$$D = \left\{(x, y) \middle| -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2\right\},$$

y que ya sabemos es una región elemental (de tipo 3) en el plano xy. ◆

EJEMPLO 3 El sólido acotado por el elipsoide

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b \text{ y } c \text{ son constantes positivas}$$

puede verse como una región elemental de tipo 4. Para ver que es de tipo 1, la superficie de frontera se parte en dos por el plano $z = 0$, como se ilustra en la figura 5.61. (Esto se hace en forma analítica resolviendo para z en la ecuación del elipsoide). Por consiguiente, la sombra D de E es la región dentro de la elipse en el plano xy que aparece en la figura 5.62.

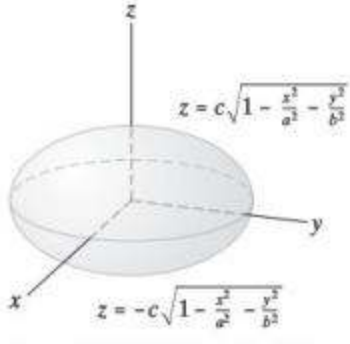


Figura 5.61 El elipsoide del ejemplo 3 como una región elemental de tipo 1.

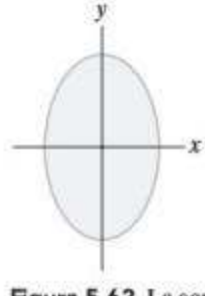


Figura 5.62 La sombra del elipsoide tipo 1 en la figura 5.61 es la región dentro de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el plano xy.

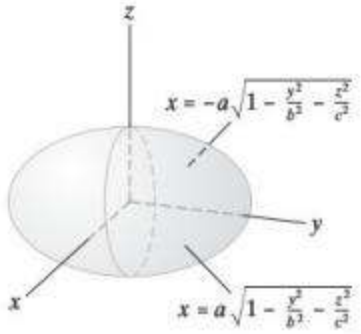


Figura 5.63 El elipsoide del ejemplo 3 como una región elemental de tipo 2.

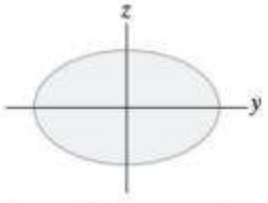


Figura 5.64 La sombra del elipsoide en la figura 5.63 es la región dentro de la elipse $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en el plano yz.

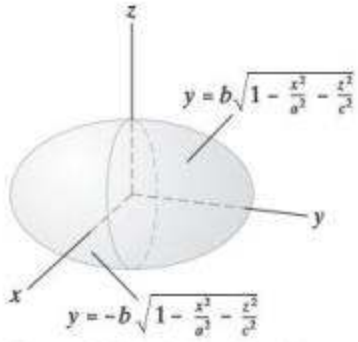


Figura 5.65 El elipsoide del ejemplo 3 como una región de tipo 3.

Tenemos

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ -a \le x \le a\right\}$$

$$= \left\{(x, y) \,\middle|\, -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \le x \le a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},\ -b \le y \le b\right\},$$

por lo que D es en efecto una región elemental de tipo 3 en $\mathbf{R}^2$.

Para ver que E es de tipo 2 se corta la frontera en el plano $x = 0$, como en la figura 5.63. La sombra en el plano yz es, otra vez, la región dentro de una elipse (véase la figura 5.64). Por último, para ver que E es de tipo 3 se corta a lo largo de $y = 0$ (véanse las figuras 5.65 y 5.66).

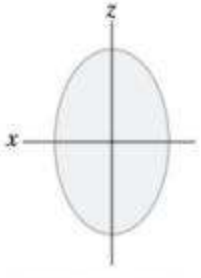


Figura 5.66 La sombra del elipsoide en la figura 5.65 en el plano xz.

Las integrales triples en general

Suponga que W es una región elemental en $\mathbf{R}^3$ y que f es una función continua sobre W. Entonces, igual que en el caso de las integrales dobles, definimos la **extensión** de f mediante

$$f^{\text{ext}}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in W \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \notin W \end{cases}.$$

Mediante el teorema 4.4, f^{ext} es integrable sobre cualquier caja B que contenga a W. Por consiguiente, podemos hacer la definición siguiente:

DEFINICIÓN 4.7 Con las suposiciones de que W es una región elemental y f es continua en W definimos la integral triple

$$\iiint_W f\,dV \quad \text{para que sea} \quad \iiint_B f^{\text{ext}}\,dV,$$

donde B es cualquier caja que contenga a W.

Utilizando una demostración análoga a la del teorema 2.10 establecemos lo siguiente:

TEOREMA 4.8 Sea W una región elemental en $\mathbf{R}^3$ y f una función continua en W.

1. Si W es de tipo 1 (como se describe en la definición 4.6), entonces

$$\iiint_W f\,dV = \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx, \qquad \text{(tipo 1a)}$$

o bien,

$$\iiint_W f\,dV = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy. \qquad \text{(tipo 1b)}$$

2. Si W es de tipo 2, entonces

$$\iiint_W f\,dV = \int_p^q \int_{\gamma(z)}^{\delta(z)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{(tipo 2a)}$$

o bien,

$$\iiint_W f\,dV = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy. \qquad \text{(tipo 2b)}$$

3. Si W es de tipo 3, entonces

$$\iiint_W f\,dV = \int_p^q \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} \int_{\gamma(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz, \qquad \text{(tipo 3a)}$$

o bien,

$$\iiint_W f\,dV = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{g(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx. \qquad \text{(tipo 3b)}$$

EJEMPLO 4 Sea que W denote al tetraedro (sólido) con vértices en (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) como se muestra en la figura 5.67. Suponga que la densidad de masa en un punto (x, y, z) dentro del tetraedro varía cuando $f(x, y, z) = 1 + xy$. Usaremos una integral triple para encontrar la masa total del tetraedro.

La masa total M es

$$\iiint_W f\,dV = \iiint_W (1 + xy)\,dV.$$

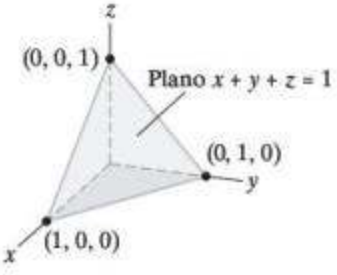


Figura 5.67 El tetraedro del ejemplo 4.

(Véase el comentario antes del teorema 4.4). Para evaluar esta integral triple usando integrales iteradas advierta que podemos considerar al tetraedro como una región elemental de tipo 1 (en realidad es de tipo 4, pero eso no importará). La cara inclinada es dada por la ecuación $x + y + z = 1$, la cual describe al plano que contiene los tres puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1). Por consiguiente, al integrar

primero con respecto de z y mantener constantes a x y a y,

$$M = \iint_{\text{sombra}} \left(\int_0^{1-x-y} (1 + xy)\, dz \right) dA$$

$$= \iint_{\text{sombra}} (1 + xy)(1 - x - y)\, dA$$

$$= \iint_{\text{sombra}} \left(1 - x - y + xy - x^2y - xy^2\right) dA.$$

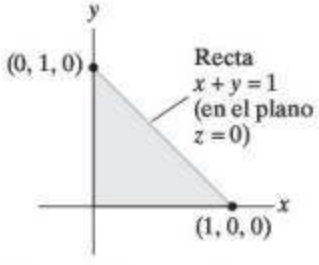


Figura 5.68 La sombra en el plano xy del tetraedro del ejemplo 4 es una región triangular.

La sombra de W en el plano xy tan solo es la región triangular mostrada en la figura 5.68. Por consiguiente,

$$M = \iint_{\text{sombra}} \left(1 - x - y + xy - x^2y - xy^2\right) dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(1 - x - y + xy - x^2y - xy^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left((1 - x) - x(1 - x) - \tfrac{1}{2}(1 - x)^2 + \tfrac{1}{2}x(1 - x)^2 \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2}x^2(1 - x)^2 - \tfrac{1}{3}x(1 - x)^3\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4\right) dx = \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{30}x^5\right)\Big|_0^1 = \tfrac{7}{40}.$$

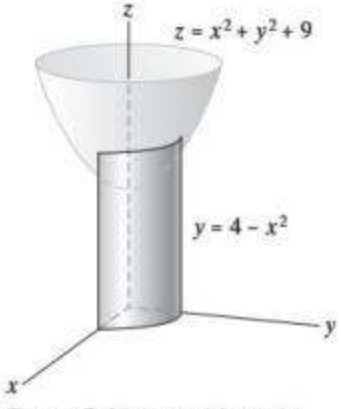


Figura 5.69 La región W del ejemplo 5.

Advierta que M también puede escribirse como una sola integral iterada, es decir,

$$M = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1 + xy)\, dz\, dy\, dx.$$ ◆

EJEMPLO 5 Calcularemos el volumen del sólido W que se encuentra en el primer octante y está acotado por los planos coordenados, el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 9$ y el cilindro parabólico $y = 4 - x^2$ (véase la figura 5.69).

Por definición, la integral triple es el límite de una suma ponderada de volúmenes de subcajas diminutas que llenan la región de la integración. Si las ponderaciones en la suma son por un total de 1, entonces obtenemos la siguiente aproximación del volumen:

$$V \approx \sum_{i,j,k} 1 \cdot \Delta V_{ijk}.$$

Por lo tanto, al calcular el límite cuando las dimensiones de las subcajas tienden a cero, tiene sentido definir:

$$V = \iiint_W 1\, dV.$$

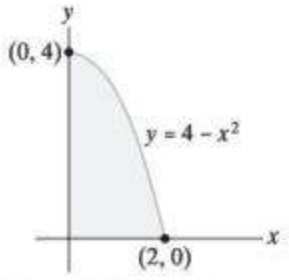


Figura 5.70 La sombra en el plano xy de la región en la figura 5.69.

En nuestra situación, W es una región tipo 1 cuya sombra en el plano xy se parece a la región que se muestra en la figura 5.70. Por consiguiente, mediante el teorema 4.4,

$$V = \iiint_W dV = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{x^2+y^2+9} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (x^2 + y^2 + 9)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 + 9y\Big|_{y=0}^{y=4-x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2(4-x^2) + \tfrac{1}{3}(4-x^2)^3 + 9(4-x^2) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{172}{3} - 21x^2 + 3x^4 - \tfrac{1}{3}x^6 \right) dx$$

$$= \left(\tfrac{172}{3}x - 7x^3 + \tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{21}x^7 \right)\Big|_0^2 = \tfrac{2512}{35}.$$

◆

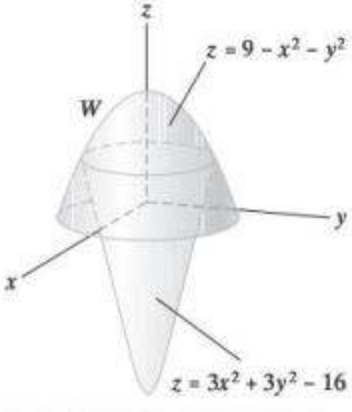


Figura 5.71 La región en forma de cápsula del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Encontraremos el volumen dentro de la cápsula acotada por los paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$ (véase la figura 5.71).

Otra vez tenemos que

$$V = \iiint_W 1\,dV,$$

y de nuevo la región de interés W es elemental de tipo 1. La sombra, o proyección, de W en el plano xy es determinada por

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{hay alguna } z \text{ tal que } (x, y, z) \in W\}.$$

Físicamente también es posible imaginar a la sombra como un agujero producido por permitir que W "caiga" a través del plano xy. En otras palabras, la sombra es la parte más ancha de W que es perpendicular al eje z. En la figura 5.71 puede verse que es determinada por la intersección de los dos paraboloides de frontera. La sombra en sí se muestra en la figura 5.72. La intersección se obtiene igualando las coordenadas z de los paraboloides de frontera. Por lo tanto,

$$9 - x^2 - y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 16 \iff 4x^2 + 4y^2 = 25$$
$$\iff x^2 + y^2 = \tfrac{25}{4} = \left(\tfrac{5}{2}\right)^2.$$

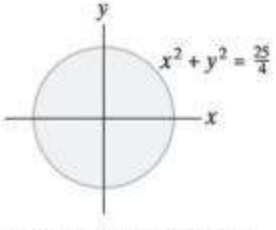


Figura 5.72 Sombra de la región W del ejemplo 6 obtenida por medio de la proyección, sobre el plano xy, de la intersección de las curvas de los paraboloides de la definición.

Así, de acuerdo con el teorema 4.4,

$$V = \iiint_W dV = \int_{-5/2}^{5/2} \int_{-\sqrt{25/4-x^2}}^{\sqrt{25/4-x^2}} \int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= 4 \int_0^{5/2} \int_0^{\sqrt{25/4-x^2}} \int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} dz\,dy\,dx.$$

Esta última integral iterada representa el volumen de un cuarto de la cápsula. Por consiguiente, para obtener el volumen total se multiplica este valor por 4. La razón

para hacer esta manipulación es que los cálculos posteriores sean lo más sencillos posible (aunque es evidente que es mejor que el siguiente cálculo lo haga una computadora).

Calculamos

$$\begin{aligned}
V &= 4\int_0^{5/2}\int_0^{\sqrt{25/4-x^2}}\int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} dz\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^{5/2}\int_0^{\sqrt{25/4-x^2}} (25-4x^2-4y^2)\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^{5/2}\left(25\sqrt{\tfrac{25}{4}-x^2}-4x^2\sqrt{\tfrac{25}{4}-x^2}-\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{25}{4}-x^2\right)^{3/2}\right)dx \\
&= 4\int_0^{5/2}\left((25-4x^2)\sqrt{\tfrac{25}{4}-x^2}-\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{25}{4}-x^2\right)^{3/2}\right)dx \\
&= 4\int_0^{5/2}\left(4\left(\tfrac{25}{4}-x^2\right)\sqrt{\tfrac{25}{4}-x^2}-\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{25}{4}-x^2\right)^{3/2}\right)dx \\
&= 4\int_0^{5/2}\left(4-\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{25}{4}-x^2\right)^{3/2}dx \\
&= \tfrac{32}{3}\int_0^{5/2}\left(\tfrac{25}{4}-x^2\right)^{3/2}dx.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $x = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$, de modo que $dx = \frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned}
V &= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{5}{2}\cos\theta\right)^3\frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta = \frac{1250}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta \\
&= \frac{1250}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)^2 d\theta \\
&= \frac{625}{6}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{625}{6}(\theta+\operatorname{sen}2\theta)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{625}{6}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\,d\theta \\
&= \frac{625}{12}\pi+\frac{625}{12}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \frac{625\pi}{8}.
\end{aligned}$$

◆

5.4 Ejercicios

Evalúe las integrales triples dadas en los ejercicios 1 a 3.

1. $\iiint_{[-1,1]\times[0,2]\times[1,3]} xyz\,dV$
2. $\iiint_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} (x^2+y^2+z^2)\,dV$
3. $\iiint_{[1,e]\times[1,e]\times[1,e]} \frac{1}{xyz}\,dV$
4. Encuentre el valor de $\iiint_W z\,dV$, donde $W = [-1, 2] \times [2, 5] \times [-3, 3]$ sin efectuar un cálculo explícito.

Evalúe las integrales iteradas de los ejercicios 5 a 7.

5. $\int_{-1}^{2}\int_{1}^{z^2}\int_{0}^{y+z} 3yz^2\,dx\,dy\,dz$

6. $\int_{1}^{3}\int_{0}^{z}\int_{1}^{xz}(x+2y+z)\,dy\,dx\,dz$

7. $\int_{0}^{1}\int_{1+y}^{2y}\int_{z}^{y+z} z\,dx\,dz\,dy$

8. *a*) Sea W una región elemental en $\mathbf{R}^3$. Use la definición de integral triple para explicar por qué $\iiint_W 1\,dV$ da el volumen de W.

b) Use el inciso anterior para encontrar el volumen de la región W acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 9 - x^2 - y^2$.

9. Utilice integrales triples para comprobar que el volumen de una esfera de radio a es $4\pi a^3/3$.

10. Use integrales triples para calcular el volumen de un cono de radio r y altura h (el lector tal vez quiera usar un sistema de álgebra por computadora para hacer el cálculo).

En los ejercicios 11 a 20 integre la función dada sobre la región W indicada.

11. $f(x, y, z) = 2x - y + z$; W es la región acotada por el cilindro $z = y^2$, el plano xy y los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = -2$, $y = 2$.

12. $f(x, y, z) = y$; W es la región limitada por el plano $x + y + z = 2$, el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y $y = 0$.

13. $f(x, y, z) = 8xyz$; W es la región cuyos límites son el cilindro $y = x^2$, el plano $y + z = 9$ y el plano xy.

14. $f(x, y, z) = z$; W es la región en el primer octante limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $y = x$, $x = 0$ y $z = 0$.

15. $f(x, y, z) = 1 - z^2$; W es el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

16. $f(x, y, z) = 3x$; W es la región en el primer octante acotada por $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 4$.

17. $f(x, y, z) = x + y$; W es la región cuyos límites son el cilindro $x^2 + 3z^2 = 9$ y los planos $y = 0$, $x + y = 3$.

18. $f(x, y, z) = z$; W es la región acotada por $z = 0$, $x^2 + 4y^2 = 4$ y $z = x + 2$.

19. $f(x, y, z) = 4x + y$; W es la región cuyos límites son $x = y^2$, $y = z$, $x = y$ y $z = 0$.

20. $f(x, y, z) = x$; W es la región en el primer octante limitada por $z = x^2 + 2y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$, $x = 0$ y $y = 0$.

21. Encuentre el volumen del sólido acotado por $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$ y los planos coordenados.

22. Calcule el volumen del sólido cuyos límites son los planos $y = 0$, $z = 0$, $2y + z = 6$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

23. Determine el volumen del sólido acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ y el cilindro $y^2 + z = 2$.

24. Obtenga el volumen de la región que está dentro de los cilindros: $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

25. Considere la integral iterada

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy.$$

Dibuje la región de integración y reescriba la integral como una equivalente iterada en cada uno de los otros cinco órdenes de integración.

26. Cambie el orden de integración de

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$$

para dar otras cinco integrales iteradas equivalentes.

27. Cambie el orden de integración de

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

a fin de dar otras cinco integrales iteradas equivalentes.

28. Considere la integral iterada

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}}\int_{5x^2}^{36-4x^2-4y^2} 2\,dz\,dy\,dx.$$

a) Esta integral es igual a una integral triple sobre una región sólida W en $\mathbf{R}^3$. Describa W.

b) Plantee una integral iterada equivalente integrando primero con respecto de z, después con respecto de x, luego con respecto de y. No evalúe su respuesta.

c) Escriba una integral iterada equivalente integrando primero con respecto de y, luego con respecto de z y finalmente con respecto de x. No evalúe su respuesta.

d) Ahora considere integrar primero con respecto de y, después con respecto de x y luego con respecto de z. Escriba una *suma* de integrales iteradas que al evaluarse produzca el mismo resultado. No evalúe su respuesta.

e) Repita el inciso *d*) para la integración con respecto de x en primer lugar, después con respecto de z y luego con respecto de y.

29. Considere la integral iterada

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+3y^2}^{4-y^2}(x^3 + y^3)\,dz\,dy\,dx.$$

a) Esta integral es igual a una integral triple sobre una región sólida W en $\mathbf{R}^3$. Describa W.

b) Plantee una integral iterada equivalente integrando primero con respecto de z, luego con respecto de x y después con respecto de y. No evalúe su respuesta.

c) Dé una integral iterada equivalente integrando primero con respecto de x, luego con respecto de z y después con respecto de y. No evalúe su respuesta.

d) Ahora considere integrar primero con respecto de x, luego con respecto de y y después con respecto de z. Plantee una *suma* de integrales iteradas que, cuando se evalúe, dé el mismo resultado. No evalúe su respuesta.

e) Repita el inciso *d*) para la integración primero con respecto de y, luego con respecto de z y después con respecto de x.

5.5 Cambio de variables

Como lo sugieren algunos ejemplos de las secciones anteriores, la evaluación de una integral múltiple mediante integrales iteradas puede ser un proceso complicado. Tanto el integrando como la región de integración pueden generar dificultades de cálculo. Nuestro objetivo en esta sección es ver formas en las que los cambios en las coordenadas pueden emplearse para transformar integrales iteradas en otras que sean relativamente fáciles de calcular. Comenzaremos por estudiar las transformaciones de coordenadas en sí y cómo estas afectan a las integrales relevantes.

Transformación de coordenadas

Sea $\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un mapa de clase C^1 que transforma el plano uv en el plano xy. Nos interesa en particular la forma en que ciertos subconjuntos D^* del plano uv se distorsionan bajo $\mathbf{T}$ en subconjuntos D del plano xy (véase la figura 5.73).

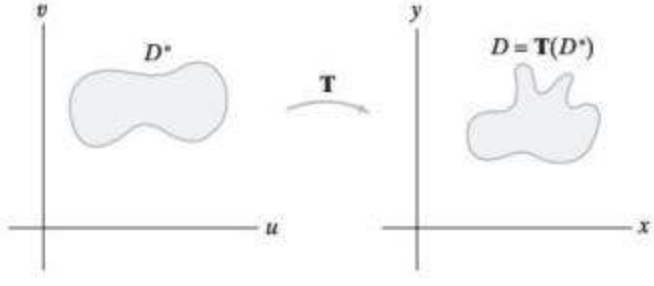


Figura 5.73 La transformación $\mathbf{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ lleva al conjunto D^* en el plano uv al subconjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) = \mathbf{T}(u, v)$ para ciertas $(u, v) \in D^*\}$ del plano xy.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{T}(u, v) = (u + 1, v + 2)$; es decir, sea $x = u + 1$, $y = v + 2$. Esta transformación traslada el origen en el plano uv al punto $(1, 2)$ en el plano xy y cambia los demás puntos en concordancia con ello. El cuadrado unitario $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$, por ejemplo, es cambiado una unidad a la derecha y dos unidades arriba, pero en lo demás permanece sin cambio, como se aprecia en la figura 5.74. Así, la imagen de D^* es $D = [1, 2] \times [2, 3]$. ◆

EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{S}(u, v) = (2u, 3v)$. El origen se deja fijo, pero $\mathbf{S}$ estira todos los demás puntos en un factor de 2 en la dirección horizontal y mediante un factor de tres en la vertical (véase la figura 5.75). ◆

EJEMPLO 3 Al componer las transformaciones en los ejemplos 1 y 2 se obtiene

$$(\mathbf{T} \circ \mathbf{S})(u, v) = \mathbf{T}(2u, 3v) = (2u + 1, 3v + 2).$$

Esta transformación estira y traslada, como se aprecia en la figura 5.76. ◆

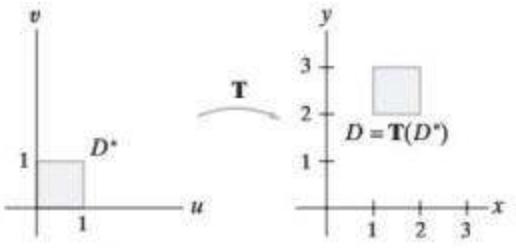


Figura 5.74 La imagen de $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ es $D = [1, 2] \times [2, 3]$ con la transformación $\mathbf{T}(u, v) = (u + 1, v + 2)$ del ejemplo 1.

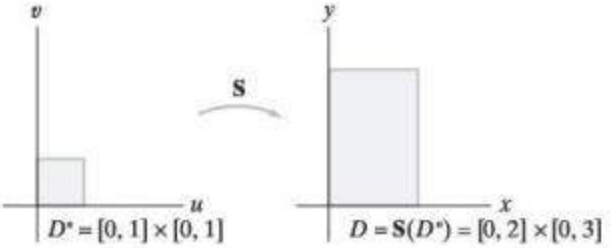


Figura 5.75 La transformación **S** del ejemplo 2 es un escalamiento mediante un factor de 2 en la dirección horizontal y de 3 en la vertical.

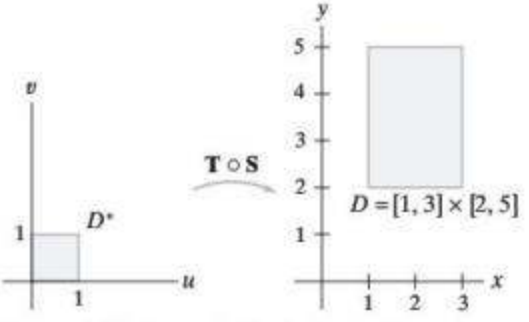


Figura 5.76 Composición de las transformaciones de los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{T}(u, v) = (u + v, u - v)$. Debido a que cada una de las funciones componente de **T** involucra a las dos variables, u y v, es menos obvio cómo se transforma el cuadrado unitario $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$. Podemos darnos una idea de la geometría viendo cómo **T** mapea los bordes de D^*:

$$\begin{aligned}
&\text{Borde inferior:} && (u, 0), && 0 \le u \le 1; && \mathbf{T}(u, 0) = (u, u);\\
&\text{Borde superior:} && (u, 1), && 0 \le u \le 1; && \mathbf{T}(u, 1) = (u + 1, u - 1);\\
&\text{Borde izquierdo:} && (0, v), && 0 \le v \le 1; && \mathbf{T}(0, v) = (v, -v);\\
&\text{Borde derecho:} && (1, v), && 0 \le v \le 1; && \mathbf{T}(1, v) = (v + 1, 1 - v).
\end{aligned}$$

Al dibujar las imágenes de los bordes se hace plausible que aparezca la imagen de D^* sujeta a **T** como se aprecia en la figura 5.77. ◆

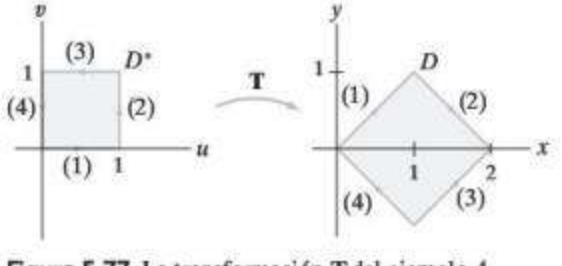


Figura 5.77 La transformación **T** del ejemplo 4.

Más en general, consideremos las **transformaciones lineales** $\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definidas por

$$\mathbf{T}(u, v) = (au + bv, cu + dv) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

donde a, b, c y d son constantes. (Nota: el vector (u, v) se identifica con la matriz de $2 \times 1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$). En la proposición siguiente se establece un resultado general:

PROPOSICIÓN 5.1 Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $\det A \neq 0$. Si $\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es definida por

$$\mathbf{T}(u, v) = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{T}$ es uno a uno, suprayectiva, convierte paralelogramos en paralelogramos y los vértices de estos en vértices (se invita al lector a revisar en la sección 2.1 los conceptos de las funciones uno a uno y las funciones suprayectivas). Además, si D^* es un paralelogramo en el plano uv que se mapea en el paralelogramo $D = \mathbf{T}(D^*)$ en el plano xy, entonces

$$\text{Área de } D = |\det A| \cdot (\text{Área de } D^*).$$

EJEMPLO 5 Escribiremos la transformación $\mathbf{T}(u, v) = (u + v, u - v)$ del ejemplo 4 como

$$\mathbf{T}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Por consiguiente, la proposición 5.1 dice que el cuadrado $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ debe ser mapeado a un paralelogramo $D = \mathbf{T}(D^*)$ cuyos vértices son

$$\mathbf{T}(0, 0) = (0, 0), \quad \mathbf{T}(0, 1) = (1, -1), \quad \mathbf{T}(1, 0) = (1, 1), \quad \mathbf{T}(1, 1) = (2, 0).$$

Por lo tanto, la figura 5.77 es correcta y, de acuerdo con la proposición 5.1, podría haberse obtenido rápidamente. Asimismo, advierta que el área de D es $|-2| \cdot 1 = 2$. ◆

Demostración de la proposición 5.1 En primer lugar demostremos que $\mathbf{T}$ es uno a uno. Para ello supongamos que $\mathbf{T}(u, v) = \mathbf{T}(u', v')$. Se prueba, por consiguiente, que $u = u'$ y que $v = v'$. Tenemos que

$$\mathbf{T}(u, v) = \mathbf{T}(u', v')$$

si y solo si

$$(au + bu, cu + dv) = (au' + bv', cu' + du').$$

Al igualar sus componentes y simplificar, vemos que equivalen al sistema

$$\begin{cases} a(u - u') + b(v - v') = 0 \\ c(u - u') + d(v - v') = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

Si $a \neq 0$, entonces podemos usar la primera ecuación para resolver $u - u'$:

$$u - u' = -\frac{b}{a}(v - v') \tag{2}$$

Así, la segunda ecuación en (1) se convierte en

$$-\frac{bc}{a}(v - v') + d(v - v') = 0$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{-bc + ad}{a}(v - v') = 0.$$

Por hipótesis, $\det A = ad - bc \neq 0$. Por consiguiente, debe tener $v - v' = 0$ y, por lo tanto, $u - u' = 0$ mediante la ecuación (2). Si $a = 0$, entonces debemos tener que $b \neq 0$ y $c \neq 0$, puesto que $\det A \neq 0$. En consecuencia, el sistema (1) se convierte en este

$$\begin{cases} b(v - v') & = 0 \\ c(u - u') + d(v - v') & = 0 \end{cases}.$$

La primera ecuación implica que $v - v' = 0$ y, en consecuencia, la segunda se convierte en $c(u - u') = 0$, lo que a su vez implica que $u - u' = 0$, como se buscaba.

Para ver que $\mathbf{T}$ es una función suprayectiva, debemos demostrar que, dado cualquier punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, podemos encontrar $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, tal que $\mathbf{T}(u, v) = (x, y)$. Esto es equivalente a resolver el par de ecuaciones

$$\begin{cases} au + bv = x \\ cu + dv = y \end{cases}$$

para u y v. Dejamos como ejercicio para el lector comprobar que

$$u = \frac{dx - by}{ad - bc} \quad \text{y que} \quad v = \frac{ay - cx}{ad - bc}$$

también se cumplen.

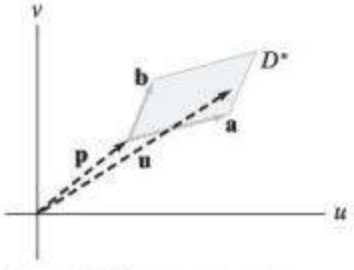


Figura 5.78 Los vértices de $D^* = \{\mathbf{p} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid 0 \leq s, t \leq 1\}$ están en $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} + \mathbf{a}$, $\mathbf{p} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p} + \mathbf{a} + \mathbf{b}$, es decir, donde s y t adoptan los valores 0 o 1.

Ahora, sea D^* un paralelogramo en el plano uv (véase la figura 5.78). Entonces D^* puede describirse como

$$D^* = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{p} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} D = \mathbf{T}(D^*) &= \{A\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in D\} \\ &= \{A(\mathbf{p} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \mid 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{A\mathbf{p} + sA\mathbf{a} + tA\mathbf{b} \mid 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Si se hace $\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$, $\mathbf{a}' = A\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}' = A\mathbf{b}$, entonces

$$D = \{\mathbf{p}' + s\mathbf{a}' + t\mathbf{b}' \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Así, D también es un paralelogramo y, además, los vértices de D corresponden a los de D^* (véase la figura 5.79).

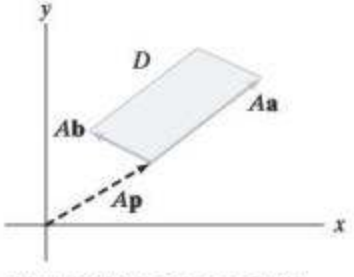


Figura 5.79 La imagen D del paralelogramo D^* sujeto a la transformación lineal $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$.

Por último, advierta que el área del paralelogramo D^* cuyos lados son paralelos a

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

puede calcularse como sigue:

$$\text{Área de } D^* = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix} \right\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

En forma similar, el área de $D = \mathbf{T}(D^*)$ cuyos lados son paralelos a

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \end{bmatrix}$$

es

$$\text{Área de } D = \|\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'\| = |a_1' b_2' - a_2' b_1'|.$$

Ahora, $\mathbf{a}' = A\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}' = A\mathbf{b}$. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 + ba_2 \\ ca_1 + da_2 \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab_1 + bb_2 \\ cb_1 + db_2 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, con una sustitución apropiada y el álgebra respectiva se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{Área de } D &= |(aa_1 + ba_2)(cb_1 + db_2) - (ca_1 + da_2)(ab_1 + bb_2)| \\ &= |(ad - bc)(a_1 b_2 - a_2 b_1)| \\ &= |\det A| \cdot \text{área de } D^*. \end{aligned}$$

Advierta que no hemos excluido la posibilidad de que las D^* sean un paralelogramo "degenerado", es decir, tal que sus lados adyacentes estén representados por vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es un escalar múltiplo de $\mathbf{a}$. Cuando esto suceda D también será un paralelogramo degenerado. La suposición de que $\det A \neq 0$ garantiza que un paralelogramo no degenerado D^* será transformado en otro paralelogramo no degenerado, aunque no hemos demostrado esto. ■

En esencia, todos los comentarios anteriores pueden adaptarse al caso tridimensional. Omitimos el formalismo y en su lugar estudiaremos brevemente un ejemplo.

EJEMPLO 6 Sea $\mathbf{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$\mathbf{T}(u, v, w) = (2u, 2u + 3v + w, 3w).$$

Entonces reescribimos $\mathbf{T}$ utilizando la multiplicación de matrices:

$$\mathbf{T}(u, v, w) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Advierta que si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces $\det A = 18 \neq 0$.

Un resultado análogo a la proposición 5.1 nos permite concluir que **T** es uno a uno y suprayectiva, y que **T** mapea paralelepípedos a paralelepípedos. En particular, el cubo unitario

$$D^* = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

es mapeado en algún paralelepípedo $D = \mathbf{T}(D^*)$ y, además, el volumen de D debe ser

$$|\det A| \cdot \text{volumen de } D^* = 18 \cdot 1 = 18.$$

Para obtener D solo necesitamos determinar las imágenes de los vértices del cubo:

$$T(0, 0, 0) = (0, 0, 0); \quad T(1, 0, 0) = (2, 2, 0); \quad T(0, 1, 0) = (0, 3, 0);$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 1, 3); \quad T(1, 1, 0) = (2, 5, 0); \quad T(1, 0, 1) = (2, 3, 3);$$
$$T(0, 1, 1) = (0, 4, 3); \quad T(1, 1, 1) = (2, 6, 3).$$

En la figura 5.80 se muestran tanto D^* como su imagen D. ◆

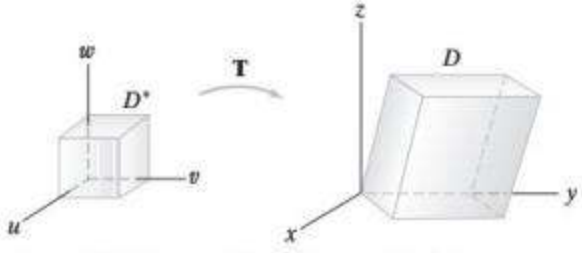


Figura 5.80 El cubo D^* y su imagen D bajo la transformación lineal del ejemplo 6.

EJEMPLO 7 Por supuesto, no todas las transformaciones son lineales. Considere

$$(x, y) = \mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

Observe que **T** no es uno a uno porque $\mathbf{T}(0, 0) = (0, 0) = \mathbf{T}(0, \pi)$. (Por consiguiente, $\mathbf{T}(0, \theta) = (0, 0)$ para todos los números reales θ). Observe que las rectas verticales en el plano $r\theta$ dadas por $r = a$, donde a es una constante, son mapeadas a los puntos $(x, y) = (a \cos \theta, a \operatorname{sen} \theta)$ sobre un círculo de radio a. Los rayos horizontales $\{(r, \theta) \mid \theta = \alpha, r \geq 0\}$ son mapeados a rayos que emanan del origen (véase la figura 5.81). Se sigue que el rectángulo $D^* = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \pi]$ en el plano $r\theta$ no es mapeado

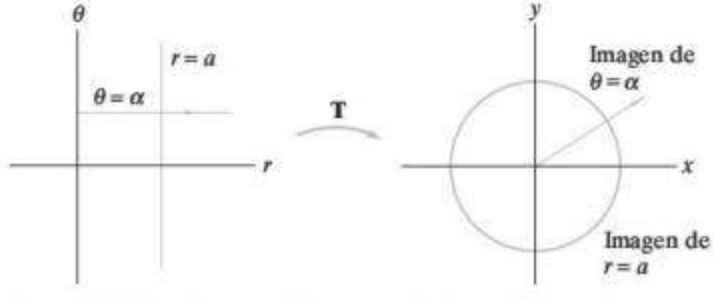


Figura 5.81 Las imágenes de rectas en el plano $r\theta$ sujetas a la transformación $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$.

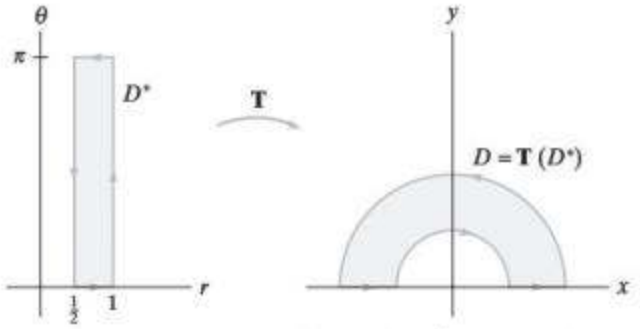


Figura 5.82 Imagen del rectángulo $D^* = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \pi]$ sujeto a $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$.

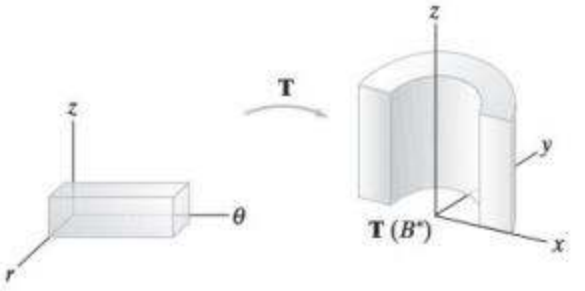


Figura 5.83 Imagen de $B^* = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \pi] \times [0, 1]$ sujeto a $\mathbf{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$.

en un paralelogramo, sino doblado en una región D que es parte de la región anular entre círculos de radio $\frac{1}{2}$ y 1, como se aprecia en la figura 5.82.

De manera análoga, la transformación $\mathbf{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$(x, y, z) = \mathbf{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

dobla la caja sólida $B^* = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \pi] \times [0, 1]$ en un sólido con forma de herradura (véase la figura 5.83). ◆

Cambio de variables en integrales definidas

Ahora veremos el efecto que una transformación de coordenadas tiene sobre las integrales y cómo aprovecharlo. Para comenzar, considere el lector un caso con el que está familiarizado, es decir, el de la sustitución en integrales de una variable.

EJEMPLO 8 Considere la integral definida $\int_0^2 2x \cos(x^2)\, dx$. Para evaluarla lo normal es hacer la sustitución $u = x^2$ (de modo que $du = 2x\, dx$). Al hacerlo se obtiene

$$\int_0^2 2x \cos(x^2)\, dx = \int_0^4 \cos u\, du = \operatorname{sen} u \Big|_{u=0}^{u=4} = \operatorname{sen} 4.$$

Analicemos este ejemplo con más detalle. Antes que nada, la sustitución $u = x^2$ puede reescribirse (con la restricción de que x solo adopte valores no negativos) como $x = \sqrt{u}$. Entonces $dx = du/(2\sqrt{u})$ y

$$\int_0^2 2x \cos(x^2) dx = \int_0^4 2\sqrt{u} \cos(\sqrt{u})^2 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^4 \cos u\, du = \operatorname{sen} 4.$$

En otras palabras, la sustitución es tal que el factor $2x = 2\sqrt{u}$ en el integrando es cancelado por la parte funcional de la diferencial $dx = du/(2\sqrt{u})$. De esta manera, el resultado es una integral sencilla. ◆

En general, el método de sustitución funciona como sigue: dada una integral definida (tal vez complicada), $\int_A^B f(x)\, dx$, se hace la sustitución $x = x(u)$, donde x es de clase C^1. Por consiguiente, $dx = x'(u)\, du$. Si $A = x(a)$, $B = x(b)$ y $x'(u) \neq 0$ para u entre a y b, de modo que

$$\int_A^B f(x)\, dx = \int_a^b f(x(u))x'(u)\, du. \tag{3}$$

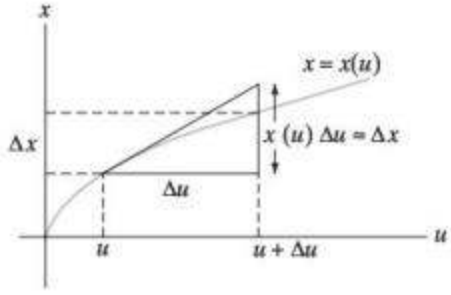


Figura 5.84 Cuando $\Delta u = du \to 0$, $\Delta x \to dx = x'(u)\,\Delta u$. Así, el factor $x'(u)$ mide la forma en que se relaciona la longitud en la dirección u con la longitud en la dirección x.

Advierta que es posible tener $a > b$ en la ecuación (3) mencionada (esto ocurre si $x(u)$ es decreciente). Aunque la integral en u en la ecuación (3) a primera vista parece más complicada que la integral en x, el ejemplo 8 ilustra que en realidad sucede lo contrario.

Más allá del formalismo algebraico de la sustitución de una variable en la ecuación (3), es útil observar que el término $x'(u)$ representa el "factor de distorsión de longitud infinitesimal" involucrado en el cambio de la medida en u a la medida en x (véase la figura 5.84). A continuación intentaremos comprender cómo pueden adaptarse estas ideas al caso de las integrales múltiples.

El teorema del cambio de variables en integrales dobles

Suponga el lector que tiene una transformación de coordenadas diferenciable desde el plano uv hasta el plano xy. Es decir,

$$\mathbf{T}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

DEFINICIÓN 5.2 El **jacobiano** de la transformación $\mathbf{T}$ que se denota con

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

es el determinante de la matriz de derivadas $D\mathbf{T}(u, v)$. Es decir,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det D\mathbf{T}(u, v) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

La notación $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el jacobiano es una conveniencia histórica. El jacobiano *no es* una derivada parcial, sino el *determinante* de la *matriz* de derivadas parciales. Desempeña el papel de un "factor de distorsión de área infinitesimal" cuando se hace un cambio de variables en integrales dobles, como se plantea en el siguiente resultado clave:

TEOREMA 5.3 (CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES) Sean D y D^* regiones elementales en el plano xy y en el plano uv (respectivamente). Suponga que $\mathbf{T}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una transformación de coordenadas de clase C^1 que mapea D^* en D de modo uno a uno. Si f: $D \to \mathbf{R}$ es cualquier función integrable y usamos la transformación $\mathbf{T}$ para hacer la sustitución $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

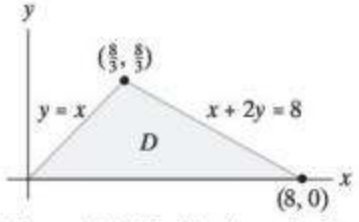


Figura 5.85 Región triangular D del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Usaremos el teorema 5.3 para calcular la integral

$$\iint_D \cos(x + 2y)\,\text{sen}(x - y)\,dx\,dy$$

sobre la región triangular D acotada por las rectas $y = 0$, $y = x$ y $x + 2y = 8$, como se aprecia en la figura 5.85. Es posible evaluar esta integral utilizando los métodos relativamente sencillos de la sección 5.2. Sin embargo, como esto sería difícil, en vez de hacer eso haremos una transformación apropiada de variables, motivada en este caso por la naturaleza del integrando. En particular, sean $u = x + 2y$, $v = x - y$. Al resolver para x y y se obtiene

$$x = \frac{u + 2v}{3} \quad \text{y} \quad y = \frac{u - v}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{3}.$$

Considerando la transformación de coordenadas como un mapeo $\mathbf{T}(u, v) = (x, y)$ del plano, necesitamos identificar una región D^* que mapee $\mathbf{T}$ en forma uno a uno en D. Para hacer esto todo lo que se necesita, en esencia, es considerar las fronteras de D:

$$\begin{aligned} y = x &\iff x - y = 0 \iff v = 0; \\ x + 2y = 8 &\iff u = 8; \\ y = 0 &\iff \frac{u - v}{3} = 0 \iff v = u. \end{aligned}$$

Así, puede verse que $\mathbf{T}$ transforma la región D^* que se ilustra en la figura 5.86 en D. Por lo tanto, al aplicar el teorema 5.3,

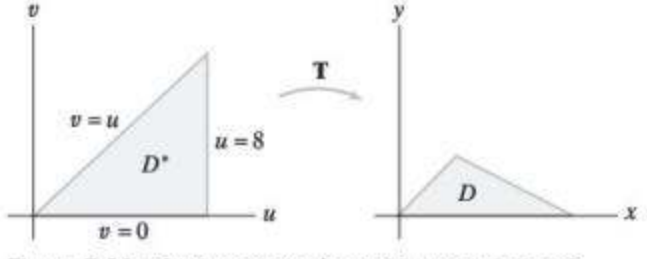


Figura 5.86 Efecto de la transformación $\mathbf{T}$ del ejemplo 9.

$$\iint_D \cos(x+2y)\,\operatorname{sen}(x-y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} \cos u \operatorname{sen} v \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{D^*} \cos u \operatorname{sen} v \left|-\tfrac{1}{3}\right| du\,dv$$

$$= \int_0^8 \int_0^u \tfrac{1}{3} \cos u \operatorname{sen} v\, dv\, du$$

$$= \int_0^8 \tfrac{1}{3} \cos u(-\cos v)\Big|_{v=0}^{v=u} du$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_0^8 \cos u(-\cos u + 1)\, du$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_0^8 (\cos u - \cos^2 u)\, du$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[\operatorname{sen} u\Big|_0^8 - \int_0^8 \tfrac{1}{2}(1+\cos 2u)\, du\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[\operatorname{sen} 8 - \left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u\right)\Big|_0^8\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[\operatorname{sen} 8 - 4 - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 16\right].$$

Existe otra manera más rápida de calcular el jacobiano, que consiste en obtener $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ directamente de la transformación de variables y luego tomar los recíprocos. Es decir, de las ecuaciones $u = x + 2y$, $v = x - y$, se tiene

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3.$$

En consecuencia, $\partial(x, y)/\partial(u, v) = -\frac{1}{3}$, lo que coincide con el resultado anterior. Este método funciona porque si $\mathbf{T}(u, v) = (x, y)$, entonces, bajo las suposiciones del teorema 5.3, $(u, v) = \mathbf{T}^{-1}(x, y)$. De la regla de la cadena se sigue que

$$D\mathbf{T}^{-1}(x, y) = [D\mathbf{T}(u, v)]^{-1}.$$

(Es decir, $D\mathbf{T}^{-1}$ es la matriz inversa de $D\mathbf{T}$. Para saber más acerca de las matrices inversas, vea los ejercicios 30 a 38 en la sección 1.6). En consecuencia,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left[D\mathbf{T}^{-1}\right] = \det\left[(D\mathbf{T})^{-1}\right] = \frac{1}{\det D\mathbf{T}}.$$

◆

EJEMPLO 10 Usaremos el teorema 5.3 para evaluar $\iint_D (x^2 - y^2)e^{xy}\,dx\,dy$, donde D es la región en el primer cuadrante, limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 4$ y las rectas $y = x$, $y = x + 2$ (véase la figura 5.87).

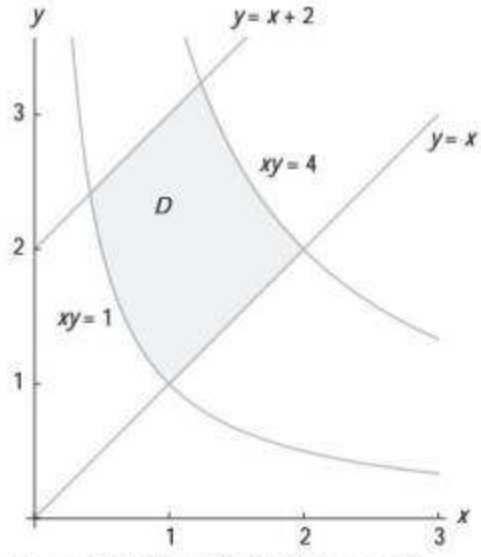


Figura 5.87 La región D del ejemplo 10.

Tanto el integrando como la región presentan complicaciones para su evaluación. Parecería que hay dos formas naturales entre las que se puede elegir para transformar las variables. Una sería

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = xy,$$

motivada por la naturaleza del integrando. Sin embargo, no sería fácil describir la región D de integración en términos de esta elección particular de coordenadas uv. La otra forma en que se podrían transformar las variables, motivada por la forma de D, es

$$u = xy \quad \text{y} \quad v = y - x.$$

En este momento parecería que este cambio de variables no ayuda mucho con el integrando pero, como veremos, es exactamente lo que necesitamos.

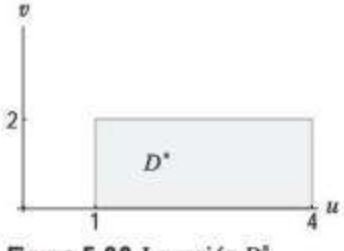


Figura 5.88 La región D^* correspondiente a la región D del ejemplo 10.

En primer lugar, observe que las hipérbolas de la frontera $xy = 1$ y $xy = 4$ corresponden, respectivamente, a las rectas $u = 1$ y $u = 4$; las rectas $y = x$ y $y = x + 2$ corresponden a $v = 0$ y a $v = 2$. Así, la región D^* en el plano uv que corresponde a D es (véase la figura 5.88)

$$D^* = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 2\}.$$

A continuación calculamos el jacobiano de la transformación de variables, que es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = x + y.$$

En consecuencia, el jacobiano que necesitamos para usar el teorema 5.3 es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{x + y}.$$

Además, como estaremos en el primer cuadrante (donde x y y son positivas), $|\partial(x, y)/\partial(u, v)| = 1/(x + y)$.

Al fin podemos calcular:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 - y^2)e^{xy}\,dx\,dy &= \iint_{D^*} (x^2 - y^2)e^{xy}\left(\frac{1}{x+y}\right)du\,dv \\ &= \int_0^2 \int_1^4 \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} e^{xy}\,du\,dv \\ &= \int_0^2 \int_1^4 -ve^u\,du\,dv \\ &= \int_0^2 -v(e^4 - e^1)\,dv = -\frac{v^2}{2}(e^4 - e^1)\Big|_0^2 = 2(e - e^4).\end{aligned}$$

Observe que la inserción del jacobiano en el integrando causó precisamente la cancelación que se necesitaba para hacer posible la evaluación. No podemos esperar que siempre ocurra esto, pero la lección que se extrae es que se debe estar dispuesto a hacer algunos cálculos que a primera vista no parecen fáciles. ◆

EJEMPLO 11 (Integrales dobles en coordenadas polares) En el ejemplo 9, la transformación de coordenadas se escogió sobre todo para simplificar el integrando de la doble integral. En este ejemplo cambiamos las variables utilizando un sistema de coordenadas mejor adaptado a la geometría de la región de integración.

Por ejemplo, suponga que la región D es un disco de radio a:

$$\begin{aligned}D &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a\} \\ &= \left\{(x, y) \mid -\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2},\ -a \le x \le a\right\}.\end{aligned}$$

Entonces, para integrar cualquier función f integrada (integrable) sobre D en coordenadas cartesianas podría escribirse

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Incluso si de inicio es fácil encontrar una antiderivada parcial del integrando, los límites en la integral doble anterior podrían complicar considerablemente el trabajo. Esto es porque el disco se describió en forma bastante difícil por medio de coordenadas cartesianas. Sin embargo, sabemos que tiene una descripción mucho más conveniente en coordenadas polares cuando

$$\{(r, \theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Esto sugiere que podemos hacer el cambio de variables,

$$(x, y) = \mathbf{T}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta),$$

lo que se muestra en la figura 5.89 (observe que $\mathbf{T}$ mapea todos los puntos de la forma $(0, \theta)$ al origen en el plano xy, por lo que no puede mapear D^* en una forma uno a uno en D. No obstante, los puntos de D^* sobre los cuales $\mathbf{T}$ no es uno a uno llenan un segmento de recta —un objeto unidimensional— y no afectarán la transformación de la integral doble). El jacobiano para este cambio de variables es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta = r.$$

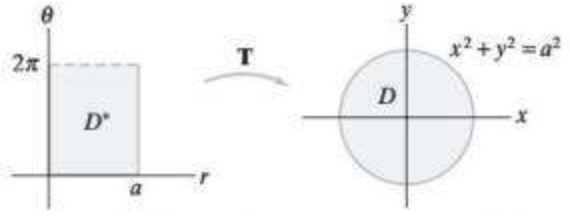


Figura 5.89 **T** mapea el rectángulo (no cerrado) D^* hacia el disco D de radio a.

(Advierta que $r \geq 0$ en D, por lo que $|r| = r$). Por consiguiente, utilizando el teorema 5.3 es posible evaluar la integral doble por medio de coordenadas polares como sigue:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Es evidente que los límites de integración de las integrales $r\theta$ son mucho más sencillos que los de la integral xy. Por supuesto, la sustitución en el integrando puede dar como resultado una expresión más complicada, pero en muchas situaciones no será este el caso. Las transformaciones a coordenadas polares probarán ser convenientes sobre todo cuando se trate de regiones cuyas fronteras sean segmentos de círculo. ◆

EJEMPLO 12 Para ver "en acción" a las coordenadas polares calcularemos el área de un círculo utilizando integrales dobles. Una vez más, sea D el disco de radio a, con centro en el origen como se ilustra en la figura 5.90. Entonces tenemos

$$\text{Área} = \iint_D 1\,dA = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx = \int_0^{2\pi} \int_0^a r\,dr\,d\theta,$$

según lo visto en el ejemplo 11. La última integral iterada se evalúa fácilmente como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}r^2\Big|_0^a\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}a^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}a^2(2\pi - 0) = \pi a^2,$$

que coincide con lo que ya sabíamos. Si se siente muy motivado, compare este cálculo con la evaluación de la integral iterada en coordenadas cartesianas. Sin duda estará de acuerdo con que el uso de coordenadas polares ofrece ventajas evidentes. ◆

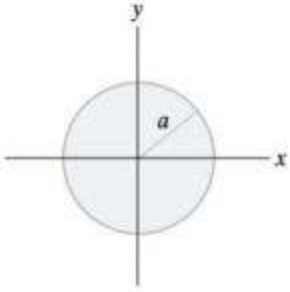


Figura 5.90 Disco de radio a con centro en el origen.

EJEMPLO 13 Evaluaremos la integral doble $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dx\,dy$, donde D es el cuarto de disco que aparece en la figura 5.91 por medio de coordenadas polares. La región D de integración es dada en coordenadas cartesianas por

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2},\ 0 \leq x \leq 2\},$$

de modo que

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dy\,dx.$$

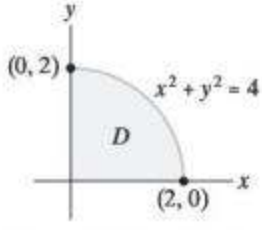


Figura 5.91 Región D del ejemplo 13.

Esta integral iterada es muy difícil de evaluar. Sin embargo, D corresponde a la región polar

$$D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}.$$

Por lo tanto, usando el teorema 5.3 tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dx\, dy &= \iint_{D^*} \sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 1} \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{3}(r^2 + 1)^{3/2}\Big|_{r=0}^{2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{3}(5^{3/2} - 1)\, d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).
\end{aligned}$$

◆

Bosquejo de la demostración del teorema 5.3 Sea (u_0, v_0) cualquier punto en D^*, y sea $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$. La transformación de coordenadas $\mathbf{T}$ mapea el rectángulo R^* dentro de D^* (se ilustra en la figura 5.92) en la región R dentro de D en el plano xy (en general, R no será un rectángulo). Como $\mathbf{T}$ es de clase C^1, la diferenciabilidad de $\mathbf{T}$ (véase la definición 3.8 del capítulo 2) implica que la aproximación lineal

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(u, v) &= \mathbf{T}(u_0, v_0) + D\mathbf{T}(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{T}(u_0, v_0) + D\mathbf{T}(u_0, v_0) \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

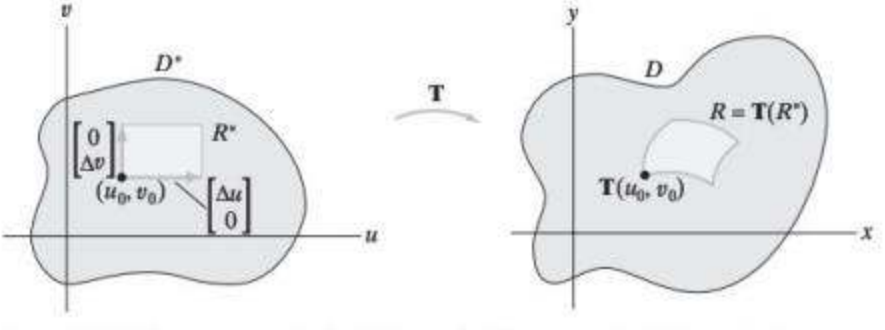


Figura 5.92 $\mathbf{T}$ toma un rectángulo R^* dentro de D^* a una región R dentro de D.

es una buena aproximación a $\mathbf{T}$ cerca del punto (u_0, v_0). En particular, $\mathbf{h}$ toma al rectángulo R^* en algún paralelogramo P que aproxime a R como se muestra en la figura 5.93. Comparamos el área de R^* a la de P.

A partir de la figura 5.93 vemos que el rectángulo R^* es transformado por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix},$$

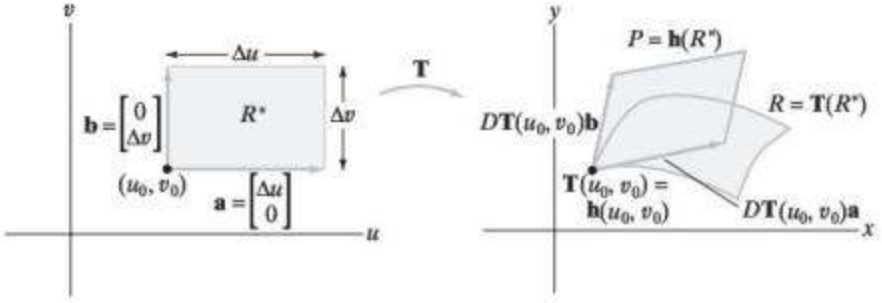


Figura 5.93 La aproximación lineal **h** transforma al rectángulo R^* en un paralelogramo P que aproxima a $R = \mathbf{T}(R^*)$.

y el paralelogramo P es transformado por los vectores $\mathbf{c} = D\mathbf{T}(u_0, v_0)\mathbf{a}$ y $\mathbf{d} = D\mathbf{T}(u_0, v_0)\mathbf{b}$. En consecuencia,

$$\text{Área de } R^* = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \Delta u\, \Delta v,$$

por consiguiente, de acuerdo con la proposición 5.1,

$$\text{Área de } P = \|\mathbf{c} \times \mathbf{d}\| = |\det D\mathbf{T}(u_0, v_0)|\, \Delta u\, \Delta v = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0)\right| \Delta u\, \Delta v.$$

Este resultado da idea de cómo surge el factor jacobiano.

Para completar el bosquejo de la demostración necesitamos un argumento para la partición. Hacemos la partición de D^* en subrectángulos R_{ij}^*. Después obtenemos una partición correspondiente de D en subregiones (no necesariamente rectangulares) $R_{ij} = \mathbf{T}(R_{ij}^*)$. Sea que ΔA_{ij} denote el área de R_{ij}. Sea que $\mathbf{c}_{ij}$ denote la esquina inferior izquierda de R_{ij}^* y sea $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{c}_{ij})$ (véase la figura 5.94). Por consiguiente, como f es integrable en D,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\text{todo } R_{ij} \to 0} \sum_{i,j} f(\mathbf{d}_{ij}) \Delta A_{ij}.$$

De los comentarios en el párrafo anterior sabemos que

$$\Delta A_{ij} \approx \text{área del paralelogramo } \mathbf{h}(R_{ij}^*) = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{c}_{ij})\right| \Delta u_i\, \Delta v_j.$$

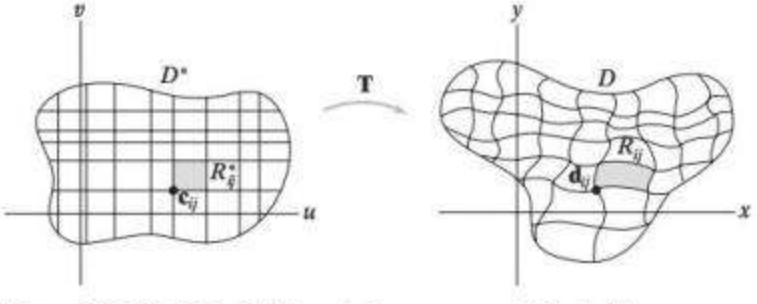


Figura 5.94 Partición de D^* que da lugar a una partición de D.

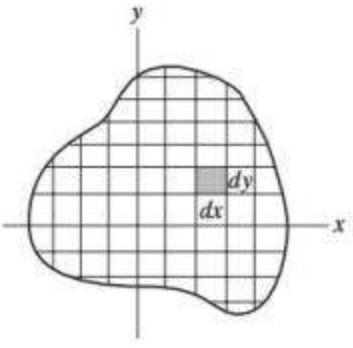


Figura 5.95 El "elemento de área" dA en coordenadas rectangulares es $dx\,dy$.

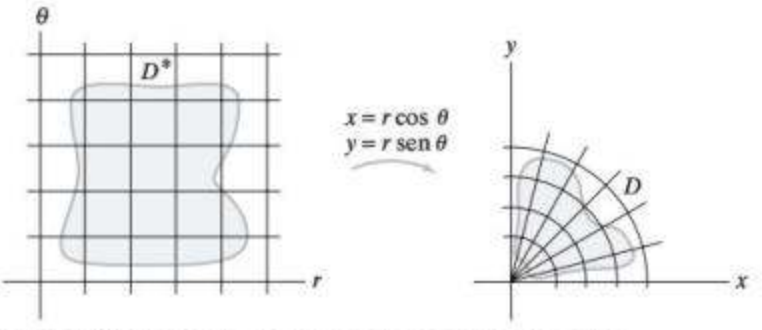


Figura 5.96 La transformación de polares a rectangulares lleva rectángulos en el plano $r\theta$ a segmentos de disco en el plano xy.

Al calcular límites cuando todas las R_{ij} tienden a cero, es decir, cuando Δu_i y Δv_j tienden a cero, encontramos que

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\Delta u_i,\,\Delta v_j \to 0} \sum_{i,j} f\left(\mathbf{T}(\mathbf{c}_{ij})\right) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{c}_{ij})\right| \Delta u_i\,\Delta v_j$$

$$= \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv,$$

como se quería demostrar. ■

Considere de nuevo la transformación de coordenadas polares a rectangulares. Cuando usamos coordenadas cartesianas (rectangulares) para calcular una integral doble sobre una región D en el plano estamos subdividiendo D en rectángulos "infinitesimales" que tienen un "área" igual a $dx\,dy$ (véase la figura 5.95). Por otro lado, cuando usamos coordenadas polares para describir la misma región, estamos subdividiendo D en fragmentos de disco infinitesimales (véase la figura 5.96). Estos surgen de rectángulos transformados en el plano $r\theta$. En la figura 5.97 se sugiere uno de tales fragmentos infinitesimales en el plano xy. Cuando $\Delta\theta$ y Δr son muy pequeños, la forma es casi rectangular con área aproximada de $(r\Delta\theta)\,\Delta r$. Así, en el límite, decimos con frecuencia que:

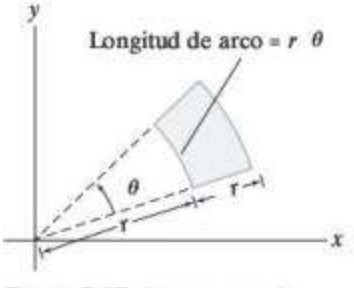


Figura 5.97 Fragmento polar infinitesimal.

$$dA = dx\,dy \qquad \text{(Elemento de área cartesiana)}$$
$$= r\,dr\,d\theta \qquad \text{(Elemento de área polar)}$$

Cambio de variables en integrales triples

No es difícil adaptar el razonamiento anterior al caso de las integrales triples. Omitimos los detalles y solo enunciaremos los resultados principales.

DEFINICIÓN 5.4 Sea $\mathbf{T}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación diferenciable de coordenadas

$$\mathbf{T}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

del espacio *uvw* al espacio *xyz*. El **jacobiano** de **T** que se denota

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)},$$

es $\det(D\mathbf{T}(u, v, w))$. Es decir,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

En general, dada cualquier transformación diferenciable de coordenadas $\mathbf{T}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, el jacobiano tan solo es el determinante de la matriz de derivadas:

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_n)} = \det D\mathbf{T}(u_1, \ldots, u_n) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 5.5 (CAMBIO DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES TRIPLES) Sean W y W^* regiones elementales en el espacio *xyz* y en el espacio *uvw* (respectivamente), y sea $\mathbf{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación de coordenadas de clase C^1 que mapea W^* hacia W en forma uno a uno. Si $f: W \to \mathbf{R}$ es integrable y usamos la transformación $\mathbf{T}$ para sustituir $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ y $z = z(u, v, w)$, entonces

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw.$$

(Véase la figura 5.98).

En la fórmula de la integral del teorema del cambio de variables (teorema 5.5) el jacobiano representa el "factor de distorsión del volumen" que ocurre cuando la región tridimensional W se subdivide en elementos que son cajas transformadas en

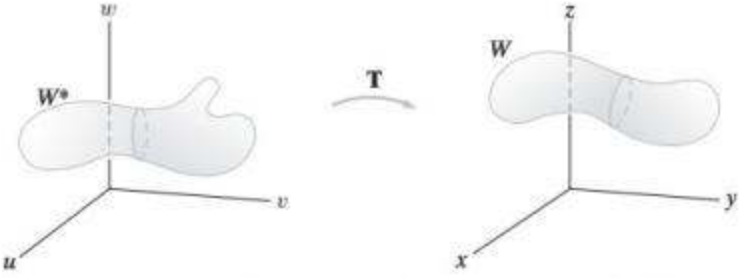


Figura 5.98 Una transformación **T** tridimensional que convierte la región sólida W^* en el espacio uvw en la región W en el espacio xyz.

el espacio uvw (véase la figura 5.99). En otras palabras, los **elementos de volumen** diferenciales, es decir, los fragmentos de volúmenes "infinitesimales" en las coordenadas xyz y uvw están relacionados por la fórmula

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw.$$

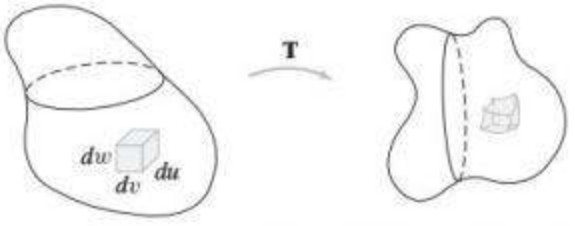


Figura 5.99 El volumen de la "caja infinitesimal" en el espacio uvw es $du\,dv\,dw$. La imagen de esta caja bajo **T** tiene el volumen $|\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)|\,du\,dv\,dw$.

EJEMPLO 14 **(Integrales triples en coordenadas cilíndricas)** Cuando se integra sobre objetos sólidos que poseen un eje de simetría rotacional, las coordenadas cilíndricas pueden ser especialmente útiles. La transformación de coordenadas cilíndricas a rectangulares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

tiene el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\,\theta = r.$$

Por consiguiente, la fórmula en el teorema 5.5 se convierte en

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

En particular, vemos que el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

(Recuerde el lector que por lo general se toma la coordenada cilíndrica r como no negativa. Dada esta convención, podemos omitir el signo de valor absoluto en la fórmula del cambio de variables). La geometría tras este elemento de volumen es muy plausible: Una "caja diferencial" en el espacio $r\theta z$ es transformado en una parte de cilindro sólido que es casi una caja en sí (véase la figura 5.100). ◆

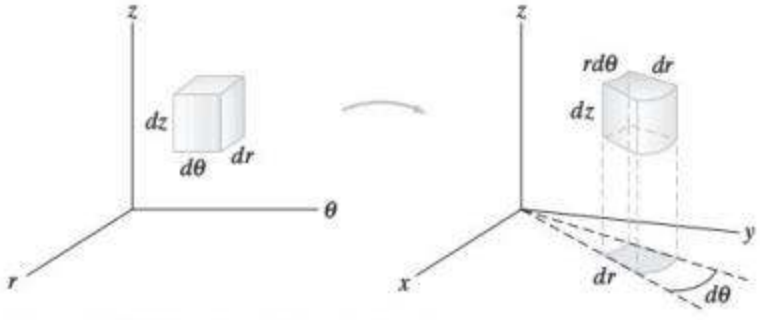


Figura 5.100 Una "caja diferencial" en el espacio $r\theta z$ es mapeado a una parte de un cilindro sólido en el espacio xyz mediante la transformación de cilíndrica a rectangular.

EJEMPLO 15 Para calcular el volumen de un cono de altura h y radio a, podemos usar coordenadas cartesianas, en cuyo caso el cono es el sólido W acotado por la superficie $az = h\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = h$, como se muestra en la figura 5.101. El volumen puede encontrarse calculando la integral triple iterada

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dz\,dy\,dx.$$

Omitiremos los detalles de la evaluación y solo diremos que es necesario realizar sustituciones trigonométricas que hacen el cálculo muy tedioso.

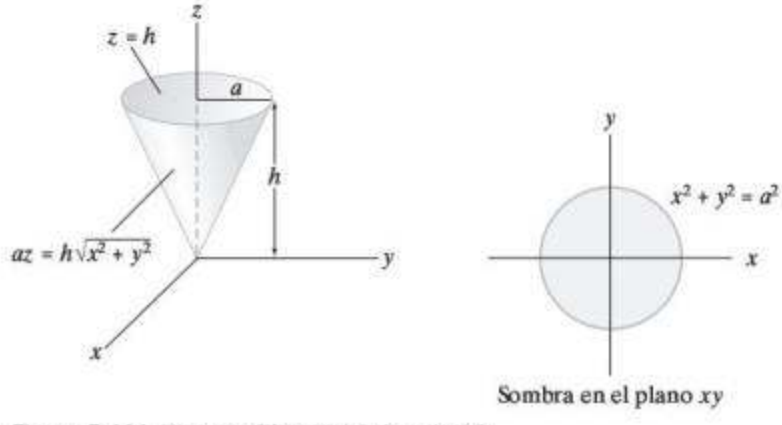


Figura 5.101 El cono sólido W del ejemplo 15.

En contraste, como el cono tiene un eje de simetría rotacional, utilizar coordenadas cilíndricas debería disminuir los cálculos a realizar.

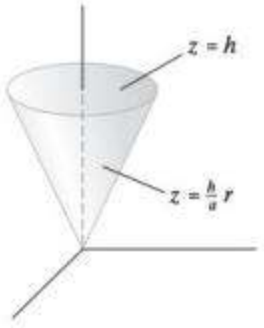


Figura 5.102 El cono del ejemplo 15 descrito en coordenadas cilíndricas.

En consecuencia, consideremos de nuevo el cono (véase la figura 5.102). Advierta que

$$W = \left\{(r,\theta,z) \;\middle|\; \frac{h}{a}r \le z \le h,\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta < 2\pi\right\}.$$

Por consiguiente, el volumen es dado por

$$\iiint_W dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a \int_{\frac{h}{a}r}^h r\,dz\,dr\,d\theta.$$

(Observe el orden de integración que elegimos). La evaluación de esta integral iterada es muy fácil; tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^a \int_{\frac{h}{a}r}^h r\,dz\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\left(h - \frac{h}{a}r\right)dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{h}{2}r^2 - \frac{h}{3a}r^3\right)\Big|_{r=0}^{r=a} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{h}{2}a^2 - \frac{h}{3}a^2\right)d\theta \\ &= 2\pi\left(\frac{h}{6}a^2\right) = \frac{\pi}{3}a^2h,\end{aligned}$$

lo que coincide con lo que ya sabíamos. ◆

EJEMPLO 16 (Integrales triples en coordenadas esféricas) Si un objeto sólido tiene un centro de simetría, entonces las coordenadas esféricas pueden hacer más sencilla la integración sobre dicho objeto. La transformación de coordenadas esféricas a rectangulares

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

tiene el jacobiano

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \text{sen}\,\varphi\,\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta & \rho\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta & \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\,\text{sen}\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando expansión en cofactores sobre el último renglón, se iguala este determinante a

$$\begin{aligned}&\cos\varphi\,(\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi + \rho^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi) \\ &\quad + \rho\,\text{sen}\,\varphi\,(\rho\cos^2\theta\,\text{sen}^2\,\varphi + \rho\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}^2\,\varphi) \\ &\quad = \rho^2\cos\varphi(\text{sen}\,\varphi\cos\varphi) + \rho^2\,\text{sen}^3\,\varphi \\ &\quad = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi\,(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\,\varphi) \\ &\quad = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi.\end{aligned}$$

(Con la restricción de que $0 \le \varphi \le \pi$, el sen φ siempre será no negativo. Por consiguiente, también el jacobiano será no negativo). En consecuencia, el elemento de

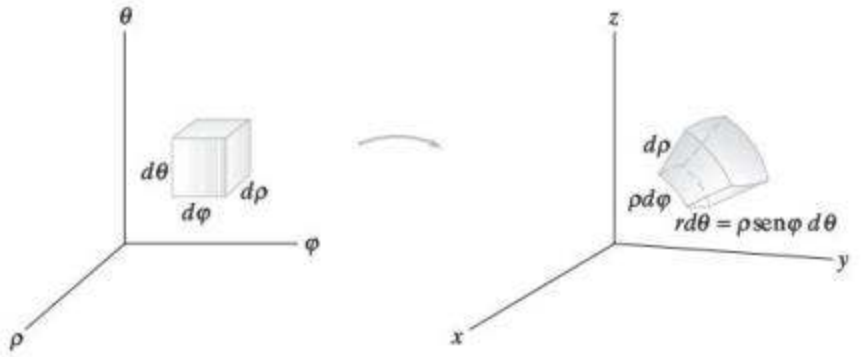


Figura 5.103 Una caja diferencial en el espacio $\rho\varphi\theta$ es mapeada a una parte de una esfera sólida en el espacio xyz mediante la transformación de esférica a rectangular.

volumen en coordenadas esféricas es

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta,$$

y la fórmula del cambio de variables en el teorema 5.5 se convierte en

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{W^*} f(x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta))\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

El elemento de volumen en coordenadas esféricas tiene sentido desde el punto de vista geométrico, porque una caja diferencial en el espacio $\rho\varphi\theta$ se transforma en una parte de una esfera sólida que se aproxima mediante una caja que tiene un volumen $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$ (véase la figura 5.103). ◆

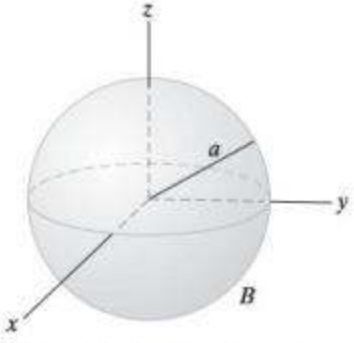


Figura 5.104 La esfera B de radio a del ejemplo 17.

EJEMPLO 17 El volumen de una esfera se calcula fácilmente en coordenadas esféricas. Una esfera sólida de radio a puede describirse como

$$B = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \le \rho \le a, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

(Véase la figura 5.104). En consecuencia, podemos calcular el volumen utilizando la integral triple

$$\iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^3}{3} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi|_0^{\pi})\, d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} (-(-1) + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi a^3}{3},$$

como se esperaba. ◆

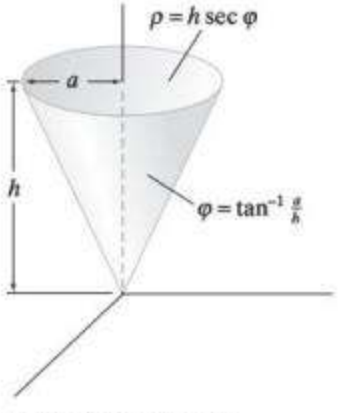


Figura 5.105 El cono del ejemplo 18 descrito en coordenadas esféricas.

EJEMPLO 18 Volvemos al ejemplo del cono de radio a y altura h, y en esta ocasión usamos las coordenadas esféricas para calcular su volumen. En primer lugar observamos dos cosas: (i) que la superficie lateral del cono tiene la ecuación $\varphi = \tan^{-1}(a/h)$ en coordenadas esféricas y (ii) que la parte plana tiene la ecuación cartesiana $z = h$ tiene la ecuación esférica $\rho \cos\varphi = h$ o, en forma equivalente, $\rho = h \sec\varphi$ (véase la figura 5.105).

Para valores fijos de los ángulos esféricos φ y θ, los valores de ρ que dan puntos dentro del cono varían de 0 a $h \sec \varphi$. Cualesquiera puntos dentro del cono deben tener un ángulo esférico φ entre 0 y $\tan^{-1}(a/h)$. Por último, mediante simetría, θ puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π. en consecuencia, el cono puede describirse como el conjunto

$$\left\{(\rho, \varphi, \theta) \;\middle|\; 0 \le \rho \le h \sec \varphi,\ 0 \le \varphi \le \tan^{-1}\frac{a}{h},\ 0 \le \theta < 2\pi\right\}.$$

Por lo tanto, calculamos el volumen como

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}(a/h)} \int_0^{h \sec \varphi} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}(a/h)} \frac{(h \sec \varphi)^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta \\
&= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}(a/h)} \sec^3 \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta \\
&= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}(a/h)} \tan \varphi \sec^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $u = \tan \varphi$, de modo que $du = \sec^2 \varphi \, d\varphi$. Entonces, la última integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{a/h} u \, du \, d\theta = \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 d\theta = \frac{h^3 a^2}{6h^2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
= \frac{a^2 h}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3} a^2 h,
\end{aligned}$$

como se esperaba. ◆

En el ejemplo 18 el uso de coordenadas esféricas no es lo más apropiado. Lo incluimos solo para que el lector pudiera desarrollar cierta destreza para "pensar en forma esférica". Puede adquirir más práctica considerando algunas de las aplicaciones planteadas en la sección siguiente, así como resolviendo algunos ejercicios, por supuesto.

Resumen. Fórmulas del cambio de variables

Cambio de variables en integrales dobles:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du \, dv$$

Elementos de área:

$$\begin{aligned}
dA &= dx \, dy && \text{(Cartesianas)} \\
&= r \, dr \, d\theta && \text{(Polares)} \\
&= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du \, dv && \text{(Generales)}
\end{aligned}$$

Cambio de variables en las integrales triples:

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{W^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Elementos de volumen:

$$\begin{aligned} dV &= dx\,dy\,dz && \text{(Cartesianas)}\\ &= r\,dr\,d\theta\,dz && \text{(Cilíndricas)}\\ &= \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta && \text{(Esféricas)}\\ &= \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw && \text{(Generales)} \end{aligned}$$

5.5 Ejercicios

1. Sea $\mathbf{T}(u, v) = (3u, -v)$.

a) Escriba $\mathbf{T}(u, v)$ como $A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ para una matriz A que sea apropiada.

b) Describa la imagen $D = \mathbf{T}(D^*)$ cuando D^* es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

2. *a*) Sea

$$\mathbf{T}(u,v) = \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right).$$

¿Cómo transforma $\mathbf{T}$ al cuadrado unitario $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$?

b) Ahora suponga que

$$\mathbf{T}(u,v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right).$$

Describa cómo $\mathbf{T}$ transforma a D^*.

3. Si

$$\mathbf{T}(u,v) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

y D^* es el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(-1, 2)$ y $(0, 5)$, determine $D = \mathbf{T}(D^*)$.

4. Si D^* es el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(-1, 3)$, $(1, 2)$ y $(0, 5)$, y D es el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(1, -1)$ y $(4, 1)$, encuentre una transformación $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{T}(D^*) = D$.

5. Si $\mathbf{T}(u, v, w) = (3u - v, u - v + 2w, 5u + 3v - w)$, describa cómo $\mathbf{T}$ transforma al cubo unitario $W^* = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

6. Suponga que $\mathbf{T}(u, v) = (u, uv)$. Explique (quizá con dibujos) cómo $\mathbf{T}$ transforma el cuadrado unitario $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$. ¿Es $\mathbf{T}$ uno a uno en D^*?

7. Sea $\mathbf{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación dada por

$$\mathbf{T}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi).$$

a) Determine $D = \mathbf{T}(D^*)$, donde $D^* = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

b) Obtenga $D = \mathbf{T}(D^*)$, donde $D^* = [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

c) Determine $D = \mathbf{T}(D^*)$, donde $D^* = [1/2, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

8. Este problema se refiere a la integral iterada

$$\int_0^1 \int_{y/2}^{(y/2)+2} (2x - y)\,dx\,dy.$$

a) Evalúe esta integral y dibuje la región D de la integración en el plano xy.

b) Sea $u = 2x - y$ y $v = y$. Encuentre la región D^* en el plano uv que corresponda a D.

c) Use el teorema del cambio de variables (teorema 5.3) para evaluar la integral mediante la sustitución $u = 2x - y$, $v = y$.

9. Evalúe la integral

$$\int_0^2 \int_{x/2}^{(x/2)+1} x^5(2y - x)e^{(2y-x)^2}\,dy\,dx$$

realizando la sustitución $u = x$, $v = 2y - x$.

10. Determine el valor de

$$\iint_D \sqrt{\frac{x+y}{x-2y}}\, dA,$$

donde D es la región en $\mathbf{R}^2$ encerrada por las rectas $y = x/2$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

11. Evalúe $\iint_D (2x + y)^2 e^{x-y}\, dA$, donde D es la región encerrada por $2x + y = 1$, $2x + y = 4$, $x - y = -1$, y $x - y = 1$.

12. Evalúe

$$\iint_D \frac{(2x + y - 3)^2}{(2y - x + 6)^2}\, dx\, dy,$$

donde D es el cuadrado con vértices en (0, 0), (2, 1), (3, −1) y (1, −2). (Sugerencia: primero dibuje D y encuentre las ecuaciones de sus lados).

En los ejercicios 13 a 17 transforme la integral dada en coordenadas cartesianas a una en coordenadas polares y evalúe la integral polar.

13. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3\, dy\, dx$

14. $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, dx$

15. $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 9$

16. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$

17. $\displaystyle\int_{0}^{3} \int_{0}^{x} \frac{dy\, dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

18. Evalúe

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

donde D es el disco de radio 1 con centro en (0, 1). (Tenga cuidado cuando describa D).

19. Sea D la región entre el cuadrado con vértices en (1, 1), (−1, 1), (−1, −1), (1, −1) y el disco unitario con centro en el origen. Evalúe $\iint_D y^2\, dA$.

20. Encuentre el área total dentro de la rosa $r = \operatorname{sen} 2\theta$. (Sugerencia: dibuje la curva y encuentre el área dentro de una sola hoja.)

21. Sea n un entero positivo y sea a una constante positiva. Calcule el área total dentro de la rosa $r = a \cos n\theta$ y demuestre que el valor depende solo de a y de si n es par o impar.

22. Calcule el área de la región dentro de los círculos $r = 2a \cos\theta$ y $r = 2a \operatorname{sen}\theta$, donde a es una constante positiva.

23. Determine el área de la región dentro de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

24. Encuentre el área de la región acotada por el eje x positivo y la espiral $r = 3\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

25. Evalúe

$$\iint_D \cos(x^2 + y^2)\, dA,$$

donde D es la región sombreada de la figura 5.106.

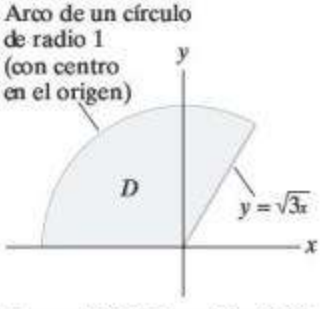


Figura 5.106 La región D del ejercicio 25.

26. Evalúe $\iint_D \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

27. Use coordenadas polares para evaluar $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$, donde D es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

28. Evalúe $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dz\, dy\, dx$ utilizando coordenadas cilíndricas.

29. Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{0}^{4-x^2-y^2} e^{x^2+y^2+z}\, dz\, dx\, dy$ utilizando coordenadas cilíndricas.

30. Evalúe

$$\iiint_B \frac{dV}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 3}},$$

donde B es la esfera de radio 2 con centro en el origen.

31. Determine

$$\iiint_W (x^2 + y^2 + 2z^2)\, dV,$$

donde W es el cilindro sólido definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 4$, $-1 \leq z \leq 2$.

32. Determine el valor de $\iiint_W \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dV$, donde W es la región sólida acotada por el plano $z = 12$ y el paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2 - 6$.

33. Encuentre el volumen de la región W acotada por arriba mediante $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, por debajo mediante el plano xy y a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

En los ejercicios 34 y 35 determine los valores de las integrales dadas, donde W es la región acotada por las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, para $0 < a < b$.

34. $\iiint_W \frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

35. $\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{x^2+y^2+z^2}\,dV$

36. Sea que W denote la región sólida en el primer octante entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < a < b$. Determine el valor de $\iiint_W (x + y + z)\,dV$.

37. Determine el valor de $\iiint_W z^2\,dV$, donde W es la región sólida que se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$.

38. Calcule

$$\iiint_W \left(2 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dV,$$

donde $W = \left\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z/2 \le 3\right\}$.

39. Encuentre el volumen de la región W que representa la intersección del cilindro sólido $x^2 + y^2 \le 1$ y el elipsoide sólido $2(x^2 + y^2) + z^2 \le 10$.

40. Determine el volumen del sólido W acotado por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, el plano xy y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

41. Encuentre

$$\iiint_W (2 + x^2 + y^2)\,dV,$$

donde W es la región dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y sobre el plano $z = 3$.

42. Diga cuál es el volumen de la intersección de los tres cilindros sólidos siguientes:

$$x^2 + y^2 \le a^2, \quad x^2 + z^2 \le a^2 \quad \text{y} \quad y^2 + z^2 \le a^2.$$

(Sugerencia: primero haga un dibujo detallado, después observe que, por simetría, basta calcular el volumen de una parte de la intersección).

5.6 Aplicaciones de la integración

En esta sección exploramos varias disciplinas en las que surgen de manera natural integrales dobles y triples.

Día	°F
Lunes	65
Martes	63
Miércoles	52
Jueves	51
Viernes	45
Sábado	43
Domingo	47

Valor promedio de una función

Suponga el lector que se registran las temperaturas en Oberlin, Ohio, (véase la tabla adyacente) durante una semana en particular. Con esos datos se calcula la temperatura **promedio** (o **media**):

$$\text{Temperatura promedio} = \frac{65 + 63 + 52 + 51 + 45 + 43 + 47}{7} \approx 52.3\ ^\circ\text{F}.$$

Por supuesto este cálculo solo es una aproximación del verdadero valor promedio, puesto que la temperatura variará durante cada día. Para determinar la verdadera temperatura promedio necesitamos conocerla como una función del tiempo durante todos los instantes de un periodo de una semana, es decir, consideramos

$$\text{Temperatura} = T(x), \quad x = \text{tiempo transcurrido (en días) para } 0 \le x \le 7.$$

Entonces una determinación más exacta de la temperatura promedio es como una integral:

$$\text{Temperatura promedio} = \tfrac{1}{7}\int_0^7 T(x)\,dx. \tag{1}$$

Puesto que una integral no es más que el límite de una suma, no es difícil ver que la fórmula anterior es una generalización del caso del cálculo de la suma original discreta al caso continuo (véase la figura 5.107).

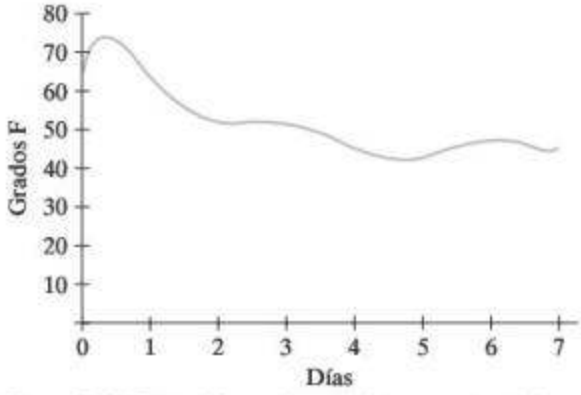


Figura 5.107 Función continua de la temperatura $T(x)$ en el intervalo $[0, 7]$. La temperatura promedio para la semana es $\frac{1}{7}\int_0^7 T(x)\,dx$.

Observe que

$$7 = \int_0^7 dx = \text{longitud del intervalo de tiempo.}$$

Por consiguiente, la fórmula (1) se reescribe así:

$$\text{Temperatura promedio} = \frac{\int_0^7 T(x)\,dx}{\int_0^7 dx}.$$

Esta observación lleva a establecer las definiciones siguientes acerca de los valores promedio de las funciones.

DEFINICIÓN 6.1 *a*) Sea f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ una función integrable de una variable. El **valor promedio (media)** de f en $[a, b]$ es

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b dx} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\text{longitud del intervalo } [a, b]}.$$

b) Sea f: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función integrable de dos variables. El **valor promedio** de f sobre D es

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iint_D f\,dA}{\iint_D dA} = \frac{\iint_D f\,dA}{\text{área de } D}.$$

c) Sea f: $W \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una función integrable de tres variables. El **valor promedio** de f sobre W es

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iiint_W f\,dV}{\iiint_W dV} = \frac{\iiint_W f\,dV}{\text{volumen de } W}.$$

EJEMPLO 1 Suponga que la "función temperatura" en Oberlin durante una semana de abril es

$$T(x) = \tfrac{113}{5040}x^7 - \tfrac{107}{180}x^6 + \tfrac{1127}{180}x^5 - \tfrac{2393}{72}x^4 + \tfrac{66821}{720}x^3 - \tfrac{45781}{360}x^2 + \tfrac{12581}{210}x + 65,$$

donde $0 \le x \le 7$. Entonces la temperatura media para esa semana sería la siguiente:

$$\begin{aligned}[T]_{\text{prom}} &= \tfrac{1}{7-0}\int_0^7 \left(\tfrac{113}{5040}x^7 - \tfrac{107}{180}x^6 + \tfrac{1127}{180}x^5 - \tfrac{2393}{72}x^4\right.\\ &\quad \left. + \tfrac{66821}{720}x^3 - \tfrac{45781}{360}x^2 + \tfrac{12581}{210}x + 65\right) dx\\ &= \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{113}{40320}x^8 - \tfrac{107}{1260}x^7 + \tfrac{1127}{1080}x^6 - \tfrac{2393}{360}x^5\right.\\ &\quad \left. + \tfrac{66821}{2880}x^4 - \tfrac{45781}{1080}x^3 + \tfrac{12581}{420}x^2 + 65x\right)\Big|_0^7\\ &= \tfrac{888709}{17280} \approx 51.43^\circ\text{F}. \end{aligned}$$

◆

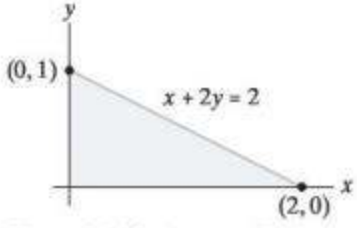


Figura 5.108 Placa metálica triangular del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Suponga que el espesor de la placa metálica triangular que se ilustra en la figura 5.108 varía cuando $f(x, y) = xy + 1$, donde (x, y) son las coordenadas de un punto en la placa. Por lo tanto, el espesor promedio de la placa es:

$$\text{Espesor promedio} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2-2y} (xy + 1)\, dx\, dy}{\int_0^1 \int_0^{2-2y} dx\, dy}.$$

Observe que

$$\int_0^1 \int_0^{2-2y} dx\, dy = \text{área de la placa triangular} = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 1) = 1$$

de la geometría elemental. En consecuencia, el espesor promedio es

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^1 \int_0^{2-2y} (xy+1)\, dx\, dy}{1} &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2 y + x\right)\Big|_{x=0}^{x=2-2y} dy\\ &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}(2-2y)^2 y + (2-2y)\right) dy\\ &= 2\int_0^1 (y^3 - 2y^2 + 1)\, dy = 2\left(\tfrac{y^4}{4} - \tfrac{2}{3}y^3 + y\right)\Big|_0^1 = \tfrac{7}{6}. \end{aligned}$$

◆

EJEMPLO 3 (Véase también el ejemplo 6 de la sección 5.4). Suponga que la temperatura interna de la cápsula limitada por los paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$ varía de un punto a otro cuando

$$T(x, y, z) = z(x^2 + y^2).$$

Calcularemos la temperatura media de la cápsula.

A partir de la definición 6.1:

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{\iiint_W T\, dV}{\iiint_W dV}.$$

Entonces, las integrales iteradas particulares que podemos usar para el cálculo son:

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{\displaystyle\int_{-5/2}^{5/2} \int_{-\sqrt{25/4-x^2}}^{\sqrt{25/4-x^2}} \int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} z(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx}{\displaystyle\int_{-5/2}^{5/2} \int_{-\sqrt{25/4-x^2}}^{\sqrt{25/4-x^2}} \int_{3x^2+3y^2-16}^{9-x^2-y^2} dz\, dy\, dx}.$$

Desafortunadamente, el cálculo involucrado en la evaluación de estas integrales es muy tedioso.

Por otro lado, como la cápsula tiene un eje de simetría rotacional, es posible usar coordenadas cilíndricas para simplificar los cálculos. Advierta que las fronteras paraboloides tienen las ecuaciones cilíndricas de $z = 9 - r^2$ y $z = 3r^2 - 16$, y que la sombra de la cápsula en el plano $z = 0$ se describe en coordenadas polares como:

$$\left\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \tfrac{5}{2}, 0 \leq \theta < 2\pi\right\}.$$

(Véanse las figuras 5.109 y 5.110).

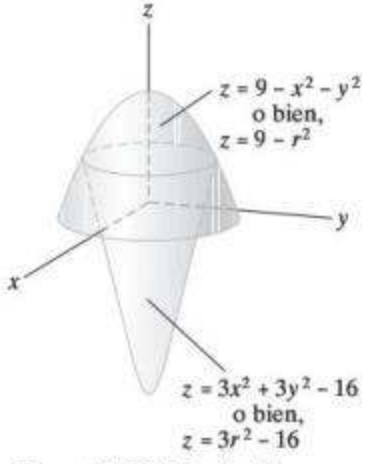


Figura 5.109 Cápsula del ejemplo 3.

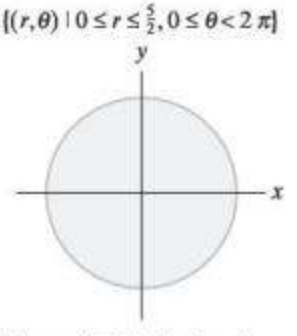


Figura 5.110 Sombra de la cápsula de la figura 5.109 sobre el plano $z = 0$.

Además, la función temperatura puede describirse en coordenadas cilíndricas como

$$T(x, y, z) = z(x^2 + y^2) = zr^2.$$

En consecuencia, calculamos

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\int_{3r^2-16}^{9-r^2} zr^2 \cdot r\, dz\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\int_{3r^2-16}^{9-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta}.$$

Para la integral en el denominador,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\int_{3r^2-16}^{9-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{5/2} r\left((9-r^2)-(3r^2-16)\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{5/2} \left(25r - 4r^3\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{2}r^2 - r^4\right)\Big|_0^{5/2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{625}{8} - \frac{625}{16}\right) d\theta = \frac{625}{16} \cdot 2\pi = \frac{625\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Este resultado concuerda con el cálculo del volumen en el ejemplo 6 de la sección 5.4, como debía ocurrir.

Para el numerador integral calculamos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\int_{3r^2-16}^{9-r^2} zr^3\,dz\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\left(\frac{z^2}{2}r^3\right)\Big|_{z=3r^2-16}^{z=9-r^2} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\frac{r^3}{2}\left((9-r^2)^2-(3r^2-16)^2\right)dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}\frac{r^3}{2}(-8r^4+78r^2-175)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2}(-8r^7+78r^5-175r^3)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-r^8+13r^6-\frac{175}{4}r^4\right)\Big|_0^{5/2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}-\frac{15625}{256}\,d\theta = -\frac{15625}{256}\pi.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{-15625\pi/256}{625\pi/8} = -\frac{25}{32}.$$ ◆

Centro de masa. El caso discreto

Considere un sube y baja uniforme con dos masas m_1 y m_2 colocadas en cada extremo. Si introducimos un sistema de coordenadas de modo que el punto de apoyo se encuentre en el origen, entonces la situación es la que se ilustra en la figura 5.111. Advierta que $x_2 < 0 < x_1$. El sube y baja está en equilibrio si

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0.$$

Figura 5.111 Este sube y baja está en equilibrio si $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$.

En este caso, el **centro de masa** (o "punto de equilibrio") del sistema está en el origen.

Pero ahora supongamos que $m_1x_1 + m_2x_2 \neq 0$. En ese caso, ¿dónde está el punto de equilibrio? Denotemos las coordenadas del punto de equilibrio con $\bar{x}$. Antes de encontrarlo presentaremos un poco de terminología. El producto m_ix_j (en este caso para $i = 1, 2$) de la masa por la posición se llama **momento** del i-ésimo cuerpo con respecto del origen del sistema de coordenadas. La suma $m_1x_1 + m_2x_2$ recibe el nombre de **momento total** con respecto del origen. Para encontrar el centro de masa usamos el principio físico siguiente, según el cual un sistema de varios puntos de masa equivale físicamente (en términos de los momentos) a un sistema con un solo punto de masa.

> **Principio físico guía.** El centro de masa es el punto en el que si se concentrara toda la masa del sistema, el momento total del nuevo sistema sería el mismo que en el sistema original.

Al llevar a la práctica este principio en el ejemplo, vemos que la masa total M de nuestro sistema es $m_1 + m_2$. Si $\bar{x}$ es el centro de masa, entonces el principio guía dice que

$$M\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2.$$

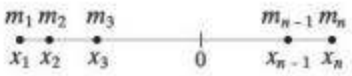


Figura 5.112 Sistema de n masas distribuidas en una recta.

Es decir, el momento total del nuevo sistema (concentrado) es el mismo que el del sistema original, así:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Si tenemos un sistema de n masas distribuidas a lo largo de una recta (con coordenadas), entonces se aplica el mismo razonamiento (véase la figura 5.112). Tenemos

$$\bar{x} = \frac{\text{momento total}}{\text{masa total}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (2)$$

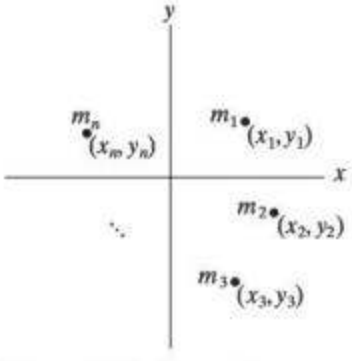


Figura 5.113 Sistema de n masas en $\mathbf{R}^2$.

Ahora pasemos a dos y tres dimensiones. En primer lugar suponga que tenemos n partículas (o cuerpos) distribuidas en el plano, como se ilustra en la figura 5.113. Entonces hay dos momentos a considerar:

$$\text{Momento total con respecto del eje } y = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i,$$

y

$$\text{Momento total con respecto del eje } x = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i.$$

(Se admite que al principio esta terminología parece confusa. La idea es que el momento mide cómo se equilibra el sistema con respecto de los ejes coordenados. Es la coordenada x, no la y, la que mide la posición con respecto del eje y. En forma similar, la coordenada y mide la posición con respecto del eje x). El principio guía enuncia que el centro de masa es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que si todas las masas del sistema se concentraran ahí, el nuevo sistema tendría los mismos momentos totales que el original. Es decir, si $M = \sum m_i$, entonces

$$M\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

(es decir, el momento con respecto del eje y del nuevo sistema es igual al momento con respecto del eje y del sistema original) y

$$M\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i.$$

Así, hemos demostrado lo siguiente:

Centro de masa discreto en $\mathbf{R}^2$. Dado un sistema de n puntos de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ en las posiciones

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ldots, \quad (x_n, y_n) \quad \text{en } \mathbf{R}^2,$$

las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (3)$$

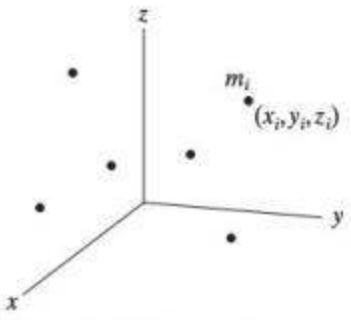


Figura 5.114 Sistema discreto de masas en $\mathbf{R}^3$.

Para partículas situadas en tres dimensiones se necesita muy poco más que agregar un eje adicional de coordenadas (véase la figura 5.114).

Centro de masa discreto en $\mathbf{R}^3$. Dado un sistema de n masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ en las posiciones

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ldots, \quad (x_n, y_n, z_n) \quad \text{en } \mathbf{R}^3,$$

las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z})$ del centro de masa son dadas por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{4}$$

Los numeradores de las fracciones en la ecuación (4) son los momentos con respecto de los *planos coordenados*. Por consiguiente, por ejemplo, la suma $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ es el momento total con respecto del plano yz.

Por definición, los momentos de los sistemas físicos son *aditivos*. Es decir, el momento total de un sistema es la suma de los momentos de los elementos que lo constituyen. Sin embargo, no hay manera de que se presente el caso de que una de las coordenadas del centro de masa de un sistema sea la suma de las coordenadas de los centros de masa de sus elementos. Esta propiedad de aditividad hace que el estudio de los momentos sea importante por derecho propio.

Centro de masa. El caso continuo

Ahora dirigiremos nuestra atención a los sistemas físicos en los que la masa es distribuida de manera continua en todo el sistema y no solo en algunos puntos finitos aislados.

Para comenzar con el caso unidimensional, supongamos que tenemos un alambre rectilíneo situado en un eje de coordenadas entre los puntos $x = a$ y $x = b$ como se aprecia en la figura 5.115. Además, suponga que la masa de este alambre está distribuida de acuerdo con alguna función de densidad continua $\delta(x)$. Buscamos la coordenada $\bar{x}$ que represente al centro de masa, o "punto de equilibrio", del alambre.

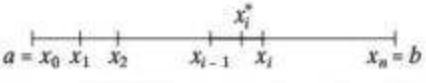


Figura 5.115 Un alambre "coordenado". La masa del segmento entre x_{i-1} y x_i es aproximadamente $\delta(x_i^*)\Delta x_i$.

Imagine que se rompe el alambre en n pequeñas partes. Como la densidad es continua, será casi constante en cada elemento reducido. Por consiguiente, para $i = 1, \ldots, n$, la masa m_i de cada elemento es aproximadamente $\delta(x_i^*)\Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es la longitud de cada segmento de alambre y x_i^* es cualquier número en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En consecuencia, la masa total es

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*)\Delta x_i,$$

y el momento total con respecto del origen es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i^*}_{\substack{\text{posición} \\ \text{aproximada}}} \underbrace{\delta(x_i^*)\Delta x_i}_{\substack{\text{masa} \\ \text{aproximada}}}.$$

Por supuesto, se pueden usar estos resultados para dar una aproximación de la coordenada $\bar{x}$ del centro de masa. Sin embargo, para un resultado exacto hacemos que todas las piezas de alambre sean "infinitesimalmente pequeñas"; es decir, obtenemos los límites de las sumas aproximadas anteriores cuando todos los Δx_i tienden a cero. Dichos límites producen integrales, por lo que es razonable definir nuestros términos como sigue:

Centro de masa continua en R. Para un alambre localizado a lo largo del eje x, entre $x = a$ y $x = b$ con densidad continua por unidad de longitud $\delta(x)$:

$$\text{Masa total} = \int_a^b \delta(x)\,dx.$$

$$\text{Momento total} = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx. \tag{5}$$

$$\text{Centro de masa } \bar{x} = \frac{\text{momento total}}{\text{masa total}} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

Compare las fórmulas (3) con las (5). En vez de una suma de masas y una suma de productos de masa por la posición, tenemos una integral de "masas infinitesimales" (el término $\delta(x)\,dx$) y una integral de masas infinitesimales multiplicadas por la posición.

EJEMPLO 4 Suponga que un alambre se localiza entre $x = -1$ y $x = 1$ a lo largo de una recta con coordenadas y tiene densidad dada por $\delta(x) = x^2 + 1$. Utilizando las fórmulas en (5), calculamos que el centro de masa tiene coordenadas

$$\bar{x} = \frac{\int_{-1}^{1} x(x^2+1)\,dx}{\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx} = \frac{\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1}}{\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{1}} = \frac{0}{\frac{8}{3}} = 0.$$

Esto tiene sentido, ya que el alambre tiene un patrón de densidad simétrico con respecto del origen, es decir $\delta(x) = \delta(-x)$. ◆

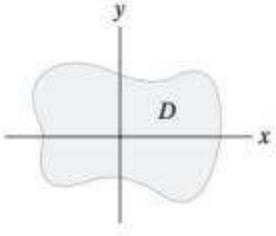


Figura 5.116 Una lámina dibujada como una región D en el plano xy con función densidad δ.

La situación análoga en dos dimensiones es la de una **lámina** o placa plana de extensión finita y densidad de variación continua $\delta(x, y)$ (véase la figura 5.116.) Utilizando un razonamiento similar al que usamos para obtener las fórmulas en (5), hacemos la definición siguiente para las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de la lámina:

Centro de masa continua en $\mathbf{R^2}$. Para una lámina representada por la región D en el plano xy con densidad continua por unidad de área $\delta(x, y)$:

$$\bar{x} = \frac{\text{momento total con respecto del eje } y}{\text{masa total}} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA};$$

$$\bar{y} = \frac{\text{momento total con respecto del eje } x}{\text{masa total}} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA}. \tag{6}$$

A grandes rasgos, el término $\delta(x, y)\, dA$ representa la masa de un pedazo "infinitesimal bidimensional" de la lámina y las diversas integrales dobles, los límites de las sumas de dichas masas o sus momentos correspondientes.

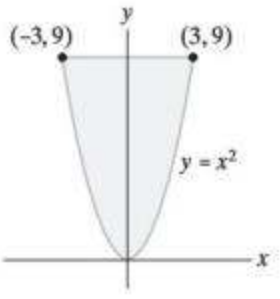


Figura 5.117 La región D que representa la lámina del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Queremos encontrar el centro de masa de una lámina representada por la región D en $\mathbf{R}^2$, cuya frontera consta de partes de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 9$, y cuya densidad varía cuando $\delta(x, y) = x^2 + y$ (véase la figura 5.117).

En primer lugar, advierta que esta lámina es simétrica con respecto del eje y, y que además la función densidad tiene una simetría parecida porque $\delta(x, y) = \delta(-x, y)$. De estas dos observaciones concluimos que el centro de masa debe ocurrir a lo largo del eje y, es decir, que $\bar{x} = 0$. Utilizando las fórmulas en (6) y observando que la lámina está representada por una región elemental de tipo 1,

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\, \delta(x, y)\, dA}{\iint_D \delta(x, y)\, dA} = \frac{\int_{-3}^{3} \int_{x^2}^{9} y(x^2 + y)\, dy\, dx}{\int_{-3}^{3} \int_{x^2}^{9} (x^2 + y)\, dy\, dx}.$$

Para la integral del denominador calculamos

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} \int_{x^2}^{9} (x^2 + y)\, dy\, dx &= \int_{-3}^{3} \left(x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=x^2}^{y=9} dx \\
&= \int_{-3}^{3} \left[\left(9x^2 + \frac{81}{2} \right) - \left(x^4 + \frac{1}{2} x^4 \right) \right] dx \\
&= \int_{-3}^{3} \left(9x^2 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{81}{2} \right) dx \\
&= \left(3x^3 - \frac{3}{10} x^5 + \frac{81}{2} x \right) \Big|_{-3}^{3} = \frac{1296}{5}.
\end{aligned}$$

Para el numerador,

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} \int_{x^2}^{9} y(x^2 + y)\, dy\, dx &= \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=9} dx \\
&= \int_{-3}^{3} \left[\left(\frac{81}{2} x^2 + 243 \right) - \left(\frac{x^6}{2} + \frac{x^6}{3} \right) \right] dx \\
&= \left(\frac{27}{2} x^3 + 243x - \frac{5}{42} x^7 \right) \Big|_{-3}^{3} = \frac{11664}{7}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{y} = \frac{11664/7}{1296/5} = \frac{45}{7} \approx 6.43.$$

Esta respuesta es muy plausible, toda vez que la densidad de la lámina se incrementa con el valor de y, por lo cual debemos esperar que el centro de masa esté más cerca de $y = 9$ que de $y = 0$. ◆

Podemos modificar las fórmulas bidimensionales para producir las tridimensionales.

Centro de masa continua en $\mathbf{R}^3$. Dado un sólido W cuya densidad por unidad de volumen varía en forma continua cuando $\delta(x, y, z)$, calculamos las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z})$ del centro de masa de W utilizando los siguientes cocientes de integrales triples:

$$\bar{x} = \frac{\text{momento total con respecto del plano } yz}{\text{masa total}} = \frac{\iiint_W x\,\delta(x, y, z)\,dV}{\iiint_W \delta(x, y, z)\,dV};$$

$$\bar{y} = \frac{\text{momento total con respecto del plano } xz}{\text{masa total}} = \frac{\iiint_W y\,\delta(x, y, z)\,dV}{\iiint_W \delta(x, y, z)\,dV}; \quad (7)$$

$$\bar{z} = \frac{\text{momento total con respecto del plano } xy}{\text{masa total}} = \frac{\iiint_W z\,\delta(x, y, z)\,dV}{\iiint_W \delta(x, y, z)\,dV}.$$

En la ecuación (7) podemos considerar al término $\delta(x, y, z)\,dV$ como la representación de la masa de un elemento de W "infinitesimal de tres dimensiones". Por consiguiente, las integrales triples son las sumas limitantes o momentos de dichos elementos.

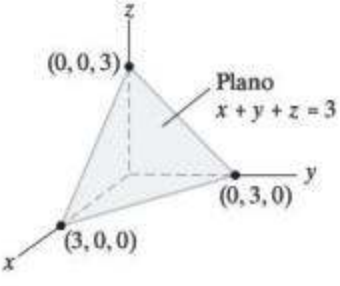


Figura 5.118 El tetraedro del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Considere el lector al tetraedro sólido W con vértices en (0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Suponga que la densidad de masa en el punto (x, y, z) dentro del tetraedro es $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$. Calcule el centro de masa resultante (véase la figura 5.118).

En primer lugar, advierta que la posición del tetraedro en el espacio y la función de densidad son tales que los roles de x, y y z pueden intercambiarse libremente. Por consiguiente, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z})$ del centro de masa deben satisfacer a $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. Por lo tanto, podemos reducir el número de cálculos requeridos.

El tetraedro es una región elemental de tipo 4 en el espacio. Así, calculamos la masa total M de W utilizando la siguiente integral iterada:

$$M = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} (x + y + z + 1)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left((x + y + 1)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=3-x-y} dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(\tfrac{15}{2} - x - \tfrac{1}{2}x^2 - y - xy - \tfrac{1}{2}y^2 \right) dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \left[\left(\tfrac{15}{2} - x - \tfrac{1}{2}x^2 \right) y - \tfrac{1}{2}(1 + x)y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 \right] \Big|_{y=0}^{y=3-x} dx$$

$$= \int_0^3 \left(\tfrac{27}{2} - \tfrac{15}{2}x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} \right) dx = \tfrac{117}{8}.$$

El momento total con respecto del plano xy es dado por

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} z(x + y + z + 1)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left((x + y + 1)\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=0}^{z=3-x-y} dy\, dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(\tfrac{27}{2} - \tfrac{15}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{15}{2}y \right.$$
$$\left. + xy + \tfrac{1}{2}x^2y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{6}y^3 \right) dy\, dx$$

$$= \int_0^3 \left(\tfrac{117}{8} - \tfrac{27}{2}x + \tfrac{15}{4}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{24}x^4 \right) dx = \tfrac{459}{40}.$$

En consecuencia,

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{\frac{459}{40}}{\frac{117}{8}} = \frac{51}{65} \approx 0.7846. \quad \blacklozenge$$

Si un objeto es uniforme, en el sentido de que tiene densidad *constante*, entonces se usa el término **centroide** para hacer referencia al centro de masa del objeto. Suponga el lector que el objeto es una región sólida W en $\mathbf{R}^3$. Por consiguiente, si la densidad δ es una constante k, las ecuaciones para las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z})$ se deducen de (7). Para la coordenada x tenemos

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x\delta(x, y, z)\, dV}{\iiint_W \delta(x, y, z)\, dV} = \frac{\iiint_W kx\, dV}{\iiint_W k\, dV}$$

$$= \frac{\iiint_W x\, dV}{\iiint_W dV} = \frac{1}{\text{volumen de } W} \iiint_W x\, dV.$$

En forma similar,

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{volumen de } W} \iiint_W y\, dV \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{1}{\text{volumen de } W} \iiint_W z\, dV.$$

En particular, la densidad constante δ no desempeña ningún papel en el cálculo del centroide, solo la geometría de W. (Observación: es posible hacer enunciados completamente análogos para el caso de centroides de láminas en $\mathbf{R}^2$).

EJEMPLO 7 Calcularemos el centroide de un cono de radio a y altura h (véase la figura 5.119).

Por simetría, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Asimismo, sabemos que el volumen del cono es $(\pi/3)a^2h$. Por consiguiente, la coordenada z del centroide es

$$\bar{z} = \frac{3}{\pi a^2 h} \iiint_W z\, dV.$$

Figura 5.119 El cono del ejemplo 7.

Esta integral triple se evalúa con más facilidad utilizando coordenadas cilíndricas (véase el ejemplo 15 de la sección 5.5). La superficie lateral del cono es dada por $z = \frac{h}{a}r$, de modo que calculamos

$$\bar{z} = \frac{3}{\pi a^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\frac{h}{a}r}^h zr\, dz\, dr\, d\theta = \left(\frac{3}{\pi a^2 h} \right) \left(\frac{\pi a^2 h^2}{4} \right) = \frac{3}{4}h$$

y después hacemos una evaluación directa. En consecuencia, el centroide del cono se localiza en el punto $(0, 0, \frac{3}{4}h)$. $\blacklozenge$

Momentos de inercia

Sea W un cuerpo sólido rígido en el espacio. Como hemos visto, la integral del momento con respecto del plano xy es $M_{xy} = \iiint_W z\,\delta(x, y, z)\,dV$, es decir, la integral del producto de la posición en relación con un plano de referencia (en este caso, el plano xy) y la densidad del sólido. Esta integral puede considerarse la medida de la facilidad con que W puede desplazarse en forma perpendicular a partir del plano de referencia.

Ahora considere que W gira con respecto de un eje fijo (que puede o no pasar por W). El **momento de inercia** I (o **segundo momento** —la integral del momento mencionado en el párrafo precedente en ocasiones recibe el nombre de **primer momento**) es una medida de la facilidad con que W puede girar con respecto del eje dado. En específico, I es la integral del producto de la densidad en un punto en W por el cuadrado de la distancia entre ese punto y un eje fijo; es decir,

$$I = \iiint_W d^2\,\delta(x, y, z)\,dV, \tag{8}$$

donde d es la distancia de $(x, y, z) \in W$ al eje especificado.

Cuando los ejes de rotación son los ejes coordenados en $\mathbf{R}^3$ tenemos lo siguiente:

$$I_x = \text{momento de inercia con respecto del eje } x = \iiint_W (y^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,dV;$$

$$I_y = \text{momento de inercia con respecto del eje } y = \iiint_W (x^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,dV;$$

$$I_z = \text{momento de inercia con respecto del eje } z = \iiint_W (x^2 + y^2)\,\delta(x, y, z)\,dV.$$

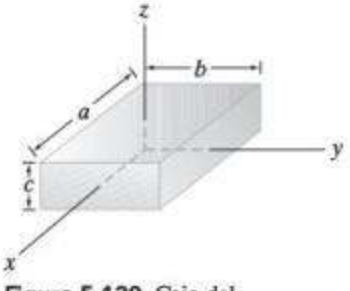


Figura 5.120 Caja del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Sea W una caja sólida de densidad uniforme δ y dimensiones a, b y c. Si W está situada de manera simétrica con respecto de los ejes coordenados, como se ilustra en la figura 5.120, calcularemos los momentos de inercia con respecto de dichos ejes.

En primer lugar observe que W puede describirse como

$$W = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2},\ -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2},\ -\frac{c}{2} \le z \le \frac{c}{2}\right\}.$$

Por consiguiente, el momento de inercia con respecto del eje x es

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + z^2)\,\delta a\,dy\,dz$$

$$= \delta a \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y\right)\Big|_{y=-b/2}^{y=b/2} dz = \delta a \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{b^3}{12} + bz^2\right) dz$$

$$= \delta a \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{bc^3}{12}\right) = \frac{\delta abc}{12}(b^2 + c^2).$$

Al cambiar los roles de x, y y z (y las constantes correspondientes a, b y c) vemos que

$$I_y = \frac{\delta abc}{12}(a^2 + c^2) \quad \text{y} \quad I_z = \frac{\delta abc}{12}(a^2 + b^2).$$

Por lo tanto, si $a > b > c$ (como en la figura 5.120), se sigue que $I_x < I_y < I_z$. Este resultado se confirma mediante la observación de que las rotaciones sobre el eje paralelo al lado más largo de la caja son más fáciles para efecto de que el mismo par de fuerzas aplicado sobre cada eje causará la rotación más rápida que se produzca sobre el eje a través de la dimensión más larga. Los patinadores artísticos aprovechan una situación relacionada cuando colocan sus brazos junto a sus cuerpos, lo que reduce sus momentos de inercia y acelera sus giros. ◆

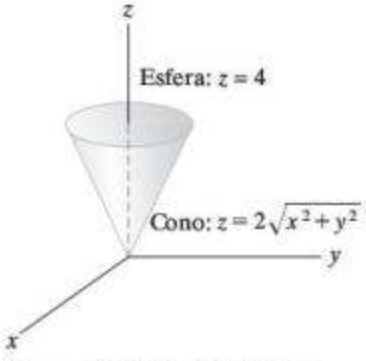


Figura 5.121 El sólido W del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Sea W el sólido acotado por el cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$ que se muestra en la figura 5.121. Suponga que la densidad del material dentro de W varía cuando $\delta(x, y, z) = 5 - z$. Calculemos el momento de inercia I_z sobre el eje z.

Dada la geometría de la situación es más fácil trabajar en coordenadas cilíndricas, en cuyo caso el cono es dado por la ecuación cilíndrica $z = 2r$. Así, tenemos que

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\,\delta(x, y, z)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2r}^4 r^2(5 - z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\left(5z - \tfrac{1}{2}z^2\right)\Big|_{z=2r}^{z=4} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(12r^3 - 10r^4 + 2r^5\right) dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(3r^4 - 2r^5 + \tfrac{1}{3}r^6\right)\Big|_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{16}{3}\,d\theta = \frac{32\pi}{3}.$$

◆

Recuerde que el centro de masa de un objeto sólido de masa total M es el punto tal que si toda la masa M se concentrara ahí, el (primer) momento sería el mismo. En el contexto de los momentos de inercia puede definirse una idea análoga. El **radio de giro** de un sólido con respecto de un eje es la distancia r desde ese eje, en la cual debe ubicarse un punto de masa M de modo que tenga el mismo momento de inercia I (con respecto del eje) que el sólido original. En forma breve, el radio de giro r se define con la ecuación:

$$r^2M = I \quad \text{o} \quad r = \sqrt{\frac{I}{M}}. \tag{9}$$

EJEMPLO 10 Determinaremos el radio de giro con respecto del eje z del cono descrito en el ejemplo 9. En consecuencia, calculamos

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}.$$

Del ejemplo 9, $I_z = 32\pi/3$. Determinamos la masa total M del cono como sigue:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2r}^4 (5-z)r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (12-10r+2r^2)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left((6r^2 - \tfrac{10}{3}r^3 + \tfrac{1}{2}r^4)\Big|_{r=0}^{r=2}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta = \frac{32\pi}{3}.$$

Por consiguiente,

$$r_z = \sqrt{\frac{32\pi/3}{32\pi/3}} = 1. \quad \blacklozenge$$

5.6 Ejercicios

1. La tienda local recibe cada mes un envío de 75 cajas de comida para gato. El inventario de esta, es decir, el número de cajas disponibles como una función de los días, es dado por $I(x) = 75\cos(\pi x/15) + 80$.
   a) ¿Cuál es el inventario diario promedio en un mes?
   b) Si el costo de almacenar una caja es de 2 centavos por día, determine el costo diario promedio de mantenerlo durante el mes.
2. Encuentre el valor promedio de $f(x, y) = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y$ sobre $R = [0, 2\pi] \times [0, 4\pi]$.
3. Encuentre el valor promedio de $f(x, y) = e^{2x+y}$ en la región triangular cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1).
4. Determine el valor promedio de $g(x, y, z) = e^z$ en la esfera unitaria dada por
   $$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$
5. Suponga que la temperatura en un punto en el cubo
   $$W = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$$
   varía en proporción con el cuadrado de la distancia del punto al origen.
   a) ¿Cuál es la temperatura promedio del cubo?
   b) Describa el conjunto de puntos en el cubo en los cuales la temperatura es igual a la temperatura promedio.
6. Sea D la región entre el cuadrado con vértices en (1, 1), (−1, 1), (−1, −1) (1, −1) y el disco unitario con centro en el origen. Calcule el valor promedio de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en D.
7. Sea W la región en $\mathbf{R}^3$ entre el cubo cuyos vértices se localizan en (1, 1, 1), (−1, 1, 1), (−1, −1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1), (−1, 1, −1), (−1, −1, −1), (1, −1, −1) y la esfera unitaria con centro en el origen. Calcule el valor promedio de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en W.
8. Suponga el lector que va diario en metro a su trabajo. Camina a la misma estación, que es atendida por dos líneas del tren, ambas lo dejan cerca de su trabajo. En las horas pico cada línea envía trenes que llegan a la estación cada seis minutos, pero los despachadores comienzan los envíos en tiempos aleatorios. ¿Cuál es el tiempo promedio que esperaría la llegada de un tren? (Sugerencia: modele el tiempo de espera para las dos líneas utilizando un punto (x, y) en el cuadrado $[0, 6] \times [0, 6]$).
9. Repita el ejercicio 8 para el caso en que la estación del metro estuviera atendida por tres líneas (cada una con trenes que llegan cada 6 minutos) en lugar de solo dos.
10. Encuentre el centro de masa de la región acotada por la parábola $y = 8 - 2x^2$ y el eje x.
    a) Si la densidad δ es constante.
    b) Si la densidad $\delta = 3y$.
11. Obtenga el centroide de una placa semicircular. (Sugerencia: será de utilidad emplear un sistema de coordenadas apropiado).
12. Determine el centro de masa de una placa con forma de la región que se encuentra entre $y = x^2$ y $y = 2x$, donde la densidad varía cuando $1 + x + y$.
13. Calcule el centro de masa de una lámina que tiene la forma de la región
    $$\{(x, y) \mid 0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 9\},$$
    donde la densidad varía como xy.
14. Encuentre el centroide de la región limitada por la cardioide dada en coordenadas polares por la ecuación $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$. (Sugerencia: razone con cuidado).
15. Determine el centroide de la lámina descrita en coordenadas polares como:
    $$\{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 4\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/3\}.$$

16. Encuentre el centro de masa de la lámina descrita en coordenadas polares como:

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\},$$

donde la densidad de la lámina varía cuando $\delta(r, \theta) = 4 - r$.

17. Calcule el centro de masa de la región dentro de la cardioide dada en coordenadas polares cuando $r = 1 + \cos\theta$ y cuya densidad varía cuando $\delta(r, \theta) = r$.

18. Diga cuál es el centroide del tetraedro cuyos vértices están en (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).

19. Un sólido está limitado por debajo mediante $z = 3y^2$, por arriba mediante el plano $z = 3$ y en los extremos mediante los planos $x = -1$ y $x = 2$.

a) Encuentre el centroide de este sólido.

b) Ahora suponga que la densidad del sólido es dada por la expresión $\delta = z + x^2$. Encuentre el centro de masa del sólido.

20. Determine el centroide de la región acotada por arriba mediante la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 18$ y por abajo mediante el paraboloide $3z = x^2 + y^2$.

21. Diga cuál es el centroide de la región sólida en forma de cápsula que tiene por límites a los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$ y $z = 9 - x^2 - y^2$.

22. Calcule el centroide del "cono de helado" que se ilustra en la figura 5.122.

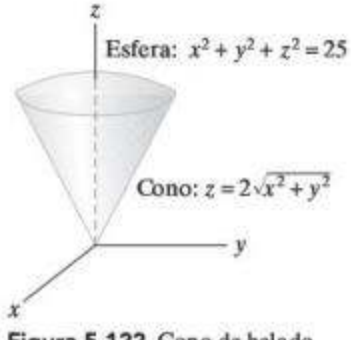


Figura 5.122 Cono de helado sólido del ejercicio 22.

23. Obtenga el centroide del sólido cuya forma es la de un octavo de una esfera sólida de radio a. (Sugerencia: modele el sólido como la parte del primer octante de una esfera de radio a con centro en el origen).

24. Determine el centro de masa de una varilla cilíndrica, sólida, con radio a y altura h, cuya densidad de masa en cualquier punto de ella varía como el cuadrado de la distancia de ese punto desde el extremo superior del cilindro.

25. *a*) Encuentre el momento de inercia sobre los ejes coordenados de un tetraedro sólido, homogéneo, cuyos vértices se localizan en (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1).

b) ¿Cuáles son los radios de giro sobre los ejes de coordenadas?

26. Considere el cubo sólido $W = [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$. Encuentre los momentos de inercia y el radio de giro sobre los ejes coordenados si la densidad del cubo es $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$.

27. Un sólido está acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 9$. Calcule el momento de inercia y el radio de giro sobre el eje z si:

a) la densidad es $\delta(x, y, z) = 2z$;

b) la densidad es $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

28. Encuentre el momento de inercia y radio de giro con respecto del eje z de una esfera sólida de radio a, con centro en el origen, si

a) la densidad δ es constante;

b) $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

c) $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Es posible encontrar el momento de inercia de una lámina en el plano con densidad $\delta(x, y)$ considerando que se trata de una placa plana localizada en el plano xy en $\mathbf{R}^3$. *Entonces, por ejemplo, la distancia de un punto (x, y) entre la lámina y el eje x es dada por $|y|$, su distancia al eje y es dada por $|x|$ y su distancia al eje z (o al origen) es dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$. (Véase la figura 5.123.) Utilice estas ideas para encontrar los momentos de inercia especificados de las láminas dadas en los ejercicios 29 a 31.*

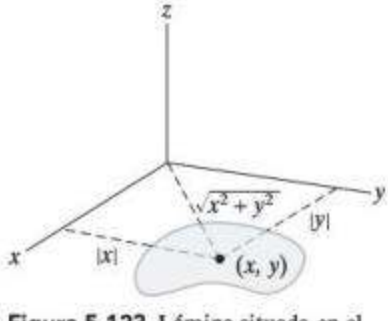


Figura 5.123 Lámina situada en el plano xy en $\mathbf{R}^3$.

29. El momento de inercia I_x sobre el eje x de la lámina cuya forma está acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2$ y la recta $y = 3$, y cuya densidad varía cuando $\delta(x, y) = x^2 + 1$.

30. El momento de inercia I_z sobre el eje z de la lámina con la forma del rectángulo $[0, 2] \times [0, 1]$ y cuya densidad varía cuando $\delta(x, y) = 1 + y$.

31. El momento de inercia sobre la recta $y = 3$ de la lámina formada como el disco

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

y cuya densidad varía cuando $\delta(x, y) = x^2$.

El campo gravitacional entre una masa M concentrada en el punto (x, y, z) y una masa m concentrada en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}]}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}.$$

*El **potencial gravitacional** V de $\mathbf{F}$ es*

$$V = -\frac{GMm}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

(En la sección 3.3 vimos que $\mathbf{F} = -\nabla V$). Ahora supongamos que en lugar de un punto de masa M tenemos una región sólida W de densidad $\delta(x, y, z)$ y masa total M. Por consiguiente, el potencial gravitacional de W que actúa sobre la masa puntual m puede definirse considerando masas puntuales "infinitesimales" $dm = \delta(x, y, z)\, dV$ y sumando (por medio de integración) sus potenciales individuales. Es decir, el potencial de W es

$$V(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_W \frac{Gm\delta(x, y, z)\, dV}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

En los ejercicios 32 a 34, sea W la región entre dos esferas concéntricas de radios $a < b$, con centro en el origen (véase la figura 5.124). Suponga que W tiene una masa total M y densidad constante δ. El objeto de los ejercicios siguientes es calcular el potencial gravitacional $V(x_0, y_0, z_0)$ de W sobre una masa m concentrada en (x_0, y_0, z_0). Advierta que, por simetría de la esfera, no se pierde generalidad si se toma a (x_0, y_0, z_0) como igual a $(0, 0, r)$. Por lo tanto, en particular, r es la distancia entre la masa puntual y el centro de W.

Figura 5.124 Cascarón esférico de los ejercicios 32 a 34.

32. Demuestre que si $r \geq b$, entonces $V(0, 0, r) = -GMm/r$. Este es exactamente el mismo potencial gravitacional que tendrían todas las masas M de W si se concentraran en el origen. Este es un resultado clave de la mecánica newtoniana. (Sugerencia: use coordenadas esféricas e integre con respecto de φ antes de integrar con respecto de ρ).

33. Demuestre que si $r \leq a$, entonces *no* hay fuerza gravitacional. (Sugerencia: demuestre que $V(0, 0, r)$ es en realidad independiente de r. Después relacione el potencial gravitacional con la fuerza gravitacional. Como en el ejercicio 32, use coordenadas esféricas e integre con respecto de φ antes de hacerlo con respecto de ρ).

34. *a*) Encuentre $V(0, 0, r)$ si $a < r < b$.

b) Relacione su respuesta para el inciso *a*) con los resultados de los ejercicios 32 y 33.

5.7 Aproximaciones numéricas de las integrales múltiples (opcional)

Suponga que f es una función continua definida en alguna región acotada D en el plano. Si D es un rectángulo o una región elemental, entonces el teorema 2.10 permite calcular $\iint_D f\, dA$ como una integral iterada. Sin embargo, en la práctica las "antiderivadas parciales" en la integral iterada pueden ser imposibles de obtener. No obstante, para ciertos propósitos sería enteramente aceptable un valor aproximado de $\iint_D f\, dA$. En esta sección estudiamos cómo adaptar los métodos numéricos para aproximar integrales definidas de funciones de una sola variable con el fin de proporcionar técnicas para calcular integrales dobles en forma aproximada.

Métodos numéricos para integrales definidas

Recordemos dos técnicas conocidas para aproximar el valor de $\int_a^b f(x)\, dx$. La primera es la **regla del trapecio**. El primer paso es hacer una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales. Por consiguiente, hacemos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \text{ donde } x_i = a + i\Delta x.$$

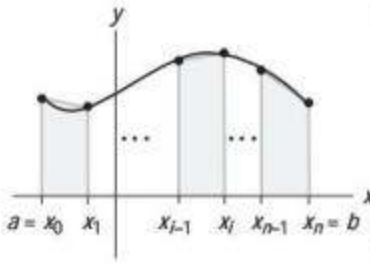


Figura 5.125 Cuando f es no negativa en $[a, b]$, el área bajo la gráfica de f es aproximada por la suma de las áreas de los trapecios que se ilustran.

La aproximación que da la regla del trapecio T_n es

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]. \tag{1}$$

Se obtiene aproximando la función f con n funciones lineales que pasan por los pares de puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces el área (neta) bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es aproximada por la suma de las áreas (netas) bajo las gráficas de las funciones lineales. Cuando f es no negativa las áreas aproximadas son las de los trapecios —de ahí el nombre del método (véase la figura 5.125).

El resultado teórico clave que concierne a la regla del trapecio es el siguiente:

TEOREMA 7.1 Dada una función f que sea integrable en el intervalo $[a, b]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_n + E_n,$$

donde

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right],$$

y E_n denota el error involucrado usando T_n para aproximar el valor de la integral definida. Además, si f es de clase C^2 en el intervalo $[a, b]$, hay algún número ζ en (a, b) tal que

$$E_n = -\frac{b-a}{12}(\Delta x)^2 f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\zeta).$$

En particular, el teorema 7.1 muestra que si f'' está acotada, es decir, si $|f''x) \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces $|E_n| \leq (b-a)^3 M/(12n^2)$. Esta desigualdad es muy útil para estimar la exactitud de la aproximación.

EJEMPLO 1 Aproximaremos $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ utilizando la regla del trapecio con $n = 4$. Por consiguiente, tenemos

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25,$$

de modo que, según (1), tenemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx \approx T_4 = \frac{0.25}{2}[\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}(0.25^2) + 2\operatorname{sen}(0.5^2) + 2\operatorname{sen}(0.75^2) + \operatorname{sen} 1]$$

$$= \frac{0.25}{2}[0 + 0.12492 + 0.49481 + 1.06661 + 0.84147]$$

$$= \frac{0.25}{2}[2.52780] = 0.31598.$$

Advierta que la segunda derivada de $\text{sen}(x^2)$ es $2\cos(x^2) - 4x^2\,\text{sen}(x^2)$, así que, para $0 \le x \le 1$,

$$|2\cos(x^2) - 4x^2\,\text{sen}(x^2)| \le 2\,|\cos(x^2)| + 4x^2\,|\text{sen}(x^2)| \le 2 + 4 = 6.$$

En consecuencia, usando el teorema 7.1,

$$|E_4| \le \frac{(1-0)^3 6}{12 \cdot 4^2} = \frac{1}{32} = 0.03125.$$

Así, el valor verdadero de la integral debe estar entre $0.31598 - 0.03125 = 0.2847$ (con redondeo a cuatro cifras decimales) y $0.31598 + 0.03125 = 0.3473$. Por supuesto, puede obtenerse una aproximación más exacta haciendo una partición más fina, es decir, se toma un valor de n más grande. ◆

Otra técnica numérica para aproximar el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ con la que el lector tal vez esté familiarizado es la **regla de Simpson**. Igual que con la regla del trapecio, hacemos la partición del intervalo $[a, b]$ en subintervalos iguales, solo que ahora se requiere que el número de ellos sea *par*, lo que escribiremos como $2n$. Por consiguiente, tomamos

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = b, \text{ donde } x_i = a + i\,\Delta x.$$

Entonces la aproximación con la regla de Simpson S_{2n} es

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{\Delta x}{3}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) \\ &\quad + 4f(x_{2n-1}) + f(b)] \\ &= \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + f(b)\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Aproximaremos el valor de $\int_0^1 \text{sen}(x^2)\,dx$ del ejemplo1 utilizando la regla de Simpson con $n = 2$, es decir, cuatro subintervalos. Igual que antes, tenemos que

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25,$$

por lo que la ecuación (2) da

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{sen}(x^2)\,dx \approx S_4 &= \frac{0.25}{3}[\text{sen}\,0 + 4\,\text{sen}(0.25^2) + 2\,\text{sen}(0.5^2) + 4\,\text{sen}(0.75^2) \\ &\quad + \text{sen}\,1] \\ &= \frac{0.25}{3}[0 + 0.24984 + 0.49481 + 2.13321 + 0.84147] \\ &= \frac{0.25}{3}[3.71933] = 0.30994. \end{aligned}$$

Observe que este valor está en el rango predicho por la regla del trapecio. En efecto, se trata de una aproximación más exacta del valor de la integral definida. ◆

La regla de Simpson mediante la aproximación de la función f con n funciones cuadráticas que pasan por tripletas de puntos $(x_{2i-2}, f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1}, f(x_{2i-1}))$, $(x_{2i}, f(x_{2i}))$ para $i = 1, \ldots, n$. Igual que con la regla del trapecio, tenemos el siguiente resultado resumido.

TEOREMA 7.2 Dada una función f que sea integrable en $[a, b]$, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{2n} + E_{2n},$$

donde

$$S_{2n} = \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + f(b)\right],$$

y E_{2n} denota el error involucrado usando S_{2n} para aproximar el valor de la integral definida. Además, si f es de clase C^4 en $[a, b]$, entonces existe un número ζ en (a, b), tal que

$$E_{2n} = -\frac{b-a}{180}(\Delta x)^4 f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\zeta).$$

EJEMPLO 3 Considere $\int_1^3 (x^3 + 3x^2)\,dx$. Comparemos las aproximaciones que se obtienen con la regla del trapecio y la de Simpson con 4 subintervalos. Tenemos, por consiguiente, que $\Delta x = (3 - 1)/4 = 0.5$ y

$$T_4 = \frac{0.5}{2}[4 + 2(10.125 + 20 + 34.375) + 54] = 46.75;$$

$$S_4 = \frac{0.5}{3}[4 + 4(10.125) + 2(20) + 4(34.375) + 54] = 46.$$

Advierta que

$$\int_1^3 (x^3 + 3x^2)\,dx = \left(\tfrac{1}{4}x^4 + x^3\right)\Big|_1^3 = \left(\tfrac{81}{4} + 27\right) - \left(\tfrac{1}{4} + 1\right) = 46,$$

por lo que la regla de Simpson coincide con la respuesta exacta. Esto no debe sorprendernos, ya que para $f(x) = x^3 + 3x^2$, tenemos que $f^{(4)}(x)$ es igual a cero, lo cual significa que el término del error E_4 para la regla de Simpson debe ser cero. ◆

Aproximación de integrales dobles sobre rectángulos

Ahora, sea f una función de dos variables que es continua sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ en $\mathbf{R}^2$. Adaptaremos las ideas anteriores para dar métodos que aproximen el valor de la integral doble $\iint_R f\,dA$.

Debido a que suponemos que f es continua en R, se aplica el teorema de Fubini para dar

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx. \tag{3}$$

A continuación hacemos la partición del intervalo $[a, b]$ de x en m subintervalos iguales. Por consiguiente,

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b, \text{ donde } x_i = a + i\Delta x.$$

En forma similar hacemos la partición del intervalo en y, $[c, d]$ en n subintervalos iguales; en consecuencia,

$$\Delta y = \frac{d-c}{n}, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d, \text{ donde } y_j = c + j\Delta y.$$

En la integral interior $\int_c^d f(x, y)\,dy$ de la integral iterada en (3), la variable x se mantiene constante. Por lo tanto, aproximamos la integral utilizando la regla del trapecio

del teorema 7.1. Y obtenemos lo siguiente:

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \approx \frac{\Delta y}{2}\left[f(x, c) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x, y_j) + f(x, d)\right].$$

A continuación integramos cada función de x en el lado derecho, de modo que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx \approx \frac{\Delta y}{2}\left[\int_a^b f(x, c)\,dx + 2\sum_{j=1}^{n-1}\int_a^b f(x, y_j)\,dx + \int_a^b f(x, d)\,dx\right]. \tag{4}$$

Ahora se usa otra vez la regla del trapecio para cada integral de la derecha. Esto significa que para $j = 0, \ldots, n$,

$$\int_a^b f(x, y_j)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(a, y_j) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(b, y_j)\right]. \tag{5}$$

Al escribir juntas las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx \approx \frac{\Delta y}{2}\Bigg\{&\frac{\Delta x}{2}\left[f(a, c) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, c) + f(b, c)\right] \\ &+ 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\Delta x}{2}\left[f(a, y_j) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(b, y_j)\right] \\ &+ \frac{\Delta x}{2}\left[f(a, d) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, d) + f(b, d)\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Por lo que la aproximación con la regla del trapecio $T_{m,n}$ para $\iint_R f\,dA$ es

$$\begin{aligned}T_{m,n} = \frac{\Delta x\,\Delta y}{4}\Bigg[&f(a, c) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, c) + f(b, c) \\ &+ 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a, y_j) + 4\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(b, y_j) \\ &+ f(a, d) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i, d) + f(b, d)\Bigg].\end{aligned} \tag{6}$$

La expresión (6) no es muy fácil de recordar tal como está. Sin embargo, podemos interpretarla como sigue:

$$T_{m,n} = \frac{\Delta x\,\Delta y}{4}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} w_{ij} f(x_i, y_j),$$

donde

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, y_j) \text{ es uno de los cuatro vértices de } R; \\ 2 & \text{si } (x_i, y_j) \text{ es un punto sobre un borde de } R, \text{ pero no es un vértice;} \\ 4 & \text{si } (x_i, y_j) \text{ es un punto en el interior de } R. \end{cases}$$

EJEMPLO 4 Aproximaremos el valor de $\int_3^6 \int_1^2 (xy + 3x)\, dy\, dx$ con $T_{3,2}$. Por consiguiente, se hace la partición del intervalo x [3, 6] usando $\Delta x = (6 - 3)/3 = 1$, y la del intervalo y [1, 2] con $\Delta y = (2 - 1)/2 = 0.5$. Véase la figura 5.126 para el rectángulo $[3, 6] \times [1, 2]$ con los puntos de la partición indicados.

En consecuencia, tenemos que

$$\int_3^6 \int_1^2 (xy + 3x)\, dy\, dx \approx$$

$$T_{3,2} = \frac{1(0.5)}{4}[12 + 24 + 30 + 15 + 2(16 + 20 + 27 + 20 + 25 + 13.5) + 4(18 + 22.5)]$$

$$= \frac{1}{8}(486) = 60.75.$$

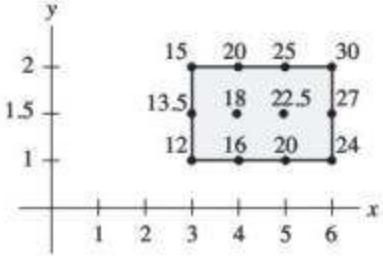


Figura 5.126 El rectángulo $[3, 6] \times [1, 2]$ del ejemplo 4 con los puntos de la partición marcados con los valores de $f(x, y) = xy + 3x$.

Para comparar calculemos directamente la integral iterada:

$$\int_3^6 \int_1^2 (xy + 3x)\, dy\, dx = \int_3^6 \left(\frac{xy^2}{2} + 3xy \right) \Big|_{y=1}^{2} dx$$

$$= \int_3^6 \frac{9}{2} x\, dx = \frac{9}{4} x^2 \Big|_3^6 = \frac{243}{4} = 60.75.$$

Advierta que en este caso $T_{3,2}$ da la respuesta *exacta*. ◆

En la obtención de la regla del trapecio supusimos que la función f era continua. No obstante, usaremos la fórmula (6) para aproximar $\iint_R f\, dA$ siempre que f sea integrable en R. Sin embargo, para estimar la exactitud de las aproximaciones trapezoidales debemos suponer más acerca de f, como lo señala el resultado siguiente (cuya demostración usa el teorema del valor intermedio y el teorema del valor medio para integrales).

TEOREMA 7.3 (REGLA DEL TRAPECIO PARA LAS INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS) Dada una función f que sea integrable sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, tenemos que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = T_{m,n} + E_{m,n},$$

donde $T_{m,n}$ es dada por (6) y $E_{m,n}$ denota el error involucrado utilizando $T_{m,n}$ para aproximar el valor de la integral doble. Además, si f es de clase C^2 sobre R, existen puntos (ζ_1, η_1) y (ζ_2, η_2) en R, tales que

$$E_{m,n} = -\frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[(\Delta x)^2 f_{xx}(\zeta_1, \eta_1) + (\Delta y)^2 f_{yy}(\zeta_2, \eta_2)\right].$$

EJEMPLO 5 Para $f(x, y) = xy + 3x$ tenemos que tanto $\partial^2 f/\partial x^2$ como $\partial^2 f/\partial y^2$ son iguales a cero. Por consiguiente, el teorema 7.3 implica que la aproximación con la regla del trapecio es exacta, como vimos en el ejemplo 4. ◆

De manera muy similar a como obtuvimos la regla del trapecio, también podemos generar una aproximación a la regla de Simpson para el valor de la integral doble $\iint_R f\, dA$. Igual que en el caso de la regla de Simpson para aproximar integrales definidas de una variable, hacemos la partición de los intervalos tanto de x como de y en números *pares* de subintervalos iguales. Así, tomamos

$$\Delta x = \frac{b-a}{2m}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2m} = b, \text{ donde } x_i = a + i\,\Delta x,$$

y

$$\Delta y = \frac{d-c}{2n}, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{2n} = d, \text{ donde } y_j = c + j\,\Delta y.$$

La aproximación resultante de la regla de Simpson $S_{2m,2n}$ es dada por la expresión

$$\begin{aligned} S_{2m,2n} = \frac{\Delta x\,\Delta y}{9}\Bigg[& f(a,c) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}, c) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}, c) + f(b,c) \\ & + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a, y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 8\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}, y_{2j}) \\ & + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(b, y_{2j}) \\ & + 4\sum_{j=1}^{n} f(a, y_{2j-1}) + 8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) \\ & + 16\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(b, y_{2j-1}) \\ & + f(a,d) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}, d) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}, d) + f(b,d)\Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Así como en el caso de la regla del trapecio para integrales dobles sobre rectángulos, el teorema del valor intermedio y el del valor medio para integrales dan el resultado siguiente:

TEOREMA 7.4 (REGLA DE SIMPSON PARA INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS) Sea f una función que es integrable sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Por consiguiente,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = S_{2m,2n} + E_{2m,2n},$$

donde $S_{2m,2n}$ es dado por la ecuación (7) y $E_{2m,2n}$ denota el error involucrado usando $S_{2m,2n}$ para aproximar el valor de la doble integral. Además, si f es de clase C^4 sobre R, existen puntos (ζ_1, η_1) y (ζ_2, η_2) en R tales que

$$E_{2m,2n} = -\frac{(b-a)(d-c)}{180}\left[(\Delta x)^4 f_{xxxx}(\zeta_1, \eta_1) + (\Delta y)^4 f_{yyyy}(\zeta_2, \eta_2)\right].$$

EJEMPLO 6 Comparemos aproximaciones al valor de $\int_0^{0.5}\int_0^1 e^{x+y}\, dy\, dx$ utilizando tanto la regla del trapecio como la de Simpson, con cuatro subintervalos en cada uno de los intervalos x y y. Por consiguiente, en el intervalo x $[0, 0.5]$ se hace la partición utilizando $\Delta x = (0.5 - 0)/4 = 0.125$ y en el intervalo y $[0, 1]$ se hace la partición usando $\Delta y = (1 - 0)/4 = 0.25$.

La regla del trapecio da

$$\begin{aligned} T_{4,4} = \frac{(0.125)(0.25)}{4}\Big[&e^{0+0} + e^{0+0.5} + e^{1+0} + e^{0.5+1} + 2\left(e^{0+0.25} + e^{0+0.5}\right. \\ &+ e^{0+0.75} + e^{0.125+0} + e^{0.25+0} + e^{0.375+0} + e^{0.125+1} + e^{0.25+1} \\ &\left. + e^{0.375+1} + e^{0.5+0.25} + e^{0.5+0.5} + e^{0.5+0.75}\right) \\ &+ 4\left(e^{0.125+0.25} + e^{0.125+0.5} + e^{0.125+0.75} + e^{0.25+0.25} + e^{0.25+0.5}\right. \\ &\left. + e^{0.25+0.75} + e^{0.375+0.25} + e^{0.375+0.5} + e^{0.375+0.75}\right)\Big] \\ = \frac{1}{128}&(143.608854) = 1.121944. \end{aligned}$$

Advierta que $\partial^2/\partial x^2\,(e^{x+y}) = \partial^2/\partial y^2\,(e^{x+y}) = e^{x+y}$. El teorema 7.3 afirma que existen puntos (ζ_1, η_1) y (ζ_2, η_2) en el rectángulo $[0, 0.5] \times [0, 1]$, tal que

$$E_{4,4} = -\frac{(0.5-0)(1-0)}{12}\left[(0.125)^2 e^{\zeta_1+\eta_1} + (0.25)^2 e^{\zeta_2+\eta_2}\right].$$

Sobre el rectángulo $[0, 0.5] \times [0, 1]$, el valor más pequeño posible de e^{x+y} es $e^{0+0} = 1$ y el valor más grande posible es $e^{0.5+1} = e^{1.5}$. En consecuencia, debemos tener

$$-\frac{(0.5)(1)}{12}\left[(0.125)^2 e^{1.5} + (0.25)^2 e^{1.5}\right] \le E_{4,4} \le -\frac{(0.5)(1)}{12}\left[(0.125)^2 + (0.25)^2\right]$$

o bien,

$$-0.0145888 \le E_{4,4} \le -0.003255.$$

Por consiguiente, el valor verdadero de la integral doble se encuentra entre $1.121944 - 0.0145888 = 1.10735$ y $1.121944 - 0.003255 = 1.11869$.

Por otro lado, la regla de Simpson da

$$\begin{aligned} S_{4,4} = \frac{(0.125)(0.25)}{9}\big[&e^{0+0} + e^{0+0.5} + e^{1+0} + e^{0.5+1} \\ &+ 2\left(e^{0+0.5} + e^{0.25+0} + e^{0.25+1} + e^{0.5+0.5}\right) \\ &+ 4\left(e^{0+0.25} + e^{0+0.75} + e^{0.125+0} + e^{0.125+1} + e^{0.25+0.5}\right. \\ &\quad \left. + e^{0.375+0} + e^{0.375+1} + e^{0.5+0.25} + e^{0.5+0.75}\right) \\ &+ 8\left(e^{0.125+0.5} + e^{0.25+0.25} + e^{0.25+0.75} + e^{0.375+0.5}\right) \\ &+ 16\left(e^{0.125+0.25} + e^{0.125+0.75} + e^{0.375+0.25} + e^{0.375+0.75}\right)\big] \\ = \frac{1}{288}(321.036910) &= 1.114711. \end{aligned}$$

En este caso observamos que $\partial^4/\partial x^4\,(e^{x+y}) = \partial^4/\partial y^4\,(e^{x+y}) = e^{x+y}$, por lo que, igual que antes, los valores mínimo y máximo de estas derivadas parciales en $[0, 0.5] \times [0, 1]$ son, respectivamente, 1 y $e^{1.5}$. Por lo tanto, el teorema 7.4 implica que

$$-\frac{(0.5)(1)}{180}\left[(0.125)^4 e^{1.5} + (0.25)^4 e^{1.5}\right] \le E_{4,4} \le -\frac{(0.5)(1)}{180}\left[(0.125)^4 + (0.25)^4\right]$$

o bien,

$$-0.0000516688 \le E_{4,4} \le -0.0000115289.$$

De aquí que el valor verdadero de la integral doble se encuentre entre $1.114711 - 0.0000516688 = 1.11466$ y $1.114711 - 0.0000115289 = 1.1147$.

A modo de comparación, calculemos la integral iterada con exactitud:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5}\int_0^1 e^{x+y}\,dy\,dx &= \int_0^{0.5}\left(e^{x+y}\right)\Big|_{y=0}^{1} dx = \int_0^{0.5}\left(e^{x+1} - e^x\right) dx \\ &= \left(e^{x+1} - e^x\right)\Big|_0^{0.5} = e^{1.5} - e^{0.5} - e + 1 \approx 1.114686. \end{aligned}$$

Así, vemos que la regla de Simpson da una aproximación muy exacta con una partición bastante ancha. ◆

Aproximación de las integrales dobles sobre regiones elementales

Podemos modificar los métodos para aproximar integrales dobles sobre rectángulos con el fin de aproximar integrales dobles sobre regiones más generales. En primer lugar, suponga que D es una región elemental de tipo 1; es decir,

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \gamma(x) \le y \le \delta(x),\ a \le x \le b\}.$$

Entonces, si f es continua sobre D, el teorema 2.10 nos dice que

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Para aproximar esta integral iterada con una versión de, digamos, la regla del trapecio, necesitamos hacer una partición de la región D de una manera razonable. Lo haremos como sigue. Primero hacemos la partición del intervalo x, $[a, b]$ en la forma habitual:

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b, \text{ donde } x_i = a + i\Delta x.$$

Ahora, para una x fija en $[a, b]$, partimos el intervalo y correspondiente $[\gamma(x), \delta(x)]$ en n subintervalos iguales:

$$\Delta y(x) = \frac{\delta(x) - \gamma(x)}{n},$$

$$\gamma(x) = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = \delta(x), \text{ donde } y_j(x) = \gamma(x) + j\Delta y(x).$$

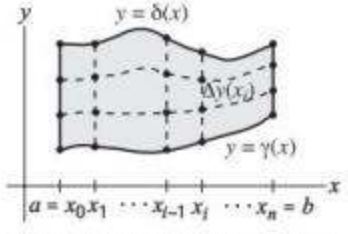


Figura 5.127 Región elemental D, tipo 1, con los puntos de la partición indicados.

Advierta que ahora Δy y los números de partición $y_0, \ldots, y_n$ son todos funciones de x (véase la figura 5.127). Entonces, aplicando la regla del trapecio primero a la integral interior y después a la exterior se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y)\,dy\,dx \\
&\quad \approx \int_a^b \frac{\Delta y(x)}{2}\left[f(x, \gamma(x)) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x, y_j(x)) + f(x, \delta(x)) \right] dx \\
&\quad \approx \frac{\Delta x}{2}\left\{ \left[\frac{\Delta y(a)}{2} f(a, \gamma(a)) + 2\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta y(x_i)}{2} f(x_i, \gamma(x_i)) \right.\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\Delta y(b)}{2} f(b, \gamma(b)) \right] \\
&\qquad + 2\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\Delta y(a)}{2} f(a, y_j(a)) + 2\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta y(x_i)}{2} f(x_i, y_j(x_i)) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\Delta y(b)}{2} f(b, y_j(b)) \right] \\
&\qquad + \left[\frac{\Delta y(a)}{2} f(a, \delta(a)) + 2\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta y(x_i)}{2} f(x_i, \delta(x_i)) \right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\Delta y(b)}{2} f(b, \delta(b)) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la aproximación con la regla del trapecio es,

$$T_{m,n} = \frac{\Delta x\,\Delta y(a)}{4}\left[f(a,\gamma(a)) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a, y_j(a)) + f(a,\delta(a))\right] + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\Delta x\,\Delta y(x_i)}{4}\left[2f(x_i,\gamma(x_i)) + 4\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i, y_j(x_i)) + 2f(x_i,\delta(x_i))\right] + \frac{\Delta x\,\Delta y(b)}{4}\left[f(b,\gamma(b)) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(b, y_j(b)) + f(b,\delta(b))\right]. \tag{8}$$

EJEMPLO 7 Aproximaremos $\int_2^{2.2}\int_x^{2x}(x^3 + y^2)\,dy\,dx$ por $T_{2,4}$. Tenemos que

$$\Delta x = \frac{2.2 - 2}{2} = 0.1, \quad \text{por lo que } x_0 = 2,\ x_1 = 2.1,\ x_2 = 2.2$$

y, por lo tanto, que

$$\Delta y(2) = \frac{4-2}{4} = 0.5,$$

de modo que $y_0(x_0) = 2,\ y_1(x_0) = 2.5,\ y_2(x_0) = 3,\ y_3(x_0) = 3.5,\ y_4(x_0) = 4,$

$$\Delta y(2.1) = \frac{4.2 - 2.1}{4} = 0.525,$$

de modo que $y_0(x_1) = 2.1,\ y_1(x_1) = 2.625,\ y_2(x_1) = 3.15,\ y_3(x_1) = 3.675,\ y_4(x_1) = 4.2,$

$$\Delta y(2.2) = \frac{4.4 - 2.2}{4} = 0.55,$$

de modo que $y_0(x_2) = 2.2,\ y_1(x_2) = 2.75,\ y_2(x_2) = 3.3,\ y_3(x_2) = 3.85,\ y_4(x_2) = 4.4.$

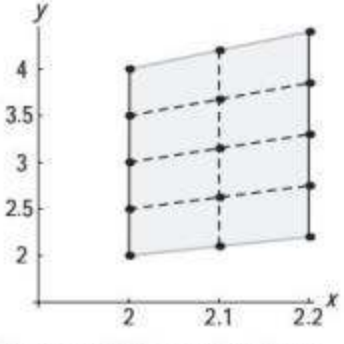


Figura 5.128 La región D con partición del ejemplo 7.

(Véase la figura 5.128). Por consiguiente,

$$\begin{aligned} T_{2,4} &= \frac{(0.1)(0.5)}{4}\left[(2^3 + 2^2) + 2\left((2^3 + 2.5^2) + (2^3 + 3^2) + (2^3 + 3.5^2)\right) + (2^3 + 4^2)\right] \\ &\quad + \frac{(0.1)(0.525)}{4}\left[2(2.1^3 + 2.1^2) + 4(2.1^3 + 2.625^2) + 4(2.1^3 + 3.15^2) + 4(2.1^3 + 3.675^2) + 2(2.1^3 + 4.2^2)\right] \\ &\quad + \frac{(0.1)(0.55)}{4}\left[(2.2^3 + 2.2^2) + 2(2.2^3 + 2.75^2) + 2(2.2^3 + 3.3^2) + 2(2.2^3 + 3.85^2) + 2(2.2^3 + 4.4^2)\right] \\ &= 0.0125(139) + 0.02625(156.7755) + 0.01375(175.934) = 8.271949375. \end{aligned}$$

En este caso, la respuesta exacta es

$$\int_2^{2.2}\int_x^{2x}(x^3+y^2)\,dy\,dx = \int_2^{2.2}(x^3y+\tfrac{1}{3}y^3)\Big|_{y=x}^{2x}\,dx = \int_2^{2.2}(x^4+\tfrac{7}{3}x^3)\,dx$$
$$= (\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{7}{12}x^4)\Big|_2^{2.2} = \tfrac{1}{5}(2.2^5-2^5)+\tfrac{7}{12}(2.2^4-2^4)$$
$$= 8.23886. \quad \blacklozenge$$

Si D es una región elemental de tipo 2, es decir,

$$D = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid \alpha(y)\le x\le \beta(y),\ c\le y\le d\},$$

entonces podemos aproximar $\iint_D f\,dA$ de manera similar, es decir, haciendo primero la partición del intervalo y $[c,d]$ y luego utilizando

$$\Delta y = \frac{d-c}{n},\quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d,\ \text{donde } y_j = c + j\Delta y,$$

y después, para una y fija en $[c,d]$ haciendo la partición del intervalo x $[\alpha(y),\beta(y)]$ correspondiente en m subintervalos iguales:

$$\Delta x(y) = \frac{\beta(y)-\alpha(y)}{m},$$

$$\alpha(y) = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \beta(y),\ \text{donde } x_i(y) = \alpha(y) + i\,\Delta x(y).$$

Al hacerlo obtenemos lo opuesto a la fórmula (8), que es:

$$\begin{aligned} T_{m,n} = {} & \frac{\Delta x(c)\Delta y}{4}\left[f(\alpha(c),c)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i(c),c)+f(\beta(c),c)\right] \\ & +\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\Delta x(y_j)\Delta y}{4}\left[2f(\alpha(y_j),y_j)+4\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i(y_j),y_j)\right) \\ & +2f(\beta(y_j),y_j)\Bigg] \\ & +\frac{\Delta x(d)\Delta y}{4}\left[f(\alpha(d),d)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i(d),d)+f(\beta(d),d)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Por supuesto, también podemos adaptar la regla de Simpson para usarla en el caso de integrales dobles sobre regiones elementales. Además, podemos derivar métodos similares para aproximar también integrales triples. Sin embargo, en la práctica a menudo se usan otros métodos que se pueden implementar en computadora.

Una de tales técnicas alternativas se conoce como **método de Monte Carlo**. Se basa en un resultado llamado **teorema del valor medio para integrales dobles**: Si f es una función continua de dos variables, y D es una región acotada y conectada, es decir, de una sola pieza, en $\mathbf{R}^2$, entonces existe un punto $P\in D$, tal que

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(P)\cdot \text{área de } D.$$

Observe que se infiere lo siguiente

$$f(P) = \frac{\iint_D f\,dA}{\text{área de } D},$$

de modo que, mediante la definición 6.1, tenemos que $f(P) = [f]_{\text{prom}}$, el valor promedio (media) de f en D. El método de Monte Carlo para aproximar $\iint_D f\,dA$ consiste en seleccionar n puntos $P_1, \ldots, P_n$ al azar en D y calcular el valor promedio $\hat{f}$ de f solo en dichos puntos:

$$\hat{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(P_i).$$

Entonces, $\hat{f}$ aproximará a $[f]_{\text{prom}}$ y, por lo tanto,

$$\iint_D f\,dA \approx (\text{área de } D)\hat{f} = \frac{(\text{área de } D)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(P_i).$$

Si se dificulta determinar con exactitud el área D, se puede estimar ubicando a D dentro de un rectángulo R y seleccionando m puntos al azar en R. Si r denota la fracción de estos puntos que están en D, entonces el área de $D \approx r$. (área de R).

De una manera análoga, es posible dar aproximaciones de Monte Carlo para integrales triples de funciones de tres variables definidas sobre regiones sólidas en el espacio.

5.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, a) use la aproximación de la regla del trapecio $T_{2,3}$ para estimar los valores de las integrales dadas, y b) compare sus resultados con las respuestas exactas.

1. $\displaystyle\int_3^{3.1}\int_{1.5}^{2.1} (x^2 - 6y^2)\,dy\,dx$

2. $\displaystyle\int_3^{3.3}\int_3^{3.3} xy^2\,dy\,dx$

3. $\displaystyle\int_2^{2.2}\int_1^{1.6} \frac{x}{y}\,dy\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^{1.4}\int_4^{4.3} (\sqrt{x} + \sqrt{y})\,dy\,dx$

5. $\displaystyle\int_1^{1.1}\int_0^{0.6} e^{x+2y}\,dy\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{0.2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} x\cos y\,dy\,dx$

En los ejercicios 7 a 12, a) use la aproximación $S_{2,2}$ de la regla de Simpson para estimar los valores de las integrales dadas, y b) compare sus resultados con las respuestas exactas.

7. $\displaystyle\int_{-0.1}^{0.1}\int_0^{0.3} (y^4 - xy^2)\,dy\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{0.1}\int_1^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dy\,dx$

9. $\displaystyle\int_1^{1.1}\int_0^{0.6} e^{x+2y}\,dy\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\cos 3y\,dy\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx$

12. $\displaystyle\int_1^{1.1}\int_0^{\pi/4} e^x\cos y\,dy\,dx$

13. En el capítulo 7 veremos que el área de la parte de la gráfica de $f(x, y)$ para (x, y) en una región D en $\mathbf{R}^2$ es dada por la doble integral $\iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$.

a) Plantee una integral iterada apropiada para calcular el área superficial de la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - 3y^2$, en donde $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

b) Utilice la aproximación de la regla del trapecio $T_{4,4}$ para estimar el área superficial.

14. En relación con la integral iterada $\int_1^{1.5}\int_{1.4}^{2} \ln(2x + y)\,dy\,dx$:

a) Calcule la aproximación con la regla del trapecio $T_{2,4}$.

b) Use el teorema 7.3 para estimar el error en la aproximación que obtuvo en el inciso *a)*.

c) Calcule la aproximación de la regla de Simpson $S_{2,4}$.

d) Use el teorema 7.4 para estimar el error en la aproximación que obtuvo en el inciso *a*).

15. Sin evaluar o estimar la integral $\int_1^{1.4} \int_{0.5}^{0.7} \ln(xy)\, dy\, dx$, responda, ¿cuál aproximación es más exacta: $T_{4,4}$ o $S_{2,2}$? Explique su respuesta.

16. Suponga que se utiliza la regla del trapecio para estimar el valor de $\int_0^{0.2} \int_{-0.1}^{0.1} e^{x^2+2y}\, dy\, dx$. Determine el valor más pequeño de n de modo que la aproximación resultante $T_{n,n}$ sea exacta hasta 10^{-4} del valor real de la integral.

17. Considere $\int_0^{0.3} \int_0^{0.4} e^{x-y}\, dy\, dx$.

a) Si la aproximación con la regla del trapecio $T_{n,n}$ se usa para estimar el valor de esta integral, ¿cuál es el valor más pequeño de n de modo que la aproximación resultante sea exacta dentro de 10^{-5} del valor real?

b) Si se utiliza la aproximación con la regla de Simpson $S_{2n,2n}$ para estimar el valor de esta integral, ¿cuál es el valor más pequeño de n de modo que la aproximación resultante sea exacta dentro de 10^{-5} del valor real?

18. En relación con la integral iterada $\int_0^2 \int_0^3 (3x+5y)\, dy\, dx$:

a) Calcule la aproximación con la regla del trapecio $T_{2,2}$.

b) Compare el resultado que obtuvo en el inciso *a*) con la respuesta exacta.

c) Use el teorema 7.3 para explicar los resultados que obtuvo en los incisos *a*) y *b*).

19. Considere la integral iterada $\int_{-1}^{0} \int_0^{1/2} x^3 y^3\, dy\, dx$:

a) Calcule la aproximación con la regla de Simpson $S_{2,2}$.

b) Compare el resultado que obtuvo en el inciso anterior con la respuesta exacta.

c) Use el teorema 7.4 para explicar los resultados de los incisos *a*) y *b*).

En los ejercicios 20 a 25, a) utilice la aproximación $T_{3,3}$ a partir de la regla del trapecio para estimar los valores de las integrales dadas.

20. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-x}^{2} (x^3 + 2y^2)\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} (2x \cos y + \operatorname{sen}^2 x)\, dy\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{0.3} \int_x^{2x} (xy - x^2)\, dy\, dx$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\, dy\, dx$

24. $\displaystyle\int_1^{\pi} \int_0^{y} \operatorname{sen} x\, dx\, dy$ (Advierta el orden de integración).

25. $\displaystyle\int_1^{1.6} \int_y^{2y} \ln(xy)\, dx\, dy$

26. En este problema el lector desarrollará otra forma de pensar acerca de la aproximación con la regla del trapecio dada en la ecuación (6).

a) Sea que L denote una función lineal general de dos variables, es decir, $L(x, y) = Ax + By + C$, donde A, B y C son constantes. Sea $R = [a, b] \times [c, d]$. Demuestre que

$$\iint_R L\, dA = (\text{área de } R)(\text{promedio de los valores de } L \text{ tomados en los cuatro vértices de } R).$$

(Advierta que esto da una expresión *exacta* para la integral doble).

b) Suponga que f es cualquier función de dos variables integrable sobre R. Demuestre que la aproximación con la regla del trapecio $T_{1,1}$ a $\iint_R f\, dA$ es

$$T_{1,1} = (\text{área de } R)\ (\text{promedio de los valores de } f \text{ tomados en los cuatro vértices de } R).$$

c) Ahora sea $\Delta x = (b-a)/m$, $\Delta y = (d-c)/n$, y, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, sea $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, donde $x_i = a + i\Delta x$, y $y_j = c + j\Delta y$. Entonces tenemos que

$$\iint_R f\, dA = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_{ij}} f\, dA.$$

Use $T_{1,1}$ para aproximar cada integral $\iint_{R_{ij}} f\, dA$ y sume los resultados para obtener la fórmula para $T_{m,n}$ dada por la ecuación (6).

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 5

1. Cada rectángulo en $\mathbf{R}^2$ puede denotarse con $[a, b] \times [c, d]$

2. Si f es una función continua y $f(x, y) \geq 0$ sobre una región D en $\mathbf{R}^2$, entonces el volumen del sólido en $\mathbf{R}^3$ bajo la gráfica de la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región D en el plano xy es $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dA$.

3. $\displaystyle\int_0^{1/2} \int_{-1}^{2} y^3 \operatorname{sen}(\pi x^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} \int_0^{1/2} y^3 \operatorname{sen}(\pi x^2)\, dx\, dy.$

4. $\int_0^2 \int_0^x 3\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^y 3\,dx\,dy.$

5. $\int_0^2 \int_0^y f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^x f(x, y)\,dy\,dx$ para todas las funciones continuas f.

6. $0 \le \iint_D \operatorname{sen}(x^4 + y^4)\,dx\,dy \le \pi$, donde D denota el disco unitario $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

7. $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^3 + y}\,dy\,dx = \int_0^x \int_0^2 \sqrt{x^3 + y}\,dx\,dy.$

8. $\int_{-1}^1 \int_0^3 x^2 e^{x+y}\,dy\,dx = \left(\int_{-1}^1 x^2 e^x\,dx\right)\left(\int_0^3 e^y\,dy\right).$

9. La región en $\mathbf{R}^2$ acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$ es una región elemental de tipo 3 en el plano.

10. La región en $\mathbf{R}^2$ acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$ es una región elemental de tipo 2 en el plano.

11. La región en $\mathbf{R}^3$ acotada por las gráficas de $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ y $9x^2 + 4z^2 = 36$ es una región elemental de tipo 3 en el espacio.

12. $\iint_D (y^3 + 1)\,dx\,dy$ da el área de la región D, donde $D = \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + 3y^2 \le 5\}$.

13. $\iint_D (y^2 \operatorname{sen}(x^3) + 3)\,dx\,dy = 3/2$, donde D es el triángulo con vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

14. $\iiint_{[-2,2]\times[-1,1]\times[-3,3]} (x + y^3 + z^5)\,dV = 0.$

15. $\iiint_{[-2,2]\times[0,1]\times[-1,1]} (x + z)\,dV = 0.$

16. $\iiint_{[-2,2]\times[0,1]\times[-1,1]} (y + z)\,dV = 0.$

17. $\int_0^4 \int_{y/4}^{\sqrt{y}/2} \int_{-2}^2 \operatorname{sen} yz\,dz\,dx\,dy = 0.$

18. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (y - x^2)\,dz\,dy\,dx = 0.$

19. Si $\mathbf{T}(u, v) = (2u - v, u + 3v)$, entonces el área de la imagen $D = \mathbf{T}(D^*)$ del cuadrado unitario $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ es 7 unidades cuadradas.

20. Si $\mathbf{T}(u, v) = (v - u, 3u + 2v)$, entonces el área de la imagen $D = \mathbf{T}(D^*)$ del rectángulo $D^* = [0, 3] \times [0, 2]$ es 5 unidades cuadradas.

21. $\int_0^2 \int_{y/2}^{5-2y} e^{2x-y} \cos(x - 3y)\,dx\,dy = \int_0^{10} \int_{u-5}^{u/2} -5e^u \cos v\,dv\,du.$

22. Si D es el disco $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 9\}$, entonces $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dA = 36\pi.$

23. La integral iterada $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2r}^4 dz\,dr\,d\theta$ representa el volumen encerrado por el cono de altura 4 y radio 2.

24. La integral iterada

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (2 + \sqrt{x^2 + y^2})\,dz\,dy\,dx$$

es dada por una integral equivalente en coordenadas cilíndricas como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{9-r^2}} (r^2 + 2r)\,dz\,dr\,d\theta.$$

25. La integral iterada

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 5}\,dz\,dy\,dx$$

es dada por una integral equivalente en coordenadas esféricas como

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 \rho \sqrt{\rho^2 + 5}\,\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

26. El valor promedio de la función $f(x, y) = x^2y$ sobre la región semicircular $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$ es dada por

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^4 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

o por

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^2 r^4 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta\,dr\,d\theta.$$

27. El centro de masa de una lámina representada por el triángulo con vértices $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, y cuya densidad varía cuando $\delta(x, y) = (x^2 + 1)\cos y$ tiene coordenadas dadas por

$$\overline{x} = \frac{\int_0^2 \int_{(x-2)/2}^{(2-x)/2} (x^3 + x)\cos y\,dy\,dx}{\int_0^2 \int_{(x-2)/2}^{(2-x)/2} (x^2 + 1)\cos y\,dy\,dx}, \qquad \overline{y} = 0.$$

28. El centroide de un cono de radio a, altura h, con z como su eje y vértice en $(0, 0, h)$ es $(0, 0, \frac{3}{4}h)$.

29. El centro de masa del cilindro sólido de radio a, altura h, con z como su eje, cuya densidad en cualquier punto

varía cuando e^d, donde d es el cuadrado de la distancia desde el punto hasta el eje x es $(0, 0, \bar{z})$, donde

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h zre^{r^2}\,dz\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h re^{r^2}\,dz\,dr\,d\theta} = \tfrac{1}{2}h.$$

30. La integral $\iiint_W \rho^5 \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ representa el momento de inercia sobre el eje z de un sólido W con densidad z expresado en coordenadas esféricas.

Ejercicios varios para el capítulo 5

1. Sea B la esfera de radio 3; es decir,

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}.$$

Sin resolver de manera explícita la integral iterada determine el valor de la integral triple $\iiint_B (z^3 + 2)\,dV$ utilizando geometría y consideraciones de simetría.

2. Sea W, que denota la mitad de la esfera sólida de radio 2; es decir,

$$W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge 0\}.$$

Sin recurrir al cálculo explícito de una integral iterada determine el valor de la integral triple

$$\iiint_W (x^3 + y - 3)\,dV.$$

(Sugerencia: utilice geometría y simetría).

3. Sea W la región sólida en $\mathbf{R}^3$ con $x \ge 0$, acotada por las tres superficies: $z = 9 - x^2$, $z = 2x^2 + y^2$ y $x = 0$.

a) Plantee, pero no evalúe, dos integrales iteradas diferentes (pero equivalentes) que den, ambas, el valor de $\iiint_W 3\,dV$.

b) Use un sistema de álgebra por computadora para encontrar el valor de $\iiint_W 3\,dV$ y comprobar la consistencia de la respuesta que dio en el inciso *a*).

4. Suponga el lector que f es continua en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Para $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ se define

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(x', y')\,dy'\,dx'.$$

Use el teorema de Fubini para demostrar que $\partial^2 F/\partial x\partial y = \partial^2 F/\partial y\partial x$. Esto constituye una demostración alternativa de la igualdad de las parciales mixtas. (Sugerencia: escriba

$$F(x, y) = \int_a^x g(x', y)\,dx'$$

donde

$$g(x', y) = \int_c^y f(x', y')\,dy'.$$

Después calcule $\partial F/\partial x$ y $\partial^2 F/\partial y\partial x$ utilizando el teorema fundamental del cálculo. Luego utilice el teorema de Fubini para encontrar $\partial F/\partial y$ y $\partial^2 F/\partial x\partial y$).

5. Convierta la siguiente integral cilíndrica a integrales iteradas equivalentes en: *a*) coordenadas cartesianas, y *b*) coordenadas esféricas:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Evalúe la más fácil de las tres integrales iteradas.

6. El volumen de un sólido es dado por la integral iterada

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy.$$

a) Dibuje el sólido y también descríbalo con las ecuaciones de las superficies que constituyen su frontera.

b) Exprese el volumen como una integral iterada en coordenadas cilíndricas. Determine el volumen.

7. Calcule el volumen de un cubo cuyas aristas tienen longitud a mediante integración en coordenadas cilíndricas. (Sugerencia: sitúe el centro del cubo en el origen).

8. Calcule el volumen de un cubo cuya arista tiene una longitud a utilizando coordenadas esféricas.

9. Determine

$$\iint_D \cos\left(\frac{x - 2y}{x + y}\right) dA,$$

donde D es la región triangular acotada por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$.

10. Evalúe

$$\int_0^6\int_{-2y}^{1-2y} y^3(x + 2y)^2 e^{(x+2y)^3}\,dx\,dy$$

haciendo el cambio de variables apropiado.

11. Encuentre el área encerrada por la elipse E dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en la forma siguiente:

a) Primero escriba el área como el valor de una integral iterada apropiada en coordenadas cartesianas. No evalúe la integral.

b) A continuación escale las variables haciendo $x = a\,\bar{x}$, $y = b\bar{y}$. ¿A qué región E^* en el plano $\bar{x}\,\bar{y}$

corresponde la elipse E? Vuelva a escribir la integral xy del inciso *a*) como una integral $\bar{x}\,\bar{y}$.

c) Por último, use coordenadas polares para transformar la integral $\bar{x}\,\bar{y}$ y así demostrar que el área dentro de la elipse original es πab.

12. Este problema tiene que ver con la elipse rotada E, cuya ecuación es $13x^2 + 14xy + 10y^2 = 9$.

a) Establezca $u = 2x - y$, $v = x + y$ y vuelva a escribir la ecuación de E en la forma

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son constantes positivas por determinar.

b) Utilice un cambio de variables apropiado y el resultado del inciso *c*) del ejercicio 11 para encontrar el área encerrada por E.

13. Considere la elipse E cuya ecuación es $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4$. Sea $u = x - y$, $v = x + y$ y siga los pasos del ejercicio 12.

14. Imite las técnicas del ejercicio 11 para calcular el volumen contenido por el elipsoide E dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

15. Evalúe

$$\int\int_D \frac{xy}{y^2 - x^2}\,dA,$$

donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$ y las elipses $x^2/4 + y^2 = 1$, $x^2/16 + y^2/4 = 1$. (Sugerencia: dibuje la región D y úsela para hacer un cambio de variables apropiado).

16. Evalúe

$$\int\int_D (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}\,dA,$$

donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9, xy = 1, xy = 4$.

17. Evalúe

$$\int\int_D \frac{1}{x^2y^2 + 1}\,dA,$$

donde D es la región acotada por $xy = 1, xy = 4, y = 1, y = 2$.

18. *a*) Generalice los conceptos de integrales dobles y triples para desarrollar una definición de la "integral cuádruple" $\int\int\int\int_W f\,dV$ de una función $f(x, y, z, w)$ sobre una región de cuatro dimensiones W en $\mathbf{R}^4$.

b) Utilice la definición que hizo en el inciso *a*) para calcular

$$\int\int\int\int_W (x + 2y + 3z - 4w)\,dV,$$

donde W es la caja de cuatro dimensiones

$$W = \{(x, y, z, w) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3,$$
$$0 \le z \le 4,\ -2 \le w \le 2\}.$$

19. *a*) Plantee, pero no resuelva, una integral iterada cuádruple que calcule el volumen en cuatro dimensiones de la esfera tetradimensional de radio a:

$$B = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \le a^2\}.$$

b) Use un sistema de álgebra por computadora para dar una fórmula que permita calcular el volumen.

c) Utilice un sistema de álgebra por computadora para dar las fórmulas que permitan obtener el volumen n-dimensional de la esfera en n dimensiones:

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le a^2\}$$

en los casos en que $n = 5, 6$. ¿Hay algún patrón en sus respuestas?

En los ejercicios 20 a 23 el lector dará una expresión para el volumen en n-dimensiones de la esfera n-dimensional:

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \le a^2\}.$$

Sea que $V_n(a)$ denote este volumen en n-dimensiones. Sea que C_n denote el volumen en n-dimensiones de la esfera unitaria U; es decir, $C_n = V_n(1)$.

20. Escale las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y utilice una fórmula de cambio de variables análoga a la de los teoremas 5.3 y 5.5 para demostrar que $V_n(a) = C_n a^n$.

21. *a*) Considere puntos en B de la forma $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$. Demuestre que las coordenadas x_1, x_2 describen puntos (en $\mathbf{R}^2$) que están en el disco de radio a.

b) En $\mathbf{R}^n$, sean las coordenadas polares r y θ que reemplacen a las coordenadas cartesianas x_1 y x_2. Dé un argumento acerca de que los puntos en B que están sobre un punto particular (r, θ) en el disco descrito en el inciso *a*) deben llenar una esfera de $(n - 2)$ dimensiones de radio $\sqrt{a^2 - r^2}$.

c) Utilice el inciso *b*) para demostrar que el volumen en n dimensiones de B es dado por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a V_{n-2}(\sqrt{a^2 - r^2})\,r\,dr\,d\theta.$$

22. Utilice los dos ejercicios anteriores para establecer la fórmula recursiva

$$V_n(a) = \left(\frac{2\pi a^2}{n}\right) V_{n-2}(a).$$

23. *a*) Demuestre que $V_1(a) = 2a$ y $V_2(a) = \pi a^2$. (Estos son hechos conocidos para el lector).

b) Emplee el inciso *a*) y el problema anterior para probar que

$$V_n(a) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}\right)a^n & \text{si } n \text{ es par} \\ \left(\dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{n!!}\right)a^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases},$$

donde el doble factorial es $n!! = n(n-2)(n-4) \cdots 3 \cdot 1$, es decir, el producto de todos los enteros impares de 1 a n.

24. Una concha esférica con radio interno de 3 cm y externo de 4 cm tiene una densidad de masa que varía cuando $0.12d^2$ g/cm^3, donde d denota la distancia (en centímetros) entre un punto en la concha y el centro de esta.

a) Determine la masa total de la concha.

b) ¿Flotará en agua la concha? (Nota: la densidad del agua es de 1 g/cm^3. Para responder a esta pregunta el lector necesita determinar la densidad promedio de la concha).

c) Suponga que la concha tiene un pequeño agujero por el que se puede llenar con agua, si ese fuera el caso, ¿flotaría?

25. Un domo tiene forma de hemisferio. Si en su interior se va a instalar un tubo cuya longitud mide su altura promedio, en posición vertical, ¿en qué punto del piso se puede ubicar?

26. Sea f continua en $R = [a, b] \times [c, d]$. En este problema el lector establecerá la **regla de Leibniz** para "diferenciar bajo el signo de la integral":

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b f_y(x, y)\,dx.$$

a) Sea $G(y') = \int_a^b f_y(x, y')\,dx$. Para $c \le y \le d$ use el teorema fundamental del cálculo para calcular $d/dy \int_c^y G(y')\,dy'$ y, por lo tanto,

$$\frac{d}{dy}\int_c^y \int_a^b f_y(x, y')\,dx\,dy'.$$

b) Utilice el teorema de Fubini y el inciso *a*) para establecer la regla de Leibniz.

27. La función $f(x, y) = 1/\sqrt{xy}$ no está acotada cuando ocurre que x o y son cero. Por consiguiente, si $D = [0, 1] \times [0, 1]$, decimos que $\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA$ es una **integral doble impropia**, análoga a la integral impropia de una variable $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Las integrales múltiples impropias de este tipo pueden evaluarse utilizando un proceso de obtención de límites apropiado. En este problema, el lector determinará el valor de $\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA$ de la manera siguiente:

a) Para $0 < \epsilon < 1/2, 0 < \delta < 1/2$, sea $D_{\epsilon,\delta} = [\epsilon, 1-\epsilon] \times [\delta, 1-\delta]$. (Observe que $D_{\epsilon,\delta} \subset D$). Calcule

$$I(\epsilon, \delta) = \iint_{D_{\epsilon,\delta}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA.$$

b) Evalúe $\lim_{(\epsilon,\delta)\to(0,0)} I(\epsilon, \delta)$. El lector debe obtener un valor finito, que puede tomarse para que sea el valor de $\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA$, puesto que $D_{\epsilon,\delta}$ "llena" D cuando $(\epsilon, \delta) \to (0, 0)$. (En este caso decimos que la integral impropia **converge**).

28. Imite las técnicas del ejercicio 27 para determinar si la integral doble impropia

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y}\,dA$$

converge y, si lo hace, calcule su valor. (Sugerencia: necesitará determinar $\lim_{u\to 0^+} u \ln u$).

29. Imite las técnicas del ejercicio 27 para determinar si la integral doble impropia

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{y}\,dA$$

converge y, si lo hace, diga cuál es su valor.

30. Calcule $\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dA$, donde D es el disco unitario $x^2 + y^2 \le 1$. Advierta que el integrando no está definido en el origen, por lo que este es un ejemplo de integral doble impropia. No obstante, es posible calcular su valor si se integra sobre la región anular

$$D_\epsilon = \{(x, y) \mid \epsilon \le x^2 + y^2 \le 1\}$$

y se toman los límites apropiados.

31. Encuentre el valor de la integral triple impropia

$$\iiint_B \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV,$$

donde B es la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ (véase el ejercicio 30).

32. Si D es una región no acotada en $\mathbf{R}^2$, la integral $\iint_D f(x, y)\,dA$ es otro tipo de **integral doble impropia** análoga a las integrales dobles impropias de una variable, tales como $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, o bien, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. En este problema el lector determinará el valor de

$$\iint_D \frac{1}{x^2y^3}\,dA,$$

donde

$D = \{(x, y) \mid x \ge 1, y \ge 1\}$ utilizando un proceso de obtención de límites.

a) Para $a > 1$, $b > 1$, sea $D_{a,b} = [1, a] \times [1, b]$. Calcule

$$I(a, b) = \iint_{D_{a,b}} \frac{1}{x^2 y^3}\, dA.$$

b) Evalúe $\lim_{(a,b)\to(\infty,\infty)} I(a, b)$. Debe obtener un valor finito que puede tomarse como el valor de $\iint_D \frac{1}{x^2 y^3}\, dA$. (En este caso decimos que la integral impropia **converge**).

33. Sea $D = \{(x, y) \mid x \geq 1, y \geq 1\}$. ¿Para qué valores de p y q converge la integral impropia?

$$\iint_D \frac{1}{x^p y^q}\, dA$$

Para estos valores de p y q para los que converge, ¿cuál es el valor de la integral?

34. Este problema tiene que ver con la integral impropia

$$\iint_{\mathbf{R}^2} (1 + x^2 + y^2)^p\, dA,$$

donde p es una constante.

a) Determine si la integral converge cuando $p = -2$ integrando sobre el disco $Da = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, y sea que $a \to \infty$.

b) Determine para qué valores de p converge la integral $\iint \mathbf{R}^2\ (1 + x^2 + y^2)^p\, dA$. ¿Cuál es el valor de la integral cuando converge?

35. Determine si la integral

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dV$$

converge mediante la integración sobre la esfera $B_a = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ y después dejando a $\to\infty$.

36. Muestre que

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV$$

converge mediante la determinación de su valor.

37. En este problema encontrará el valor de la integral impropia de una variable: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ utilizando integrales impropias de dos variables.

a) Primero argumente que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ converge. (Recomendación: advierta que $e^{-x2} \leq 1/x^2$ para toda x; compare las integrales).

b) Sea que I denote el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Demuestre que $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dA$.

c) Sea que D_a denote al disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Evalúe $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\, dA$.

d) Calcule I^2 cuando $\lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\, dA$.

e) Ahora encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Los ejercicios 38 a 46 involucran el concepto de densidades de probabilidad. Una función de ***densidad de probabilidad*** *de una sola variable es cualquier función $f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$ toda $x \in \mathbf{R}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$. Dada dicha función de densidad, la probabilidad de que un número x seleccionado al azar se encuentre entre los valores a y b es*

$$\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

38. *a*) Compruebe que $f(x) = e^{-3|x|}$ es una función de densidad de probabilidad.

b) Egbert enciende la estufa al azar a fin de calentar aceite para freír pollo. Si la densidad de probabilidad de la temperatura x del aceite es dada por $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-300|}$, ¿cuál es la probabilidad de que el aceite tenga una temperatura entre 250°F y 350°F?

Una función de ***densidad de probabilidad conjunta*** *para dos variables aleatorias x y y es una función $f(x, y)$ tal que*

(i) $f(x, y) \geq 0$ *para toda* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, *y*

(ii) $\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

Si f es una densidad de probabilidad y D es una región en $\mathbf{R}^2$, entonces la probabilidad de que un punto elegido al azar (x, y) se encuentre en D es

$$\text{Prob}((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA.$$

39. *a*) Demuestre que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x + y}{140} & \text{si } 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad conjunta.

b) Encuentre la probabilidad de que $x \leq 1$ y $y \leq 1$.

40. *a*) Demuestre que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-x-y} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad conjunta.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que $x + y \leq 2$?

41. Si a y b son constantes positivas fijas, ¿qué valor de C hará que la función $f(x, y) = Ce^{-a|x|-b|y|}$ sea una función de densidad conjunta?

42. Sean a y b constantes no negativas fijas, distintas de cero. ¿Para qué valor de C

$$f(x, y) = \begin{cases} C(ax + by) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad conjunta?

43. Sean a y b constantes positivas fijas y, para una constante C dada, considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy & \text{si } 0 \le x \le a, 0 \le y \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) ¿Para qué valor de C es f una función de densidad de probabilidad conjunta?

b) Utilice el valor de C que encontró en el inciso *a*) para responder ¿cuál es la probabilidad de que $bx - ay \ge 0$?

44. El equipo de investigación del parque de diversiones Vértigo determina que el lapso de tiempo x (en minutos) que un cliente pasa esperando participar en el nuevo recorrido acuático Ciudad ahogada, y el lapso de tiempo y que en realidad pasa en el juego, se distribuyen en forma conjunta de acuerdo con la función de densidad de probabilidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{250} e^{-x/50 - y/5} & \text{si } x \ge 0, y \ge 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Calcule la probabilidad de que un cliente pase máximo una hora en el juego (tanto en espera como en el recorrido).

45. Suponga el lector que dispara flechas al azar a un objetivo circular de modo que la distribución de sus flechas es dada por la función de densidad de probabilidad

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - y^2},$$

donde x y y se miden en pies. En el centro del objetivo hay un orificio que mide 1 pie de diámetro (véase la figura 5.129). ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el orificio?

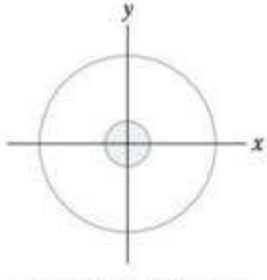


Figura 5.129 Objetivo circular del ejercicio 45. La región sombreada es el orificio.

46. Si x es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y y es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $g(y)$, decimos que x y y son **variables aleatorias independientes** si su función de densidad conjunta es el producto de sus funciones de densidad individuales, es decir, si

$$F(x, y) = f(x)g(y).$$

Suponga que un circuito eléctrico está diseñado con dos componentes idénticos cuyo tiempo x para fallar (medido en horas) es dado por una función de densidad exponencial de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2000} e^{-x/2000} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}.$$

Si suponemos que los componentes fallan en forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que *ambos* fallen en un lapso de 2000 horas?

47. Sea que I_L denote el momento de inercia de un sólido W (de densidad $\delta(x, y, z)$) respecto de la recta L (véase la fórmula (8) en la sección 5.6). Sea $\bar{L}$ la recta paralela a L que pasa por el centro de masa de W. Por consiguiente, si M denota la masa de W y h es la distancia entre L y $\bar{L}$, demuestre el **teorema del eje paralelo**:

$$I_L - I_{\bar{L}} = Mh^2.$$

(Sugerencia: se pueden acomodar las cosas de modo que $\bar{L}$ sea el eje z sin perder generalidad).

48. Sea F una función de una variable que es continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces la función $f(x, y) = F(x)$, es decir, la función F considerada como una función de dos variables es continua en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

a) Demuestre que la aproximación con la regla del trapecio $T_{m,n}$ a $\iint_R f(x, y)\, dA$ es $T_{m,n} = (d - c)T_m$, donde T_m denota la aproximación con la regla del trapecio a la integral definida $\int_a^b F(x)\, dx$.

b) En forma similar, demuestre que la aproximación con la regla de Simpson $S_{2m,2n}$ a $\iint_R f(x, y)\, dA$ es $S_{2m,2n} = (d - c)S_{2m}$, donde S_{2m} denota la aproximación con la regla de Simpson a la integral definida $\int_a^b F(x)\, dx$.

49. Suponga que f es una función de una variable continua en $[a, b]$ y g es otra función de una variable continua en $[c, d]$. Entonces, a partir del ejercicio 40 de la sección 5.2 sabemos que

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\, dA = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_c^d g(y)\, dy \right).$$

Demuestre que esta misma propiedad del producto se cumple para la aproximación con la regla del trapecio. Es decir, si $T_{m,n}$ denota la aproximación con la regla del trapecio a $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dA$, entonces $T_{m,n} = T_m(f)T_n(g)$, donde $T_m(f)$ denota la aproximación de la regla del trapecio a $\int_a^b f(x)\, dx$ y $T_n(g)$ la aproximación de la regla del trapecio a $\int_c^d g(y)\, dy$.

6 Integrales de línea

6.1 Integrales de línea escalares y vectoriales

6.2 Teorema de Green

6.3 Campos vectoriales conservativos

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 6

Ejercicios varios para el capítulo 6

6.1 Integrales de línea escalares y vectoriales

En esta sección describiremos dos métodos de integración a lo largo de una curva en el espacio y exploraremos el significado e importancia de nuestras construcciones. Comenzaremos por establecer las definiciones principales para trayectorias parametrizadas. Demostraremos en última instancia que las integrales definidas son muy independientes de la parametrización, y que lo que reflejan, en esencia, es solo la geometría de la curva por debajo de ellas.

Integrales de línea escalares

Para comenzar, encontraremos un modo de integrar una función (un campo escalar) a lo largo de una trayectoria. Sea $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria de clase C^1. Sea f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una función continua cuyo dominio X contiene la imagen de $\mathbf{x}$ (de modo que la composición $f(\mathbf{x}(t))$ está definida). Como ha sido el caso con todas las demás integrales, la integral de línea escalar es un límite de sumas de Riemann apropiadas.

Sea

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = b$$

una partición de $[a, b]$. Sea t_k^* un punto arbitrario en el k-ésimo subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ de la partición. Después consideremos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(t_k^*))\,\Delta s_k, \tag{1}$$

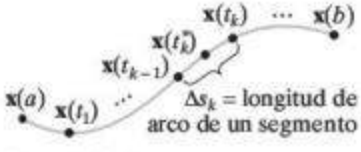


Figura 6.1 La suma $\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(t_k^*))\Delta s_k$ aproxima la carga total a lo largo de un alambre idealizado descrito por la trayectoria $\mathbf{x}$.

donde $\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt$ es la longitud del k-ésimo segmento de $\mathbf{x}$, es decir, la parte de $\mathbf{x}$ definida para $t_{k-1} \le t \le t_k$. Si pensamos en la imagen de la trayectoria $\mathbf{x}$ como algo que representa un alambre idealizado en el espacio, y que $f(\mathbf{x}(t_k^*)$ es la densidad de carga eléctrica del alambre en un "punto de prueba" $\mathbf{x}(t_k^*)$ en el k-ésimo segmento, entonces el producto $f(\mathbf{x}(t_k^*))\Delta s_k$ aproxima la contribución que hace el segmento de la curva a la carga, y la suma en la ecuación (1) aproxima la carga total del alambre (véase la figura 6.1). Para encontrar la carga real en el alambre es razonable obtener un límite a medida que los segmentos de la curva se hacen más pequeños, es decir,

$$\text{Carga total} = \lim_{\text{todo } \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(t_k^*))\,\Delta s_k$$

$$= \lim_{\text{todo } \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(t_k^*))\,\Delta s_k, \tag{2}$$

ya que $\mathbf{x}$ es de clase C^1.

El teorema del valor medio para las integrales[1] dice que existe algún número t_k^{**} en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, tal que

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = (t_k - t_{k-1})\,\|\mathbf{x}'(t_k^{**})\| = \|\mathbf{x}'(t_k^{**})\|\,\Delta t_k.$$

(Aquí, Δt_k denota $t_k - t_{k-1}$). Como t_k^* es un punto arbitrario en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, lo podemos igualar a t_k^{**}. Por lo tanto, al sustituir para Δs_k en la ecuación (2), y hacer t_k^* igual a t_k^{**}, tenemos que

$$\text{Carga total} = \lim_{\text{todo } \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(t_k^{**}))\,\|\mathbf{x}'(t_k^{**})\|\,\Delta t_k$$

$$= \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt.$$

Este último resultado lleva a la definición siguiente:

DEFINICIÓN 1.1 La **integral de línea escalar** de f a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}$ de C^1 es

$$\int_a^b f(\mathbf{x}(t))\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt.$$

Esta integral se denota como $\int_{\mathbf{x}} f\,ds$.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{x}: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ la hélice $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, y sea $f(x, y, z) = xy + z$. Calculamos:

$$\int_{\mathbf{x}} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}(t))\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt.$$

En primer lugar,

$$\mathbf{x}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1),$$

de modo que

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

También tenemos que

$$f(\mathbf{x}(t)) = \cos t \operatorname{sen} t + t = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t$$

de la fórmula de los ángulos dobles. Así,

$$\int_{\mathbf{x}} f\,ds = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right)dt$$

$$= \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{4}\cos 2t + \tfrac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(\left(-\tfrac{1}{4} + 2\pi^2\right) - \left(-\tfrac{1}{4} + 0\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi^2. \qquad \blacklozenge$$

[1] Recuerde que este teorema afirma que si F es una función continua, entonces existe cierto número c con $a \le c \le b$, tal que $\int_a^b F(x)\,dx = (b - a)\,F(c)$.

Dado el análisis anterior de la definición formal de la integral de línea escalar es tanto conveniente como apropiado conceptualizar a la notación $\int_{\mathbf{x}} f\,ds$ como una sugerencia de que la integral de línea representa una suma de valores de f a lo largo de $\mathbf{x}$ que multiplican a elementos "infinitesimales" de longitudes de arco de $\mathbf{x}$.

La definición 1.1 solo opera para trayectorias $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^3$ y funciones f definidas sobre el dominio en $\mathbf{R}^3$. No obstante, para una n arbitraria sí podemos usar la integral definida

$$\int_a^b f(\mathbf{x}(t))\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt,$$

donde $\mathbf{x}$ es una trayectoria C^1 en $\mathbf{R}^n$ y f es una función apropiada de n variables. También damos a esta integral definida el nombre de integral de línea escalar (y conservamos la notación $\int_{\mathbf{x}} f\,ds$) y nos basamos en el contexto para saber cuál es la dimensionalidad de la situación. Asimismo, si $\mathbf{x}$ no es de clase C^1, sino únicamente "C^1 por partes" (lo cual significa que $\mathbf{x}$ se puede descomponer en un número finito de segmentos que individualmente son de clase C^1), entonces es posible definir la integral de línea escalar $\int_{\mathbf{x}} f\,ds$ descomponiéndola en forma apropiada. Si $f(\mathbf{x}(t))$ solo es continua por partes se debe usar una técnica similar.

EJEMPLO 2 Sea $f(x, y) = y - x$ y sea $\mathbf{x}\colon [0, 3] \to \mathbf{R}^2$ la trayectoria plana

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} (2t, t) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ (t + 1, 5 - 4t) & \text{si } 1 < t \le 3 \end{cases}.$$

Entonces, $\mathbf{x}$ es C^1 por partes (véase la figura 6.2) y los dos segmentos de trayectoria definidos para t en $[0, 1]$ y para t en $[1, 3]$ son de clase C^1. Por consiguiente,

$$\int_{\mathbf{x}} f\,ds = \int_{\mathbf{x}_1} f\,ds + \int_{\mathbf{x}_2} f\,ds,$$

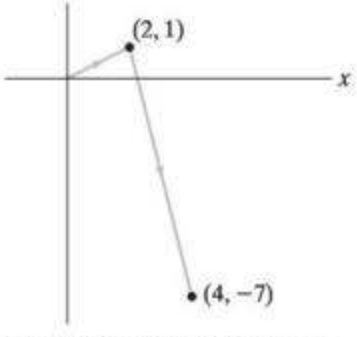


Figura 6.2 Una trayectoria $\mathbf{x}$ de C^1 por partes.

donde $\mathbf{x}_1(t) = (2t, t)$ para $0 \le t \le 1$ y $\mathbf{x}_2(t) = (t + 1, 5 - 4t)$, para $1 \le t \le 3$. Observe que

$$\|\mathbf{x}_1'(t)\| = \sqrt{5} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}_2'(t)\| = \sqrt{17}.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbf{x}_1} f\,ds = \int_0^1 f(\mathbf{x}(t))\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt = \int_0^1 (t - 2t)\cdot\sqrt{5}\,dt = -\frac{\sqrt{5}}{2}t^2\Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Asimismo,

$$\int_{\mathbf{x}_2} f\,ds = \int_1^3 f(\mathbf{x}_2(t))\,\|\mathbf{x}_2'(t)\|\,dt = \int_1^3 ((5 - 4t) - (t + 1))\,\sqrt{17}\,dt$$
$$= \sqrt{17}\,(4t - \tfrac{5}{2}t^2)\big|_1^3 = -12\sqrt{17}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbf{x}} f\,ds = -\frac{\sqrt{5}}{2} - 12\sqrt{17}. \qquad \blacklozenge$$

Integrales de línea vectoriales

Ahora veremos cómo integrar un campo vectorial a lo largo de una trayectoria. De nuevo, sea $\mathbf{x}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ de clase C^1. (En los ejemplos que siguen n será igual a

2 o 3). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido sobre un subconjunto X de $\mathbf{R}^n$, tal que X contiene la imagen de $\mathbf{x}$. Suponga que $\mathbf{F}$ varía continuamente a lo largo de $\mathbf{x}$.

DEFINICIÓN 1.2 La **integral de línea vectorial** de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$, denotada con $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, es

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt.$$

Alertamos al lector para que tenga claridad acerca de la notación. En la integral de línea *vectorial* $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, el término de la diferencial $d\mathbf{s}$ debe considerarse como una cantidad vectorial, es decir, la "diferencial" de posición a lo largo de la trayectoria, mientras que en la integral de línea *escalar* $\int_{\mathbf{x}} f\, ds$ el término de la diferencial ds es una cantidad escalar (la diferencial de la longitud de arco).

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial radial sobre $\mathbf{R}^3$, dado por $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y sea $\mathbf{x}$: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$ la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (t, 3t^2, 2t^3)$. Entonces, $\mathbf{x}'(t) = (1, 6t, 6t^2)$, por lo que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k})\, dt \\ &= \int_0^1 (t + 18t^3 + 12t^5)\, dt = \left(\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{9}{2}t^4 + 2t^6\right)\Big|_0^1 = 7.\end{aligned}$$

◆

Igual que con las integrales de línea, definimos $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ cuando $\mathbf{x}$ solo es una trayectoria C^1 por partes descomponiendo la integral en una forma apropiada.

La definición 1.2 es importante por la siguiente razón:

Interpretación física de las integrales de línea vectoriales. Considere que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas en el espacio. Entonces, $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ puede tomarse como la representación del **trabajo** realizado por $\mathbf{F}$ sobre una partícula cuando esta se desplaza a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}$.

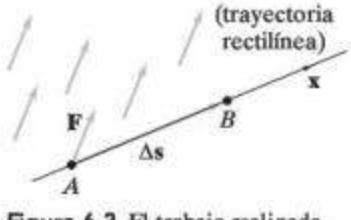


Figura 6.3 El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en una partícula que se desplaza de A a B sobre una línea recta es $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$.

Para justificar esta interpretación recuerde el lector que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial constante y $\mathbf{x}$ es una trayectoria rectilínea, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de un punto a otro sobre la trayectoria $\mathbf{x}$ es dado por

$$\text{Trabajo} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s},$$

donde $\Delta\mathbf{s}$ es el vector de desplazamiento de la posición inicial a la final (véase la figura 6.3).

En general, la trayectoria $\mathbf{x}$ no necesita ser recta, y el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ podría no ser constante a lo largo de $\mathbf{x}$. No obstante, sobre un segmento corto de la trayectoria, $\mathbf{x}$ es casi rectilínea y $\mathbf{F}$, por continuidad, es aproximadamente constante. La partición usual es la $[a, b]$, es decir, se toma $a = t_0 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = b$ y se

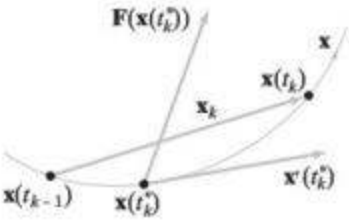


Figura 6.4 Aproximación del trabajo a lo largo de un segmento de la trayectoria $\mathbf{x}$.

centra en el k-ésimo segmento (véase la figura 6.4). Entonces,

$$\text{Se ha trabajado en el } k\text{-ésimo segmento} \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k^*)) \cdot \Delta \mathbf{x}_k.$$

Como

$$\mathbf{x}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t},$$

debemos tener, para $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \approx 0$ y $t_{k-1} \leq t_k^* \leq t_k$, que

$$\mathbf{x}'(t_k^*) \approx \frac{\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{\Delta \mathbf{x}_k}{\Delta t_k}.$$

Entonces,

$$\text{Trabajo total} \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k^*)) \cdot \Delta \mathbf{x}_k \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k^*)) \cdot \mathbf{x}'(t_k^*) \Delta t_k.$$

Por lo tanto, tiene sentido obtener el límite cuando todas las Δt_k tienden a cero y *definir* el trabajo total como

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \lim_{\text{todo } \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t_k^*) \Delta t_k \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt \\ &= \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Otras interpretaciones y formulaciones

Suponga que $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ es una trayectoria C^1 con $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ para $a \leq t \leq b$. Recuerde, de la sección 3.2, que definimos el **vector unitario T tangente** a $\mathbf{x}$ por medio de normalizar la velocidad:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

Es posible introducir este vector tangente hacia la integral de línea vectorial como sigue: a partir de la definición 1.2 tenemos

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \\ &= \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)) \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \\ &= \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds. \end{aligned} \tag{3}$$

Como el producto punto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ es una cantidad escalar, hemos escrito la integral de línea vectorial original como una integral de línea escalar. También vemos que

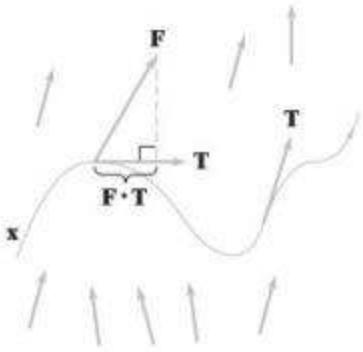


Figura 6.5 La integral de línea vectorial $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es igual a $\int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds$, que es la integral de línea escalar de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria.

$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ *representa la integral de línea (escalar) de la componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de la trayectoria,* es decir, cuánto del campo vectorial subyacente en realidad "ve" la curva (véase la figura 6.5).

Una interpretación importante de la integral de línea vectorial ocurre cuando $\mathbf{x}$ es una *trayectoria cerrada,* es decir, cuando $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$. En estas circunstancias, la cantidad $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ recibe el nombre de **circulación** de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{x}$. Para comprender mejor esta idea suponga que $\mathbf{F}$ representa el campo vectorial de la velocidad de un fluido. Considere la cantidad de fluido movido tangencialmente sobre un segmento pequeño de la trayectoria $\mathbf{x}$ durante un breve intervalo de tiempo $\Delta\tau$ (aquí se usa τ para denotar el tiempo y no tener conflicto al utilizar t para la variable paramétrica de la trayectoria $\mathbf{x}$). Como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ da la componente tangencial de $\mathbf{F}$, tenemos que

$$\text{Cantidad de fluido movido} \approx (\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\Delta\tau \cdot \mathbf{T}(t))\, \Delta s, \tag{4}$$

donde Δs es la longitud del segmento de la trayectoria cerrada $\mathbf{x}$ (véase la figura 6.6). La fórmula (4) solo se aproxima debido a que el segmento de la trayectoria

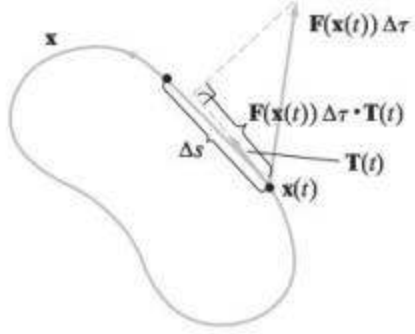


Figura 6.6 La cantidad de fluido transportado tangencialmente a lo largo de un segmento de la trayectoria cerrada $\mathbf{x}$ es aproximadamente $(\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\Delta\tau \cdot \mathbf{T}(t))\Delta s$.

no necesita ser completamente recto (de modo que $\mathbf{T}(t)$ puede no ser un vector constante) y también porque el campo vectorial $\mathbf{F}$ no necesita ser constante sobre el segmento de la trayectoria. Si dividimos el término en (4) entre $\Delta\tau$, entonces la *tasa* promedio de transporte a lo largo del segmento durante el intervalo de tiempo $\Delta\tau$ es $(\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{T}(t))\, \Delta s$, Si ahora partimos la trayectoria cerrada $\mathbf{x}$ en un número grande pero finito de tales pequeños segmentos y sumamos las contribuciones de la forma $(\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{T}(t))\, \Delta s$ para cada segmento, y luego hacemos que todas las longitudes Δs tiendan a cero, encontramos que la tasa promedio de fluido movido, que se denota con $\Delta L/\Delta\tau$, es dada aproximadamente por

$$\frac{\Delta L}{\Delta\tau} \approx \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds.$$

Por último, si se hace que $\Delta\tau \to 0$, es posible *definir* la tasa (instantánea) de fluido movido, $dL/d\tau$ como

$$\frac{dL}{d\tau} = \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

que es lo que habíamos llamado *circulación.*

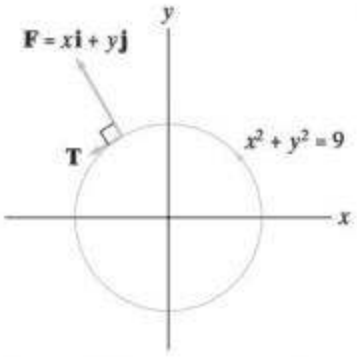


Figura 6.7 En cada punto sobre el círculo, $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ no tiene componente tangencial.

EJEMPLO 4 El círculo $x^2 + y^2 = 9$ puede parametrizarse con $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$. Entonces, un vector unitario tangente es

$$\mathbf{T} = \frac{-3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}}{\sqrt{9\,\text{sen}^2\,t + 9\cos^2 t}} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{3}.$$

Ahora considere el campo vectorial radial $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{R}^2$. En cada punto del círculo tenemos

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j})\cdot\left(\frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{3}\right) = 0.$$

Así, $\mathbf{F}$ siempre es perpendicular a la curva. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\,ds = \int_{\mathbf{x}} 0\,ds = 0$$

y, si $\mathbf{F}$ se considera como una fuerza, no se realiza ningún trabajo. Al considerar $\mathbf{F}$ como un campo de velocidades, la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{x}$ también es igual a cero (véase la figura 6.7).

Por otro lado, si $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = (y\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j})\cdot\left(\frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{3}\right) = \frac{-y^2 - 2x^2}{3}.$$

Esta cantidad siempre será negativa sobre el círculo, por lo que es de esperarse que la circulación sea negativa. En particular, tenemos

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\,ds = \int_{\mathbf{x}} -\frac{y^2 + 2x^2}{3}\,ds.$$

Utilizando la parametrización antes dada, tenemos $\|\mathbf{x}'(t)\| = 3$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x}} -\frac{y^2 + 2x^2}{3}\,ds &= \int_0^{2\pi} -\frac{9\,\text{sen}^2\,t + 18\cos^2 t}{3}\cdot 3\,dt \\
&= -9\int_0^{2\pi} (\text{sen}^2\,t + 2\cos^2 t)\,dt = -9\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t)\,dt \\
&= -9\int_0^{2\pi} \left(1 + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right)\,dt \\
&= -9\left(\tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2t\right)\Big|_0^{2\pi} = -27\pi.
\end{aligned}$$

◆

A continuación, supongamos que $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$, es una trayectoria C^1, y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

es un campo vectorial continuo. Entonces, por la definición 1.2 de la integral de línea vectorial, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}) \\
&\qquad \cdot (x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k})\,dt \\
&= \int_a^b \left[M(x, y, z)x'(t) + N(x, y, z)y'(t) + P(x, y, z)z'(t)\right]\,dt.
\end{aligned}$$

Recuerde el lector que las diferenciales de x, y y z son

$$dx = x'(t)\,dt, \qquad dy = y'(t)\,dt, \qquad dz = z'(t)\,dt.$$

Entonces,

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz.$$

La integral

$$\int_{\mathbf{x}} M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

es una notación alternativa para $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. En realidad, la primera es definida por la segunda. La integral

$$\int_{\mathbf{x}} M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

se conoce comúnmente como la **forma diferencial** de la recta integral. (De hecho, la expresión $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ recibe el nombre de forma diferencial). Hace énfasis en las funciones componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$ y surge con frecuencia en diversas aplicaciones. Asegúrese de interpretar con cuidado a $M\,dx + N\,dy + P\,dz$. Debe evaluarse utilizando las ecuaciones paramétricas para x, y y z que provienen de la trayectoria $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 5 Calcularemos

$$\int_{\mathbf{x}} (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz,$$

donde $\mathbf{x}$ es la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$ para $0 \le t \le 1$.

A lo largo de la trayectoria tenemos que $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$, por lo que $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$ y $dz = 3t^2\,dt$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{x}} (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz \\
&\quad = \int_0^1 (t^2 + t^3)\,dt + (t + t^3)2t\,dt + (t + t^2)3t^2\,dt \\
&\quad = \int_0^1 (5t^4 + 4t^3 + 3t^2)\,dt = (t^5 + t^4 + t^3)\Big|_0^1 = 3.
\end{aligned}$$

◆

Integrales de línea a lo largo de curvas. El efecto de la reparametrización

Como el vector unitario tangente a una trayectoria depende de la geometría de la curva de que se trate, y no de la parametrización en particular, podríamos esperar que la integral de línea también dependiera solo de la curva imagen. Debemos ver con precisión hasta qué grado esta observación es verdadera, o se puede generalizar, a las integrales de línea tanto vectoriales como escalares.

Comenzaremos con un ejemplo. Considere el lector las dos trayectorias siguientes en el plano:

$$\mathbf{x}\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

y

$$\mathbf{y}\colon [0, \pi] \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{y}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t).$$

No es difícil ver que tanto $\mathbf{x}$ como $\mathbf{y}$ trazan un círculo una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En efecto, si hacemos que $u(t) = 2t$, observamos que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t))$. Es decir, la trayectoria $\mathbf{y}$ no es otra cosa que la trayectoria $\mathbf{x}$ junto con un cambio de variables, lo que sugiere la siguiente definición general:

DEFINICIÓN 1.3 Sea $\mathbf{x}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria C^1 por partes. Decimos que otra trayectoria C^1 $\mathbf{y}\colon [c, d] \to \mathbf{R}^n$ es una **reparametrización** de $\mathbf{x}$ si existe una función que sea uno a uno y sobre $u\colon [c, d] \to [a, b]$ de clase C^1, con inversa $u^{-1}\colon [a, b] \to [c, d]$ que también es de clase C^1, tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t))$; es decir, $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ u$.

Al reflexionar sobre la definición 1.3 el lector debe convencerse de que cualquier reparametrización de una trayectoria debe tener la misma curva imagen subyacente que la trayectoria original.

EJEMPLO 6 La trayectoria

$$\mathbf{x}(t) = (1 + 2t, 2 - t, 3 + 5t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

traza el segmento de recta del punto (1, 2, 3) al punto (3, 1, 8). Igual que lo hace la trayectoria

$$\mathbf{y}(t) = (1 + 2t^2, 2 - t^2, 3 + 5t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Tenemos que $\mathbf{y}$ es una reparametrización de $\mathbf{x}$ por medio del cambio de la variable $u(t) = t^2$. Sin embargo, la trayectoria $\mathbf{z}\colon [-1, 1] \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$\mathbf{z}(t) = (1 + 2t^2, 2 - t^2, 3 + 5t^2)$$

no es una reparametrización de $\mathbf{x}$. Tenemos que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(u(t))$, donde $u(t) = t^2$, pero en este caso u mapea $[-1, 1]$ sobre $[0, 1]$, así que no es uno a uno.

Por otro lado,

$$\mathbf{w}(t) = (3 - 2t, 1 + t, 8 - 5t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

sí es una reparametrización de $\mathbf{x}$. Tenemos que $\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}(1 - t)$, por lo que la función $u\colon [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $u(t) = 1 - t$ proporciona el cambio de variable para la reparametrización. Geométricamente, $\mathbf{w}$ traza el segmento de recta entre (1, 2, 3) y (3, 1, 8) en dirección opuesta a la de $\mathbf{x}$. ◆

Si $\mathbf{y}\colon [c, d] \to \mathbf{R}^n$ es una reparametrización de $\mathbf{x}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ a través del cambio de variable $u\colon [c, d] \to [a, b]$, entonces, como u es uno a uno, suprayectiva, y continua, debemos tener cualquiera de los dos casos siguientes:

(i) $u(c) = a$ y $u(d) = b$, o bien,
(ii) $u(c) = b$ y $u(d) = a$.

En el primer caso decimos que $\mathbf{y}$ (o u) **preserva la orientación**, y en el segundo caso que $\mathbf{y}$ (o u) **invierte la orientación**. La idea es que si $\mathbf{y}$ es una reparametrización que preserva la orientación, entonces $\mathbf{y}$ traza la misma curva imagen en la misma dirección que lo hace $\mathbf{x}$, y si $\mathbf{y}$ invierte la orientación, traza la imagen en la dirección opuesta.

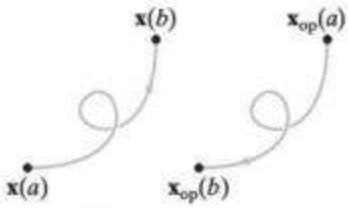


Figura 6.8 Una trayectoria y su opuesta.

EJEMPLO 7 Si $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ es cualquier trayectoria C^1, entonces definimos la **trayectoria opuesta** $\mathbf{x}_{op}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ como

$$\mathbf{x}_{op}(t) = \mathbf{x}(a + b - t).$$

(Véase la figura 6.8). Es decir, $\mathbf{x}_{op}(t) = \mathbf{x}(u(t))$, donde u: $[a, b] \to [a, b]$ es dada por $u(t) = a + b - t$. Entonces, es evidente que $\mathbf{x}_{op}$ es una reparametrización que orienta e invierte la orientación de $\mathbf{x}$. ◆

Además de invertir la orientación, una reparametrización de una trayectoria puede cambiar la velocidad. Esto se infiere fácilmente de la regla de la cadena: si $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ u$, entonces

$$\mathbf{y}'(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t))) = \mathbf{x}'(u(t))\, u'(t). \tag{4}$$

Por lo que el vector velocidad de la reparametrización $\mathbf{y}$ tan solo es un escalar múltiplo, es decir, $u'(t)$ del vector velocidad de $\mathbf{x}$. En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Velocidad de } \mathbf{y} &= \|\mathbf{y}'(t)\| = \|u'(t)\,\mathbf{x}'(u(t))\| \\ &= |u'(t)|\, \|\mathbf{x}'(u(t))\| = |u'(t)| \cdot (\text{velocidad de } \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5}$$

Como u es uno a uno, se sigue que $u'(t) = \geq 0$ para toda $t \in [a, b]$, o bien, $u'(t) \leq 0$ para toda $t \in [a, b]$. El primer caso ocurre precisamente cuando $\mathbf{y}$ preserva la orientación y el segundo cuando $\mathbf{y}$ invierte la orientación.

¿En qué difiere la integral de línea de una función o un campo vectorial a lo largo de una trayectoria, de la integral de línea (de la misma función o campo vectorial) sobre una reparametrización de una trayectoria? No en mucho. Los resultados precisos se enuncian en los teoremas 1.4 y 1.5.

TEOREMA 1.4 Sea $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria C^1 por partes, y sea f: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función continua cuyo dominio X contiene la imagen de $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{y}$: $[c, d] \to \mathbf{R}^n$ es cualquier reparametrización de $\mathbf{x}$, entonces

$$\int_{\mathbf{y}} f\, ds = \int_{\mathbf{x}} f\, ds.$$

DEMOSTRACIÓN Probaremos en forma explícita el resultado para el caso en que $\mathbf{x}$ (y, por lo tanto, $\mathbf{y}$) es de clase C^1 (cuando $\mathbf{x}$ solo es C^1 por partes siempre se puede descomponer la integral en forma apropiada). En el caso de C^1 tenemos, por la definición 1.1 y los comentarios sobre la ecuación (5), que

$$\int_{\mathbf{y}} f\, ds = \int_c^d f(\mathbf{y}(t))\, \|\mathbf{y}'(t)\|\, dt = \int_c^d f(\mathbf{x}(u(t)))\, \|\mathbf{x}'(u(t))\|\, |u'(t)|\, dt.$$

Si $\mathbf{y}$ preserva la orientación, entonces $u(c) = a$, $u(d) = b$ y $|u'(t)| = u'(t)$. Así, al sustituir variables,

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\mathbf{x}(u(t)))\, \|\mathbf{x}'(u(t))\|\, |u'(t)|\, dt &= \int_c^d f(\mathbf{x}(u(t)))\, \|\mathbf{x}'(u(t))\|\, u'(t)\, dt \\ &= \int_a^b f(\mathbf{x}(u))\, \|\mathbf{x}'(u)\|\, du = \int_{\mathbf{x}} f\, ds. \end{aligned}$$

Si, por otro lado, **y** invierte la orientación, entonces $u(c) = b$, $u(d) = a$ y $|u'(t)| = -u'(t)$, puesto que $u'(t) \leq 0$. Por lo tanto, en este caso,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(\mathbf{x}(u(t)))\,\|\mathbf{x}'(u(t))\|\,|u'(t)|\,dt &= \int_c^d f(\mathbf{x}(u(t)))\,\|\mathbf{x}'(u(t))\|\,(-u'(t))\,dt \\ &= -\int_b^a f(\mathbf{x}(u))\,\|\mathbf{x}'(u)\|\,du \\ &= \int_a^b f(\mathbf{x}(u))\,\|\mathbf{x}'(u)\|\,du = \int_{\mathbf{x}} f\,ds.\end{aligned}$$

Así, $\int_{\mathbf{y}} f\,ds = \int_{\mathbf{x}} f\,ds$, en cualquier caso, como se buscaba. ■

TEOREMA 1.5 Sea $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria C^1 por partes, y sea $\mathbf{F}$: $X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un campo vectorial continuo cuyo dominio X contiene la imagen de $\mathbf{x}$. Sea $\mathbf{y}$: $[c, d] \to \mathbf{R}^n$ cualquier reparametrización de $\mathbf{x}$. Entonces,

1. Si **y** preserva la orientación, entonces $\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.
2. Si **y** invierte la orientación, entonces $\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

DEMOSTRACIÓN Igual que con la demostración del teorema 1.4, consideramos de manera detallada solo el caso de C^1. Utilizando la definición 1.2 para la integral de línea vectorial, la ecuación (4) y la sustitución de variables, tenemos

$$\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{y}'(t)\,dt = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{x}(u(t))) \cdot \mathbf{x}'(u(t))\,u'(t)\,dt.$$

Si **y** preserva la orientación, entonces $u(c) = a$, $u(d) = b$, por lo que

$$\int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{x}(u(t))) \cdot \mathbf{x}'(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(u)) \cdot \mathbf{x}'(u)\,du = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Esto demuestra la parte 1. Si **y** invierte la orientación, entonces $u(c) = b$, $u(d) = a$, así, en cambio se tiene que

$$\int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{x}(u(t))) \cdot \mathbf{x}'(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(u)) \cdot \mathbf{x}'(u)\,du = -\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

lo que establece la parte 2. ■

Los teoremas 1.4 y 1.5 nos dicen, en pocas palabras, que las integrales de línea escalares son por completo independientes de la ruta que escojamos para reparametrizar una trayectoria. Las integrales de línea vectoriales son independientes de la reparametrización en un signo que solo depende de si esta preserva o invierte la orientación.

EJEMPLO 8 Sea $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, considere las tres trayectorias siguientes entre (0, 0) y (1, 1):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= (t, t) && 0 \leq t \leq 1, \\ \mathbf{y}(t) &= (2t, 2t) && 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{z}(t) = (1 - t, 1 - t) \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Las tres trayectorias son todas reparametrizaciones una de la otra: **x**, **y** y **z** trazan los segmentos de recta entre los puntos (0, 0) y (1, 1) —**x** y **y** de (0, 0) a (1, 1), y **z** de (1, 1) a (0, 0).

Podemos comparar los valores de las integrales de línea de **F** a lo largo de las trayectorias:

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t\,\mathbf{i}+t\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j})\,dt = \int_0^1 2t\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1;$$

$$\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (2t\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j})\cdot(2\mathbf{i}+2\mathbf{j})\,dt = \int_0^{1/2} 8t\,dt = 4t^2\Big|_0^{1/2} = 1;$$

$$\int_{\mathbf{z}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i}-\mathbf{j})\,dt$$

$$= \int_0^1 2(t-1)\,dt = (t-1)^2\Big|_0^1 = -1.$$

Los resultados de estos cálculos son exactamente los que predice el teorema 1.5, puesto que **y** es una reparametrización que preserva la orientación de **x**, en tanto que **z** es una que la invierte. ◆

La importancia de los teoremas 1.4 y 1.5 no solo radica en que ocasionalmente nos permiten predecir los resultados de cálculos de integrales de línea, sino también en que permiten *definir* integrales de línea sobre curvas, en lugar de sobre trayectorias parametrizadas. Para ser más explícitos, decimos que una trayectoria **x** de C^1 por partes, $\mathbf{x}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ es **cerrada** si $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$. Decimos que la trayectoria **x** es **simple** si no tiene intersecciones, es decir, si **x** es uno a uno en el intervalo $[a, b]$, excepto posiblemente que $\mathbf{x}(a)$ puede ser igual a $\mathbf{x}(b)$. Entonces, lo que ahora queremos expresar mediante una **curva** C es la imagen de una trayectoria $\mathbf{x}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$, que es uno a uno excepto, posiblemente, en un número grande pero finito de puntos de $[a, b]$; la trayectoria **x** (casi) uno a uno será llamada **parametrización** de C. Además, si la curva C tiene una parametrización correspondiente que sea cerrada o simple (consulte la figura 6.9), nos referiremos a ella como curva **cerrada** o **simple**. Es un hecho (cuya prueba se omitirá) que si tanto **x** como **y** son parametrizaciones de la misma curva C simple, entonces una debe ser la reparametrización de la otra.

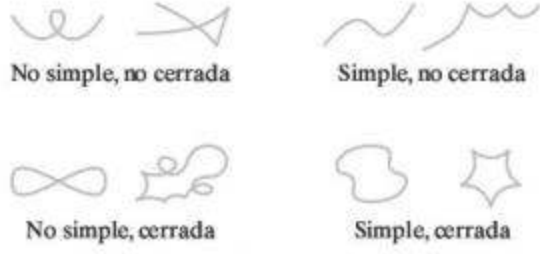


Figura 6.9 Ejemplos de curvas.

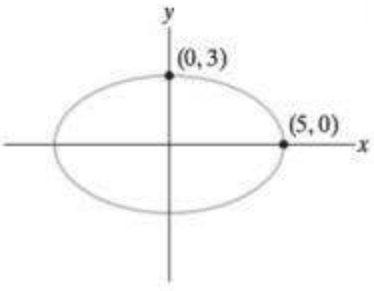


Figura 6.10 La elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ del ejemplo 9 es parametrizada en sentido contrario al de las manecillas del reloj por medio de $\mathbf{x}(t) = (5 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, y en el sentido de las manecillas por $\mathbf{y}(t) = (5 \cos 2(\pi - t), 3 \operatorname{sen} 2(\pi - t))$, $0 \le t \le \pi$.

EJEMPLO 9 La elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$, que se ilustra en la figura 6.10, es una curva cerrada simple que se parametriza con cualquiera de las dos siguientes:

$$\mathbf{x}: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = (5 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$$

o por medio de

$$\mathbf{y}: [0, \pi] \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{y}(t) = (5 \cos 2(\pi - t), 3 \operatorname{sen} 2(\pi - t)),$$

puesto que ambas trayectorias tienen a la elipse como imagen y cada mapa es uno a uno, excepto en los puntos extremos de sus respectivos intervalos del dominio. Observe que $\mathbf{y}$ es una reparametrización de $\mathbf{x}$.

Sin embargo, la trayectoria

$$\mathbf{z}: [0, 6\pi] \to \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{z}(t) = (5 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$$

no es una parametrización de la elipse, ya que la traza tres veces conforme t se incrementa de 0 a 6π. Es decir, $\mathbf{z}$ *no* es uno a uno en el intervalo $(0, 6\pi)$. ◆

Las curvas simples, cerradas o no, siempre tienen dos **orientaciones** que corresponden a las dos posibles direcciones del recorrido a lo largo de cualquier trayectoria parametrizadora (véase la figura 6.11). Decimos que una curva simple C está **orientada** si se hace una elección de su orientación.

La razón de la terminología precedente es que si C es una curva simple (C^1 por partes), podemos definir sin ambigüedad la integral de línea escalar de una función f continua sobre C por medio de

$$\int_C f\, ds = \int_{\mathbf{x}} f\, ds,$$

donde $\mathbf{x}$ es *cualquier* parametrización de C. El teorema 1.4 garantiza que no importa cómo se elija parametrizar a C.

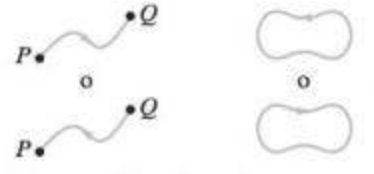


Figura 6.11 Orientaciones posibles para una curva simple, no cerrada y cerrada.

Por otro lado, podemos definir la integral de línea vectorial solo para curvas simples *orientadas*. Si se escoge una orientación para C y $\mathbf{x}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ es una parametrización de C que es consistente con esta orientación, entonces definimos la integral de línea vectorial de un campo vectorial continuo $\mathbf{F}$ sobre C como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

El teorema 1.5 demuestra que esta definición es independiente de la parametrización de C que se elija, siempre que esta se haya elegido de manera consistente con la orientación dada. En realidad, si C^- denota la misma curva que C, solo que orientada en la dirección opuesta, entonces C^- es parametrizada por $\mathbf{x}_{\text{op}}$ (donde $\mathbf{x}$ parametriza a C) y, por el teorema 1.5, tenemos que

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

EJEMPLO 10 Sea C el semicírculo superior de radio 2 con centro en (0, 0) y orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de (2, 0) a (−2, 0). Entonces calculamos $\int_C (x^2 - y^2 + 1)\, ds$ eligiendo cualquier parametrización para C. Por ejemplo, podemos parametrizarla con

$$\mathbf{x}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le \pi$$

o con

$$\mathbf{y}(t) = (-2\cos 2t, -2\operatorname{sen} 2t), \quad -\pi/2 \le t \le 0.$$

(Observe que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(2t + \pi)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - y^2 + 1)\,ds &= \int_x (x^2 - y^2 + 1)\,ds \\ &= \int_0^{\pi} (4\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t + 1)\sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (4\cos 2t + 1)2\,dt = 2(2\operatorname{sen} 2t + t)\Big|_0^{\pi} = 2\pi,\end{aligned}$$

por la fórmula de los ángulos dobles. Comprobamos de manera similar:

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - y^2 + 1)\,ds &= \int_{\mathbf{y}} (x^2 - y^2 + 1)\,ds \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} (4\cos^2 2t - 4\operatorname{sen}^2 2t + 1)\sqrt{16\operatorname{sen}^2 2t + 16\cos^2 2t}\,dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} (4\cos 4t + 1)\cdot 4\,dt = 4(\operatorname{sen} 4t + t)\Big|_{-\pi/2}^{0} = 2\pi.\end{aligned}$$

◆

EJEMPLO 11 Calcularemos el trabajo realizado por la fuerza

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$$

sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $y = 3x^2, z = 0$, del origen al punto (2, 12, 0) (véase la figura 6.12).

Parametrizamos la parábola con $x = t, y = 3t^2, z = 0$, para $0 \le t \le 2$. Luego, según la definición 1.2,

$$\begin{aligned}\text{Trabajo} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\,dt \\ &= \int_0^2 (t, -3t^2, t + 3t^2)\cdot(1, 6t, 0)\,dt = \int_0^2 (t - 18t^3)\,dt \\ &= \left(\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{9}{2}t^4\right)\Big|_0^2 = 2 - 72 = -70.\end{aligned}$$

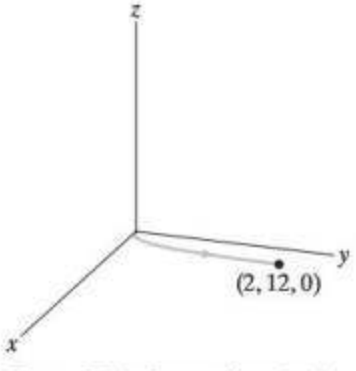


Figura 6.12 Curva orientada del ejemplo 11.

El significado del signo negativo es que al hacer el movimiento a lo largo de la curva en la dirección indicada, se realiza trabajo *contra* la fuerza. Sin embargo, si se orienta la curva en dirección opuesta, el trabajo efectuado en el movimiento de (2, 12, 0) a (0, 0, 0) sería 70. ◆

Evaluación numérica de las integrales de línea (opcional) —

Si tenemos una integral de línea escalar $\int_C f\,ds$, o una vectorial $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, y una parametrización apropiada $\mathbf{x}$ de C, entonces las definiciones 1.1 y 1.2 permiten evaluar las integrales de línea por medio de integrales definidas en la variable paramétrica. Estas integrales definidas tal vez sean difíciles —o imposibles— de evaluar con

exactitud, por lo que podríamos necesitar un método numérico (como la regla del trapecio o la de Simpson) para aproximar el valor de la integral.

Figura 6.13 La curva C con n puntos escogidos sobre ella.

Si se da una integral de línea (vectorial) en forma diferencial como $\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$ (o como $\int_C M\,dx + N\,dy$ si se trabaja en $\mathbf{R}^2$), entonces podemos dar aproximaciones numéricas *sin* hacer ninguna parametrización del modo siguiente. En primer lugar se escogen puntos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a lo largo de la curva C, donde $\mathbf{x}_0$ es el punto inicial y $\mathbf{x}_n$ es el punto terminal (véase la figura 6.13). Para $k = 0, \ldots, n$, escribimos

$$\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$$

y para $k = 1, \ldots, n$, sea

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Por último, sea $\mathbf{x}_k^* = (x_k^*, y_k^*, z_k^*)$, que denote cualquier punto sobre el arco de C entre $\mathbf{x}_{k-1}$ y $\mathbf{x}_k$. Entonces, la integral de línea se aproxima así:

$$\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz \approx \sum_{k=1}^{n} \left[M(\mathbf{x}_k^*)\Delta x_k + N(\mathbf{x}_k^*)\Delta y_k + P(\mathbf{x}_k^*)\Delta z_k\right]. \quad (6)$$

Además de la aproximación dada en (6), también se puede usar una versión de la regla del trapecio adaptada al caso de integrales de línea. En particular, la aproximación con la regla del trapecio T_n a la integral de línea $\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$, es

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[(M(\mathbf{x}_{k-1}) + M(\mathbf{x}_k)) \frac{\Delta x_k}{2} + (N(\mathbf{x}_{k-1}) + N(\mathbf{x}_k)) \frac{\Delta y_k}{2} \right. \\ &\qquad \left. + (P(\mathbf{x}_{k-1}) + P(\mathbf{x}_k)) \frac{\Delta z_k}{2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} (M(\mathbf{x}_{k-1}) + M(\mathbf{x}_k)) \frac{\Delta x_k}{2} + \sum_{k=1}^{n} (N(\mathbf{x}_{k-1}) + N(\mathbf{x}_k)) \frac{\Delta y_k}{2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} (P(\mathbf{x}_{k-1}) + P(\mathbf{x}_k)) \frac{\Delta z_k}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Es posible establecer fórmulas similares (y más cortas), análogas a la (6) y la (7), para aproximar la integral de línea bidimensional $\int_C M\,dx + N\,dy$, las cuales no plantearemos aquí en forma explícita.

EJEMPLO 12 Sea C la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase la figura 6.14). Aproximamos $\int_C y^2\,dx + x\,dy$ utilizando la versión bidimensional de la regla del trapecio (7).

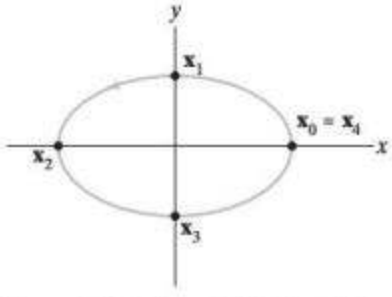


Figura 6.14 Elipse C del ejemplo 12.

Para hacer esta aproximación, sea

$$\mathbf{x}_0 = (2, 0),\ \mathbf{x}_1 = (0, 1),\ \mathbf{x}_2 = (-2, 0),\ \mathbf{x}_3 = (0, -1),\ \mathbf{x}_4 = (2, 0).$$

Entonces, tenemos

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = -2,\ \Delta x_3 = \Delta x_4 = 2;$$
$$\Delta y_1 = 1,\ \Delta y_2 = \Delta y_3 = -1,\ \Delta y_4 = 1.$$

En consecuencia, a partir de la fórmula (7) calculamos

$$\begin{aligned} T_4 &= (0^2 + 1^2)\tfrac{-2}{2} + (1^2 + 0^2)\tfrac{-2}{2} + (0^2 + (-1)^2)\tfrac{2}{2} + ((-1)^2 + 0^2)\tfrac{2}{2} \\ &\quad + (2 + 0)\tfrac{1}{2} + (0 + (-2))\tfrac{-1}{2} + ((-2) + 0)\tfrac{-1}{2} + (0 + 2)\tfrac{1}{2} \\ &= -1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

La respuesta exacta se puede encontrar utilizando la parametrización

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Calculamos que

$$\begin{aligned} \int_C y^2\,dx + x\,dy &= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t(-2\operatorname{sen} t) + 2\cos^2 t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2(1 - \cos^2 t)(-\operatorname{sen} t) + 1 + \cos 2t\right) dt \\ &= \left(2\cos t - \tfrac{2}{3}\cos^3 t + t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

A partir de esto es posible ver que nuestra aproximación es muy burda. Lo que permite mejorarla es incrementar n al mismo tiempo que se toman valores más

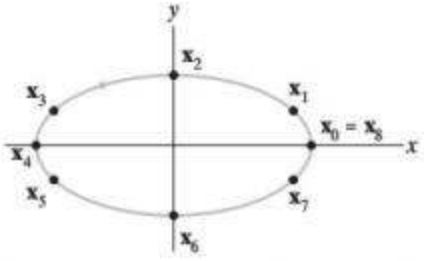


Figura 6.15 La elipse C del ejemplo 12 con ocho puntos señalados.

pequeños para Δx_k y Δy_k. Por ejemplo (véase la figura 6.15), si hacemos

$$\mathbf{x}_0 = (2, 0),\ \mathbf{x}_1 = \left(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right),\ \mathbf{x}_2 = (0, 1),\ \mathbf{x}_3 = \left(-\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right),\ \mathbf{x}_4 = (-2, 0),$$

$$\mathbf{x}_5 = \left(-\sqrt{3}, -\tfrac{1}{2}\right),\ \mathbf{x}_6 = (0, -1),\ \mathbf{x}_7 = \left(\sqrt{3}, -\tfrac{1}{2}\right),\ \mathbf{x}_8 = (2, 0),$$

entonces

$$\Delta x_1 = \sqrt{3} - 2,\ \Delta x_2 = \Delta x_3 = -\sqrt{3},\ \Delta x_4 = \sqrt{3} - 2,\ \Delta x_5 = 2 - \sqrt{3},$$

$$\Delta x_6 = \Delta x_7 = \sqrt{3},\ \Delta x_8 = 2 - \sqrt{3};$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \tfrac{1}{2},\ \Delta y_3 = \Delta y_4 = \Delta y_5 = \Delta y_6 = -\tfrac{1}{2},\ \Delta y_7 = \Delta y_8 = \tfrac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\int_C y^2\,dx + x\,dy$ también es aproximada por

$$\begin{aligned} T_8 = {} & \left(0^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\frac{\sqrt{3}-2}{2} + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right)\frac{-\sqrt{3}}{2} + \left(\left(1^2 + \tfrac{1}{2}\right)^2\right)\frac{-\sqrt{3}}{2} \\ & + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2\right)\frac{\sqrt{3}-2}{2} + \left(0^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ & + \left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left((-1)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & + \left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2\right)\frac{2-\sqrt{3}}{2} + (2+\sqrt{3})\frac{1/2}{2} + (\sqrt{3}+0)\frac{1/2}{2} \\ & + (0 + (-\sqrt{3}))\frac{-1/2}{2} + ((-\sqrt{3}) + (-2))\frac{-1/2}{2} \\ & + ((-2) + (-\sqrt{3}))\frac{-1/2}{2} + ((-\sqrt{3}) + 0)\frac{-1/2}{2} \\ & + (0+\sqrt{3})\frac{1/2}{2} + (\sqrt{3}+2)\frac{1/2}{2} \\ = {} & 2 + 2\sqrt{3} \approx 5.4641. \end{aligned}$$

Aunque sigue siendo burda, esta es una mejor aproximación. ◆

EJEMPLO 13 Establezca que C es el segmento de recta de (0, 0, 0) a (2, 2, 2) y considere la integral de línea $\int_C y\sqrt{1+x^3}\,dx + e^{-xz}\,dy + \cos(z^2)\,dz$. La parametrización estándar del segmento de recta C por medio de

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$$

permite, en teoría, evaluar la integral de línea anterior mediante la evaluación de la siguiente integral de una variable:

$$\int_0^2 \left(t\sqrt{1+t^3} + e^{-t^2} + \cos(t^2)\right) dt.$$

Desafortunadamente no es posible hacer una evaluación tan exacta como la que se haría por medio del teorema fundamental del cálculo, ya que no se puede encontrar una antiderivada del integrando en términos de funciones elementales. En vez de ello daremos aproximaciones utilizando las fórmulas (6) y (7).

Sea $n = 4$. Si escogemos puntos a lo largo de C que se encuentran a intervalos regulares, tenemos que

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0),\ \mathbf{x}_1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),\ \mathbf{x}_2 = (1, 1, 1),\ \mathbf{x}_3 = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right),\ \mathbf{x}_4 = (2, 2, 2),$$

por lo que

$$\Delta x_k = \Delta y_k = \Delta z_k = \tfrac{1}{2}.$$

Para calcular una aproximación con la fórmula (6) podemos, por ejemplo, hacer

$$\mathbf{x}_k^* = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_k),$$

que es el punto medio del segmento de recta que une $\mathbf{x}_{k-1}$ con $\mathbf{x}_k$. Entonces,

$$\mathbf{x}_1^* = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right),\ \mathbf{x}_2^* = \left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}\right),\ \mathbf{x}_3^* = \left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{4}\right),\ \mathbf{x}_4^* = \left(\tfrac{7}{4}, \tfrac{7}{4}, \tfrac{7}{4}\right),$$

y la fórmula (6) dice que

$$\begin{aligned}
&\int_C y\ \sqrt{1+x^3}\,dx + e^{-xz}\,dy + \cos(z^2)\,dz \\
&\quad \approx \left[\tfrac{1}{4}\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{4}\right)^3}\tfrac{1}{2} + e^{-1/16}\tfrac{1}{2} + \cos\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\right] \\
&\qquad + \left[\tfrac{3}{4}\sqrt{1+\left(\tfrac{3}{4}\right)^3}\tfrac{1}{2} + e^{-9/16}\tfrac{1}{2} + \cos\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\right] \\
&\qquad + \left[\tfrac{5}{4}\sqrt{1+\left(\tfrac{5}{4}\right)^3}\tfrac{1}{2} + e^{-25/16}\tfrac{1}{2} + \cos\tfrac{25}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\right] \\
&\qquad + \left[\tfrac{7}{4}\sqrt{1+\left(\tfrac{7}{4}\right)^3}\tfrac{1}{2} + e^{-49/16}\tfrac{1}{2} + \cos\tfrac{49}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\right] \\
&\quad \approx 5.16422.
\end{aligned}$$

También es posible aproximar la integral de línea utilizando la regla del trapecio en la fórmula (7), así:

$$T_4 = \left(0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3}\right)\tfrac{1/2}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3} + 1\sqrt{1 + 1^3}\right)\tfrac{1/2}{2}$$

$$+ \left(1\sqrt{1 + 1^3} + \tfrac{3}{2}\sqrt{1 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^3}\right)\tfrac{1/2}{2} + \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{1 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^3} + 2\sqrt{1 + 2^3}\right)\tfrac{1/2}{2}$$

$$+ (e^0 + e^{-1/4})\tfrac{1/2}{2} + (e^{-1/4} + e^{-1})\tfrac{1/2}{2} + (e^{-1} + e^{-9/4})\tfrac{1/2}{2}$$

$$+ (e^{-9/4} + e^{-4})\tfrac{1/2}{2} + (\cos 0 + \cos\tfrac{1}{4})\tfrac{1/2}{2} + (\cos\tfrac{1}{4} + \cos 1)\tfrac{1/2}{2}$$

$$+ (\cos 1 + \cos\tfrac{9}{4})\tfrac{1/2}{2} + (\cos\tfrac{9}{4} + \cos 4)\tfrac{1/2}{2}$$

$$\approx 5.44874.$$

Igual que en el ejemplo 12, las fórmulas (6) y (7) dan aproximaciones burdas debido al pequeño número de puntos de muestreo que se utilizan. ◆

6.1 Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = x + 2y$. Evalúe la integral de línea escalar $\int_{\mathbf{x}} f\,ds$ sobre la trayectoria $\mathbf{x}$ dada.

a) $\mathbf{x}(t) = (2 - 3t, 4t - 1), 0 \le t \le 2$

b) $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), 0 \le t \le \pi$

En los ejercicios 2 a 7 calcule $\int_{\mathbf{x}} f\,ds$, donde f y $\mathbf{x}$ son las que se indican en cada caso.

2. $f(x, y, z) = xyz$, $\mathbf{x}(t) = (t, 2t, 3t), 0 \le t \le 2$

3. $f(x, y, z) = \dfrac{x + z}{y + z}$, $\mathbf{x}(t) = (t, t, t^{3/2}), 1 \le t \le 3$

4. $f(x, y, z) = 3x + xy + z^3$, $\mathbf{x}(t) = (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t, 3t)$, $0 \le t \le 2\pi$

5. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$, $\mathbf{x}(t) = (e^{2t}\cos 3t, e^{2t}\operatorname{sen} 3t, e^{2t})$, $0 \le t \le 5$

6. $f(x, y, z) = x + y + z$,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} (2t, 0, 0) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ (2, 3t - 3, 0) & \text{si } 1 \le t \le 2 \\ (2, 3, 2t - 4) & \text{si } 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

7. $f(x, y, z) = 2x - y^{1/2} + 2z^2$,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} (t, t^2, 0) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ (1, 1, t - 1) & \text{si } 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

En los ejercicios 8 a 16 encuentre $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde se da el campo vectorial $\mathbf{F}$ y la trayectoria $\mathbf{x}$.

8. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{x}(t) = (2t + 1, t, 3t - 1), 0 \le t \le 1$

9. $\mathbf{F} = (y + 2)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t, -\cos t), 0 \le t \le \pi/2$

10. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, $\mathbf{x}(t) = (2t + 1, t + 2), 0 \le t \le 1$

11. $\mathbf{F} = (y - x)\,\mathbf{i} + x^4y^3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{x}(t) = (t^2, t^3), -1 \le t \le 1$

12. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, $\mathbf{x}(t) = (3\cos t, 2\operatorname{sen} t, 5t)$, $0 \le t \le 2\pi$

13. $\mathbf{F} = -3y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 3z^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{x}(t) = (2t + 1, t^2 + t, e^t)$, $0 \le t \le 1$

14. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{x}(t) = (t, 3t^2, 2t^3), -1 \le t \le 1$

15. $\mathbf{F} = 3z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t/3), 0 \le t \le 4\pi$

16. $\mathbf{F} = y\cos z\,\mathbf{i} + x\operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + xy\operatorname{sen} z^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3), 0 \le t \le 1$

17. Determine el valor de $\int_{\mathbf{x}} x\,dy - y\,dx$, donde $\mathbf{x}(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t), 0 \le 1 \le \pi$.

18. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$ cuando una partícula se desplaza por la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (t, 3t^2, 2)$, $0 \le t \le 2$.

19. Si $\mathbf{x} = (e^{2t}\cos 3t, e^{2t}\operatorname{sen} 3t)$, $0 \le t \le 2\pi$, encuentre $\displaystyle\int_{\mathbf{x}} \frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

20. Sea C la parte de la curva $y = 2\sqrt{x}$ entre los puntos $(1, 2)$ y $(9, 6)$. Encuentre $\int_C 3y\,ds$.

21. Establezca que $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ y considere las dos trayectorias

$$\mathbf{x}(t) = (t, t^2),\ 0 \le t \le 1 \quad \text{y}$$

$$\mathbf{y}(t) = (1 - 2t, 4t^2 - 4t + 1),\ 0 \le t \le \tfrac{1}{2}.$$

a) Calcule $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ y $\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

b) Analice sus respuestas para el inciso anterior considerando las curvas imagen de las trayectorias **x** y **y**.

22. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x^2y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (2x - y)\,\mathbf{k}$ sobre una partícula a medida que esta se desplaza por una línea recta del punto $(1, 1, 1)$ al $(2, -3, 3)$.

23. Sea $\mathbf{F} = (2z^5 - 3xy)\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} + x^2z\,\mathbf{k}$. Calcule la integral de línea de **F** alrededor del perímetro del cuadrado con vértices en $(1, 1, 3)$, $(-1, 1, 3)$, $(-1, -1, 3)$, $(1, -1, 3)$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto del eje z.

24. Evalúe $\int_C (x^2 - y)\,dx + (x - y^2)\,dy$, donde C es el segmento de recta de $(1, 1)$ a $(3, 5)$.

25. Encuentre $\int_C x^2y\,dx - (x + y)\,dy$, donde C es el trapecio con vértices en $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ y $(1, 1)$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

26. Calcule $\int_C x^2y\,dx - xy\,dy$, donde C es la curva con ecuación $y^2 = x^3$, de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

27. Evalúe $\int_C y\,dx - x\,dy$, donde C es la parte de la parábola $y = x^2$, de $(3, 9)$ a $(0, 0)$.

28. Evalúe $\int_C (x - y)^2\,dx + (x + y)^2\,dy$, donde C es la parte de $y = |x|$, de $(-2, 2)$ a $(1, 1)$.

29. Encuentre $\int_C xy^2\,dx - xy\,dy$, donde C es el arco semicircular de $(0, 2)$ a $(0, -2)$, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

30. Encuentre la circulación de $\mathbf{F} = (x^2 - y)\,\mathbf{i} + (xy + x)\,\mathbf{j}$ a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 16$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

31. Evalúe $\int_C yz\,dx - xz\,dy + xy\,dz$, donde C es el segmento de recta de $(1, 1, 2)$ y $(5, 3, 1)$.

32. Calcule $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, donde C es la curva que se obtiene mediante la intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ y está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del eje z (visto desde el eje z positivo).

33. Demuestre que $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{T}\cdot d\mathbf{s}$ es igual a la longitud de la trayectoria **x**, donde **T** denota al vector unitario tangente de la trayectoria.

34. Tom Sawyer está blanqueando una cerca de postes. Las bases de los postes están ubicadas en el plano xy sobre el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = 25$, $x, y \ge 0$, y la altura de los postes en el punto (x, y) es dada por $h(x, y) = 10 - x - y$ (en pies). Use una integral de línea escalar para encontrar el área de un lado de la cerca (véase la figura 6.16).

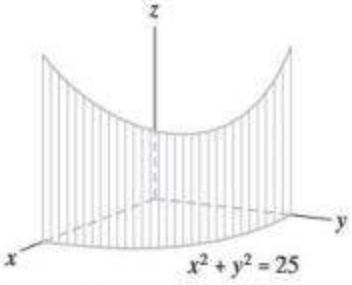


Figura 6.16 Cerca de postes del ejercicio 34. La base de la cerca está sobre el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = 25$, $x, y \ge 0$.

35. Sísifo empuja una roca por una escalera en espiral de 100 pies de altura que rodea la torre cilíndrica de un castillo (véase la figura 6.17).

a) Suponga que la trayectoria de Sísifo es descrita en forma paramétrica por

$$\mathbf{x}(t) = (5\cos 3t, 5\operatorname{sen} 3t, 10t),\quad 0 \le t \le 10.$$

Figura 6.17 Trayectoria ascendente de Sísifo por la escalera en espiral del ejercicio 35.

Si Sísifo ejerce una fuerza de magnitud constante de 50 libras tangente a su trayectoria, encuentre el trabajo

que realiza al empujar la roca hasta la cumbre de la torre.

b) Apenas alcanza Sísifo la parte alta de la torre, estornuda y la roca se desliza por toda la espiral hasta el piso. Si la roca pesa 75 libras, ¿cuánto trabajo realiza la gravedad cuando la roca llega al suelo?

36. Una embarcación es remolcada a través de un canal de 14 pies de longitud, con una cuerda que va del navío a una polea. Suponga que se establece un sistema de coordenadas de modo que la polea se encuentra en el punto (24, 32), y que la nave es remolcada a lo largo del eje y, del origen hasta el punto (0, 14). Si la tensión en la cuerda se mantiene constante y es de 25 libras, calcule el trabajo realizado al remolcar la embarcación por el canal.

37. Suponga que C es la curva $y = f(x)$, orientada de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, donde $a < b$ y donde f es positiva y continua en $[a, b]$. Si $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i}$, demuestre que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es el área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$.

38. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial radial $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Demuestre que si $\mathbf{x}(t)$, $a \le t \le b$ es cualquier trayectoria que esté sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, entonces $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. (Sugerencia: si $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está sobre la esfera, entonces $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2 = c^2$. Diferencie esta última expresión con respecto de t).

39. Sea C un conjunto de nivel de la función $f(x, y)$. Demuestre que $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$.

40. El lector viaja hacia la ciudad de Cleveland, famosa por su nieve resbaladiza en invierno, lo que hace que manejar sea muy riesgoso. Suponga el lector que se encuentra a 20 millas al oriente de Cleveland y trata de llegar a un sitio ubicado 20 millas al oeste de la ciudad. Además, suponga que si está a s millas del centro de la urbe, donde el clima es peor, puede manejar a una velocidad máxima de $v(s) = 2s + 20$ millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo tomará el viaje si maneja en una trayectoria rectilínea directamente a través de Cleveland? (Suponga que usted siempre maneja a la máxima velocidad posible).

b) ¿Cuánto tiempo requerirá el viaje si evita el centro de la ciudad y maneja a lo largo de una trayectoria semicircular con Cleveland en el centro? (Suponga de nuevo que maneja a la velocidad máxima posible).

c) Repita los incisos *a*) y *b*), esta vez utilizando $v(s) = (s^2/16) + 25$ millas por hora, como la velocidad máxima a la que puede manejar.

41. Considere una partícula de masa m que tiene una carga q. Suponga que la partícula se encuentra bajo la influencia tanto de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ como de uno magnético $\mathbf{B}$, de modo que la trayectoria de la partícula es descrita por $\mathbf{x}(t)$ para $a \le t \le b$. Así, la fuerza total que actúa sobre la partícula es dada en unidades del sistema mks por la **fuerza de Lorentz**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

donde $\mathbf{v}$ denota la velocidad de la trayectoria.

a) Use la segunda ley de Newton del movimiento, es decir, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ denota la aceleración de la partícula, para demostrar que

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

b) Si la partícula se mueve con velocidad constante, utilice el inciso anterior para demostrar que $\mathbf{E}$ no realiza trabajo a lo largo de la trayectoria de la partícula. (Sugerencia: aplique a $\mathbf{v}$ la proposición 1.7 del capítulo 3).

42. Establezca que C es el segmento de la parábola $y = x^2$ entre (0, 0) y (1, 1), y considere la integral de línea $\int_C y^3\,dx - x^2\,dy$.

a) Sea $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$, $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\mathbf{x}_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1)$. Use estos puntos y la regla del trapecio (7) para aproximar la integral de línea.

b) Ahora calcule el valor exacto de la integral de línea y compare sus resultados.

43. Establezca que C es el segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 2, 3) y considere la integral de línea $\int_C yz\,dx + (x + z)\,dy + x^2y\,dz$.

a) Divida el segmento en cinco puntos espaciados regularmente $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4$ y use la regla trapezoidal (7) para aproximar esta integral de línea.

b) Compare su aproximación con el valor exacto de la integral de línea.

44. Suponga que se realizan mediciones en un campo magnético a lo largo de un alambre que tiene la forma de una curva C y se tabulan los resultados como sigue:

k	Punto $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$	$\mathbf{B}(x_k, y_k, z_k) = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}$
0	$(-1, -2, -1)$	$\mathbf{k}$
1	$(0, 1, -1)$	$\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
2	$(0, 2, 0)$	$\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
3	$(1, 2, 1)$	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
4	$(1, 2, 2)$	$2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5	$(1, 1, 2)$	$2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
6	$(1, 1, 1)$	$3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
7	$(1, 0, 0)$	$4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
8	$(0, 0, 0)$	$4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Si se escribe $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ como $\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$, estime el trabajo realizado por $\mathbf{B}$ a lo largo de la curva C usando

a) una aproximación mediante la regla del trapecio;

b) una aproximación mediante la regla del trapecio pero incluyendo solo los puntos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_8$.

6.2 Teorema de Green

El teorema de Green relaciona la *integral de línea vectorial* alrededor de una curva cerrada C en $\mathbf{R}^2$ con una *integral doble* apropiada sobre la región plana D acotada por C. El hecho de que haya una conexión tan elegante entre las integrales de una dimensión con las de dos dimensiones es a la vez sorprendente, satisfactorio y poderoso. El enunciado general del teorema de Green es el siguiente:

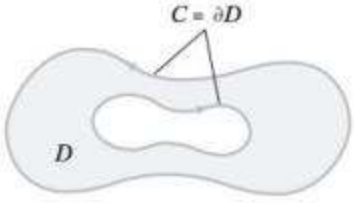


Figura 6.18 La región sombreada D tiene una frontera que consta de dos curvas simples, cerradas, cada una de clase C^1, cuya unión llamamos C.

TEOREMA 2.1 (TEOREMA DE GREEN) Sea D una región cerrada, acotada en $\mathbf{R}^2$, cuya frontera $C = \partial D$ consta de un número grande, finito, de curvas C^1 simples, cerradas y por partes. Oriente las curvas de C de manera que D esté a la izquierda a medida que se atraviesa C (véase la figura 6.18). Sea $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$ un campo vectorial de clase C^1 a través de D. Entonces,

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

(El símbolo $\oint_C$ indica que la integral de línea se toma sobre una o más curvas *cerradas*).

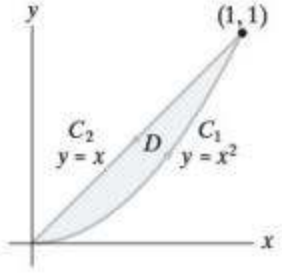


Figura 6.19 Región D del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ y sea D la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$. Comprobaremos el teorema de Green para este caso.

En la figura 6.19 se muestran la región D y su frontera. ∂D está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y su orientación es estipulada por el enunciado del teorema de Green. Para calcular

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial D} xy\,dx + y^2 dy,$$

necesitamos parametrizar las dos partes C^1 de ∂D por separado:

$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{y} \quad C_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

(Observe la orientación de C^1 y C^2). Entonces,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} xy\,dx + y^2 dy &= \int_{C_1} xy\,dx + y^2 dy + \int_{C_2} xy\,dx + y^2 dy \\
&= \int_0^1 (t\cdot t^2 + t^4\cdot 2t)\,dt + \int_0^1 ((1-t)^2 + (1-t)^2)(-dt) \\
&= \int_0^1 (t^3 + 2t^5)\,dt + \int_0^1 2(1-t)^2(-dt) \\
&= \left(\tfrac{1}{4}t^4 + \tfrac{2}{6}t^6\right)\Big|_0^1 + \left(\tfrac{2}{3}(1-t)^3\right)\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{6} - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right] dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} -x\,dy\,dx = \int_0^1 -x(x - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx = \left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{12}.$$

La integral de línea y la doble integral coinciden exactamente como el teorema de Green afirma que debería ocurrir. ◆

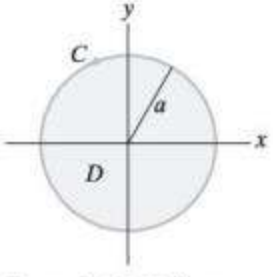


Figura 6.20 El disco de radio a con frontera orientada de modo que se aplique el teorema de Green.

EJEMPLO 2 Considere $\oint_C -y\,dx + x\,dy$, donde C es el círculo de radio a, es decir, la frontera del disco D de radio a, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se ilustra en la figura 6.20. Aunque podríamos parametrizar C con facilidad y así evaluar la integral de línea, en vez de hacerlo usaremos el teorema de Green:

$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_D 2\,dx\,dy = 2(\text{área de } D) = 2\pi a^2.$$

La expresión de la derecha es dos veces el área de un disco de radio a. En este caso, la integral doble es mucho más fácil de abordar que la integral de línea. ◆

El uso del teorema de Green en el ejemplo 2 puede plantearse de un modo mucho más general: si D es *cualquier* región a la cual puede aplicarse el teorema de Green, entonces, al orientar ∂D en forma apropiada tenemos que

$$\tfrac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \tfrac{1}{2}\iint_D 2\,dx\,dy = \text{área de } D. \tag{1}$$

Así, ¡es posible calcular el área de una región (un concepto bidimensional) utilizando integrales de línea (una construcción unidimensional)!

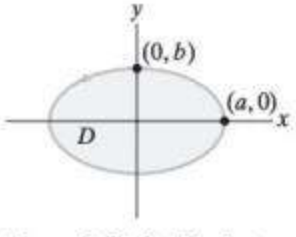


Figura 6.21 Región dentro de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

EJEMPLO 3 Utilizando la fórmula 1 calculamos el área dentro de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (véase la figura 6.21).

La elipse en sí puede parametrizarse en sentido contrario al de las manecillas del reloj por medio de

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Utilizando de nuevo la fórmula (1) encontramos que el área dentro de la elipse es

$$\tfrac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} -b\,\text{sen}\,t(-a\,\text{sen}\,t\,dt) + a\cos t(b\cos t\,dt)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\,\text{sen}^2 t + ab\cos^2 t)\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$

◆

Formulaciones alternativas

Reescribimos la fórmula de la integral de línea o integral doble que aparece en el enunciado del teorema 2.1 (de Green) en dos formas. Dichas reformulaciones se generalizan a dimensiones mayores y dan una perspectiva adicional de la interpretación de la importancia geométrica del teorema de Green.

Para comenzar, considere un campo vectorial C^1

$$\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$$

para definirlo en $\mathbf{R}^3$ considerando que su componente $\mathbf{k}$ es igual a cero. Entonces, si calculamos el rotacional de $\mathbf{F}$, encontramos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, obtenemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA.$$

Debido a que $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} M\,dx + N\,dy$, el teorema de Green se reescribe como sigue:

PROPOSICIÓN 2.2 (REFORMULACIÓN VECTORIAL DEL TEOREMA DE GREEN) Si D es una región a la cual se aplica el teorema de Green, y

$$\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$$

es un campo vectorial de clase C^1 sobre D, entonces, al orientar ∂D en forma apropiada,

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA.$$

Para comprender este resultado visualicemos la región plana D como si estuviera en el plano xy en $\mathbf{R}^3$ (véase la figura 6.22). El vector $\mathbf{k}$ es unitario y normal a D, y $\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$ es la integral doble de la componente del rotacional de $\mathbf{F}$ normal a D. Como la integral de línea $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de ∂D (véase la sección 6.1), la ecuación de la proposición 2.2 dice que, con hipótesis apropiadas, la circulación de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de la frontera de una región plana es igual al total de la "rotación infinitesimal" o neta de $\mathbf{F}$ sobre toda la región (véase también la sección 3.4, donde se da al rotacional de un campo vectorial una interpretación intuitiva en términos de la rotación —o espere hasta la sección 7.3, donde se amplía y se explica con mayor precisión el concepto de la medición del rotacional de un campo vectorial). Este resultado se generaliza al teorema de Stokes en $\mathbf{R}^3$. El teorema de Stokes relaciona a la integral de la componente del rotacional de un campo vectorial tridimensional $\mathbf{F}$, normal a la *superficie* en $\mathbf{R}^3$, con la integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre las curvas frontera de la superficie.

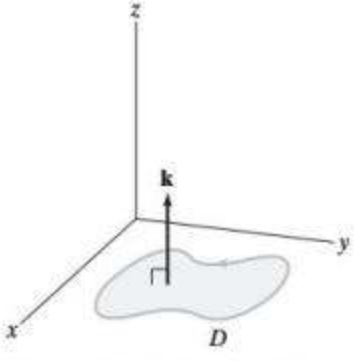


Figura 6.22 Región plana D en $\mathbf{R}^3$. El vector $\mathbf{k}$ es normal a D.

A continuación se replantea de otra manera el teorema de Green. Suponga una vez más que D es una región en $\mathbf{R}^2$ a la que se aplica el teorema de Green y cuyas curvas de frontera están orientadas de manera apropiada. En cada punto a lo largo de los segmentos C^1 de ∂D, sea que $\mathbf{n}$ denote el vector unitario que es perpendicular a

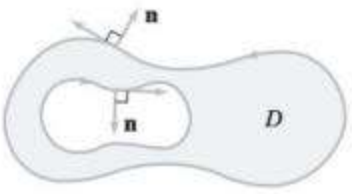


Figura 6.23 Vector unitario hacia fuera **n** normal a la región D.

∂D y apunte *hacia fuera* de la región D. (Llamamos **n** al **vector unitario hacia fuera normal** a D. Véase la figura 6.23). Entonces, es posible demostrar lo siguiente:

TEOREMA 2.3 (TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL PLANO) Si D es una región a la cual se aplica el teorema de Green, **n** es el vector unitario hacia fuera normal a D, y

$$\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$$

es un campo vectorial C^1 sobre D, entonces

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA.$$

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$ parametriza un segmento C^1 de ∂D, entonces a lo largo de este puede obtenerse el vector unitario **n** de manera geométrica rotando 90° el vector unitario tangente $\mathbf{x}'(t)/\|\mathbf{x}'(t)\|$ en el sentido de las manecillas del reloj. En particular, a lo largo de dicho segmento C^1 parametrizado,

$$\mathbf{n} = \frac{y'(t)\,\mathbf{i} - x'(t)\,\mathbf{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{y'(t)\,\mathbf{i} - x'(t)\,\mathbf{j}}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

Calcularemos la integral de línea $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$. A lo largo de cada segmento C^1 de ∂D, la contribución a la integral de línea puede evaluarse como

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{n}(t))\, \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \\
&\quad = \int_a^b \left(M(x(t), y(t))\,\mathbf{i} + N(x(t), y(t))\,\mathbf{j}\right) \cdot \frac{y'(t)\,\mathbf{i} - x'(t)\,\mathbf{j}}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\, \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \\
&\quad = \int_a^b \left(M(x(t), y(t))y'(t) - N(x(t), y(t))x'(t)\right) dt \\
&\quad = \int_{\mathbf{x}} -N\, dx + M\, dy.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, según el teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_{\partial D} -N dx + M dy &= \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial(-N)}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA,
\end{aligned}$$

por la definición de la divergencia de **F**. ■

Si C es una curva simplemente orientada, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$, donde **n** es el unitario normal a C como se define en el teorema 2,3, se conoce como **flujo** de **F** a través de C. Por ejemplo, si **F** representa el campo vectorial velocidad de un fluido planar, entonces el flujo mide la tasa de fluido transportado a través de C por unidad de tiempo. (Suponemos que **F** no varía con el tiempo t).

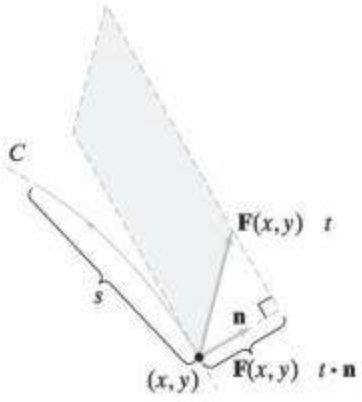


Figura 6.24 El paralelogramo sombreado tiene un área de $\mathbf{F}(x, y)\Delta t \cdot \mathbf{n}\,\Delta s$, que es la cantidad aproximada de fluido transportado a través del segmento de C.

Para ver esto considere la cantidad de fluido transportado a través de un segmento pequeño de C durante un corto intervalo de tiempo Δt. Como lo sugiere la figura 6.24, tenemos que

$$\text{Cantidad de fluido transportado} \approx \text{área del paralelogramo}$$
$$\approx (\mathbf{F}(x, y)\Delta t \cdot \mathbf{n})\Delta s, \tag{2}$$

donde Δs es la longitud del segmento de la curva C. La fórmula (2) solo es aproximada, ya que el segmento de la curva C no necesita ser completamente recto (por lo que la geometría del paralelogramo es solo aproximada) y no es necesario que el campo vectorial $\mathbf{F}$ sea constante (de manera que el término $\mathbf{F}(x, y)\,\Delta t$ solo aproxima una línea de flujo de $\mathbf{F}$ sobre el intervalo de tiempo). Si dividimos la fórmula (2) entre Δt, entonces la *velocidad* promedio de transporte a través del segmento durante el intervalo de tiempo Δt es $(\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{n})\,\Delta s$. Si ahora descomponemos C en un número grande y finito de pequeños segmentos, sumamos las contribuciones de la forma $(\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{n})\,\Delta s$ para cada segmento, y hacemos que todas las longitudes Δs tiendan a cero, encontramos que la velocidad promedio de transporte de fluido, que se denota con $\Delta M/\Delta t$, es dada aproximadamente por

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} \approx \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

Por último, al hacer que $\Delta t \to 0$, *definimos* la velocidad (instantánea) de transporte dM/dt como

$$\frac{dM}{dt} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds,$$

que es el flujo.

En vista de las observaciones anteriores, el teorema 2.3 dice que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de la región plana D (es decir, cuánto de $\mathbf{F}$ fluye a través de ∂D), es igual a la divergencia total (o neta) de $\mathbf{F}$ sobre toda la D. En el capítulo 7 volveremos al concepto de flujo para el caso de un campo vectorial $\mathbf{F}$ tridimensional. En ese planteamiento nos interesa el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una *superficie* en $\mathbf{R}^3$; la definición de dicho concepto requiere una integral de superficie. Entonces el teorema 2.3 se generaliza a tres dimensiones como teorema de Gauss (también conocido como **teorema de la divergencia**). El teorema de Gauss relaciona el flujo de un campo vectorial tridimensional $\mathbf{F}$ a través de una superficie cerrada para la triple integral de la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre la región sólida encerrada por la superficie.

Demostración del teorema de Green

Estableceremos el teorema de Green (teorema 2.1) en tres grandes etapas. Las dos primeras consisten en demostraciones de casos especiales del teorema 2.1. La tercera etapa es un bosquejo de cómo se pueden usar los casos especiales para hacer una demostración completa del caso general. El resultado es que carecemos de una demostración rigurosa, total y concisa, de la versión general del teorema de Green enunciado en el teorema 2.1. Sin embargo, lo que demostramos utiliza ideas geométricas importantes de la integración múltiple y las integrales de línea, y lo que no demostramos es demasiado técnico.

Paso 1. Establecemos el teorema de Green cuando D es una región elemental en $\mathbf{R}^2$ de tipo 3. Así, D puede ser descrita de dos maneras (véase la figura 6.25):

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \gamma(x) \le y \le \delta(x), a \le x \le b\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha(y) \le x \le \beta(y), c \le y \le d\}.$$

La primera descripción de D es como una región elemental de tipo 1; la segunda es como una región de tipo 2 (recuerde que una región de tipo 3 es de *ambos* tipos, 1 y 2). Suponemos que las funciones α, β, γ y δ son continuas, y C^1 es por partes.

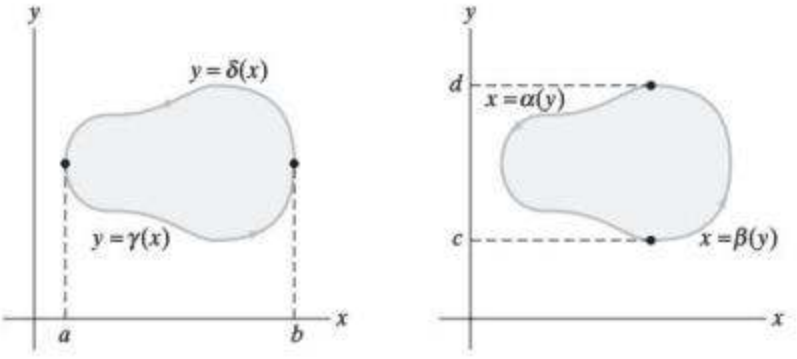


Figura 6.25 Región elemental D de tipo 3, analizada como de tipo 1 y tipo 2. Advierta las orientaciones de las curvas frontera.

Al considerar D como una región elemental de tipo 1 evaluamos la parte de $\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy$, es decir, $\oint_{\partial D} M\,dx$. Observe que ∂D consta de una curva C_1 inferior y otra C_2 superior. Si parametrizamos estas como sigue:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \gamma(t) \end{cases} \quad a \le t \le b \quad \text{y} \quad C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \delta(t) \end{cases} \quad a \le t \le b,$$

entonces C_2 tiene una orientación opuesta a la que se desea, como se ilustra en la figura 6.25. Con esto en la mente calculamos

$$\oint_{\partial D} M(x, y)\,dx = \int_{C_1} M(x, y)\,dx - \int_{C_2} M(x, y)\,dx.$$

(¡Observe el signo menos!) entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} M(x, y)\,dx &= \int_a^b M(t, \gamma(t))\,dt - \int_a^b M(t, \delta(t))\,dt \\ &= \int_a^b [M(t, \gamma(t)) - M(t, \delta(t))]\,dt. \end{aligned}$$

Ahora comparamos el cálculo de $\oint_{\partial D} M\,dx$ con el de $\iint_D -(\partial M/\partial y)\,dA$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_D -\frac{\partial M}{\partial y}\,dA &= \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} -\frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= \int_a^b [-M(x, \delta(x)) + M(x, \gamma(x))]\,dx \\ &= \int_a^b [M(x, \gamma(x)) - M(x, \delta(x))]\,dx. \end{aligned}$$

(Advierta que aquí se utilizó el teorema fundamental del cálculo). Así, en este caso vemos que

$$\oint_{\partial D} M\,dx = \iint_D -\frac{\partial M}{\partial y}\,dA.$$

En forma análoga puede demostrarse que

$$\oint_{\partial D} N\,dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$$

considerando a D como una región elemental de tipo 2. Omitimos los detalles, lo único que diremos es que es posible demostrar que tanto la integral de línea como la doble son iguales a

$$\int_c^d [N(\beta(y), y) - N(\alpha(y), y)]\,dy.$$

Por último, como D es simultáneamente de tipo 1 y de tipo 2,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy &= \oint_{\partial D} M\,dx + \oint_{\partial D} N\,dy \\ &= \iint_D -\frac{\partial M}{\partial y}\,dA + \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}\,dA \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.\end{aligned}$$

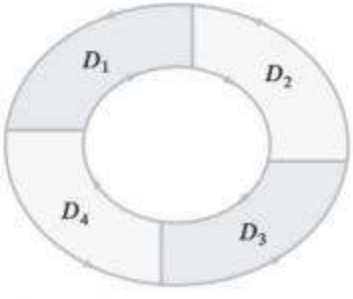


Figura 6.26 La región $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, donde cada subregión D_i, $i = 1, 2, 3, 4$, es elemental de tipo 3.

Paso 2. Ahora supongamos que D no es una región elemental de tipo 3, pero que puede dividirse en un número grande y finito de regiones tipo 3: $D_1, D_2, \ldots, D_n$ en forma tal que dichas subregiones se traslapan como máximo dos a la vez y solo a lo largo de fronteras comunes. Esa región D tendría un aspecto parecido al de la región que se ilustra en la figura 6.26. Por medio del paso 1, el teorema de Green se cumple para cada subregión. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_D (N_x - M_y)\,dA &= \iint_{D_1} (N_x - M_y)\,dA + \iint_{D_2} (N_x - M_y)\,dA \\ &\quad + \cdots + \iint_{D_n} (N_x - M_y)\,dA \\ &= \oint_{\partial D_1} M\,dx + N\,dy + \oint_{\partial D_2} M\,dx + N\,dy \\ &\quad + \cdots + \oint_{\partial D_n} M\,dx + N\,dy. \qquad (3)\end{aligned}$$

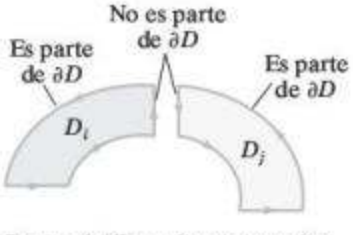


Figura 6.27 La frontera común de las subregiones D_i y D_j está orientada en una forma como parte de ∂D_i, y en la opuesta como parte de ∂D_j. Entonces, $\oint_{\partial D_i} M\,dx + N\,dy + \oint_{\partial D_j} M\,dx + N\,dy$ se cancelará sobre esta frontera común.

En este punto es tentador concluir de inmediato que la suma de las integrales de línea en la ecuación 3 es $\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy$. Sin embargo, ∂D_i puede contener *más* que solo partes de ∂D. El truco es observar que cualquier parte de ∂D_i que *no* sea parte de ∂D es parte de exactamente alguna otra ∂D_j. Además, a esta parte que se traslapa se le da una orientación por medio de ∂D_i y la orientación *opuesta* por medio de ∂D_j. Cuando tomamos la suma de las integrales de línea en la ecuación (3), cualesquiera contribuciones que surjan de las componentes de las ∂D_i que estén en el interior de D se cancelarán por pares (véase la figura 6.27). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iint_D (N_x - M_y)\,dA &= \oint_{\partial D_1} M dx + N dy + \oint_{\partial D_2} M dx + N dy \\ &\quad + \cdots + \oint_{\partial D_n} M dx + N dy \\ &= \oint_{\partial D} M dx + N dy;\end{aligned}$$

En este caso se establece el teorema de Green.

Paso 3. Desafortunadamente, no todas las regiones descritas en el enunciado del teorema 2.1 pueden subdividirse en un número grande y finito de regiones elementales de tipo 3. A continuación se presenta un bosquejo de lo que se debería hacer para demostrar el teorema de Green en general.

En primer lugar afirmamos (sin prueba alguna) que para las regiones D descritas en el enunciado del teorema 2.1 es posible producir una secuencia de regiones $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, cuyo "límite" cuando $n \to \infty$ es D, y en forma tal que cada D_n puede subdividirse en un número finito y grande de regiones elementales de tipo 3. A continuación afirmamos que $\partial D_n \to \partial D$ cuando $n \to \infty$. Por último, necesitamos demostrar que cuando $n \to \infty$,

$$\iint_{D_n} (N_x - M_y)\,dA \quad \to \quad \iint_D (N_x - M_y)\,dA$$

y

$$\oint_{\partial D_n} M\,dx + N\,dy \quad \to \quad \oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy.$$

Como el teorema de Green se cumple para cada D_n (por medio de los pasos 1 y 2), con esto terminamos.[2] ■

Nota histórica[3]

La idea de que la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada puede relacionarse con una integral doble sobre la región acotada por la curva se atribuye con frecuencia a George Green (1793-1841), un matemático inglés autodidacta. Tal idea dio como resultado lo que hemos estado llamando teorema de Green, el cual tuvo sus orígenes en un panfleto oscuro que Green publicó en 1828, en el cual buscaba establecer un fundamento matemático riguroso para la física de la electricidad y el magnetismo. Las ideas de Green surgieron del trabajo con ecuaciones diferenciales relacionadas con potenciales gravitacionales. El manuscrito de Green llamó posteriormente la atención de Lord Kelvin (1824-1907), quien lo volvió a publicar, con lo que por fortuna Green recibió un gran reconocimiento.

De manera coincidente, y también en 1828, el matemático ruso Mikhail Ostrogradsky (1801-1861), trabajando en forma independiente, llegó a un resultado similar al teorema de Green, por lo cual su nombre en ocasiones se asocia a este teorema.

6.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 compruebe el teorema de Green para el campo vectorial dado

$$\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$$

y la región D, por medio de calcular tanto

$$\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy \quad \text{y} \quad \iint_D (N_x - M_y)\,dA.$$

1. $\mathbf{F} = -x^2 y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$, D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.
2. $\mathbf{F} = (x^2 - y)\,\mathbf{i} + (x + y^2)\,\mathbf{j}$, D es el rectángulo acotado por $x = 0, x = 2, y = 0$ y $y = 1$.
3. $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$, D es el cuadrado con vértices en $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$.
4. $\mathbf{F} = 2y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, D es la región semicircular $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$.
5. $\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} - 4x\,\mathbf{j}$, D es la región elíptica $x^2 + 2y^2 \leq 4$.

[2] Para conocer los detalles del tipo de argumento de límites que hemos considerado, consulte a O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (Springer, Berlín, 1929, reimpreso por Dover Publications, Nueva York, 1954), pp. 113-119, donde se da un argumento de límites en el caso del teorema de Gauss, el cual estudiaremos en la sección 7.3. Para una demostración del teorema de Green que evita el argumento del límite, consulte a D. V. Widder, *Advanced Calculus*, 2a ed. (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961; reimpreso por Dover Publications, Nueva York, 1989), pp. 223-225.

[3] También consulte a M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford Press, Nueva York, 1972), p. 683.

6. $\mathbf{F} = (x^2y + x)\mathbf{i} + (y^3 - xy^2)\mathbf{j}$, D es la región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 9$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

7. *a*) Use el teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\oint_C y^2 dx + x^2 dy,$$

donde C es la trayectoria formada por el cuadrado con vértices en (0, 0), (1, 0), (0, 1) y (1, 1), orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

b) Verifique su respuesta para el inciso anterior calculando directamente la integral de línea.

8. Sea $\mathbf{F} = 3xy\,\mathbf{i} + 2x^2\,\mathbf{j}$ y suponga que C es la curva orientada que se ilustra en la figura 6.28. Evalúe

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

en forma directa y también por medio del teorema de Green.

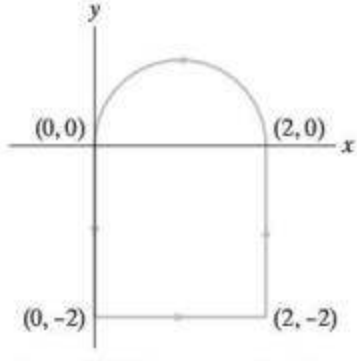


Figura 6.28 La curva orientada C del ejercicio 8 consta de tres lados de un cuadrado más un arco semicircular.

9. Evalúe

$$\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy,$$

donde C es la frontera del cuadrado con vértices en (0, 0), (1, 0), (0, 1) y (1, 1), orientada *en el sentido de las manecillas del reloj*. Use cualquier método de evaluación que parezca apropiado.

10. Utilice el teorema de Green para encontrar el trabajo realizado por el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (4y - 3x)\,\mathbf{i} + (x - 4y)\,\mathbf{j}$$

sobre una partícula a medida que esta se desplaza una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

11. Compruebe que el área del rectángulo $R = [0, a] \times [0, b]$ es ab por medio de calcular una integral de línea apropiada.

12. Sea a una constante positiva. Use el teorema de Green para calcular el área bajo un arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

13. Evalúe $\int_C (x^4y^5 - 2y)\,dx + (3x + x^5y^4)\,dy$, donde C es la curva orientada que se ilustra en la figura 6.29.

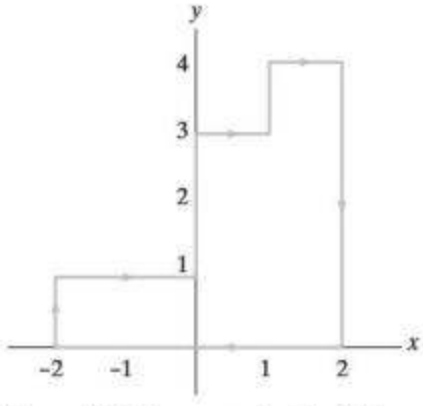


Figura 6.29 La curva orientada C del ejercicio 13.

14. Use el teorema de Green para encontrar el área encerrada por la hipocicloide

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

15. *a*) Dibuje la curva dada en forma paramétrica por $\mathbf{x}(t) = (1 - t^2, t^3 - t)$.

b) Encuentre el área dentro del lazo cerrado de la curva.

16. Use el teorema de Green para calcular el área entre la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ y el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

17. Demuestre que si D es una región a la cual se aplica el teorema de Green y ∂D se orienta de modo que D siempre queda a la izquierda cuando nos movemos a lo largo de ∂D, entonces el área de D es dada por cualquiera de las dos integrales de línea siguientes:

$$\text{Área de } D = \oint_{\partial D} x\,dy = -\oint_{\partial D} y\,dx.$$

18. Determine el área dentro del cuadrilátero cuyos vértices tomados en sentido contrario al de las manecillas del reloj son (2, 0), (1, 2), (−1, 1) y (1, 1).

19. Suponga que los vértices sucesivos de un polígono de n lados son los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... , (a_n, b_n), arreglados en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del polígono. Demuestre que el área dentro de este es dada por

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right).$$

20. Para este problema, sea a un entero positivo. Una epicicloide es la trayectoria generada por un punto marcado sobre un círculo de radio uno, que rueda sin resbalar,

sobre el exterior de un círculo fijo de radio a. Si el centro del círculo fijo está en el origen y el punto marcado está en $(a, 0)$ cuando $t = 0$, entonces la epicicloide es dada por la trayectoria $\mathbf{x}(t) = ((a+1)\cos t - \cos(a+1)t, (a+1)\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(a+1)t)$ (véase el ejercicio 35 de los ejercicios varios del capítulo 1).

a) Demuestre que la trayectoria epicicloide encuentra al círculo fijo exactamente cuando $t = 2\pi n/a$, donde n es un entero. (Sugerencia: esto debe ocurrir cuando $\|\mathbf{x}(t)\| = a$). Grafique la epicicloide cuando $a = 5, 6$.

b) Use una integral de línea apropiada para encontrar el área encerrada por la epicicloide.

c) ¿Qué sucede con la razón del área calculada en el inciso *b*) y la del círculo fijo, conforme el entero a se hace más grande?

21. Evalúe la integral de línea $\oint_C 5y\,dx - 3x\,dy$, donde C es la cardioide con la ecuación en coordenadas polares $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

22. *a*) Suponga que C es una curva cerrada y simple que *no* contiene al origen. Use el teorema de Green para determinar el valor de

$$\oint_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}.$$

b) Ahora suponga que C es una curva cerrada y simple que *sí* contiene al origen. ¿Se puede emplear el teorema de Green para determinar el valor de

$$\oint_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}?$$

Explique.

c) Sean C_1 y C_2 dos curvas simples y cerradas que contienen, ambas, al origen, las dos están orientadas en sentido contrario al de las manecillas del reloj y no se tocan o intersecan. Demuestre que

$$\oint_{C_1} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \oint_{C_2} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}.$$

d) Use el resultado del inciso *c*) para determinar el valor de

$$\oint_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2},$$

donde C es una curva simple y cerrada que contiene al origen.

23. *a*) Use el teorema de la divergencia (teorema 2.3) para demostrar que $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, donde $\mathbf{F} = 2y\,\mathbf{i} - 3x\,\mathbf{j}$ y C es el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

b) Ahora demuestre que $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, por cálculo directo de la integral de línea.

24. Sea $\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$. El teorema de divergencia demuestra que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una curva cerrada C (es decir, $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$) es igual a $\iint_D (M_x + N_y)\,dA$, donde D es la región acotada por C. Use el teorema de Green para establecer un resultado similar que involucre a $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$, la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C (véase también la sección 6.1).

25. Sea C una curva cerrada y simple en el plano. Demuestre que

$$\oint_C 3x^2y\,dx + x^3\,dy = 0.$$

26. Demuestre que

$$\oint_C -y^3\,dx + (x^3 + 2x + y)\,dy$$

es positiva para cualquier curva cerrada C a la cual se aplique el teorema de Green.

27. Demuestre que si C es la frontera de cualquier región rectangular en $\mathbf{R}^2$, entonces

$$\oint_C (x^2y^3 - 3y)\,dx + x^3y^2\,dy$$

solo depende del área del rectángulo, no de su ubicación en $\mathbf{R}^2$.

28. Sea $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ el vector de posición de cualquier punto en el plano. Demuestre que el flujo de $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ a través de cualquier curva C simple y cerrada en $\mathbf{R}^2$ es dos veces el área dentro de C.

29. Establezca que D es una región a la que se aplica el teorema de Green, y suponga que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son dos funciones de clase C^2 cuyos dominios incluyen a D. Demuestre que

$$\iint_D \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\,dA = \oint_C (u\nabla v)\cdot d\mathbf{s},$$

donde $C = \partial D$ está orientada como en el teorema de Green.

30. Sea $f(x, y)$ una función de clase C^2, tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

es decir, f es *armónica*. Demuestre que si C es cualquier curva cerrada a la que se aplica el teorema de Green, entonces

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0.$$

31. Sea D una región a la que se aplica el teorema de Green y $\mathbf{n}$ el vector unitario hacia fuera normal a D. Suponga que $f(x, y)$ es una función de clase C^2. Demuestre que

$$\iint_D \nabla^2 f\,dA = \oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\,ds,$$

donde $\nabla^2 f$ denota al laplaciano de f (que es $\nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$) y $\partial f/\partial n$ denota a $\nabla f\cdot\mathbf{n}$. (Para tener más información sobre $\mathbf{n}$ vea la demostración del teorema 2.3).

6.3 Campos vectoriales conservativos

Como se vio en la sección 6.1, las integrales de línea de un campo vectorial dado solo dependen de la curva subyacente y su orientación, no de la parametrización particular de la curva. Sin embargo, en ciertos casos especiales incluso la curva misma no importa, solo los puntos inicial y terminal. Un campo vectorial que tenga la propiedad de que sus integrales de línea solo dependan de los puntos inicial y terminal de la curva orientada sobre la cual se toma la integral de línea, se dice que tiene **integrales de línea independientes de la trayectoria**. A continuación daremos una definición más detallada que caracteriza a dichos campos vectoriales y estudiaremos su importancia.

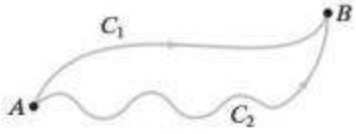


Figura 6.30 Si $\mathbf{F}$ tiene integrales de línea independientes de la trayectoria, entonces $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ para dos curvas C^1 cualesquiera orientadas por partes de A a B.

Independencia de la trayectoria

DEFINICIÓN 3.1 Un campo vectorial continuo $\mathbf{F}$ tiene **integrales de línea independientes de la trayectoria** si

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

para dos curvas orientadas cualesquiera, simples y de C^1 por partes, que se encuentren en el dominio de $\mathbf{F}$ y tengan los mismos puntos inicial y terminal (véase la figura 6.30).

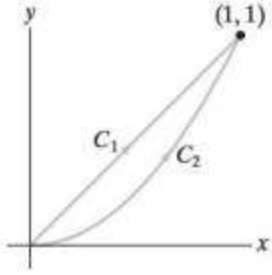


Figura 6.31 Las curvas C_1 y C_2 del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y considere las dos curvas siguientes en $\mathbf{R}^2$, del origen a $(1, 1)$: C_1, el segmento de recta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, y C_2, la parte de la parábola $y = x^2$ (en la figura 6.31 se muestran las curvas). Estas curvas pueden parametrizarse como

$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{y} \quad C_2: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Después calculamos

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} + \mathbf{j})\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0,$$

en tanto que

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 2t^2)\,dt = -\tfrac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = -\tfrac{1}{3}.$$

Vemos que

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \neq \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s},$$

y por ello $\mathbf{F}$ no tiene integrales de línea independientes de la trayectoria. ◆

EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Este campo vectorial tiene integrales de línea independientes de la trayectoria —a continuación veremos por qué. Sin embargo, de momento ilustraremos esto (sin demostrarlo) considerando la trayectoria parabólica $\mathbf{x}: [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$, así como la trayectoria $\mathbf{y}: [0, 2] \to \mathbf{R}^2$ constituida por los dos segmentos rectilíneos

$$\mathbf{y}_1: [0, 1] \to \mathbf{R}^2,\ \mathbf{y}_1(t) = (0, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_2: [1, 2] \to \mathbf{R}^2,\ \mathbf{y}_2(t) = (t - 1, 1).$$

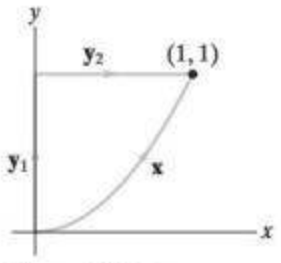


Figura 6.32 Las trayectorias **x** y **y** (que constan de las trayectorias $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$) del ejemplo 2.

Tanto **x** como **y** son trayectorias de (0, 0) a (1, 1) y se muestran en la figura 6.32. Tenemos que

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt$$

$$= \int_0^1 (t + 2t^3)\,dt = \left(\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t^4\right)\Big|_0^1 = 1,$$

y que

$$\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{y}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{y}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= \int_0^1 t\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\,dt + \int_1^2 ((t-1)\,\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot\mathbf{i}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (t-1)\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}t^2\Big|_0^1 + \tfrac{1}{2}(t-1)^2\Big|_1^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Para establecer que **F** tiene integrales de línea independientes de la trayectoria, necesitaríamos comprobar que el valor de la integral de línea de **F** a lo largo de *cualquier* elección de trayectoria entre dos puntos *cualesquiera* es igual que cualquier otra —lo que constituye una tarea prohibitiva. ◆

El resultado siguiente es una reformulación de la propiedad de independencia de la trayectoria.

TEOREMA 3.2 Sea **F** un campo vectorial continuo. Entonces **F** tiene integrales de línea independientes de la trayectoria si y solo si $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$ para todas las curvas C cerradas, simples y C^1 por partes, en el dominio de **F**.

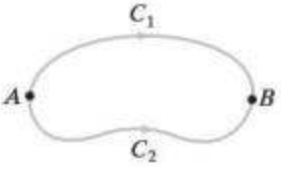


Figura 6.33 Curva C cerrada y simple que consta de dos curvas orientadas de A a B.

DEMOSTRACIÓN En primer lugar, suponga que **F** satisface la propiedad de independencia de la trayectoria. Suponga que C está parametrizada por $\mathbf{x}(t)$, $a \le t \le b$, donde $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b) = A$. Establezca que B es otro punto sobre C, y que C se descompone en dos curvas orientadas C_1 y C_2 de A a B. Una de estas curvas, digamos C_1, estará orientada en el mismo sentido que C, y la otra en el sentido opuesto (véase la figura 6.33). Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0,$$

puesto que **F** tiene integrales de línea independientes de la trayectoria.

A la inversa, suponga que todas las integrales de línea de **F** alrededor de curvas cerradas y simples son cero. Entonces, dadas dos curvas C_1 y C_2 simples, orientadas y C^1 por partes, con los mismos puntos inicial y terminal, sea C la curva *cerrada* que consta de C_1 y $-C_2$ (es decir, C_2 con su dirección invertida). Entonces tenemos que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Si ocurre que C es simple, entonces $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$ por suposición, de modo que

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s},$$

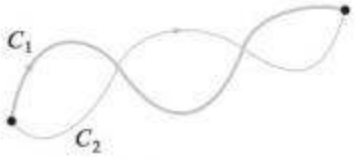


Figura 6.34 La curva cerrada C construida desde C_1 y contraria a C_2 no necesita ser simple.

como se deseaba. Sin embargo, C no necesita ser simple aun si C_1 y C_2 sí lo son (véase la figura 6.34). Si es posible descomponer C_1 y C_2 en un número grande y finito de segmentos, de manera que un segmento de C_1' de C_1 y un segmento C_2' de C_2, (i) coincidan por completo, o (ii) juntos formen una curva cerrada y simple C', entonces no es muy difícil modificar el argumento precedente para concluir que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Sin embargo, no siempre es posible hacer esto, y se requieren más argumentos técnicos (los cuales omitiremos). ■

Hacemos énfasis en que no es esencial suponer que las curvas en la definición 3.1 y el teorema 3.2 son simples. Aquí lo hemos hecho para que la demostración del teorema 3.5 sea más directa.

Campos gradiente e integrales de línea

A continuación describimos los campos gradiente, una clase de campos vectoriales que satisfacen la propiedad de independencia de la trayectoria. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde f es alguna función de variable escalar de clase C^1. (Recuerde el lector que nos hemos referido a f como un **potencial** escalar de $\mathbf{F}$. También llamamos a $\mathbf{F}$ campo vectorial **conservativo** y campo gradiente). Entonces, a lo largo de cualquier trayectoria $\mathbf{x}$ de $A = \mathbf{x}(a)$ a $B = \mathbf{x}(b)$, que tenga su imagen en el dominio de $\mathbf{F}$, tenemos que

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt.$$

Se sigue de la regla de la cadena que $d/dt[f(\mathbf{x}(t))] = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$. Entonces,

$$\int_{\mathbf{x}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[f(\mathbf{x}(t))]\, dt$$

$$= f(\mathbf{x}(t))\Big|_a^b = f(\mathbf{x}(b)) - f(\mathbf{x}(a)) = f(B) - f(A).$$

Por lo tanto, cuando $\mathbf{F}$ es un campo gradiente, la integral de línea de $\mathbf{F}$ solo depende del valor de la función potencial en los puntos extremos de la trayectoria. Así, los campos gradiente tienen integrales de línea independientes de la trayectoria. También se cumple lo contrario, como se demuestra al final de esta sección. Al enunciar esto con formalidad, tenemos el teorema siguiente:

TEOREMA 3.3 Sea $\mathbf{F}$ definido y continuo en una región R abierta y conectada de $\mathbf{R}^n$. Entonces, $\mathbf{F} = \nabla f$ (donde f es una función de clase C^1 sobre R) si y solo si $\mathbf{F}$ tiene integrales de línea independientes de la trayectoria sobre curvas en R. Además, si C es cualquier curva orientada, C^1 por partes, que esté en R, con punto inicial A y punto final B, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A).$$

Nota: Una región $R \subseteq \mathbf{R}^n$ es **conectada** si dos puntos cualesquiera en R pueden ser reunidos por una trayectoria cuya imagen esté en R.

EJEMPLO 3 Considere nuevamente el campo vectorial $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ del ejemplo 2. Puede comprobarse con facilidad que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Según el teorema 3.3, las integrales de línea de $\mathbf{F}$ serán independientes de la trayectoria; esto se ilustró en el ejemplo 2, sin demostrarlo, cuando se calculó la integral de

línea vectorial de **F** a lo largo de dos trayectorias de (0, 0) a (1, 1). Según el teorema 3.3, ahora vemos que para *cualquier* curva C de C^1 por partes dirigida de (0, 0) a (1, 1), tenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(1, 1) - f(0, 0) = \tfrac{1}{2}(1^2 + 1^2) - \tfrac{1}{2}(0^2 + 0^2) = 1,$$

lo que coincide con nuestros cálculos anteriores. ◆

Un criterio para campos vectoriales conservativos

El teorema 3.3 nos dice que un campo vectorial **F** tiene integrales de línea independientes de la trayectoria precisamente cuando es un campo vectorial conservativo (gradiente), y además que la integral de línea de **F** a lo largo de cualquier trayectoria es determinada por los valores de la función potencial f en los puntos finales de la trayectoria. Surgen de manera natural dos preguntas:

1. ¿Cómo determinar si un campo vectorial dado **F** es conservativo?
2. Si se supone que **F** es conservativo, ¿hay un procedimiento para encontrar una función potencial escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$?

Respondemos la primera pregunta aplicando a **F** una prueba sencilla y eficaz. Si **F** pasa esta prueba, es decir, si es conservativo, entonces ilustramos con ejemplos cómo producir un potencial escalar para **F**, lo que respondería la segunda pregunta.

Lo que necesitamos para empezar es terminología adicional.

DEFINICIÓN 3.4 Una región R en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ está **conectada simplemente** si consta de un solo elemento conectado y si toda curva cerrada C, simple, en R puede ser contraída continuamente hacia un punto mientras permanece en R durante la deformación.

Si R es una región en el plano, entonces R está conectada simplemente solo en caso en que esté conectada y toda curva C simple y cerrada que se encuentre en R tiene la propiedad de que todos los puntos encerrados por C también están en R. Hablando sin demasiado rigor, una región conectada simplemente (ya sea $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$) puede carecer de "hoyos esenciales". En las figuras 6.35 y 6.36 se muestran ejemplos ilustrativos. El concepto de una curva que se contrae continuamente hacia un punto se puede establecer con precisión absoluta, aunque aquí no nos molestaremos en hacerlo.

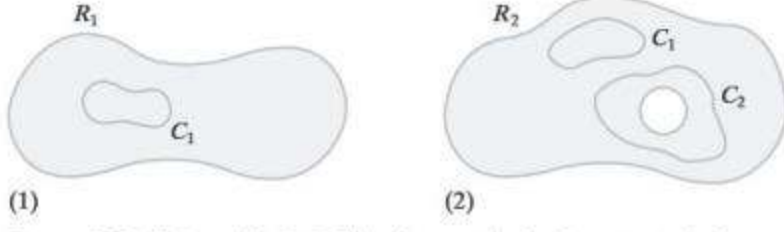


Figura 6.35 (1) La región $R_1 \subset \mathbf{R}^2$ está conectada simplemente: todos los puntos rodeados por cualquier curva simple y cerrada en R_1 están en R_1. (2) En contraste, R_2 no está conectada simplemente: Aunque la curva C_1 encierra puntos que están en R_2, la curva C_2 rodea un agujero. Entonces, C_2 no puede ser contraída continuamente hacia un punto y permanecer en R_2.

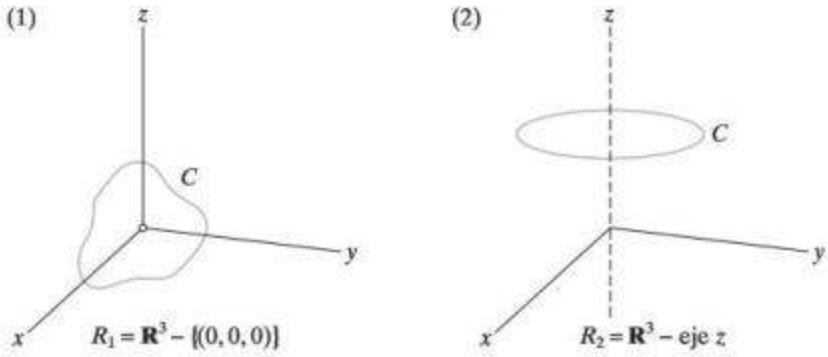


Figura 6.36 (1) La región $R_1 \subset \mathbf{R}^3$ está conectada simplemente. (2) La región R_2 *no* está conectada simplemente: La curva C no puede contraerse continuamente hacia un punto sin quedar "atorada" en el eje z "faltante".

Ahora establecemos nuestro criterio para que un campo vectorial sea conservativo.

TEOREMA 3.5 Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1, cuyo dominio es una región R conectada simplemente, ya sea en $\mathbf{R}^2$ o en $\mathbf{R}^3$. Entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f de variable escalar de clase C^2 sobre R, si y solo si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de R.

Antes de demostrar el teorema 3.5 es conveniente hacer algunos comentarios y ejemplos. En primer lugar, observe que el teorema 3.5 proporciona una forma directa de determinar si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo: compruebe que el dominio de $\mathbf{F}$ está conectado simplemente y luego pruebe si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Si el rotacional se desvanece, se sigue que $\mathbf{F}$ tiene integrales de línea independientes de la trayectoria. En la práctica es de ayuda este "criterio rotacional".

En el caso en que $\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$ sea un campo vectorial en dos dimensiones, la condición de que el rotacional de $\mathbf{F}$ se desvanezca significa que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M(x,y) & N(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Esto equivale a la condición

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{1}$$

En esta situación la ecuación (1) es más sencilla de usar.

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{F} = x^2 y\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) = x^2.$$

Como estas derivadas parciales no son iguales, concluimos que $\mathbf{F}$ no es conservativo, de acuerdo con el teorema 3.5. ◆

EJEMPLO 5 Sea $\mathbf{F} = (2xy + \cos 2y)\mathbf{i} + (x^2 - 2x \operatorname{sen} 2y)\mathbf{j}$. El campo vectorial $\mathbf{F}$ está definido y es de clase C^1 en todo $\mathbf{R}^2$ (una región conectada simplemente). Además,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2x \operatorname{sen} 2y) = 2x - 2\operatorname{sen} 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}(2xy + \cos 2y) = 2x - 2\operatorname{sen} 2y.$$

Podríamos concluir que **F** es conservativo. Además, si C es la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ (una curva cerrada y sencilla), entonces, de acuerdo con los teoremas 3.2 y 3.3, concluimos *sin ningún cálculo explícito*, que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. ◆

EJEMPLO 6 Sea

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} - 6x\right)\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{k}.$$

F es de clase C^1 en todo $\mathbf{R}^3$ excepto en el origen. Advierta que $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0,)\}$ está simplemente conectada. Invitamos al lector a comprobar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para toda (x, y, z) en el dominio de **F**. Por lo tanto, según el teorema 3.5, **F** es conservativo.

Ahora suponga que $\mathbf{x}$: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$ es la trayectoria dada por $\mathbf{x}(t) = (1 - t, \text{sen } \pi t, t)$. Para evaluar $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ directamente, debemos calcular:

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \left(\frac{1 - t}{(1 - t)^2 + \text{sen}^2 \pi t + t^2} - 6(1 - t), \frac{\text{sen } \pi t}{(1 - t)^2 + \text{sen}^2 \pi t + t^2}, \right.$$

$$\left. \frac{t}{(1 - t)^2 + \text{sen}^2 \pi t + t^2} \right) \cdot (-1, \pi \cos \pi t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2t - 1 + \pi \text{ sen } \pi t \cos \pi t}{(1 - t)^2 + \text{sen}^2 \pi t + t^2} + 6(1 - t) \right) dt.$$

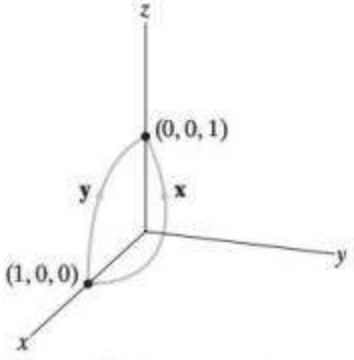


Figura 6.37 Las trayectorias $\mathbf{x}(t) = (1 - t, \text{sen } \pi t, t)$, $0 \le t \le 1$, y $\mathbf{y}(t) = (\cos t, 0, \text{sen } t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

Esta última integral es difícil de evaluar. Sin embargo, como **F** es conservativo, podemos evaluar **F** calculando $\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{y}$ es cualquier otra trayectoria con los mismos puntos terminales que $\mathbf{x}$. Una buena elección es $\mathbf{y}(t) = (\cos t, 0, \text{sen } t)$, $0 \le t \le \pi/2$, ya que la imagen de esta trayectoria se encuentra sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, un hecho que nos permitirá trabajar con una integral sencilla. (Véase la figura 6.37 para una gráfica de las dos trayectorias $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$). Como **F** es conservativo y, por lo tanto, tiene integrales de línea independientes de la trayectoria,

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos t}{1} - 6 \cos t, \frac{0}{1}, \frac{\text{sen} t}{1} \right) \cdot (-\text{sen} t, 0, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 6 \cos t \text{ sen} t\, dt = \int_0^{\pi/2} 3 \text{ sen } 2t\, dt$$

$$= -\tfrac{3}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = -\tfrac{3}{2}(-1 - 1) = 3.$$

◆

Bosquejo de demostración del teorema 3.5 Según el teorema 4.3 del capítulo 3, observamos que si $\mathbf{F} = \nabla f$ para cierta función f de clase C^2, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

A la inversa, suponga el lector que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Demostraremos que si C es cualquier curva en R, cerrada, sencilla y de C^1 por partes, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Según el teorema 3.2 esto implica que **F** tiene integrales de línea independientes de la trayectoria, lo cual es equivalente, por el teorema 3.3, a que los **F** sean el gradiente de cierta función de variable escalar f. Además, como se acepta que **F** es de clase C^1, se sigue que f debe ser de clase C^2.

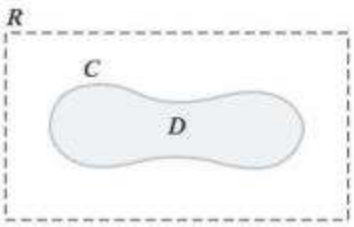


Figura 6.38 Como R está conectada simplemente, cualquier región D encerrada por C debe estar en R.

Figura 6.39 Una superficie en el espacio acotada por la curva C simple y cerrada.

Para ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, suponga primero que $\mathbf{F}$ está definida sobre una región R en $\mathbf{R}^2$ conectada simplemente. Como R está conectada de manera simple, la curva C cerrada limita una región D que está contenida por completo en R (véase la figura 6.38). Por medio de la proposición 2.2, que es equivalente al teorema de Green, tenemos que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \iint_D (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k})\, dA = \pm \iint_D 0\, dA = 0.$$

Usamos el signo "$\pm$" para el caso en que C esté orientada en sentido opuesto a la dirección estipulada por el teorema de Green. Si $\mathbf{F}$ está definida sobre una región R conectada simplemente en $\mathbf{R}^3$, entonces debemos aplicar el teorema de Stokes en lugar del de Green. Esto nos lleva un poco adelante de nosotros mismos, aunque el principio sigue siendo el mismo: si C es una curva simple y cerrada en $R \subset \mathbf{R}^3$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es igual a una *superficie integral* apropiada de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre una superficie en R acotada por C (véase la figura 6.39). Como se supone que el rotacional es igual a cero, cualquier integral de este será cero y, por lo tanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ también será cero. ■

Localización de potenciales escalares

Ahora que contamos con una prueba práctica para determinar si un campo vectorial dado $\mathbf{F}$ es conservativo, ilustraremos en los ejemplos 7 y 8 un método directo para producir una función potencial escalar para $\mathbf{F}$. Esta técnica es una consecuencia directa de la definición de un campo gradiente.

EJEMPLO 7 Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2xy + \cos 2y)\,\mathbf{i} + (x^2 - 2x \operatorname{sen} 2y)\,\mathbf{j}$$

del ejemplo 5. Ahí ya vimos que $\mathbf{F}$ es conservativo. Para encontrar un potencial escalar para $\mathbf{F}$ buscamos una función apropiada $f(x, y)$ tal que

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \mathbf{F}.$$

Las componentes del gradiente de f deben coincidir con aquellas de $\mathbf{F}$; por lo tanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \cos 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x \operatorname{sen} 2y \end{cases}. \tag{2}$$

Comencemos por recuperar a f por medio de integrar la primera ecuación de (2) con respecto de x. Así,

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int (2xy + \cos 2y)\, dx = x^2 y + x \cos 2y + g(y), \tag{3}$$

donde $g(y)$ es una función arbitraria de y. (La función $g(y)$ desempeña el papel de la "constante de integración" arbitraria en la integral indefinida de $\partial f/\partial x$). Al diferenciar la ecuación (3) con respecto de y se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x \operatorname{sen} 2y + g'(y). \tag{4}$$

Si se compara la ecuación (4) con la segunda ecuación de (2), vemos que $g'(y) \equiv 0$, por lo que g debe ser una función constante. Por lo tanto, nuestro potencial escalar debe ser de la forma

$$f(x, y) = x^2 y + x \cos 2y + C,$$

donde C es una constante arbitraria. Si el lector lo desea puede hacer una doble comprobación de que $\nabla f = \mathbf{F}$. ◆

EJEMPLO 8 Sea $\mathbf{F} = (e^x \operatorname{sen} y - yz)\,\mathbf{i} + (e^x \cos y - xz)\mathbf{j} + (z - xy)\,\mathbf{k}$. Observe que $\mathbf{F}$ es de clase C^1 sobre todo $\mathbf{R}^3$. Calculamos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x \operatorname{sen} y - yz & e^x \cos y - xz & z - xy \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(e^x \cos y - xz)\right)\mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z}(e^x \operatorname{sen} y - yz) - \frac{\partial}{\partial x}(z - xy)\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - xz) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \operatorname{sen} y - yz)\right)\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, según el teorema 3.5, $\mathbf{F}$ es conservativo.

Cualquier potencial escalar $f(x, y, z)$ para $\mathbf{F}$ debe satisfacer

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y - yz \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y - xz\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = z - xy \end{cases} \tag{5}$$

Al integrar $\partial f/\partial x$ con respecto de x, encontramos que

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx$$

$$= \int (e^x \operatorname{sen} y - yz)\,dx$$

$$= e^x \operatorname{sen} y - xyz + g(y, z), \tag{6}$$

donde $g(y, z)$ puede ser cualquier función de y y de z. Al diferenciar la ecuación (6) con respecto de y y compararla con la segunda ecuación en (5), vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y - xz + \frac{\partial g}{\partial y} = e^x \cos y - xz.$$

Entonces, $\partial g/\partial y = 0$, por lo que g debe ser independiente de y; es decir, $g(y, z) = h(z)$, que es función solo de z. De manera que

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y - xyz + h(z). \tag{7}$$

Por último, diferenciamos la ecuación (7) con respecto de z y comparamos con la tercera ecuación de (5):

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy + h'(z) = z - xy.$$

Por lo tanto, $h'(z) = z$, por lo que $h(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$, donde C es una constante arbitraria. Así, un potencial escalar para el campo vectorial original $\mathbf{F}$ es dado por

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y - xyz + \tfrac{1}{2}z^2 + C.$$

◆

Apéndice. Demostración del teorema 3.3

Recuerde que ya hemos demostrado que si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un campo gradiente, entonces $\mathbf{F}$ tiene integrales de línea independientes de la trayectoria. De modo que solo necesitamos establecer lo opuesto. Haremos esto explícitamente en el caso en que $\mathbf{F}$ está definida sobre un subconjunto R (conectado) de $\mathbf{R}^3$, aunque nuestra demostración solo requiere modificar la notación para el planteamiento en n dimensiones.

Supongamos que $\mathbf{F}$ tiene integrales de línea independientes de la trayectoria, Entonces podemos escribir sin ambigüedad $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para denotar la integral de línea vectorial de $\mathbf{F}$ del punto A al punto B a lo largo de cualquier trayectoria cuya imagen esté en R. En lo que sigue consideraremos que $A(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo en R, y que $B(x, y, z)$ es un "punto variable". Después definimos

$$f(B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

y demostraremos que f es un potencial escalar para $\mathbf{F}$.

Se escribe $\mathbf{F}$ explícitamente como

$$\mathbf{F} = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Entonces, necesitamos comprobar que las componentes de ∇f coinciden con los de $\mathbf{F}$; es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y, z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P(x, y, z).$$

En realidad solo comprobaremos la primera de estas ecuaciones; las otras pueden verificarse en forma similar.

En el punto B tenemos, por la definición de la derivada parcial, que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(B') - f(B)}{h}, \tag{8}$$

donde B' denota el punto $(x + h, y, z)$. Observe que $B' \to B$ cuando $h \to 0$. El numerador del cociente de la diferencia en la ecuación (8) es

$$f(B') - f(B) = \int_A^{B'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^{B'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{9}$$

Si h es suficientemente pequeña, podemos evaluar la integral de línea en la ecuación (9) utilizando la trayectoria directa entre B y B' (consulte la figura 6.40). Explícitamente, esta trayectoria es

$$\mathbf{x}(t) = (x + th, y, z), \quad 0 \le t \le 1.$$

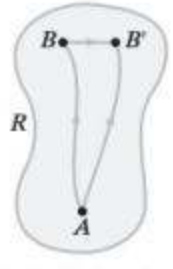


Figura 6.40 Si B' está suficientemente cerca de B, entonces la trayectoria en línea recta de B a B' quedará dentro de R.

Entonces,

$$\int_B^{B'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{F}(x+th, y, z)\cdot(h, 0, 0)\,dt = \int_0^1 hM(x+th, y, z)\,dt.$$

Como t está entre 0 y 1, $|th| < |h|$. Por la continuidad de $\mathbf{F}$ y, por lo tanto, de M, tenemos que para $h \approx 0$,

$$M(x+th, y, z) \approx M(x, y, z).$$

Esta aproximación mejora cuando $h \to 0$. Entonces,

$$f(B') - f(B) = \int_B^{B'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \approx \int_0^1 hM(x, y, z)\,dt = hM(x, y, z).$$

Al usar este resultado en la ecuación (8) se observa que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[hM(x, y, z)] = M(x, y, z),$$

como se buscaba. ◆

6.3 Ejercicios

1. Considere la integral de línea $\int_C z^2\,dx + 2y\,dy + xz\,dz$.

a) Evalúe esta integral, donde C es el segmento de recta de (0, 0) a (1, 1, 1).

b) Evalúe esta integral, donde C es la trayectoria de (0, 0, 0) a (1, 1, 1) parametrizada por $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$.

c) ¿Es conservativo el campo vectorial $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$? Justifique su respuesta.

2. Sea $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$.

a) Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde C es la trayectoria parametrizada por $\mathbf{x}(t) = (t^2, t^3, t^5)$, $0 \le t \le 1$.

b) Determine $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde C es la trayectoria en línea recta de (0, 0, 0) a (1, 0, 0), seguida por la trayectoria en línea recta de (1, 0, 0) a (1, 1, 1).

c) ¿$\mathbf{F}$ tiene integrales de línea independientes de la trayectoria? Explique su respuesta.

En los ejercicios 3 a 17 determine si el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ *es conservativo. Si lo es, encuentre una función potencial escalar para* $\mathbf{F}$.

3. $\mathbf{F} = e^{x+y}\,\mathbf{i} + e^{xy}\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F} = 2x\,\text{sen}\,y\,\mathbf{i} + x^2\cos y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F} = \left(3x^2\cos y + \dfrac{y}{1+x^2y^2}\right)\mathbf{i} + \left(x^3\,\text{sen}\,y + \dfrac{x}{1+x^2y^2}\right)\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F} = \dfrac{xy^2}{(1+x^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{x^2y}{1+x^2}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F} = (e^{-y} - y\,\text{sen}\,xy)\mathbf{i} - (xe^{-y} + x\,\text{sen}\,xy)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F} = (6xy^2 + 2y^3)\mathbf{i} + (6x^2y - xy)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F} = (6xy^2 - 3x^2)\mathbf{i} + (y^2 + 6x^2y)\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F} = (xyz^3 + xy - z^2)\mathbf{i} + (2x^2z^3 - y^2 + 2yz)\mathbf{j} + (6x^2y - y^2z)\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F} = (4xyz^3 - 2xy)\mathbf{i} + (2x^2z^3 - x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (6x^2yz^2 + y^2)\mathbf{k}$

12. $\mathbf{F} = (2xz - y^2 + yze^{xyz})\mathbf{i} - (2xy + xze^{xyz})\mathbf{j} + (x^2 + xye^{xyz})\mathbf{k}$

13. $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (z\cos yz + x)\mathbf{j} + (y\cos yz)\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F} = e^x\,\text{sen}\,y\,\mathbf{i} + e^x\cos y\,\mathbf{j} + (3z^2 + 2)\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F} = 3x^2\,\mathbf{i} + \dfrac{z^2}{y}\mathbf{j} + 2z\ln y\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F} = (e^{-yz} - yze^{xyz})\mathbf{i} + xz(e^{-yz} + e^{xyz})\mathbf{j} + xy(e^{-yz} - e^{xyz})\mathbf{k}$

18. De los dos campos vectoriales

$$\mathbf{F} = xy^2z^3\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j} + 3x^2y^2z^2\,\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{G} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k},$$

uno es conservativo y el otro no. Determine cuál es cuál y encuentre una función potencial escalar para el campo conservativo.

19. *a)* Sea f una función de clase C^1 definida sobre un dominio conectado en $\mathbf{R}^n$. Demuestre que si el gradiente de f desaparece en todo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en su dominio, entonces f es constante.

b) Suponga que **F** es un campo vectorial conservativo definido sobre un subconjunto conectado de $\mathbf{R}^n$. Demuestre que si tanto g como h son funciones potenciales de clase C^1 para **F**, entonces g y h deben diferir en una constante.

20. Encuentre todas las funciones $M(x, y)$ tales que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = M(x, y)\,\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} y - y \cos x)\,\mathbf{j}$$

sea conservativo.

21. Encuentre todas las funciones $N(x, y)$ tales que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (ye^{2x} + 3x^2e^y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$$

sea conservativo.

22. Sea $\mathbf{G}(x, y) = (xe^x + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Encuentre todas las funciones $g(x)$, tales que el campo vectorial $\mathbf{F} = g(x)\,\mathbf{G}$ sea conservativo en todo $\mathbf{R}^2$.

23. Encuentre todas las funciones $N(x, y, z)$ tales que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (x^3y - 3x^2z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + (2yz - x^3)\,\mathbf{k}$$

sea conservativo.

24. ¿Para qué valores de las constantes a y b será conservativo el campo vectorial siguiente?

$$\mathbf{F} = (3x^2 + 3y^2z \operatorname{sen} xz)\,\mathbf{i} + (ay \cos xz + bz)\,\mathbf{j} + (3xy^2 \operatorname{sen} xz + 5y)\,\mathbf{k}$$

25. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + \cos y \operatorname{sen} z\mathbf{j} + \operatorname{sen} y \cos z\mathbf{k}$.

a) Demuestre que **F** es conservativo y encuentre una función potencial escalar f para **F**.

b) Evalúe $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}$: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 1, e^t, e^{2t})$.

Demuestre que las integrales de línea de los ejercicios 26 a 28 son independientes de la trayectoria y evalúelas a lo largo de la curva orientada que se da, y también por medio del teorema 3.3.

26. $\displaystyle\int_C (3x - 5y)\,dx + (7y - 5x)\,dy$; C es el segmento de recta de (1, 3) a (5, 2).

27. $\displaystyle\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; C es el arco semicircular de $x^2 + y^2 = 4$, de (2, 0) a (−2, 0).

28. $\displaystyle\int_C (2y - 3z)dx + (2x + z)dy + (y - 3x)dz$; C es el segmento de recta del punto (0, 0, 0) a (0, 1, 1), seguido del segmento de recta del punto (0, 1, 1) a (1, 2, 3).

En los ejercicios 29 a 32 encuentre el trabajo realizado por el campo vectorial dado **F** *al desplazarse una partícula del punto A al punto B y cuyas coordenadas son las que se indican.*

29. $\mathbf{F} = (3x^2y - y^2)\mathbf{i} + (x^3 - 2xy)\mathbf{j}$; $A(0, 0)$, $B(2, 1)$

30. $\mathbf{F} = 3\sqrt{x}y\,\mathbf{i} + 2x^{3/2}\,\mathbf{j}$; $A(1, 2)$, $B(9, 1)$

31. $\mathbf{F} = (2xyz - y^2z^3)\mathbf{i} + (x^2z - 2xyz^3)\mathbf{j} + (x^2y - 3xy^2z^2)\mathbf{k}$; $A(1, 1, 1)$, $B(6, 4, 2)$

32. $\mathbf{F} = 2xy \cos z\,\mathbf{i} + x^2 \cos z\,\mathbf{j} - x^2y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$; $A(1, 1, \pi/2)$, $B(2, 3, 0)$

33. *a*) Determine dónde es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{x + xy^2}{y^2}\,\mathbf{i} - \frac{x^2 + 1}{y^3}\,\mathbf{j}$$

b) Determine un potencial escalar para **F**.

c) Calcule el trabajo realizado por **F** cuando se desplaza una partícula a lo largo de la curva parabólica $y = 1 + x - x^2$, de (0, 1) a (1, 1).

34. Sean f, g y h funciones de clase C^1 de una sola variable.

a) Demuestre que $\mathbf{F} = (f(x) + y + z)\mathbf{i} + (x + g(y) + z)\mathbf{j} + (x + y + h(z))\mathbf{k}$ es conservativo.

b) Determine un potencial escalar para **F** (su respuesta involucrará integrales de f, g y h).

c) Encuentre $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde C es cualquier trayectoria de (x_0, y_0, z_0) a (x_1, y_1, z_1).

35. Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2x + z)\cos(x^2 + xz)\,\mathbf{i} - (z + 1)\operatorname{sen}(y + yz)\,\mathbf{j} + (x \cos(x^2 + xz) - y \operatorname{sen}(y + yz))\,\mathbf{k}.$$

a) Determine si **F** es conservativo.

b) Si $\mathbf{x}(t) = \left(t^3, t^2, \pi t - \operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{2}\right)$, $0 \le t \le 1$, evalúe $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

36. Considere el campo vectorial

$$\mathbf{G} = (2x + z)\cos(x^2 + xz)\,\mathbf{i} + (x - (z + 1)\operatorname{sen}(y + yz))\,\mathbf{j} + (x \cos(x^2 + xz) - y \operatorname{sen}(y + yz))\,\mathbf{k}.$$

a) En el ejemplo 35, ¿en qué es diferente **G** del campo vectorial **F**? ¿Es **G** conservativo?

b) Si $\mathbf{x}(t) = \left(t^3, t^2, \pi t - \operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{2}\right)$, $0 \le t \le 1$, evalúe $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$.

37. Sea **F** el campo de fuerza gravitacional de una masa M sobre una partícula de masa m:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}).$$

(Este es el campo de fuerza del ejemplo 3 en la sección 3.3). Dado que G, M y m son constantes, demuestre que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando se desplaza una partícula de masa m de $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, depende solo de $\|\mathbf{x}_0\|$ y de $\|\mathbf{x}_1\|$.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 6

1. Si C es la parábola $y = 4 - x^2$, con $-2 \le x \le 2$, entonces $\int_C y \operatorname{sen} x \, ds = 0$.
2. Si $\mathbf{F} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y C es la línea recta del origen a $(2, 2, 2)$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\sqrt{3}$.
3. Si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y C es una línea recta de $(3, 3, 3)$ al origen, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es positiva.
4. Suponga que $f(x) > 0$ para toda x. Sea $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i}$. Si C es el segmento de recta horizontal de $(1, 1)$ a $(2, 1)$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} > 0$.
5. Suponga que $f(x) > 0$ para toda x. Sea $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i}$. Si C es el segmento de recta vertical de $(0, 0)$ a $(0, 3)$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} > 0$.
6. Si $\mathbf{x}$ es una trayectoria de velocidad unitaria, entonces $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) ds$, donde $\mathbf{v}$ denota la velocidad de la trayectoria.
7. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son dos parametrizaciones uno a uno de la misma curva y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo, entonces $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.
8. Si un campo vectorial $\mathbf{F}$ que no desaparece y es continuo, es tangente en todo lugar a una curva suave C, entonces $\mathbf{F}$ no hace trabajo a lo largo de la curva.
9. Si un campo vectorial $\mathbf{F}$ que no se desvanece y es continuo, es normal en todo lugar a una curva C suave, entonces $\mathbf{F}$ no hace trabajo a lo largo de la curva.
10. Si la curva C es el conjunto de nivel a la altura c de una función $f(x, y)$, entonces $\int_C f(x, y) \, ds$ es c veces la longitud de C.
11. Si $f(x, y, z)$ es una función continua y $\int_C f(x, y, z) \, ds = 0$ para todas las curvas C en $\mathbf{R}^3$, entonces $f(x, y, z) = 0$ para toda $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
12. Si una curva cerrada C es un conjunto de nivel de una función $f(x, y)$ de clase C^1 y $\nabla f \neq \mathbf{0}$, entonces el flujo de ∇f a través de C siempre es igual a cero.
13. Si una curva cerrada C es un conjunto de nivel de una función $f(x, y)$ de clase C^1 y $\nabla f \neq \mathbf{0}$, entonces el flujo de ∇f a lo largo de C siempre es igual a cero.
14. Si un campo vectorial $\mathbf{F}$ tiene magnitud constante de 3 y forma un ángulo constante con una curva C, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C es 3 veces la longitud de C.
15. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo tangente en todo lugar a una curva C orientada a C^1, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \|\mathbf{F}\| \, ds$.
16. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial constante en $\mathbf{R}^2$, entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, donde C es una curva simple y cerrada.
17. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^1 incompresible (es decir, sin divergencia) en $\mathbf{R}^2$ y C es una curva simple y cerrada, entonces la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C siempre es igual a cero.
18. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^1 incompresible en $\mathbf{R}^2$, entonces el flujo a través de cualquier curva C simple y cerrada en $\mathbf{R}^2$ siempre es igual a cero.
19. Si C es una curva simple, cerrada, en $\mathbf{R}^2$, entonces $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$.
20. Si C es una curva cerrada y simple en $\mathbf{R}^2$, y f es de clase C^1, entonces $\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = 0$.
21. $\mathbf{F} = (e^x \cos y + 3)\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y \, \mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en $\mathbf{R}^2$.
22. Si f y g son funciones de clase C^1 definidas en una región D en $\mathbf{R}^2$, entonces
$$\oint_{\partial D} f \nabla g \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial D} g \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$
23. Si C es una curva cerrada en $\mathbf{R}^3$ tal que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.
24. $\oint_C x \, dx + y \, dy + z \, dz = 0$ para todas las curvas C simples y cerradas en $\mathbf{R}^3$.
25. $\oint_C e^x(\cos y \operatorname{sen} z \, dx + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z \, dy + \cos y \cos z) \, dz = 0$ para todas las curvas C simples y cerradas en $\mathbf{R}^3$.
26. Si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.
27. Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones C^1 con dominio $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces $\oint_C M \, dx + N \, dy = 0$ para cualquier curva C cerrada en $\mathbf{R}^2$.
28. Sean $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ y $P(x, y, z)$ funciones C^1 con dominio $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, $\partial M/\partial z = \partial P/\partial x$ y $\partial N/\partial z = \partial P/\partial y$, entonces $\oint_C M \, dx + N \, dy + P \, dz = 0$ para cualquier curva C cerrada en $\mathbf{R}^3$.
29. Si $\mathbf{F}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, entonces hay máximo una función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.
30. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial diferenciable y $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

Ejercicios varios para el capítulo 6

Sea $C \subseteq \mathbf{R}^n$ una curva C^1 parte por parte y $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función continua cuyo dominio X incluye a C. Entonces definimos la cantidad

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\int_C f\,ds}{\int_C ds} = \frac{\int_C f\,ds}{\text{long de } C}$$

para que sea el ***valor promedio*** *de f a lo largo de C. Los ejercicios 1 a 5 tienen que ver con el concepto de valor promedio a lo largo de una curva.*

1. Explique por qué tiene sentido usar la fórmula integral anterior para representar el valor promedio (una explicación cuidadosa involucra el empleo de sumas de Riemann).

2. Suponga que a un alambre delgado se le da forma de curva helicoidal parametrizada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad 0 \le t \le 3\pi.$$

Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 1$ representa la temperatura en puntos a lo largo del alambre, encuentre la temperatura promedio.

3. Encuentre la coordenada y promedio de los puntos en el semicírculo superior $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

4. Calcule la coordenada z promedio de los puntos sobre la línea curva quebrada que se ilustra en la figura 6.41.

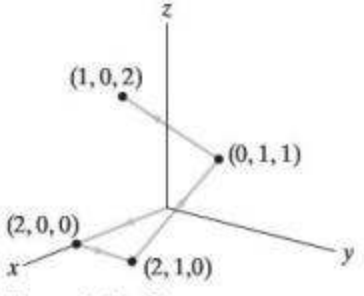


Figura 6.41 Línea curva quebrada del ejercicio 4.

5. Encuentre el valor promedio de $f(x, y, z) = z^2 + xe^y$ sobre la curva C obtenida por la intersección del cilindro (elíptico) $x^2/5 + y^2 = 1$ mediante el plano $z = 2y$.

6. Se dobla un alambre de metal dándole la forma del semicírculo $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$ ubicado en el plano xy. Suponga que la densidad de masa en cada punto (x, y, z) del alambre es $\delta(x, y, z) = 3 - y$.

a) Encuentre la masa total del alambre.

b) Utilizando fórmulas análogas a las de la sección 5.6 definimos los (primeros) momentos del alambre como

$$\int_C x\delta(x, y, z)\,ds, \qquad \int_C y\delta(x, y, z)\,ds,$$

$$\int_C z\delta(x, y, z)\,ds.$$

Utilizando estas definiciones encuentre las coordenadas del centro de masa del alambre.

7. Suponga que se dobla un alambre en forma de un cuarto de círculo de radio a. Encuentre el centro de masa del alambre si la densidad en puntos sobre él varía como el cuadrado de la distancia desde su centro.

8. *a*) Determine el centroide del alambre helicoidal $x = 3 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$, $z = 4t$, donde $0 \le t \le 4\pi$. (Sugerencia: no es necesario hacer cálculos).

b) Calcule el centro de masa del mismo alambre si la densidad en cada uno de sus puntos es igual al cuadrado de la distancia del punto al origen.

Si un alambre delgado se dobla en la forma de una curva C en el plano xy, y tiene una densidad de masa en cada punto a lo largo de la curva dada por una función continua $\delta(x, y)$, entonces definimos los ***momentos de inercia*** *de C en torno a los ejes x y y, respectivamente, mediante*

$$I_x = \int_C y^2\delta(x, y)\,ds, \qquad I_y = \int_C x^2\delta(x, y)\,ds,$$

y los correspondientes ***radios de giro*** *de C como*

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}, \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}},$$

donde M denota la masa total $M = \int_C \delta(x, y)\,ds$ del alambre. Además, el ***momento de inercia*** *de C con respecto del origen (o, de manera equivalente, con respecto del eje z, si pensamos en el plano xy como incrustado en $\mathbf{R}^3$) es*

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta(x, y)\,ds,$$

con el radio de giro correspondiente $r_z = \sqrt{I_z/M}$. Los ejercicios 9 a 13 tienen que ver con los momentos de inercia de curvas.

9. *a*) Considere de nuevo el alambre del ejercicio 6. Encuentre su momento de inercia con respecto del eje y.

b) ¿Cuál es el radio de giro r_z para el alambre con respecto del eje z?

10. Determine el momento de inercia I_x y el radio de giro r_x con respecto del eje x de un alambre recto entre $(-2, 1)$ a $(2, 3)$, el cual tiene una densidad que varía a lo largo del alambre cuando $\delta(x, y) = y$.

11. Encuentre el momento de inercia I_x y el radio de giro r_x con respecto del eje x de un alambre con forma de la curva $y = x^2$, entre $(0, 0)$ y $(2, 4)$ y cuya densidad varía cuando $\delta(x, y) = x$.

12. *a*) Suponga que un alambre metálico delgado se dobla en forma de curva C en $\mathbf{R}^3$, y tiene densidad

de masa en cada punto (x, y, z) a lo largo de la curva dada por una función continua $\delta(x, y, z)$. Dé fórmulas generales análogas a las de la sección 5.6 para obtener los momentos de inercia del alambre con respecto de los tres ejes coordenados.

b) Encuentre los momentos de inercia con respecto de los ejes coordenados de un alambre homogéneo, es decir, con densidad constante, en forma de la hélice $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $z = 4t$, donde $0 \le t \le 4\pi$. ¿Cuál es el radio de giro?

13. Calcule el momento de inercia I_z con respecto del eje z de un alambre en forma del segmento de recta entre $(-1, 1, 2)$ y $(2, 2, 3)$ si la densidad a lo largo del segmento varía cuando $\delta(x, y, z) = 1 + z^2$. ¿Cuál es el valor de r_z?

14. Sea $r = f(\theta)$ la ecuación polar de una curva en el plano.

a) Use integrales de línea escalares para demostrar que la longitud de arco de la curva entre $(f(a), a)$ y $(f(b), b)$ es

$$\int_a^b \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta.$$

b) Dibuje la curva $r = \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ y encuentre su longitud.

15. *a*) Dé una fórmula en coordenadas polares para la integral de línea escalar de una función $g(x, y)$ a lo largo de la curva $r = f(\theta)$, $a \le \theta \le b$.

b) Calcule $\int_C g\, ds$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ y C es el segmento de la espiral $r = e^{3\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Sea C una curva C^1 por partes, simple, en $\mathbf{R}^3$. La ***curvatura total K*** *de C es*

$$K = \int_C \kappa\, ds,$$

donde κ denota la curvatura de C (consulte la sección 3.2 para recordar el concepto de curvatura). Los ejercicios 16 a 20 involucran el concepto de curvatura total.

16. Demuestre que si C es una curva simple de clase C^1 parametrizada por $\mathbf{x}(t)$, $a \le t \le b$, entonces

$$K = \int_a^b \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^2}\, dt.$$

(Recuerde el lector que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ denotan la velocidad y aceleración, respectivamente, de la trayectoria $\mathbf{x}$).

17. Encuentre la curvatura total de la hélice

$$\mathbf{x}(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 4t), \qquad 0 \le t \le 10\pi.$$

18. Determine la curvatura total de la parábola $y = Ax^2$, $A > 0$, para $a \le x \le b$.

19. El **teorema de Fenchel** establece que si C es una curva C^1 simple y cerrada en $\mathbf{R}^3$, entonces $K \ge 2\pi$ y, además, $K = 2\pi$ si y solo si C es una curva plana convexa (una curva C cerrada y simple es **convexa** si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de C está por completo en la región encerrada por C). Verifique el teorema de Fenchel para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

20. Sea C una curva C^1 simple y cerrada en $\mathbf{R}^3$. Suponga que la curvatura κ de C está acotada, es decir, $0 \le \kappa \le 1/a$ para cierta $a > 0$.

a) Demuestre que si L denota la longitud de C, entonces $L \ge 2\pi a$.

b) ¿Qué puede comentar el lector acerca de C, si $L = 2\pi a$?

21. Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{F} = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$ sobre una partícula que se desplaza por la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (t^3, -t^2, t)$, donde $0 \le t \le 1$.

22. Use el teorema de Green para encontrar el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2y\,\mathbf{i} + (x + y)y\,\mathbf{j}$ al desplazar una partícula desde el origen a lo largo del eje y al punto $(0, 1)$, después a lo largo del segmento de recta de $(0, 1)$ a $(1, 0)$, y luego de $(1, 0)$ de regreso al origen a lo largo del eje x. (**Advertencia:** tenga cuidado al hacerlo).

23. Utilice el teorema de Green para recuperar la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\, d\theta$$

para el área de A de la región D descrita en coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le f(\theta), a \le \theta \le b\}.$$

24. Sea C una curva C^1 cerrada y simple, por partes, en $\mathbf{R}^2$. Demuestre que

$$\oint_C f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0,$$

donde f y g son funciones cualesquiera de una variable de clase C^1.

25. Sea D una región en $\mathbf{R}^2$ cuya frontera ∂D consta de un número grande y finito de curvas C^1 por partes, simples y cerradas, orientada de modo que D está a la izquierda mientras se desplaza a lo largo de cualquier segmento de ∂D. Si $(\bar{x}, \bar{y})$ denota las coordenadas del centroide de D, demuestre que

$$\bar{x} = \frac{1}{2 \cdot \text{área de } D}\oint_{\partial D} x^2\, dy$$

y

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{área de } D}\oint_{\partial D} xy\, dy.$$

También demuestre que

$$\bar{x} = -\frac{1}{\text{área de } D}\oint_{\partial D} xy\, dx$$

y

$$\bar{y} = -\frac{1}{2 \cdot \text{área de } D}\oint_{\partial D} y^2\, dx.$$

26. Use los resultados del ejercicio 25 para encontrar el centroide de la región triangular con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

27. Use los resultados del ejercicio 25 para encontrar el centroide de la región en $\mathbf{R}^2$ que está dentro del círculo de radio 6 con centro en el origen y fuera de los dos círculos de radio 1 con centro en $(4, 0)$ y $(-2, 2)$, respectivamente.

28. Sea C una curva C^1 por partes, cerrada, simple y orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj, que encierra una región D en el plano. Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario hacia fuera normal a D. Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones de clase C^2 sobre D, establezca la **primera identidad de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dA = \oint_C f \nabla g \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

29. Utilizando las hipótesis del ejercicio 28 demuestre la **segunda identidad de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

*Se dice que una función $g(x, y)$ es **armónica** en un punto (x_0, y_0) si g es de clase C^2 y satisface la ecuación de Laplace:*

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

en cierta vecindad de (x_0, y_0). Decimos que g es armónica en una región cerrada $D \subseteq \mathbf{R}^2$ si es armónica en todos los puntos interiores de D, es decir, no necesariamente a lo largo de ∂D. Los ejercicios 30 a 33 se refieren a ciertos resultados elementales acerca de las funciones armónicas en $\mathbf{R}^2$.

30. Suponga que D es compacta, es decir, cerrada y acotada, y que ∂D es C^1 por partes y orientada según el teorema de Green. Sea que $\mathbf{n}$ denote el vector unitario hacia fuera normal a ∂D, y sea que $\partial g/\partial n$ denote $\nabla g \cdot \mathbf{n}$ (el término $\partial g/\partial n$ se llama **derivada normal** de g). Use la primera identidad de Green (véase el ejercicio 28) con $f(x, y) = 1$ para demostrar que si g es armónica en D, entonces

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds = 0.$$

31. Sea f armónica en una región D que satisface las suposiciones del ejercicio 30. Demuestre que

$$\iint_D \nabla f \cdot \nabla f\, dA = \oint_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial n}\, ds.$$

32. Suponga que $f(x, y) = 0$ para toda $(x, y) \in \partial D$. Use el ejercicio 31 para demostrar que $f(x, y) = 0$ a través de toda D. (Sugerencia: considere el signo de $\nabla f \cdot \nabla f$).

33. Sea D una región que satisface las suposiciones del ejercicio 30. Use el resultado del ejercicio 31 para demostrar que si f_1 y f_2 son armónicas en D, y $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ en ∂D, entonces, en efecto, $f_1 = f_2$ en *toda* la D. Así, vemos que las funciones armónicas son determinadas por sus valores en la frontera de una región. (Sugerencia: considere $f_1 - f_2$).

34. Llamamos al campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^3$ **radialmente simétrico** si puede escribirse en coordenadas esféricas en la forma $\mathbf{F} = f(\rho)\mathbf{e}_\rho$, donde $\mathbf{e}_\rho$ es el vector unitario que apunta en la dirección de la coordenada ρ creciente (véase la sección 1.7).

a) Dé un ejemplo de campo vectorial radialmente simétrico (no trivial), escrito tanto en coordenadas cartesianas como en esféricas.

b) Demuestre que si f es de clase C^1 para toda $\rho \geq 0$, entonces el campo vectorial radialmente simétrico $\mathbf{F} = f(\rho)\mathbf{e}_\rho$ es conservativo.

35. Sea $\mathbf{F} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

a) Verifique el teorema de Green sobre la región anular

$$D = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(Véase la figura 6.42).

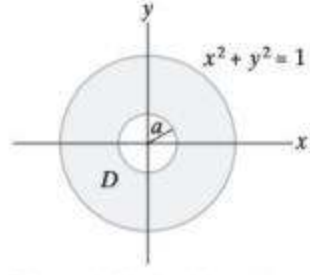


Figura 6.42 Región anular del ejercicio 35(a).

b) Ahora sea D el disco unitario. ¿La fórmula del teorema de Green se cumple para D? Si su respuesta es afirmativa, ¿puede el lector explicar por qué?

c) Suponga que C es cualquier curva simple, cerrada, que está fuera del círculo

$$C_a = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2\}.$$

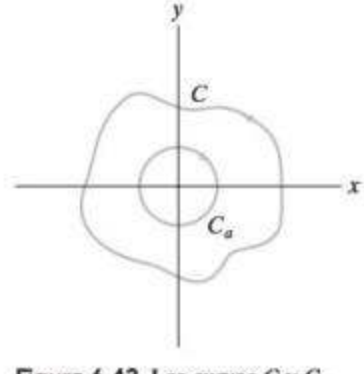


Figura 6.43 Las curvas C y C_a del ejercicio 35(c).

(Véase la figura 6.43). Argumente que si C está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

36. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$.

a) Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde C es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.

c) ¿Es $\mathbf{F}$ conservativo?

d) ¿Cómo se reconcilian los incisos *a*) y *b*) con el teorema 3.5?

37. *a*) Sea $\mathbf{F} = e^y\,\mathbf{i} + x^4\,\mathbf{j}$. Calcule el flujo $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$, de $\mathbf{F}$ a través de la frontera del rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 5]$.

b) Sean f y g de clase C^1 y sea $\mathbf{F} = f(y)\mathbf{i} + g(x)\mathbf{j}$. Demuestre que el flujo $\mathbf{F}$ a través de cualquier curva C^1 cerrada, simple, por partes, es igual a cero.

38. Use la segunda ley de Newton del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que el trabajo realizado por un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa m a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}(t)$ de $\mathbf{x}(a)$ a $\mathbf{x}(b)$ es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. En otras palabras,

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}m(v(b))^2 - \tfrac{1}{2}m(v(a))^2,$$

donde $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$, la velocidad en el momento t (use la regla del producto para los productos punto de funciones de variable vectorial).

39. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial conservativo sobre $\mathbf{R}^3$ con $\mathbf{F} = -\nabla V$. Si una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}$, recuerde que su **energía potencial** en el momento t se define como $V(\mathbf{x}(t))$. Use integrales de línea para probar la **ley de conservación de la energía**: cuando una partícula de masa m se desplaza entre dos puntos A y B cualesquiera en un campo de fuerza conservativo, la suma de las energías potencial y cinética de la partícula permanece constante (use el ejercicio 38 y el teorema 3.3). El empleo de integrales de línea proporciona una demostración alternativa del teorema 4.2 en la sección 4.4.

7 Integrales de superficie y análisis vectorial

7.1 Superficies parametrizadas

7.2 Integrales de superficie

7.3 Teoremas de Stokes y de Gauss

7.4 Más sobre análisis vectorial; ecuaciones de Maxwell

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 7

Ejercicios varios para el capítulo 7

7.1 Superficies parametrizadas

Introducción

Las superficies en $\mathbf{R}^3$ pueden presentarse en forma analítica en diferentes formas. Las siguientes son dos descripciones conocidas:

1. como gráfica de una función de dos variables, es decir, como puntos (x, y, z) en $\mathbf{R}^3$ que satisfacen a $z = f(x, y)$ (por ejemplo, $z = x^2 + 4y^2$);
2. como un conjunto de nivel de una función de tres variables, es decir, como puntos (x, y, z) tales que $F(x, y, z) = c$ para cierta función F y constante c (por ejemplo, $x^2y - z^2y^5 + x = 1$).

Las dos descripciones son problemáticas. Como se expuso en la sección 2.1, muchas superficies comunes no pueden ser descritas como gráficas de funciones de dos variables. Recuerde, por ejemplo, que la esfera completa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no es la gráfica de una función de dos variables. Por lo tanto, la descripción 1 no es suficientemente general.

También hay problemas con la descripción 2. No todas las ecuaciones de la forma $F(x, y, z) = c$ tienen soluciones que describan superficies. En realidad, aunque el conjunto de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a la altura 1 es una esfera, a la altura 0 es un solo punto, y a la altura -1 está completamente vacío. Además, cuando n es mayor que 3 es algo difícil describir superficies (por ejemplo, objetos de dos dimensiones) en $\mathbf{R}^n$ utilizando conjuntos de nivel. Para evitar los problemas que acabamos de mencionar es deseable adoptar otro enfoque que permita presentar las superficies en forma analítica, hacer mucho más énfasis en la naturaleza bidimensional de una superficie y facilitar cálculos subsecuentes. Tomando en cuenta lo anterior, establecemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.1 Sea D una región en $\mathbf{R}^2$ que consta de un conjunto conectado y abierto, posiblemente con algunos o todos sus puntos de frontera. Una **superficie parametrizada** en $\mathbf{R}^3$ es una función continua $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ que es uno a uno en D, excepto tal vez a lo largo de ∂D. Hacemos referencia a la imagen $\mathbf{X}(D)$ como la **superficie subyacente** de $\mathbf{X}$ (o la superficie **parametrizada** por $\mathbf{X}$) y la denotamos con S (véase la figura 7.1).

El objetivo de las restricciones establecidas para la región D y el mapa $\mathbf{X}$ de la definición 1.1 es asegurar que D sea un subconjunto bidimensional de $\mathbf{R}^2$ con una imagen en dos dimensiones.

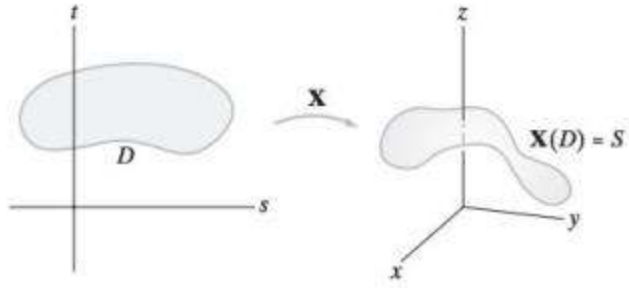


Figura 7.1 Una superficie parametrizada.

Si escribimos las funciones componentes de $\mathbf{X}$, para $(s, t) \in D$,

$$\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

y la superficie subyacente S puede describirse con las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases} \quad (s, t) \in D. \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Considere la superficie parametrizada $\mathbf{X}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ descrita por

$$\mathbf{X}(s, t) = s(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) + 3\mathbf{j}.$$

La imagen de $\mathbf{X}$ que aparece en la figura 7.2 es el plano que contiene al punto (0, 3, 0), determinado por los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ (véase la proposición 5.1 de la sección 1.5). ◆

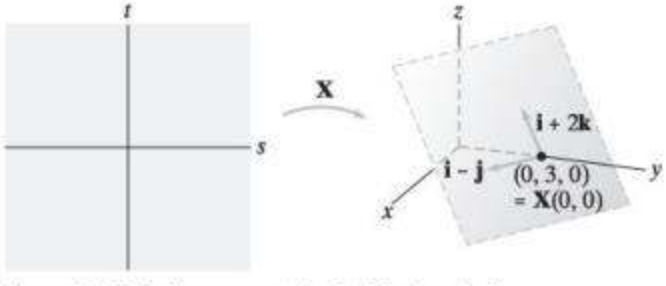


Figura 7.2 El plano parametrizado del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Sea $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ y considere $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$\mathbf{X}(s, t) = (a \cos s \operatorname{sen} t, a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, a \cos t).$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$\begin{cases} x = a \cos s \operatorname{sen} t \\ y = a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \\ z = a \cos t \end{cases} \quad 0 \le s < 2\pi,\ 0 \le t \le \pi.$$

Las ecuaciones paramétricas implican que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, lo que significa que todos los puntos de $S = \mathbf{X}(D)$ están sobre una esfera de radio a con centro en el origen. Las ecuaciones paramétricas son precisamente las conversiones de coordenadas esféricas-rectangulares (véase la sección 1.7) con la constante ρ mantenida constante en a y con s y t en lugar de θ y φ. Entonces, la imagen de $\mathbf{X}$ es en realidad toda la esfera (véase la figura 7.3). ◆

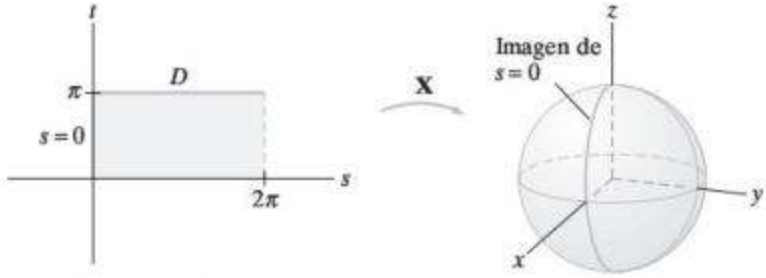


Figura 7.3 Una esfera representada como superficie parametrizada.

EJEMPLO 3 Los puntos de la superficie parametrizada por

$$\begin{cases} x = a\cos s \\ y = a\,\text{sen}\, s \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2\pi$$

satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ y por ello pueden ser vistos como si formaran un cilindro infinito de radio a. La figura 7.4 muestra la manera en que la función $\mathbf{X}(s, t) = (a\cos s, a\,\text{sen}\, s, t)$ mapea la banda infinita $D = \{(s, t) \mid 0 \le s \le 2\pi\}$ hacia el cilindro por medio de "pegar" la recta $s = 0$ a $s = 2\pi$. ◆

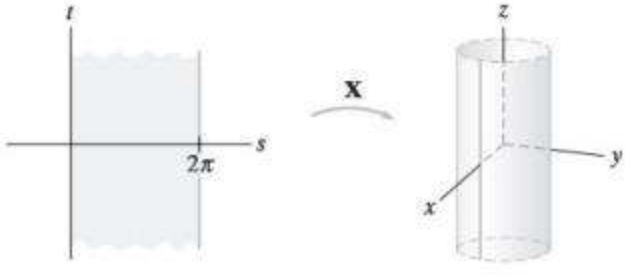


Figura 7.4 El mapa de $\mathbf{X}$ une los bordes de D para formar un cilindro.

EJEMPLO 4 Sea $D \subseteq \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto, tal vez junto con algunos o todos sus puntos de frontera. Si $f: D \to \mathbf{R}$ es una función continua de dos variables escalares, no es difícil parametrizar la gráfica de f: por lo tanto, hacemos que

$$\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3 \quad \text{sea} \quad \mathbf{X}(s, t) = (s, t, f(s, t)).$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = f(s, t) \end{cases} \qquad (s, t) \in D$$

describen los puntos de la gráfica de f (véase la figura 7.5). ◆

Curvas coordenadas, vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie parametrizada por $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$. Si fijamos $t = t_0$ y dejamos que solo varíe s, obtenemos un mapa continuo

$$s \longmapsto \mathbf{X}(s, t_0),$$

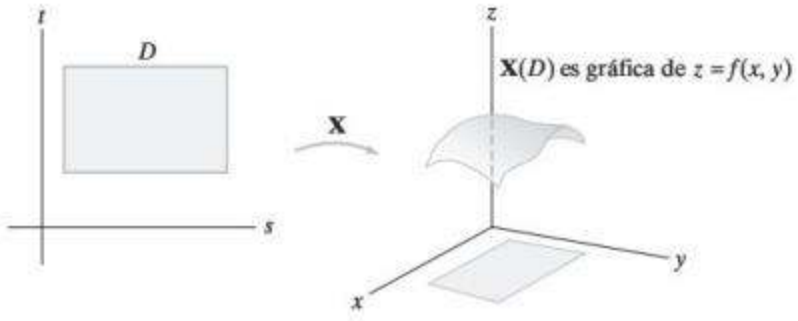


Figura 7.5 Gráfica de $z = f(x, y)$ como una superficie parametrizada.

cuya imagen es una curva que está en S, a la cual llamamos **curva en coordenadas** s en $t = t_0$. De manera similar, fijamos $s = s_0$ y obtenemos un mapa

$$t \longmapsto \mathbf{X}(s_0, t),$$

cuya imagen es la **curva en coordenadas** t en $s = s_0$. La figura 7.6 sugiere el aspecto de las curvas coordenadas.

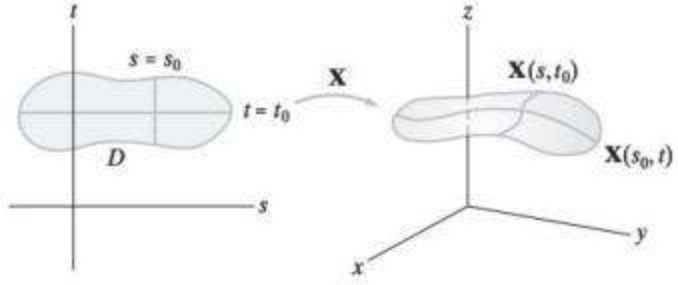


Figura 7.6 Las curvas coordenadas de una superficie parametrizada.

EJEMPLO 5 Los puntos de la superficie parametrizada T definida por

$$\begin{cases} x = (a + b\cos t)\cos s \\ y = (a + b\cos t)\operatorname{sen} s \\ z = b\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le s \le 2\pi, 0 \le t \le 2\pi; \\ a, b \text{ son constantes positivas con } a > b, \end{array}$$

satisfacen la ecuación

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2.$$

La curva en coordenadas s en $t = 0$ es

$$\begin{cases} x = (a + b)\cos s \\ y = (a + b)\operatorname{sen} s \\ z = 0 \end{cases}$$

y es evidente que se trata del círculo de radio $a + b$ que tiene su centro en el origen y está en el plano xy. En general, el lector puede comprobar que la curva en coordenadas s en $t = t_0$ es un círculo de radio $a + b\cos t_0$ (que varía entre $a - b$ y $a + b$) en el plano horizontal $z = b \operatorname{sen} t_0$ (véase la figura 7.7).

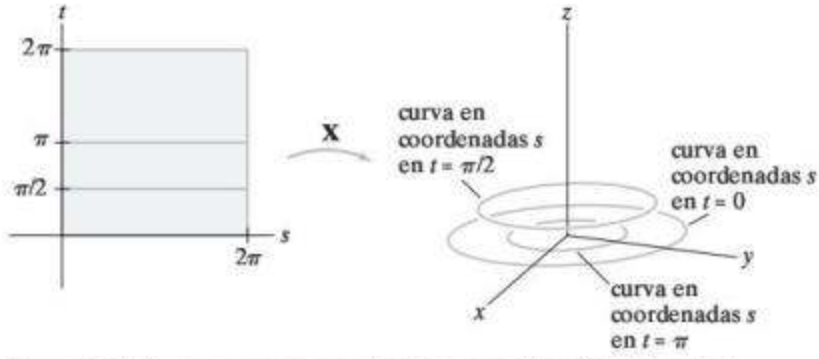


Figura 7.7 Algunas curvas en coordenadas s para el toro T del ejemplo 5.

La curva en coordenadas t en $s = 0$ es

$$\begin{cases} x = a + b\cos t \\ y = 0 \\ z = b\,\text{sen}\,t \end{cases}.$$

La imagen es un círculo de radio b con centro en $(a, 0, 0)$ en el plano xz, es decir, el plano $y = 0$. En $s = s_0$, la curva en coordenadas t es

$$\begin{cases} x = \cos s_0\,(a + b\cos t) \\ y = \text{sen}\,s_0\,(a + b\cos t) \\ z = b\,\text{sen}\,t \end{cases}.$$

A lo largo de esta curva tenemos $y/x = \tan s_0$, una constante. La curva se encuentra en el plano vertical $(\text{sen}\,s_0)x - (\cos s_0)y = 0$. Además, no es difícil ver que la distancia desde cualquier punto sobre esta curva al punto $P(a\cos s_0, a\,\text{sen}\,s_0, 0)$ es igual a b, y la imagen es un círculo de radio b con centro en P. Véanse en la figura 7.8 algunos ejemplos de curvas en coordenadas t.

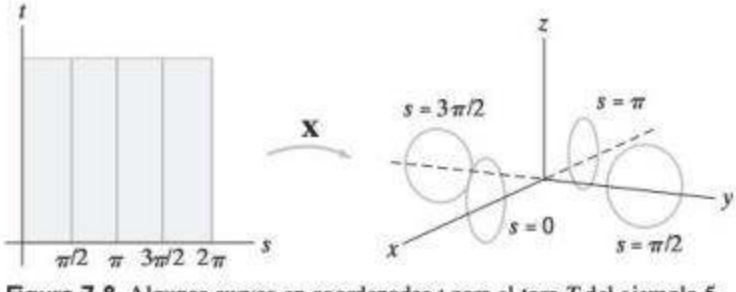


Figura 7.8 Algunas curvas en coordenadas t para el toro T del ejemplo 5.

La superficie T ya mencionada recibe el nombre de **toro** y se trata de la superficie en forma de dona que se ilustra en la figura 7.9. Se genera tanto por la colección de curvas en coordenadas s como por la colección de curvas en coordenadas t. ◆

Suponga que $\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, donde $(s, t) \in D$ es un mapa diferenciable (o C^1), caso en el cual decimos que la superficie parametrizada $S = \mathbf{X}(D)$ también es **diferenciable** (o C^1). Por consiguiente, las curvas coordenadas $\mathbf{X}(s, t_0)$ y $\mathbf{X}(s_0, t)$ tienen vectores tangentes bien definidos en los puntos (s_0, t_0) en D (véase la figura 7.10). Para encontrar el vector tangente $\mathbf{T}_s$, a la curva coordenada en s

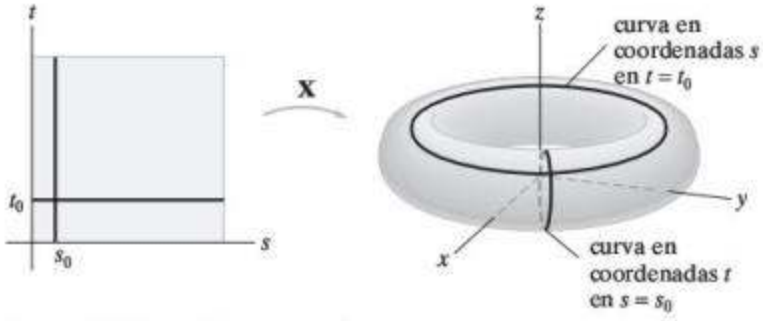


Figura 7.9 El toro T parametrizado

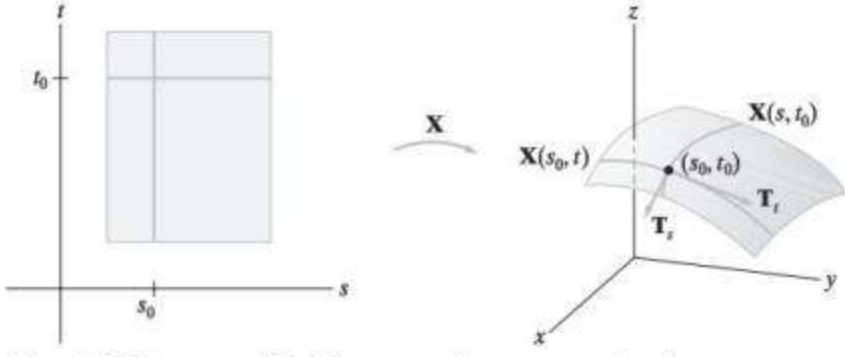


Figura 7.10 Los vectores $\mathbf{T}_s$ y $\mathbf{T}_t$ tangentes a las curvas coordenadas.

$\mathbf{X}(s, t_0)$ en (s_0, t_0), diferenciamos las funciones componente de $\mathbf{X}$ con respecto de s y la evaluamos en (s_0, t_0):

$$\mathbf{T}_s(s_0, t_0) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0)\,\mathbf{k}. \tag{2}$$

De manera similar, el vector $\mathbf{T}_t$ tangente a la curva en coordenadas t $\mathbf{X}(s_0, t)$ en (s_0, t_0) puede calcularse diferenciándolo con respecto de t:

$$\mathbf{T}_t(s_0, t_0) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s_0, t_0) = \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0)\,\mathbf{k}. \tag{3}$$

Como $\mathbf{T}_s$ y $\mathbf{T}_t$ son tangentes a la superficie S en (s_0, t_0), el producto cruz $\mathbf{T}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{T}_t(s_0, t_0)$ será normal a S en (s_0, t_0), siempre que sea distinto de cero.

DEFINICIÓN 1.2 La superficie parametrizada $S = \mathbf{X}(D)$ es **suave** en $\mathbf{X}(s_0, t_0)$ si el mapa $\mathbf{X}$ de clase C^1 en una vecindad de (s_0, t_0) y si el vector

$$\mathbf{N}(s_0, t_0) = \mathbf{T}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{T}_t(s_0, t_0) \neq \mathbf{0}.$$

Si S es suave en todo punto $\mathbf{X}(s_0, t_0) \in S$, entonces nos referimos a S simplemente como una superficie parametrizada **suave**. Si S es una superficie parametrizada suave, llamamos al vector (distinto de cero) $\mathbf{N} = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t$ el **vector normal estándar** que surge de la parametrización $\mathbf{X}$.

EJEMPLO 6 Afirmamos que el toro T del ejemplo 5 es suave. Recuerde el lector que T es dado como la imagen del mapa

$$\mathbf{X}: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3,$$

$$\mathbf{X}(s, t) = ((a + b \cos t) \cos s, (a + b \cos t) \operatorname{sen} s, b \operatorname{sen} t),$$

donde $a > b > 0$. Entonces, de las fórmulas (2) y (3) tenemos

$$\mathbf{T}_s(s_0, t_0) = -(a + b \cos t_0) \operatorname{sen} s_0\, \mathbf{i} + (a + b \cos t_0) \cos s_0\, \mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{T}_t(s_0, t_0) = -b \operatorname{sen} t_0 \cos s_0\, \mathbf{i} - b \operatorname{sen} t_0 \operatorname{sen} s_0\, \mathbf{j} + b \cos t_0\, \mathbf{k},$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t &= (a + b \cos t_0) b \cos t_0 \cos s_0\, \mathbf{i} + (a + b \cos t_0) b \cos t_0 \operatorname{sen} s_0\, \mathbf{j} \\ &\quad + (a + b \cos t_0) b \operatorname{sen} t_0\, \mathbf{k} \\ &= b(a + b \cos t_0)(\cos t_0 \cos s_0\, \mathbf{i} + \cos t_0 \operatorname{sen} s_0\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} t_0\, \mathbf{k}).\end{aligned}$$

Como $a > b > 0$, el factor $b(a + b \cos t_0)$ nunca es igual a cero. Además, puesto que las funciones seno y coseno nunca son cero al mismo tiempo, al menos una componente de $\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t$ nunca es cero. Por consiguiente, el toro es una superficie parametrizada suave. ◆

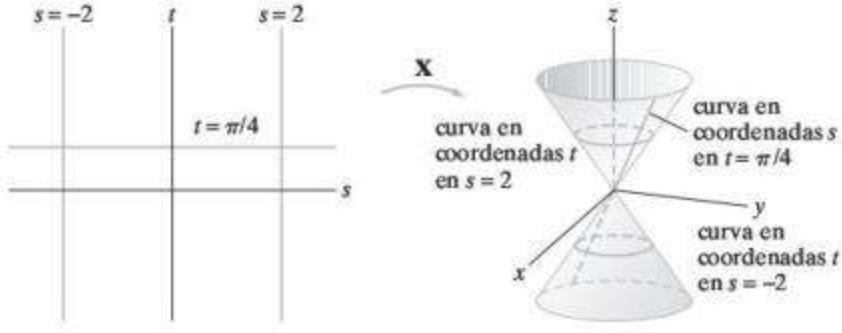


Figura 7.11 El cono $z^2 = x^2 + y^2$ como una superficie parametrizada.

EJEMPLO 7 La ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ define un cono en $\mathbf{R}^3$ (véase la figura 7.11). Si z se mantiene constante (lo que corresponde a seccionar la superficie mediante un plano horizontal), entonces la expresión $x^2 + y^2$ es constante. Así, las secciones transversales en las que z es constante son círculos de radio $|z|$ o un solo punto en el caso del vértice. Esto sugiere que podemos parametrizar el cono usando una variable paramétrica para z y otra para el ángulo alrededor del eje z. De esta manera obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x = s \cos t \\ y = s \operatorname{sen} t \\ z = s \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Entonces, tenemos

$$\mathbf{T}_s = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_t = -s \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + s \cos t\, \mathbf{j}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \operatorname{sen} t & 1 \\ -s \operatorname{sen} t & s \cos t & 0 \end{bmatrix} = -s \cos t\, \mathbf{i} - s \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + s\, \mathbf{k}.$$

Observe que $\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \mathbf{0}$ cuando (y solo cuando) $s = 0$. El cono deja de ser suave solo en su vértice (el único punto de la superficie subyacente que corresponde a $s = 0$). ◆

Los ejemplos 6 y 7 sugieren la razón por la que se utiliza el término "suave": La intuición dice que una superficie parametrizada es suave en un punto si no tiene en este "puntas" o "esquinas" agudas. Esto es verdad del toro pero no del cono, que tiene una singularidad en su vértice.

Si una superficie parametrizada es suave en un punto $\mathbf{X}(s_0, t_0)$, entonces definimos el **plano tangente** a $S = \mathbf{X}(D)$ en el punto $\mathbf{X}(s_0, t_0)$ como el plano que pasa por $\mathbf{X}(s_0, t_0)$ y tiene a

$$\mathbf{N}(s_0, t_0) = \mathbf{T}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{T}_t(s_0, t_0)$$

como vector normal. Para escribir una ecuación para este plano denotamos (x, y, z) por medio del vector (variable) $\mathbf{x}$. Entonces la ecuación del plano tangente es

$$\mathbf{N}(s_0, t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}(s_0, t_0)) = 0. \tag{4}$$

Si escribimos las componentes de $\mathbf{N}(s_0, t_0)$ como $A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$ y a las de $\mathbf{X}(s_0, t_0)$ como $(x(s_0, t_0), y(s_0, t_0), z(s_0, t_0))$, entonces podemos expandir la ecuación (4) para obtener

$$A(x - x(s_0, t_0)) + B(y - y(s_0, t_0)) + C(z - z(s_0, t_0)) = 0. \tag{5}$$

EJEMPLO 8 Consideremos otra vez el cono parametrizado del ejemplo 7 como

$$\mathbf{X}(s, t) = (s \cos t, s \operatorname{sen} t, s).$$

A partir de los cálculos en el ejemplo 7, el cono es suave en el punto $(0, 1, 1) = \mathbf{X}(1, \pi/2)$, por lo cual el plano tangente existe en ese punto. Tenemos

$$\mathbf{T}_s\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_t\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{i},$$

de modo que

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_s\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{T}_t\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

En consecuencia, se puede aplicar la ecuación (5) para comprobar que una ecuación para el plano tangente es

$$0(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

o, de manera más sencilla,

$$z = y.$$ ◆

EJEMPLO 9 Si $f(x, y)$ es de clase C^1 en una vecindad de un punto (x_0, y_0) en su dominio D, entonces la gráfica de f es una superficie parametrizada suave en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Recuerde que en el ejemplo vimos que 4 que la gráfica de f está parametrizada por

$\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{X}(s, t) = (s, t, f(s, t))$. Entonces

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial s}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_t = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial t}\mathbf{k},$$

por lo que

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = -\frac{\partial f}{\partial s}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial t}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Advierta que $\mathbf{N}$ es distinto de cero en cualquier punto $(s, t, f(s, t)) = (x, y, f(x, y))$.

A continuación considere la superficie definida como el conjunto de nivel

$$S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = c, c \text{ constante}\}.$$

Si F es de clase C^1 en una vecindad de un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces el teorema de la función implícita (teorema 6.5 de la sección 2.6) implica que, al menos en principio, la ecuación $F(x, y, z) = c$, que define a S, siempre puede resolverse localmente para (al menos) una de las variables x, y o z en términos de las otras dos. En otras palabras, bajo las suposiciones dadas para F, el conjunto de nivel S es localmente la gráfica de una función C^1 de dos variables. Es importante recordar que la idea de "resolver localmente" no significa que *todos* los puntos de S puedan ser descritos como la gráfica de una sola función (como ya quedó muy claro en el caso de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, por ejemplo), sino que cerca de los puntos $(x_0, y_0, z_0) \in S$, donde $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, una *parte* de S puede describirse como una gráfica. Entonces, las gráficas de las funciones C^1 de dos variables y los conjuntos de nivel de funciones C^1 de tres variables, bajo ciertas hipótesis de suavidad, son descripciones localmente equivalentes de superficies. Además, como la gráfica de una función C^1 es una superficie parametrizada suave, podemos cambiar con cierta libertad entre las tres descripciones de las superficies. ◆

Las superficies parametrizadas suaves son de gran importancia debido a la facilidad con la cual es posible adaptar técnicas de cálculo (en particular de cálculo integral) para ellas. Pero también estamos interesados en superficies parametrizadas suaves por partes.

DEFINICIÓN 1.3 Una superficie parametrizada **suave por partes** es la unión de imágenes de un número grande pero finito de superficies parametrizadas $\mathbf{X}_i: D_i \to \mathbf{R}^3$, $i = 1, \ldots, m$, donde

- Cada D_i es una región en $\mathbf{R}^2$ que consta de un conjunto abierto, conectado posiblemente junto con algunos de sus puntos de frontera (en su mayor parte queremos que D_i sea una región elemental);
- Cada $\mathbf{X}_i$ es de clase C^1 y uno a uno en toda la D_i, excepto tal vez a lo largo de ∂D_i;
- Cada $S_i = \mathbf{X}_i(D_i)$ es suave, excepto posiblemente en un número grande pero finito de puntos.

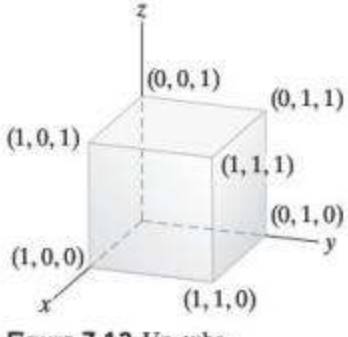


Figura 7.12 Un cubo.

EJEMPLO 10 La superficie de un cubo es parametrizada y suave por partes. Es la unión de sus seis caras, cada una de las cuales es una superficie parametrizada suave, digamos una parte de un plano.

Más explícitamente, suponga que las caras de un cubo son partes de los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$, como se aprecia en la figura 7.12.

Entonces, podemos parametrizar las caras del cubo con $\mathbf{X}_i$: $[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$, $i = 1, \ldots, 6$, donde

$$\mathbf{X}_1(s, t) = (0, s, t); \qquad \mathbf{X}_2(s, t) = (1, s, t); \qquad \mathbf{X}_3(s, t) = (s, 0, t);$$

$$\mathbf{X}_4(s, t) = (s, 1, t); \qquad \mathbf{X}_5(s, t) = (s, t, 0); \qquad \mathbf{X}_6(s, t) = (s, t, 1).$$

Es evidente que cada mapa $\mathbf{X}_i$ es de clase C^1 y uno a uno. Además, las caras tienen vectores normales bien definidos distintos de cero. Por ejemplo, tanto para $\mathbf{X}_1$ como para $\mathbf{X}_2$,

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

De manera similar,

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_4 = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{N}_5 = \mathbf{N}_6 = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Ninguno de estos vectores desaparece. No hay una forma consistente para definir vectores normales a lo largo de las aristas del cubo (donde coinciden dos caras). Esta es la razón por la que el cubo solo es suave *por partes*. ◆

Área de una superficie parametrizada suave

Ahora usaremos el concepto de superficie parametrizada para calcular el área de una superficie suave. En el análisis que sigue tomaremos $S = \mathbf{X}(D)$ como una superficie parametrizada suave, donde D es la unión de un número grande pero finito de regiones elementales en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$ es de clase C^1 y uno a uno, excepto tal vez a lo largo de ∂D.

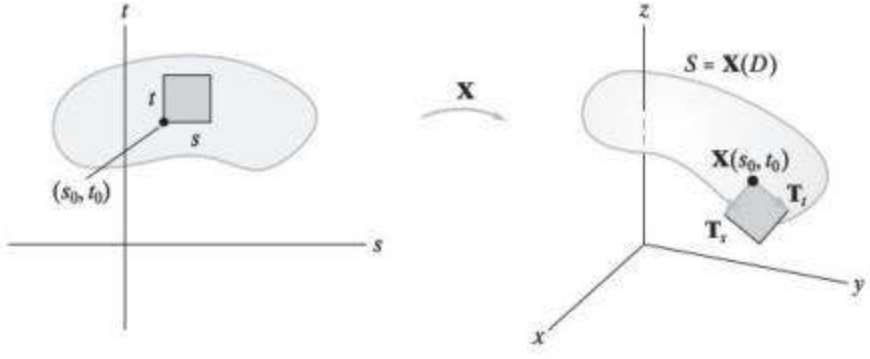


Figura 7.13 La imagen del rectángulo $\Delta s \times \Delta t$ en D es aproximadamente un paralelogramo expandido por $\mathbf{T}_s(s_0, t_0)\Delta s$ y $\mathbf{T}_t(s_0, t_0)\Delta t$.

La observación geométrica clave es la siguiente: considere un subconjunto rectangular pequeño de D cuya esquina inferior izquierda está en el punto $(s_0, t_0) \in D$ y cuya anchura y altitud son Δs y Δt, respectivamente. La imagen de este rectángulo debajo de $\mathbf{X}$ es un fragmento de la superficie subyacente S que es aproximadamente el paralelogramo con una esquina en $\mathbf{X}(s_0, t_0)$ y expandido por los vectores $\mathbf{T}_s(s_0, t_0)\Delta s$ y $\mathbf{T}_t(s_0, t_0)\Delta t$ (véase la figura 7.13). El área ΔA de este fragmento es

$$\Delta A \approx \|\mathbf{T}_s(s_0, t_0)\Delta s \times \mathbf{T}_t(s_0, t_0)\Delta t\| = \|\mathbf{T}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{T}_t(s_0, t_0)\| \, \Delta s \Delta t.$$

Ahora, suponga que $D = [a, b] \times [c, d]$; es decir, suponga que D en sí es un rectángulo. La partición D en n^2 subrectángulos por medio de

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b \quad \text{y} \quad c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = d.$$

Sea $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ y $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Entonces S es a su vez una partición en fragmentos, cada una de las cuales es aproximadamente un para-

lelogramo, con la suposición de que Δs_i y Δt_j son pequeñas para $i, j = 1, \ldots, n$. Si ΔA_{ij} denota el área de la parte de S que es la imagen del ij-ésimo subrectángulo de D, entonces

$$\begin{aligned}\text{Área superficial de } S &= \sum_{i,j=1}^{n} \Delta A_{ij} \\ &\approx \sum_{i,j=1}^{n} \|\mathbf{T}_s(s_{i-1}, t_{j-1}) \times \mathbf{T}_t(s_{i-1}, t_{j-1})\| \, \Delta s_i \, \Delta t_j.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tiene sentido definir:

$$\text{Área superficial de } S = \lim_{\text{toda } \Delta s_i, \Delta t_j \to 0} \sum_{i,j=1}^{n} \Delta A_{ij} = \int_c^d \int_a^b \|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\| \, ds \, dt$$

y, en general, donde D es una región arbitraria, es decir, no necesariamente un rectángulo,

$$\text{Área superficial de } S = \iint_D \|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\| \, ds \, dt. \tag{6}$$

La fórmula (6) puede extenderse fácilmente al caso en que S es una superficie parametrizada suave por partes descomponiendo la integral en forma apropiada.

EJEMPLO 11 Usamos la fórmula (6) para calcular el área superficial de una esfera de radio a. Recuerde del ejemplo 2 que el mapa

$$\mathbf{X}(s, t) = (a \cos s \operatorname{sen} t, a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, a \cos t), \quad 0 \le s < 2\pi, \quad 0 \le t \le \pi$$

parametriza la esfera en forma uno a uno. Entonces,

$$\mathbf{T}_s = -a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + a \cos s \operatorname{sen} t \, \mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{T}_t = a \cos s \cos t \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} s \cos t \, \mathbf{j} - a \operatorname{sen} t \, \mathbf{k}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = -a^2 \operatorname{sen} t \, (\cos s \operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \, \mathbf{j} + \cos t \, \mathbf{k}),$$

de modo que

$$\|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\| = a^2 \operatorname{sen} t.$$

Por lo tanto, la fórmula (6) se convierte en

$$\begin{aligned}\text{Área superficial de} &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \operatorname{sen} t \, ds \, dt = \int_0^{\pi} 2\pi a^2 \operatorname{sen} t \, dt \\ &= 2\pi a^2 (-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2\pi a^2 (1 + 1) = 4\pi a^2.\end{aligned}$$

Este resultado concuerda con la bien conocida fórmula del área superficial de una esfera. Sin embargo, advierta que si hacemos $0 \le s \le 4\pi$, $0 \le t \le \pi$, entonces la imagen de $\mathbf{X}$ es la misma esfera, pero la fórmula (6) produciría

$$\int_0^{\pi} \int_0^{4\pi} a^2 \operatorname{sen} t \, ds \, dt = 8\pi a^2.$$

Este "sobreconteo" es la razón por la que suponemos que el mapa $\mathbf{X}$ es (casi) uno a uno. (Nota: la parametrización mencionada no es suave en $t = 0$ ni en $t = \pi$, pero esto ocurre en ∂D y por ello no afecta a la integral del área superficial). ◆

Si escribimos las funciones componente de $\mathbf{X}$ como

$$\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

encontramos que

$$\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathbf{k}.$$

Utilizando la notación del jacobiano obtenemos

$$\mathbf{N}(s, t) = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \mathbf{t})}\mathbf{k}. \tag{7}$$

Esta fórmula alternativa para el vector normal a una superficie parametrizada suave probará su utilidad en otra ocasión. Por el momento, tomemos su magnitud:

$$\|\mathbf{N}(s, t)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\right)^2}.$$

De modo que la fórmula (6) también puede escribirse así:

Área superficial de S:

$$= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\right)^2}\, ds\, dt. \tag{8}$$

EJEMPLO 12 Encuentre el área superficial del toro descrito en el ejemplo 5. Recuerde que el toro está parametrizado como

$$\begin{cases} x = (a + b\cos t)\cos s \\ y = (a + b\cos t)\operatorname{sen} s \\ z = b\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \le s, t \le 2\pi, \quad a > b > 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} -(a + b\cos t)\operatorname{sen} s & -b\operatorname{sen} t\cos s \\ (a + b\cos t)\cos s & -b\operatorname{sen} t\operatorname{sen} s \end{vmatrix}$$

$$= (a + b\cos t)(b\operatorname{sen} t\operatorname{sen}^2 s + b\operatorname{sen} t\cos^2 s)$$

$$= (a + b\cos t)b\operatorname{sen} t,$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} -(a + b\cos t)\operatorname{sen} s & -b\operatorname{sen} t\cos s \\ 0 & b\cos t \end{vmatrix}$$

$$= -(a + b\cos t)b\cos t\operatorname{sen} s,$$

y

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} (a + b\cos t)\cos s & -b\,\text{sen}\,t\,\text{sen}\,s \\ 0 & b\cos t \end{vmatrix}$$

$$= (a + b\cos t)b\cos t\,\cos s.$$

Según la fórmula (8) tenemos:

Área superficial

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(a + b\cos t)^2[b^2\,\text{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t\,\text{sen}^2\,s + b^2\cos^2 t\cos^2 s]}\,ds\,dt.$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$ aplicada dos veces, simplificamos la integral así:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (a + b\cos t)b\,ds\,dt = \int_0^{2\pi} 2\pi b(a + b\cos t)\,dt$$

$$= 2\pi b(at + b\,\text{sen}\,t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi^2 ab. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 13 Suponga que una superficie suave es descrita como la gráfica de una función de C^1, $f(x, y)$, es decir, por la ecuación $z = f(x, y)$, donde (x, y) varía a través de la región plana D. Entonces, la parametrización estándar $\mathbf{X}(s, t) = (s, t, f(s, t))$ implica que

$$\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = -f_s\,\mathbf{i} - f_t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

(Véase el ejemplo 9). La fórmula (6) produce

$$\text{Área superficial} = \iint_D \|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\|\,ds\,dt = \iint_D \sqrt{f_s^2 + f_t^2 + 1}\,ds\,dt.$$

Como en esta parametrización de la gráfica $x = s, y = t$, concluimos que

Área superficial de la gráfica de $f(x, y)$ sobre D

$$= \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dx\,dy. \tag{9}$$

$\blacklozenge$

Una observación final: no es evidente que las fórmulas (6) u (8) dependan solo de la superficie subyacente $S = \mathbf{X}(D)$ y no de la parametrización particular $\mathbf{X}$. Estas fórmulas son independientes de la parametrización, como se verá en la sección siguiente, en el contexto de las integrales de superficie en general.

7.1 Ejercicios

1. Sea $\mathbf{X}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la superficie parametrizada dada por

$$\mathbf{X}(s, t) = (s^2 - t^2, s + t, s^2 + 3t).$$

a) Determine un vector normal a esta superficie en el punto

$$(3, 1, 1) = \mathbf{X}(2, -1).$$

b) Encuentre una ecuación para el plano tangente a esta superficie en el punto (3, 1, 1).

2. Encuentre una ecuación para el plano tangente al toro

$\mathbf{X}(s, t) = ((5 + 2\cos t)\cos s, (5 + 2\cos t)\,\text{sen}\,s, 2\,\text{sen}\,t)$

en el punto $\left((5 - \sqrt{3})/\sqrt{2}, (5 - \sqrt{3})/\sqrt{2}, 1\right)$.

3. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie

$$x = e^t, \quad y = t^2 e^{2s}, \quad z = 2e^{-s} + t$$

en el punto (1, 4, 0).

4. Sea $\mathbf{X}(s, t) = (s^2 \cos t, s^2 \operatorname{sen} t, s)$, $-3 \leq s \leq 3$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Encuentre un vector normal en $(s, t) = (-1, 0)$.

b) Determine el plano tangente en el punto $(1, 0, -1)$.

c) Encuentre una ecuación para la imagen de $\mathbf{X}$ en la forma $F(x, y, z) = 0$.

5. Considere la superficie parametrizada $\mathbf{X}(s, t) = (s, s^2 + t, t^2)$.

a) Grafique esta superficie para $-2 \leq s \leq 2$, $-2 \leq t \leq 2$ (le ayudaría usar una computadora).

b) ¿Es suave la superficie?

c) Encuentre una ecuación para el plano tangente en el punto (1, 0, 1).

6. Describa la superficie parametrizada del ejercicio 1 por medio de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$.

7. Sea S la superficie parametrizada por $x = s \cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$, $z = s^2$, donde $s \geq 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) ¿En qué puntos es suave S? Encuentre una ecuación para el plano tangente en el punto $(1, \sqrt{3}, 4)$.

b) Dibuje la gráfica de S. ¿Puede el lector reconocer S como alguna superficie conocida?

c) Describa S por medio de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$.

d) Utilizando la respuesta del inciso anterior, analice si S tiene un plano tangente en cada punto.

8. Verifique que la imagen de la superficie parametrizada

$$\mathbf{X}(s, t) = (2 \operatorname{sen} s \cos t, 3 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, \cos s), \quad 0 \leq s \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

es un elipsoide.

9. Compruebe que para el toro del ejemplo 5, la curva en coordenadas s, cuando $t = t_0$, es un círculo de radio $a + b \cos t_0$.

10. La superficie en $\mathbf{R}^3$ parametrizada por

$$\mathbf{X}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \theta), \quad r \geq 0, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

se llama **helicoidal**.

a) Describa la curva en coordenadas r cuando $\theta = \pi/3$. Dé una descripción general de las curvas en coordenadas r.

b) Describa la curva en coordenadas θ cuando $r = 1$. Haga una descripción general de las curvas en coordenadas θ.

c) Dibuje la gráfica de la helicoidal (quizás con una computadora) para $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$. ¿Se da cuenta el lector de por qué la superficie se llama *helicoidal*?

11. Dada la esfera de radio 2 con centro en $(2, -1, 0)$, encuentre una ecuación para el plano tangente a ella en el punto $(1, 0, \sqrt{2})$ en tres formas:

a) por medio de considerar la esfera como la gráfica de la función

$$f(x, y) = \sqrt{4 - (x - 2)^2 - (y + 1)^2};$$

b) considerando la esfera como una superficie de nivel de la función

$$F(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2;$$

c) considerando la esfera como la superficie parametrizada por

$$\mathbf{X}(s, t) = (2 \operatorname{sen} s \cos t + 2, 2 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t - 1, 2 \cos s).$$

En los ejercicios 12 a 15 represente la superficie dada como una superficie parametrizada, suave y por partes.

12. El hemisferio inferior $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, incluyendo el círculo ecuatorial.

13. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que se encuentre entre $y = -1$ y $y = 3$.

14. La región triangular cerrada en $\mathbf{R}^3$ con vértices en (2, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 5).

15. El hiperboloide $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. (Sugerencia: utilice dos mapas para parametrizar la superficie).

16. Este problema tiene que ver con la superficie parametrizada $\mathbf{X}(s, t) = (s^3, t^3, st)$.

a) Encuentre una ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto $(1, -1, -1)$.

b) ¿Esta superficie es suave? Justifique su respuesta.

c) Use una computadora para graficar esta superficie en $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$.

d) Verifique que esta superficie también puede ser descrita por medio de la ecuación en coordenadas xyz que es $z = \sqrt[3]{xy}$. Pruebe a usar una computadora para graficar la superficie cuando se describe en esta forma. Muchos sistemas de software tienen problemas o darán gráficas incompletas, lo cual es una de las razones por las que son deseables las superficies con descripciones paramétricas.

17. La superficie dada paramétricamente por $\mathbf{X}(s, t) = (st, t, s^2)$ se conoce como **sombrilla de Whitney**.

a) Verifique que esta superficie también puede describirse mediante la ecuación en coordenadas xyz que es $y^2 z = x^2$.

b) ¿$\mathbf{X}$ es suave?

c) Use una computadora para graficar esta superficie para $-2 \leq s \leq 2$, $-2 \leq t \leq 2$.

d) Ciertos puntos (x, y, z) de esta superficie no corresponden a un solo punto paramétrico (s, t). ¿Cuáles son? Explique cómo se relaciona esto con la gráfica.

e) Diga una ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto (2, 1, 4).

f) Demuestre que en el punto (0, 0, 1) sobre la imagen de **X** es razonable concluir que hay *dos* planos tangentes. Anote sus ecuaciones.

18. Sea S la superficie definida como la gráfica de una función $f(x, y)$ de clase C^1. Entonces, el ejemplo 4 muestra que S también es una superficie parametrizada. Demuestre que la fórmula (5) para el plano tangente a S en $(a, b, f(a, b))$ coincide con la fórmula (4) de la sección 2.3.

19. *a*) Escriba una fórmula para el plano tangente a la superficie descrita por la ecuación $y = g(x, z)$.

b) Repita el inciso *a*) para una superficie descrita por la ecuación $x = h(y, z)$.

20. Suponga que $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$ es una superficie parametrizada que es suave en $\mathbf{X}(s_0, t_0)$. Demuestre cómo puede usarse la definición de la derivada $D\mathbf{X}(s_0, t_0)$ (véase la definición 3.8 del capítulo 2) para dar ecuaciones paramétricas vectoriales del plano tangente a $S = \mathbf{X}(D)$ en el punto $\mathbf{X}(s_0, t_0)$.

21. Con el resultado del ejercicio 20 dé ecuaciones paramétricas para el plano tangente a la superficie $\mathbf{X}(s, t) = (s, s^2 + t, t^2)$ en el punto (1, 0, 1). Verifique que su respuesta es consistente con la del ejercicio 5(*c*).

22. Utilice la parametrización del ejemplo 3 para comprobar que el área superficial de un cilindro de radio a y altura h es $2\pi ah$.

23. Sea que D denote el disco unitario en el plano st. Sea $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$ definida por $(s + t, s - t, s)$. Encuentre el área superficial de $\mathbf{X}(D)$.

24. Encuentre el área superficial de la helicoidal

$$\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, \theta)$$

para $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi n$, donde n es un entero positivo.

25. Un agujero cilíndrico de radio b se perfora a través de una esfera de radio a ($> b$) para formar un anillo. Encuentre el área de la superficie exterior del anillo.

26. Encuentre el área de la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy.

27. Determine el área de la superficie cortada del paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2$ por medio de los planos $z = 2$ y $z = 8$.

28. Calcule el área superficial de la parte del plano $x + y + z = a$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ en dos formas:

a) utilizando la fórmula (6);

b) con la fórmula (9).

29. Sea S la superficie definida por la ecuación $z = f(x, y)$. Si $f_x^2 + f_y^2 = a$, donde a es una constante positiva, determine el área superficial de la parte de S que está sobre una región D en el plano xy en términos del área de D.

30. Sea S la superficie definida por

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{para } z \ge 1.$$

a) Dibuje la gráfica de esta superficie.

b) Demuestre que el volumen de la región acotada por S y el plano $z = 1$ es finito (necesitará usar una integral impropia).

c) Demuestre que el área superficial de S es infinita.

31. Determine el área superficial de la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$.

32. Suponga que una superficie está dada en coordenadas cilíndricas por la ecuación $z = f(r, \theta)$, donde (r, θ) varía a través de una región D en el plano $r\theta$, donde r es no negativa. Demuestre que el área de la superficie es dada por

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2}\, r\, dr\, d\theta.$$

33. Suponga que una superficie es dada en coordenadas esféricas por la ecuación $\rho = f(\varphi, \theta)$, donde (φ, θ) varía en una región D en el plano $\varphi\theta$ y $f(\varphi, \theta)$ es no negativo. Demuestre que el área de la superficie es dada por

$$\iint_D f(\varphi, \theta) \times \sqrt{(f(\varphi, \theta)^2 + f_\varphi(\varphi, \theta)^2)\operatorname{sen}^2\varphi + f_\theta(\varphi, \theta)^2}\, d\varphi\, d\theta.$$

7.2 Integrales de superficie

En esta sección aprenderemos a integrar tanto funciones de variable escalar como campos vectoriales a lo largo de superficies en $\mathbf{R}^3$. Procederemos en forma muy parecida a cuando exploramos las integrales de línea en la sección 6.1. Comenzamos por definir integrales apropiadas sobre superficies parametrizadas y luego estableceremos que la elección particular de la parametrización no importa mucho, que en realidad solo es importante la superficie subyacente, y tal vez la orientación.

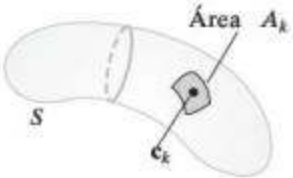


Figura 7.14 Una parte pequeña de la superficie S tiene un área ΔA_k. El punto $\mathbf{c}_k$ se localiza en este fragmento de la superficie.

Integrales escalares de superficie

Suponga que S es una superficie acotada en $\mathbf{R}^3$ y que $f(x, y, z)$ es una función continua de variable escalar cuyo dominio incluye a S. Entonces, queremos que la integral de superficie $\iint_S f\,dS$ sea un límite de cierta clase de suma de Riemann. Para ello suponga que S es una partición de un número finito de muchos fragmentos pequeños y que el área de la k-ésima pieza es ΔA_k. Sea que $\mathbf{c}_k$ denote un "punto de prueba" arbitrario en el k-ésimo fragmento (véase la figura 7.14). Entonces, la integral de superficie de f sobre S debe ser

$$\iint_S f\,dS = \lim_{\text{toda } \Delta A_k \to 0} \sum_k f(\mathbf{c}_k)\Delta A_k, \tag{1}$$

siempre y cuando, por supuesto, este límite exista.

Ahora agregaremos cierto formalismo para dar una definición apropiada. Suponga que S es una superficie parametrizada suave; es decir, suponga que S es la imagen del mapa de C^1 que es $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$, donde D es una región acotada y conectada en $\mathbf{R}^2$. Sea f una función continua definida en $S = \mathbf{X}(D)$. Como se expuso en la sección 7.1, el pequeño rectángulo en D que tiene dimensiones Δs y Δt, con su esquina inferior izquierda en el punto (s_0, t_0), es mapeado por $\mathbf{X}$ hacia una parte de la superficie que tiene una forma aproximada de paralelogramo cuya área es

$$\Delta A \approx \|\mathbf{T}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{T}_t(s_0, t_0)\|\,\Delta s\,\Delta t.$$

(Véase la figura 7.13 en la página 464). Suponga que D es el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ y que hacemos la partición de D por medio de

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b \quad \text{y} \quad c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = d.$$

Entonces, la suma límite representada por la fórmula (1) es

$$\lim_{\text{toda } \Delta s_i, \Delta t_j \to 0} \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{X}(s_i^*, t_i^*))\,\|\mathbf{T}_s(s_{i-1}, t_{j-1}) \times \mathbf{T}_t(s_{i-1}, t_{j-1})\|\,\Delta s_i\,\Delta t_j, \tag{2}$$

donde

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1}, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad s_{i-1} \le s_i^* \le s_i, \quad \text{y} \quad t_{j-1} \le t_j^* \le t_j.$$

(Por consiguiente, $\mathbf{X}(s_i^*, t_j^*)$ es un punto arbitrario en la imagen del subrectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ y, entonces, un "punto de prueba" en el pequeño elemento de superficie correspondiente). Pero entonces el límite en la fórmula (2) es

$$\int_c^d \int_a^b f(\mathbf{X}(s, t))\|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\|\,ds\,dt.$$

Cuando D es una región más arbitraria que un rectángulo, tiene sentido usar la definición siguiente para la integral de superficie de una función sobre una superficie parametrizada:

DEFINICIÓN 2.1 Sea $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$ una superficie parametrizada suave, donde $D \subset \mathbf{R}^2$ es una región acotada. Sea f una función continua cuyo dominio incluye $S = \mathbf{X}(D)$. Entonces la **integral escalar de superficie** de f a lo largo de $\mathbf{X}$, denotada $\iint_{\mathbf{X}} f\,dS$, es

$$\iint_{\mathbf{X}} f\,dS = \iint_D f(\mathbf{X}(s, t))\,\|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\|\,ds\,dt$$

$$= \iint_D f(\mathbf{X}(s, t))\,\|\mathbf{N}(s, t)\|\,ds\,dt.$$

Aunque necesitamos no suponer que el mapa $\mathbf{X}$ es uno a uno en D con objeto de trabajar con la integral en la definición 2.1, en la práctica por lo general encontramos de utilidad tomar a $\mathbf{X}$ como si fuera uno a uno, excepto quizás en ∂D. Si este es el caso, y si f es idéntica a 1 sobre todo $\mathbf{X}(D)$, entonces

$$\iint_{\mathbf{X}} f\,dS = \iint_{\mathbf{X}} 1\,dS = \iint_D \|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\|\,ds\,dt = \text{área superficial de } \mathbf{X}(D),$$

como se establece en la fórmula (6) en la sección 7.1. La integral escalar de superficie en la definición 2.1 es, entonces, una generalización de la integral que se usa para calcular el área superficial. Podemos pensar que $\iint_{\mathbf{X}} f\,dS$ es el límite de una "suma ponderada" de los elementos del área superficial, las ponderaciones dadas por f. Si f representa la masa, o la densidad de carga eléctrica, entonces $\iint_{\mathbf{X}} f\,dS$ produce el total de masa o de carga en $\mathbf{X}(D)$ (suponiendo que $\mathbf{X}$ es uno a uno, excepto tal vez a lo largo de ∂D).

Para fines de cómputo, recuerde el lector que si escribimos los componentes de $\mathbf{X}$ como

$$\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

entonces

$$\mathbf{N}(s, t) = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\mathbf{k}.$$

Obtenemos

$$\iint_{\mathbf{X}} f\,dS = \iint_D f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \times \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\right)^2}\,ds\,dt. \quad (3)$$

EJEMPLO 1 Evaluaremos $\iint_{\mathbf{X}} z^3\,dS$, donde $\mathbf{X}: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ es la esfera parametrizada de radio a:

$$\mathbf{X}(s, t) = (a \cos s \operatorname{sen} t, a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, a \cos t).$$

Utilizando la definición 2.1, o su reformulación en la ecuación (3), encontramos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{N}(s, t)\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\right)^2} \\
&= \sqrt{a^4(\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^4 t + \cos^2 s \operatorname{sen}^4 t)} \\
&= a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + \operatorname{sen}^4 t} \\
&= a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2 t\,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} \\
&= a^2 \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

(Véase también el ejemplo 11 en la sección 7.1). En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{X}} z^3\,dS &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (a\cos t)^3 a^2 \operatorname{sen} t\,ds\,dt = a^5 \int_0^{\pi} 2\pi \cos^3 t \operatorname{sen} t\,dt \\
&= 2\pi a^5 \left(-\tfrac{1}{4}\cos^4 t\right)\Big|_0^{\pi} = 2\pi a^5\left(-\tfrac{1}{4} - \left(-\tfrac{1}{4}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

◆

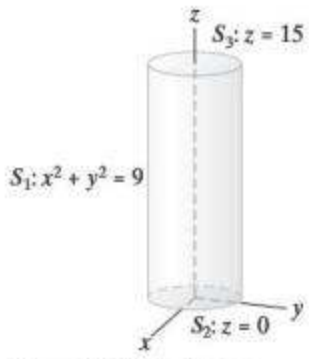


Figura 7.15 El cilindro cerrado de radio 3 y altura 15 del ejemplo 2.

Para definir y evaluar integrales escalares de superficie sobre superficies parametrizadas suaves, *por partes*, simplemente calculamos la integral de superficie sobre cada parte suave y sumamos los resultados.

EJEMPLO 2 Sea S el cilindro cerrado de radio 3, con eje a lo largo del eje z, cara superior en $z = 15$ y cara inferior en $z = 0$, como se aprecia en la figura 7.15. Entonces, S es una superficie suave por partes; es la unión de las tres superficies suaves parametrizadas S_1, S_2 y S_3 que se describen a continuación. Calcularemos $\iint_S z\,dS$.

Las tres partes suaves pueden parametrizarse como sigue:

$$S_1 \text{ (superficie lateral del cilindro): } \begin{cases} x = 3\cos s \\ y = 3\operatorname{sen} s \\ z = t \end{cases} \quad 0 \le s \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 15,$$

$$S_2 \text{ (disco inferior): } \begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\operatorname{sen} t \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \le s \le 3, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

y

$$S_3 \text{ (disco superior): } \begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\operatorname{sen} t \\ z = 15 \end{cases} \quad 0 \le s \le 3, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Utilizando la definición 2.1 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z\,dS &= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} t\,\|(-3\operatorname{sen} s\,\mathbf{i} + 3\cos s\,\mathbf{j}) \times \mathbf{k}\|\,ds\,dt \\ &= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} t\,\|3\operatorname{sen} s\,\mathbf{j} + 3\cos s\,\mathbf{i}\|\,ds\,dt \\ &= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} 3t\,ds\,dt = \int_0^{15} 6\pi t\,dt = 3\pi t^2\Big|_0^{15} = 675\pi. \end{aligned}$$

Ahora, $\iint_{S_2} z\,dS = 0$, puesto que z desaparece a lo largo de la parte inferior de S. Para S_3 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} z\,dS &= \iint_{S_3} 15\,dS = 15 \cdot \iint_{S_3} 1\,dS \\ &= 15 \cdot \text{área del disco} = 15 \cdot (9\pi) = 135\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S z\,dS &= \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS \\ &= 675\pi + 0 + 135\pi = 810\pi. \end{aligned}$$

◆

Si una superficie S es dada por la gráfica de $z = g(x, y)$, donde g es de clase C^1 sobre cierta región D en $\mathbf{R}^2$, entonces S es parametrizada por $\mathbf{X}(x, y) = (x, y, g(x, y))$ con $(x, y) \in D$ (véase el ejemplo 4 de la sección 7.1). Entonces, a partir del ejemplo 13 en la sección 7.1,

$$\mathbf{N}(x, y) = -g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

por lo cual

$$\iint_{\mathbf{X}} f\,dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\,dx\,dy. \tag{4}$$

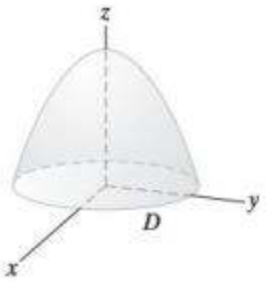


Figura 7.16 Gráfica de $4 - x^2 - y^2$ sobre el disco D con radio igual a 2.

EJEMPLO 3 Suponga que S es la gráfica de la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, donde (x, y) varía a través del disco:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(Véase la figura 7.16). La fórmula (4) proporciona una manera directa, aunque no evidente, para calcular

$$\iint_{\mathbf{X}} (4 - z)\, dS, \quad \text{donde } \mathbf{X}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2).$$

En particular, tenemos

$$\iint_{\mathbf{X}} (4 - z)\, dS = \iint_D \left(4 - (4 - x^2 - y^2)\right) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Para integrar, cambiamos a coordenadas polares; es decir, hacemos que $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, donde $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La integral buscada se convierte en:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, dr,$$

según el teorema de Fubini. Ahora, sea $2r = \tan u$; es decir, hacemos $r = \frac{1}{2}\tan u$, por lo que $dr = \frac{1}{2}\sec^2 u\, du$. La integral anterior se transforma en

$$2\pi \int_0^{\tan^{-1} 4} \frac{1}{8}\tan^3 u \cdot \sqrt{\tan^2 u + 1} \cdot \frac{1}{2}\sec^2 u\, du$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{\tan^{-1} 4} \tan^3 u \sec^3 u\, du$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{\tan^{-1} 4} \tan^2 u \sec^2 u \cdot (\sec u \tan u\, du)$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{\tan^{-1} 4} (\sec^2 u - 1)\sec^2 u \sec u \tan u\, du.$$

Figura 7.17 Si $u = \tan^{-1} 4$, entonces $\sec u = \sqrt{17}$.

Ahora, sea $w = \sec u$, de modo que $dw = \sec u \tan u\, du$. Entonces, cuando $u = 0$, $w = 1$, y cuando $u = \tan^{-1} 4$, $w = \sqrt{17}$. (véase la figura 7.17). Así, la integral de u se convierte en:

$$\frac{\pi}{8} \int_1^{\sqrt{17}} (w^2 - 1)w^2\, dw = \frac{\pi}{8} \int_1^{\sqrt{17}} (w^4 - w^2)\, dw$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{3}w^3\right)\Big|_1^{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(\left(\frac{17^2}{5}\sqrt{17} - \frac{17}{3}\sqrt{17}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{391\sqrt{17} + 1}{60}\right)\pi.$$

De manera alternativa podríamos calcular la integral $\int_0^2 r^3\sqrt{4r^2+1}\,dr$ utilizando integración por partes con $u = r^2$ (de modo que $du = 2r\,dr$) y $dv = r\sqrt{4r^2+1}\,dr$ (por lo que $v = \frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}$).

Integrales vectoriales de superficie

Ahora desarrollaremos una forma de integrar campos vectoriales a lo largo de superficies. Comenzaremos con una definición.

DEFINICIÓN 2.2 Sea $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$ una superficie parametrizada suave, donde D es una región acotada en el plano, y sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vectorial continuo cuyo dominio incluye $S = \mathbf{X}(D)$. Entonces, la **integral vectorial de superficie** de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{X}$ se denota con $\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ es

$$\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s,t))\cdot\mathbf{N}(s,t)\,ds\,dt,$$

donde $\mathbf{N}(s,t) = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t$.

Igual que con las integrales de línea, se recomienda al lector tener cuidado con la notación para las integrales de superficie. En la integral vectorial de superficie $\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, el término diferencial debe considerarse una cantidad vectorial, mientras que en la integral escalar de superficie $\iint_{\mathbf{X}} f\,dS$ el término diferencial es una cantidad escalar (que es la diferencial del área superficial).

Figura 7.18 La helicoidal del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-2y)\mathbf{k}$. Evaluamos $\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{X}$ es la helicoidal

$$\mathbf{X}(s,t) = (s\cos t, s\,\mathrm{sen}\,t, t), \qquad 0 \le s \le 1, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

En la figura 7.18 se ilustra la helicoidal.

Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(s,t) &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\mathbf{k}\\ &= \begin{vmatrix}\mathrm{sen}\,t & s\cos t\\ 0 & 1\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}\cos t & -s\,\mathrm{sen}\,t\\ 0 & 1\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}\cos t & -s\,\mathrm{sen}\,t\\ \mathrm{sen}\,t & s\cos t\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + s\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Utilizando la definición 2.2 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{X}(s,t))\cdot\mathbf{N}(s,t)\,ds\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (s\cos t\,\mathbf{i} + s\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}\\ &\qquad + (t - 2s\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{k})\cdot(\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + s\,\mathbf{k})\,ds\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (st - 2s^2\,\mathrm{sen}\,t)\,ds\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}s^2 t - \tfrac{2}{3}s^3\,\mathrm{sen}\,t\right)\Big|_{s=0}^{1} dt\\ &= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,t\right) dt = \left(\tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{2}{3}\cos t\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi^2.\end{aligned}$$

◆

EJEMPLO 5 Sea $f(x, y)$ una función de variable escalar de clase C^1 sobre un dominio acotado $D \subset \mathbf{R}^2$. Suponga que S es la superficie descrita como la gráfica de $z = f(x, y)$; es decir, $S = \mathbf{X}(D)$, donde $\mathbf{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Entonces,

$$\mathbf{N}(x, y) = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

por lo que la definición 2.2 se convierte en

$$\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\,dy. \tag{5}$$

La fórmula (5) demostrará ser muy útil. ◆

Otras interpretaciones

Igual que en el caso de las integrales vectoriales y escalares de *línea*, existe una conexión entre las integrales de *superficie* vectoriales y las escalares. Suponga que $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$ es una superficie parametrizada suave y que $\mathbf{F}$ es continua sobre $S = \mathbf{X}(D)$. Sea $\mathbf{N}(s, t) = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t$ el vector normal usual, y sea

$$\mathbf{n}(s, t) = \frac{\mathbf{N}(s, t)}{\|\mathbf{N}(s, t)\|}.$$

Es decir, $\mathbf{n}$ es el vector unitario que apunta en la misma dirección que $\mathbf{N}$. En particular,

$$\mathbf{N}(s, t) = \|\mathbf{N}(s, t)\|\,\mathbf{n}(s, t).$$

Utilizando la definición 2.2 tenemos que la integral vectorial de superficie es

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s, t)) \cdot \mathbf{N}(s, t)\,ds\,dt \\
&= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s, t)) \cdot (\|\mathbf{N}(s, t)\|\mathbf{n}(s, t))\,ds\,dt \\
&= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s, t)) \cdot \mathbf{n}(s, t)\|\mathbf{N}(s, t)\|\,ds\,dt \\
&= \iint_{\mathbf{X}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la cantidad $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ es precisamente la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\mathbf{n}$. En otras palabras, la fórmula (6) dice que la integral *vectorial* de superficie de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{X}$ es la integral *escalar* de superficie de la componente de $\mathbf{F}$ que es normal a $S = \mathbf{X}(D)$. Es la integral de superficie análoga de la fórmula (3) en la sección 6.1, la cual establece que la integral vectorial de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de una trayectoria $\mathbf{x}$ es la integral escalar de línea de la componente de $\mathbf{F}$ que es tangente a la curva imagen. En resumen, tenemos los resultados siguientes:

Integrales de línea:

$$\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\,ds. \tag{7}$$

Integrales de superficie:

$$\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{X}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS. \tag{8}$$

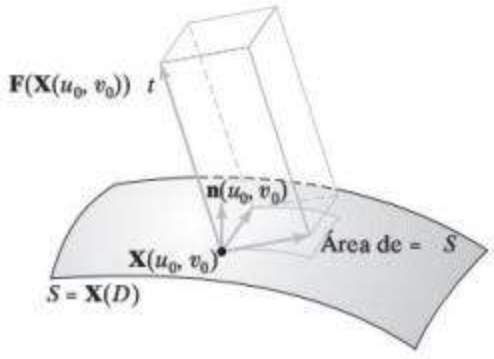


Figura 7.19 La cantidad de fluido transportado a través de un elemento pequeño de S durante un breve intervalo de tiempo Δt puede ser aproximada por el volumen de un paralelepípedo.

Como se expuso en la sección 6.1, cuando $\mathbf{x}$ es una trayectoria cerrada, la cantidad $\int_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})ds$ en la ecuación (7) se llama **circulación de F a lo largo de x**. Mide el flujo tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria. Por otro lado, la cantidad $\iint_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS$ en la ecuación (8) se conoce como el **flujo de F a través de** $S = \mathbf{X}(D)$. Si pensamos que $\mathbf{F}$ es el campo vectorial de velocidades de un fluido tridimensional, entonces, como veremos, podemos considerar que el flujo representa la tasa de fluido transportado a través de S por unidad de tiempo. (El lector tal vez querría comparar el análisis siguiente con el que se hizo en la sección 6.2 acerca del flujo bidimensional a través de una curva).

Para evitar cualquier confusión con la notación usamos u y v para denotar las variables paramétricas para $\mathbf{X}$, y t como la variable que representa al tiempo. Considere un elemento pequeño de S con área ΔS y la cantidad de fluido transportado a través de este durante un corto intervalo de tiempo Δt. Esta cantidad es el volumen determinado por $\mathbf{F}$ durante Δt. La figura 7.19 sugiere que si tanto ΔS como Δt son suficientemente pequeños, entonces este volumen puede ser aproximado por el volumen de un paralelepípedo apropiado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Cantidad de fluido transportado} &\approx \text{volumen del paralelepípedo}\\ &= (\text{altura})\,(\text{área de la base})\\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}(u_0, v_0))\Delta t\cdot\mathbf{n}(u_0, v_0)\Delta S, \qquad (9)\end{aligned}$$

ya que la altura del paralelepípedo es la componente normal de $\mathbf{F}\Delta t$. Al dividir la ecuación (9) entre Δt obtenemos la tasa promedio de transporte a través del elemento de superficie durante el intervalo de tiempo Δt:

$$\text{Tasa promedio de transporte} \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}(u_0, v_0))\cdot\mathbf{n}(u_0, v_0)\Delta S. \qquad (10)$$

Ahora se descompone toda la superficie $S = \mathbf{X}(D)$ en muchos elementos pequeños como el descrito y se suman las contribuciones correspondientes a la tasa de transporte en la forma dada en la ecuación (10). Si dejamos que todos los elementos se contraigan, entonces en el límite en que todos los $\Delta S \to 0$, tenemos que la tasa promedio total $\Delta M/\Delta t$ de fluido transportado durante Δt es, aproximadamente

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} \approx \int\int_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS.$$

Por último, $\Delta t \to 0$ y define que la tasa (instantánea) de transporte del fluido es:

$$\frac{dM}{dt} = \int\int_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS.$$

Reparametrización de superficies

Como se vio en la sección 6.1, las integrales escalares y vectoriales de línea sobre curvas dependen de la geometría de la curva (y posiblemente de su dirección), más que de la manera particular en que esta se parametrice. Gran parte de esto es cierto para las integrales de superficie. Comenzaremos con una definición similar a la 1.3 del capítulo 6.

DEFINICIÓN 2.3 Sean $\mathbf{X}: D_1 \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ y $\mathbf{Y}: D_2 \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ superficies parametrizadas. Decimos que $\mathbf{Y}$ es una **reparametrización** de $\mathbf{X}$ si existe una función que sea uno a uno y sobreyectiva $\mathbf{H}: D_2 \to D_1$ con inversa $\mathbf{H}^{-1}: D_1 \to D_2$ tal que $\mathbf{Y}(s, t) = \mathbf{X}(\mathbf{H}(s, t))$, es decir, tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ \mathbf{H}$. Si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son suaves y tanto $\mathbf{H}$ como $\mathbf{H}^{-1}$ son de clase C^1, entonces decimos que $\mathbf{Y}$ es una reparametrización **suave** de $\mathbf{X}$.

EJEMPLO 6 La helicoidal parametrizada por

$$\begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\,\text{sen}\,t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

también puede describirse como

$$\begin{cases} x = \dfrac{s}{2}\cos 2t \\ y = \dfrac{s}{2}\,\text{sen}\,2t \\ z = 2t \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2, \quad 0 \le t \le \pi.$$

La primera descripción corresponde a un mapa $\mathbf{X}: [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ y la segunda a un mapa $\mathbf{Y}: [0, 2] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$. No es difícil ver que si hacemos el cambio de variables así:

$$u = \frac{s}{2} \quad \text{y} \quad v = 2t,$$

entonces

$$\mathbf{Y}(s, t) = \mathbf{X}(u, v).$$

De manera equivalente, podemos definir una función $\mathbf{H}: [0, 2] \times [0, \pi] \to [0, 1] \times [0, 2\pi]$ con $\mathbf{H}(s, t) = (s/2, 2t)$. Entonces $\mathbf{H}$ es uno a uno y sobreyectiva y $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ \mathbf{H}$. Por lo tanto, $\mathbf{Y}$ es una reparametrización de $\mathbf{X}$. ◆

EJEMPLO 7 Suponga que $\mathbf{X}$ es una superficie parametrizada suave. Sea $\mathbf{Y}(s, t) = \mathbf{X}(u, v)$, donde $u = t, v = s$. Es decir, $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ \mathbf{H}$, donde $\mathbf{H}(s, t) = (t, s)$. Entonces $\mathbf{Y}$ es una reparametrización (suave) que parece lograr poco. Sin embargo, si hacemos que $\mathbf{N}_\mathbf{Y}$ denote al vector normal habitual $\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t = \partial\mathbf{Y}/\partial s \times \partial\mathbf{Y}/\partial t$, entonces tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u},$$

por lo que

$$\mathbf{N}_\mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = -\mathbf{N}_\mathbf{X}.$$

La superficie parametrizada **Y** es la misma que **X**, excepto que el vector normal estándar que sale de **Y** apunta en dirección opuesta a la del que sale de **X**. ◆

El cálculo del ejemplo 7 se generaliza así: suponga que **X** es una superficie parametrizada suave y que **Y** es una reparametrización suave de **X** por medio de **H**, lo cual significa que

$$\mathbf{Y}(s, t) = \mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(\mathbf{H}(s, t)).$$

Puesto que se asume que **H** es de clase C^1, es posible demostrar, a partir de la regla de la cadena, que los vectores normales estándar están relacionados por medio de la ecuación

$$\mathbf{N}_\mathbf{Y}(s, t) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \mathbf{N}_\mathbf{X}(u, v). \tag{11}$$

(Para la obtención de la fórmula (11), véase el apéndice al final de esta sección). La fórmula (11) muestra que $\mathbf{N}_\mathbf{Y}$ es un escalar múltiplo de $\mathbf{N}_\mathbf{X}$. Además, como **H** es invertible y tanto **H** como $\mathbf{H}^{-1}$ son de clase C^1, se sigue que el jacobiano de **H** es siempre positivo o siempre negativo. (Para ver esto observe que tanto $\mathbf{H} \circ \mathbf{H}^{-1}$ como $\mathbf{H}^{-1} \circ \mathbf{H}$ son la función identidad. Por esta razón puede aplicarse la regla de la cadena para demostrar que la matriz de derivadas $D\mathbf{H}(s, t)$ es invertible para cada (s, t); entonces, su determinante, que es el jacobiano de **H**, debe ser distinto de cero. Como el determinante es una función continua de las entradas de **H**, no puede cambiar de signo). De manera, que el normal estándar $\mathbf{N}_\mathbf{Y}$ siempre apunta en la misma dirección que $\mathbf{N}_\mathbf{X}$ o siempre apunta en la dirección opuesta (véase la figura 7.20). Con base en estas suposiciones, decimos que tanto **H** como **Y** **preservan la orientación** si el jacobiano $\partial(u, v)/\partial(s, t)$ es positivo, y que **invierten la orientación** si $\partial(u, v)/\partial(s, t)$ es negativo.

Figura 7.20 Si **Y** es una reparametrización que invierte la orientación de **X**, entonces $\mathbf{N}_\mathbf{Y}$ apunta en dirección opuesta a $\mathbf{N}_\mathbf{X}$.

El resultado siguiente, una analogía cercana al teorema 1.4 del capítulo 6, muestra que una reparametrización suave no tiene efecto sobre el valor de una integral escalar de línea.

TEOREMA 2.4 Sea $\mathbf{X}: D_1 \to \mathbf{R}^3$ una superficie parametrizada suave, y f cualquier función continua cuyo dominio incluya a $\mathbf{X}(D_1)$. Si $\mathbf{Y}: D_2 \to \mathbf{R}^3$ es cualquier reparametrización suave de **X**, entonces

$$\iint_\mathbf{Y} f \, dS = \iint_\mathbf{X} f \, dS.$$

La demostración del teorema 2.4 se presenta en el apéndice de esta sección. Con este resultado es posible definir la integral escalar de superficie sobre una superficie suave S tomando una parametrización suave $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$ con $S = \mathbf{X}(D)$ que es uno a uno, excepto tal vez en ∂D. Entonces, definimos la integral escalar de superficie de f sobre S como

$$\iint_S f\, dS = \iint_{\mathbf{X}} f\, dS.$$

Es un hecho (que no demostraremos) que dos parametrizaciones suaves cualesquiera de S deben ser reparametrizaciones una de la otra, por lo que el teorema 2.4 afirma que no importa la elección particular que hagamos para la parametrización. Necesitamos suponer que $\mathbf{X}$ es (casi) uno a uno para garantizar que la integral se toma solo una vez sobre la superficie subyacente $S = \mathbf{X}(D)$. También es fácil extender estos comentarios para dar una definición de una integral escalar de superficie de una función sobre una superficie suave por partes.

El resultado siguiente es análogo al del teorema 1.5 del capítulo 6 (cuya demostración se da en el apéndice) y afirma que las reparametrizaciones suaves solo afectan a las integrales vectoriales de superficie con un posible cambio de signo.

TEOREMA 2.5 Sea $\mathbf{X}$: $D_1 \to \mathbf{R}^3$ una superficie parametrizada suave y $\mathbf{F}$ cualquier campo vectorial continuo cuyo dominio incluye a $\mathbf{X}(D_1)$. Si $\mathbf{Y}$: $D_2 \to \mathbf{R}^3$ es cualquier reparametrización suave de $\mathbf{X}$, entonces sucede que

$$\iint_{\mathbf{Y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

si $\mathbf{Y}$ preserva la orientación, o bien, que

$$\iint_{\mathbf{Y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

si $\mathbf{Y}$ invierte la orientación.

Debido al teorema 2.5, definir una integral vectorial de superficie sobre una superficie suave es una tarea más sutil y difícil que definir una integral escalar de superficie. Dada una superficie conectada y suave, necesitamos escoger una **orientación** para ella. Esto está muy relacionado con la orientación de una curva pero, tal vez de manera sorprendente, no siempre es posible, aun para una superficie parametrizada suave de buen comportamiento, como se ilustra en el ejemplo 8.

A continuación se da una definición formal de la capacidad de orientación de una superficie suave.

DEFINICIÓN 2.6 Una superficie conectada suave S es **orientable** (o **de dos lados**) si es posible definir un solo vector normal unitario en cada punto de S, de modo que la colección de estos vectores normales varíe continuamente sobre S (en particular, esto significa que los vectores normales unitarios cercanos deben apuntar hacia el mismo lado de S). En otro caso, S recibe el nombre de **no orientable** (o **de un lado**).

Es un hecho (sugerido con claridad por la figura 7.21) que una superficie S orientable, conectada y suave tiene exactamente dos orientaciones.

Si ocurre que S es la imagen $\mathbf{X}(D)$ de una superficie suave y parametrizada $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$, entonces los vectores normales

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t \quad \text{y} \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}_t \times \mathbf{T}_s = -\mathbf{N}_1$$

Figura 7.21 Se muestran las dos posibles orientaciones de una superficie S orientable y conectada.

pueden usarse para dar vectores normales unitarios $\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1/\|\mathbf{N}_1\|$ y $\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2/\|\mathbf{N}_2\|$ que apuntan en direcciones opuestas. Es tentador pensar que $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ siempre proporcionan dos orientaciones para S. Sin embargo, aun cuando $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ puedan variar continuamente con respecto de los parámetros s y t, no es evidente que deban variar de manera continua y consistente con respecto de los puntos sobre la superficie subyacente S. El ejemplo 8 es un caso famoso de superficie no orientable.

EJEMPLO 8 La superficie parametrizada por

$$\begin{cases} x = \left(1 + t\cos\dfrac{s}{2}\right)\cos s \\ y = \left(1 + t\cos\dfrac{s}{2}\right)\operatorname{sen} s \\ z = t\operatorname{sen}\dfrac{s}{2} \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2\pi,\ -\tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2}$$

se llama **banda de Möbius**. Puede visualizarse como sigue: la curva en coordenadas t en $s = s_0$ es

$$\begin{cases} x = \left(\cos s_0 \cos\dfrac{s_0}{2}\right)t + \cos s_0 \\ y = \left(\operatorname{sen} s_0 \cos\dfrac{s_0}{2}\right)t + \operatorname{sen} s_0 \\ z = \left(\operatorname{sen}\dfrac{s_0}{2}\right)t \end{cases} \qquad -\tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2}.$$

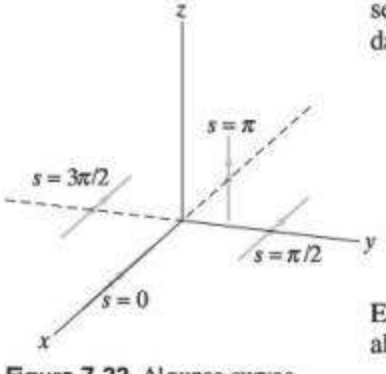


Figura 7.22 Algunas curvas en coordenadas t de la banda de Möbius parametrizada.

Este es un segmento de recta que pasa por el punto $(\cos s_0, \operatorname{sen} s_0, 0)$ y es paralelo al vector

$$\mathbf{a} = \cos s_0 \cos\left(\frac{s_0}{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen} s_0 \cos\left(\frac{s_0}{2}\right)\mathbf{j} + \operatorname{sen}\left(\frac{s_0}{2}\right)\mathbf{k}.$$

En la figura 7.22 se ilustran varias de tales curvas coordenadas, marcadas con la dirección en que t es creciente. Vemos que la banda de Möbius se genera por un segmento de recta móvil que comienza (en $s = 0$) y está a lo largo del eje x positivo, sube a una posición vertical con centro en $(-1, 0, 0)$ cuando $s = \pi$, y después cae de nuevo a la horizontal, pero con la *dirección invertida* en $s = 2\pi$. La curva en coordenadas s en $t = 0$ es parametrizada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \cos s \\ y = \operatorname{sen} s \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

por lo que es un círculo en el plano xy. En la figura 7.23 se muestra la banda de Möbius completa. El lector puede construir un modelo físico con una banda de papel a la que dé un medio giro para luego unirla por sus extremos.

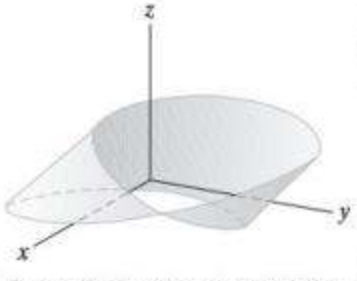


Figura 7.23 La banda de Möbius del ejemplo 8.

El lector puede comprender todo el proceso en forma analítica si observa que el mapa

$$\mathbf{X}: [0, 2\pi] \times \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \to \mathbf{R}^3$$

define la banda de Möbius como una superficie parametrizada que tiene la propiedad de que $\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}(2\pi, -t)$ pero en otro caso es uno a uno. Por lo anterior, todo punto $(0, t)$ en el borde izquierdo del dominio rectangular $[0, 2\pi] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ es mapeado al punto $(1 + t, 0, 0)$ de la banda de Möbius, como ocurre con el punto $(2\pi, -t)$ sobre el borde derecho del rectángulo (véase la figura 7.24).

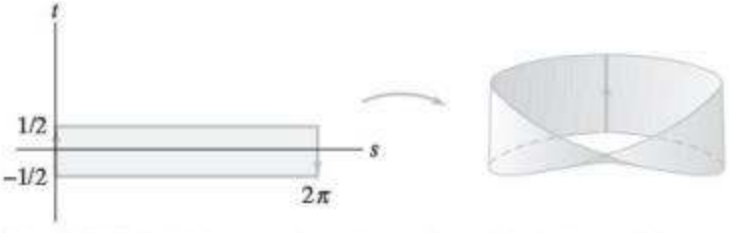


Figura 7.24 Se deben pegar los extremos de una banda de papel de modo que la alineación de las flechas dé un modelo de la banda de Möbius.

Ahora investigaremos la susceptibilidad de orientación de la banda de Möbius. El vector normal estándar es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(s, t) = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\mathbf{k} \\ &= \operatorname{sen}\frac{s}{2}\left(\cos s + 2t\left(\cos^3\frac{s}{2} - \cos\frac{s}{2}\right)\right)\mathbf{i} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(4\cos\frac{s}{2} - 4\cos^3\frac{s}{2} + t\left(1 + \cos s - \cos^2 s\right)\right)\mathbf{j} \\ &\quad - \cos\frac{s}{2}\left(1 + t\cos\frac{s}{2}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\mathbf{N}(0, t) = \frac{t}{2}\mathbf{j} - (1 + t)\mathbf{k},$$

y

$$\mathbf{N}(2\pi, -t) = -\frac{t}{2}\mathbf{j} + (1 + t)\mathbf{k} = -\mathbf{N}(0, t).$$

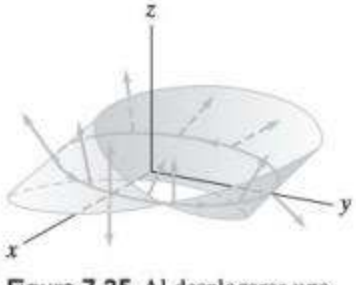


Figura 7.25 Al desplazarse una vez alrededor de la trayectoria circular sobre la banda de Möbius se fuerza al vector normal a invertir su dirección.

Por lo tanto, no se ha definido un vector normal determinado en forma única. De manera más vívida, imagine que recorre la banda de Möbius por la trayectoria en coordenadas s en $t = 0$, es decir, a lo largo de la trayectoria circular

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{X}(s, 0) = (\cos s, \operatorname{sen} s, 0),\ 0 \le s \le 2\pi.$$

Siga la normal estándar $\mathbf{N}$. En $s = 0$ es $\mathbf{N}(0, 0) = -\mathbf{k}$, pero para el momento en que cerramos el lazo, es $\mathbf{N}(2\pi, 0) = \mathbf{k}$. Esta aparente inversión del vector normal significa que la banda no es orientable en absoluto (es de **un solo lado**), (Véase la figura 7.25). ◆

Una superficie orientable suave, junto con una elección explícita de la orientación, recibe el nombre de superficie **orientada**. Si S es una de tales superficies, entonces definimos la integral vectorial de superficie de $\mathbf{F}$ a lo largo de S por medio de encontrar una parametrización $\mathbf{X}$ adecuada y suave para S, de modo que el vector

normal unitario $\mathbf{N}(s, t)/\|\mathbf{N}(s, t)\|$ que surge de la parametrización coincida con la elección de la normal de la orientación. Hacemos que la integral de superficie sea

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

De acuerdo con el teorema 2.5, si $\mathbf{Y}$ es cualquier reparametrización que preserve la orientación de $\mathbf{X}$, el valor de $\iint_{\mathbf{Y}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es el mismo que el de $\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, por lo que el concepto de integral de superficie sobre la superficie orientada subyacente S está bien definido. Aun cuando podemos perfectamente calcular $\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{X}$ es la banda de Möbius parametrizada del ejemplo 8, no tiene sentido considerar la integral de superficie sobre dicha banda subyacente, puesto que no hay forma de orientarla. De manera similar, la interpretación de la integral vectorial de superficie como el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie solo tiene sentido una vez que se elige la orientación de la superficie. Entonces, el flujo mide la tasa de flujo, positiva o negativa, lo que depende de la elección de la orientación (véase la figura 7.26).

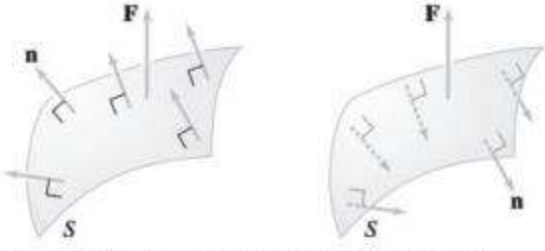


Figura 7.26 Forma en que el flujo depende de la orientación. Por la izquierda, la superficie S está orientada por vectores normales unitarios de modo que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ es positivo en todo punto. Así, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ es positiva. Por la derecha, se da a S la orientación opuesta de modo que el flujo $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} < 0$.

Otra razón para restar importancia al papel de la parametrización en las integrales de superficie es que con frecuencia es posible aprovechar la geometría de la superficie subyacente y el campo vectorial en el momento de hacer los cálculos. Si S es una superficie orientable y suave, y $\mathbf{n}$ una normal unitaria que da una orientación a S (por lo que en particular se entiende que $\mathbf{n}$ varía con los puntos de S), entonces, para un campo vectorial continuo, con $\mathbf{F}$ definido sobre S, tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Si podemos determinar un vector normal unitario continuamente variable en cada punto de S (por ejemplo, si S es la gráfica de una función $f(x, y)$ de dos variables o la gráfica de un conjunto de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función de tres variables), entonces hay una probabilidad alta de que la integral de superficie pueda evaluarse con facilidad.

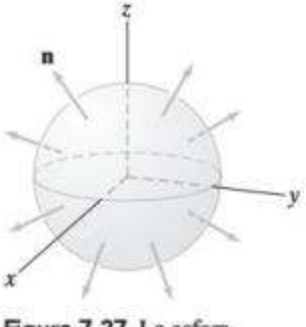


Figura 7.27 La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientada por medio de vectores normales unitarios que apuntan hacia afuera.

EJEMPLO 9 Establezca $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ como un campo vectorial radial y suponga que S es la esfera de radio a con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Se orienta S por medio de apuntar hacia afuera vectores normales unitarios, como se aprecia en la figura 7.27. Calculamos el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S de dos formas: (1) mediante una parametrización de S, y (2) por medio de consideraciones geométricas, es decir, sin recurrir a una parametrización explícita de la esfera.

Con el enfoque (1) se usa la parametrización usual $\mathbf{X}$ de la esfera:

$$\begin{cases} x = a\cos s\ \operatorname{sen} t \\ y = a\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen} t \\ z = a\cos t \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2\pi,\ 0 \le t \le \pi.$$

El vector normal estándar de esta parametrización es

$$\mathbf{N}(s, t) = -a^2 \operatorname{sen} t\,(\cos s \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}).$$

(Este vector normal se calcula en el ejemplo 11 de la sección 7.1). Si normalizamos $\mathbf{N}$, encontramos que

$$\mathbf{n}(s, t) = \frac{\mathbf{N}(s, t)}{\|\mathbf{N}(s, t)\|} = -(\cos s \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}).$$

Por consiguiente, $\mathbf{n}$ apunta hacia dentro en cada punto de la esfera. Por lo tanto, si usamos la parametrización que acaba de darse, al evaluar la integral vectorial de superficie debemos hacer un cambio de signo. En consecuencia, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{X}(s, t)) \cdot \mathbf{N}(s, t)\, ds\, dt \\
&= -\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (a \cos s \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + a \cos t\,\mathbf{k}) \\
&\quad \cdot \left(-a^2 \operatorname{sen} t\,(\cos s \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}\right) ds\, dt \\
&= a^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,(\cos^2 s \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, ds\, dt \\
&= a^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, ds\, dt = 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt = 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

Ahora reconsideremos este cálculo con el enfoque (2). Puesto que S está definida como un conjunto de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, pueden obtenerse vectores normales a partir del gradiente:

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

Si normalizamos el gradiente, tenemos vectores normales unitarios. Por consiguiente:

$$\mathbf{n} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{a},$$

ya que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en puntos sobre S (observe el lector que $\mathbf{n}$ siempre apunta hacia afuera). Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}\right) dS \\
&= \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a}\, dS = \iint_S \frac{a^2}{a}\, dS \\
&= a \iint_S dS = a \cdot \text{área de } S = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

◆

Todos los comentarios precedentes se refieren a integrales escalares y vectoriales de superficie que pueden adaptarse para definir integrales sobre superficies conectadas, suaves y por partes. Simplemente se suman las contribuciones de las integrales de superficie sobre las distintas partes suaves. El único problema es el de

la orientación, pero si se supone que cada una de las partes suaves es orientable, entonces es posible dar una orientación a la superficie como un todo. A continuación se describe la manera de hacerlo: suponga que S_1 y S_2 son dos superficies suaves y por partes que se encuentran a lo largo de un borde curvo C. Sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ los respectivos vectores unitarios normales que dan las orientaciones a S_1 y S_2. Entonces, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ dan cada uno una orientación de C según la regla de la mano derecha (para ver esto, en el caso de $j = 1, 2$ apunte el lector su pulgar de la mano derecha a lo largo de $\mathbf{n}_j$; la dirección de sus dedos indica la orientación de C). Si C recibe orientaciones *opuestas* de $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, entonces S_1 y S_2 están orientadas en forma consistente; si C recibe la misma orientación, entonces S_1 y S_2 no lo están (véase la figura 7.28).

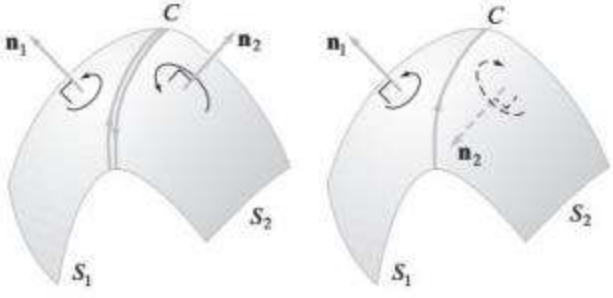


Figura 7.28 La superficie suave por partes $S = S_1 \cup S_2$ orientada de manera consistente sobre la izquierda e inconsistente sobre la derecha.

EJEMPLO 10 Evaluaremos $\iint_S (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el cilindro cerrado acotado lateralmente por $x^2 + y^2 = 4$, y abajo y arriba por los planos $z = 0$ y $z = 5$, orientado por vectores normales hacia afuera.

Es evidente que S es la unión de tres partes orientadas suaves: (1) la superficie inferior S_1, que es una fracción del plano $z = 0$, orientada por $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$; (2) la superficie superior S_2, que es una parte del plano $z = 5$, orientada por $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$, y (3) la superficie lateral cilíndrica S_3 dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y orientada por el gradiente de normalización de $x^2 + y^2$ a lo largo de S_3, que es:

$$\mathbf{n}_3 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}.$$

Para una visualización de S véase la figura 7.29.

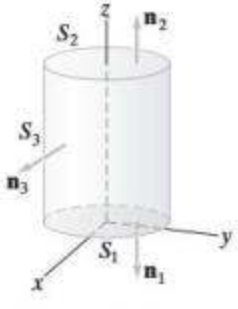


Figura 7.29 La superficie cilíndrica suave por partes S del ejemplo 10, mostrada con las orientaciones normales.

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} \\
&\quad + \iint_{S_3} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_{S_1} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{k})\, dS + \iint_{S_2} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}\, dS \\
&\quad + \iint_{S_3} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}\right) dS \\
&= 0 + 0 + \iint_{S_3} \tfrac{1}{2}(x^4 + y^4)\, dS.
\end{aligned}$$

Para terminar la evaluación parametrizamos S_3 mediante:

$$\begin{cases} x = 2\cos s \\ y = 2\operatorname{sen} s \\ z = t \end{cases} \quad 0 \le s \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 5.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_3} \tfrac{1}{2}(x^4 + y^4)\, dS \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(16\cos^4 s + 16\operatorname{sen}^4 s)\, 2\, ds\, dt \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 16(\cos^4 s + \operatorname{sen}^4 s)\, ds\, dt \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 16((\cos^2 s)^2 + (\operatorname{sen}^2 s)^2)\, ds\, dt \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 16\left(\left(\frac{1+\cos 2s}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2s}{2}\right)^2\right) ds\, dt, \end{aligned}$$

a partir de la sustitución de los ángulos medios. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \iint_S (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \tfrac{16}{4}(2 + 2\cos^2 2s)\, ds\, dt \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} (8 + 4(1 + \cos 4s))\, ds\, dt. \end{aligned}$$

Utilizando una vez más la sustitución del ángulo medio obtenemos:

$$\iint_S (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^5 (12s + \operatorname{sen} 4s)\Big|_{s=0}^{2\pi} dt = \int_0^5 24\pi\, dt = 120\pi. \quad \blacklozenge$$

Resumen. Fórmulas de las integrales de superficie:

Integrales escalares de superficie:

Para una superficie S parametrizada por $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$\iint_S f\, dS = \iint_{\mathbf{X}} f\, dS = \iint_D f(\mathbf{X}(s,t))\, \|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\|\, ds\, dt.$$

El elemento de área superficial es $dS = \|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t\|\, ds\, dt$.

Para una superficie S descrita como la gráfica de una función $z = g(x, y)$, donde g: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{g_x(x, y)^2 + g_y(x, y)^2 + 1}\, dx\, dy.$$

El elemento de área superficial es $dS = \sqrt{g_x(x, y)^2 + g_y(x, y)^2 + 1}\, dx\, dy$.

Integrales vectoriales de superficie:

Para una superficie S parametrizada por $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s,t)) \cdot \mathbf{N}(s,t)\, ds\, dt,$$

donde $\mathbf{N} = \mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_t$ y $\mathbf{n} = \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$.

El elemento de la integral vectorial de superficie es $d\mathbf{S} = \mathbf{N}(s,t)\, ds\, dt$.

Para una superficie S descrita como una gráfica de una función $z = g(x, y)$, donde g: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$$

$$= \iint_D \mathbf{F}(x, y, g(x,y)) \cdot (-g_x(x,y)\,\mathbf{i} - g_y(x,y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy.$$

Aquí $\mathbf{n} = (-g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}$.

El elemento de la integral vectorial de superficie es $\mathbf{S} = (-g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})dx\, dy$.

Apéndice. Demostraciones de los teoremas 2.4 y 2.5

Comenzaremos por establecer la fórmula (11) de esta sección.

■ **Lema** Suponga que $\mathbf{X}$: $D_1 \to \mathbf{R}^3$ es una superficie parametrizada suave y $\mathbf{Y}$: $D_2 \to \mathbf{R}^3$ es una reparametrización suave de $\mathbf{X}$ por medio de $\mathbf{H}$: $D_2 \to D_1$, donde denotamos a $\mathbf{H}(s,t)$ por medio de (u, v). Entonces, los vectores normales estándar $\mathbf{N}_\mathbf{X}$ y $\mathbf{N}_\mathbf{Y}$ se relacionan con la ecuación

$$\mathbf{N}_\mathbf{Y}(s,t) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\, \mathbf{N}_\mathbf{X}(u,v).$$

DEMOSTRACIÓN En primer lugar establecemos alguna notación. Como $\mathbf{Y}$ es una reparametrización de $\mathbf{X}$ por medio de $\mathbf{H}$, por la definición 2.3 tenemos que

$$\mathbf{Y}(s,t) = \mathbf{X}(\mathbf{H}(s,t)) = \mathbf{X}(u,v). \tag{12}$$

Escribimos $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ para denotar $\mathbf{Y}(s,t)$ y $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ para denotar $\mathbf{X}(u,v)$, aun cuando esto es un pequeño abuso de la notación.

Según la fórmula (7) de la sección 7.1, tenemos

$$\mathbf{N}_\mathbf{Y}(s,t) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}\,\mathbf{i} - \frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\,\mathbf{k}.$$

Si aplicamos la regla de la cadena a la ecuación (12), obtenemos:

$$D\mathbf{Y}(s,t) = D\mathbf{X}(u,v)\, D\mathbf{H}(s,t).$$

Al escribir esta ecuación matricial queda así:

$$\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix},$$

donde x_s, x_t, etc. denotan derivadas parciales de las funciones componente de $\mathbf{Y}$, y x_u, x_v, etc. son las derivadas parciales de las funciones componente de $\mathbf{X}$. Es cuestión de efectuar la multiplicación de matrices para comprobar que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_s & x_t \end{bmatrix} &= \text{primer renglón de } D\mathbf{Y}(s,t)\\ &= \text{primer renglón del producto } D\mathbf{X}(u,v)D\mathbf{H}(s,t)\\ &= (\text{primer renglón de } D\mathbf{X}(u,v)) \cdot D\mathbf{H}(s,t)\\ &= \begin{bmatrix} x_u & x_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Se obtienen resultados similares para el segundo y tercer renglones de $D\mathbf{Y}(s, t)$. Podemos recombinar estos resultados acerca de los renglones y establecer las ecuaciones matriciales siguientes:

$$\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ z_s & z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{bmatrix} y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix}.$$

Al obtener determinantes encontramos que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)},$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)},$$

y

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.$$

Así, al volver a la fórmula original para $\mathbf{N}_\mathbf{Y}$ encontramos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_\mathbf{Y}(s,t) &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\mathbf{k}\\ &= \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\mathbf{N}_\mathbf{X}(u,v),\end{aligned}$$

como se deseaba. ■

Demostración del teorema 2.4 Usamos la definición 2.1 y el teorema del cambio de variables para integrales dobles. Por consiguiente, según la definición 2.1 y el lema que se acaba de demostrar,

$$\begin{aligned}\iint_\mathbf{Y} f\,dS &= \iint_{D_2} f(\mathbf{Y}(s,t))\,\|\mathbf{N}_\mathbf{Y}(s,t)\|\,ds\,dt\\ &= \iint_{D_2} f(\mathbf{X}(\mathbf{H}(s,t)))\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|\|\mathbf{N}_\mathbf{X}(u(s,t),v(s,t))\|\,ds\,dt.\end{aligned}$$

A partir del teorema del cambio de variables se infiere que

$$\iint_{\mathbf{Y}} f\,dS = \iint_{D_1} f(\mathbf{X}(u,v))\,\|\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(u,v)\|\,du\,dv = \iint_{\mathbf{X}} f\,dS,$$

según la definición 2.1. ■

Demostración del teorema 2.5 Este resultado puede establecerse con base en la demostración anterior. Al comenzar con la definición 2.2 y usar el lema recién establecido tenemos que

$$\iint_{\mathbf{Y}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_2} \mathbf{F}(\mathbf{Y}(s,t))\cdot\mathbf{N}_{\mathbf{Y}}(s,t)\,ds\,dt$$

$$= \iint_{D_2} \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{H}(s,t)))\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\,\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(u(s,t),v(s,t))\,ds\,dt.$$

Por lo tanto,

$$\iint_{\mathbf{Y}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \pm\iint_{D_2} \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{H}(s,t)))\cdot\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(u(s,t),v(s,t))\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt,$$

donde tomamos el signo "+" si $\mathbf{Y}$ es una reparametrización que conserva la orientación de $\mathbf{X}$ (ya que el jacobiano $\partial(u,v)/\partial(s,t)$ es positivo y por ello igual a su valor absoluto) y el signo "−" si $\mathbf{Y}$ invierte la orientación. Según el teorema de cambio de variables, esta última expresión es igual a

$$\pm\iint_{D_1} \mathbf{F}(\mathbf{X}(u,v))\cdot\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(u,v)\,du\,dv = \pm\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},$$

de acuerdo con la definición 2.2. ■

7.2 Ejercicios

1. Sea $\mathbf{X}(s,t) = (s, s+t, t)$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 2$. Encuentre
$$\iint_{\mathbf{X}} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS.$$

2. Sea $D = \{(s,t) \mid s^2 + t^2 \le 1,\ s \ge 0, t \ge 0\}$, y sea $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$ definida por $\mathbf{X}(s,t) = (s+t, s-t, st)$.
   a) Determine $\iint_{\mathbf{X}} f\,dS$, donde $f(x,y,z) = 4$.
   b) Encuentre el valor de $\iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

3. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de la superficie S que consta de la región triangular del plano $2x - 2y + z = 2$ que es cortado por los planos de coordenadas. Use una normal que apunte hacia arriba para orientar S.

4. Este problema tiene que ver con las dos superficies dadas en forma paramétrica como
$$\mathbf{X}(s,t) = (s\cos t, s\,\text{sen}\,t, 3s^2),$$
$$0 \le s \le 2,\ 0 \le t \le 2\pi,$$
y
$$\mathbf{Y}(s,t) = (2s\cos t, 2s\,\text{sen}\,t, 12s^2),$$
$$0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 4\pi.$$
   a) Demuestre que las imágenes de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son iguales. (Sugerencia: dé ecuaciones en x, y y z para las superficies en $\mathbf{R}^3$ parametrizadas por $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$).
   b) Calcule $\iint_{\mathbf{X}} (y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot d\mathbf{S}$ y $\iint_{\mathbf{Y}} (y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot d\mathbf{S}$. Armonice sus respuestas.

5. Encuentre $\iint_S x^2\,dS$, donde S es la superficie del cubo $[-2,2]\times[-2,2]\times[-2,2]$.

6. Encuentre $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, donde S es la superficie lateral del cilindro de radio a y altura h cuyo eje es el eje z.

7. Sea S una esfera de radio a.
   a) Encuentre $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$,
   b) Use simetría y el inciso anterior para obtener con facilidad $\iint_S y^2\,dS$.

8. Sea que S denote la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

a) Use consideraciones de simetría para evaluar $\iint_S x\,dS$ *sin* parametrizar la esfera.

b) Sea $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Use simetría para determinar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ sin parametrizar la esfera.

9. Establezca que S denota la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $-2 \le z \le 2$ y considere la integral de superficie

$$\iint_S (z - x^2 - y^2)\,dS.$$

a) Utilice una parametrización apropiada de S para calcular el valor de la integral.

b) Ahora utilice geometría y simetría para evaluar la integral sin recurrir a una parametrización de la superficie.

En los ejercicios 10 a 18, sea que S denote el cilindro cerrado con la parte inferior dada por $z = 0$, la parte superior dada por $z = 4$ y la superficie lateral dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Oriente S con normales hacia afuera. Determine el escalar indicado y las integrales vectoriales de superficie.

10. $\iint_S z\,dS$ **11.** $\iint_S y\,dS$

12. $\iint_S xyz\,dS$ **13.** $\iint_S x^2\,dS$

14. $\iint_S (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S}$ **15.** $\iint_S z\,\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}$

16. $\iint_S y^3\,\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$ **17.** $\iint_S (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S}$

18. $\iint_S x^2\,\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$

En los ejercicios 19 a 22 encuentre el flujo del campo vectorial dado $\mathbf{F}$ *a través del hemisferio superior $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$. Oriente el hemisferio con una normal que apunte hacia arriba.*

19. $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j}$ **20.** $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$

21. $\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **22.** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$

23. Sea S la helicoidal parametrizada $\mathbf{X}(s, t) = (s \cos t, s \operatorname{sen} t, t)$ con $0 \le s \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$. Determine el flujo de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ a través de S.

24. Sea $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Encuentre $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$, entre los planos $z = -2$ y $z = 1$, orientado con una normal que apunta hacia arriba.

25. Halle el flujo de $\mathbf{F} = y^3z\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$ a través de la parte de la superficie $z = ye^x$ que se encuentra sobre el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ en el plano xy, orientado con una normal hacia arriba.

26. Sea que S denote el tetraedro con vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, orientado con una normal hacia afuera, y sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$. Determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

27. Sea S la superficie en forma de embudo definida por $x^2 + y^2 = z^2$, para $1 \le z \le 9$ y $x^2 + y^2 = 1$, para $0 \le z \le 1$.

a) Dibuje S.

b) Determine vectores unitarios normales a S que apunten hacia afuera.

c) Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y S está orientada por normales hacia afuera.

28. El domo de vidrio de un invernadero futurista tiene la forma de la superficie $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$. El invernadero tiene un piso de tierra plano en $z = 0$. Suponga que la temperatura T, en los puntos dentro y alrededor del invernadero, varía con la expresión

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3(z - 2)^2.$$

Entonces la temperatura da lugar a un **campo H de densidad de flujo de calor** dado por $\mathbf{H} = -k\nabla T$, (Aquí k es una constante positiva que depende de las propiedades aislantes del medio particular). Encuentre el flujo total de calor hacia afuera a través del domo y la superficie del terreno si $k = 1$ sobre el vidrio y $k = 3$ sobre el piso.

29. La superficie dada por $\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, donde

$$\begin{cases} x = \left(a + \cos\dfrac{s}{2}\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}\dfrac{s}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\cos s \\ y = \left(a + \cos\dfrac{s}{2}\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}\dfrac{s}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\operatorname{sen} s \\ z = \operatorname{sen}\dfrac{s}{2}\operatorname{sen} t + \cos\dfrac{s}{2}\operatorname{sen} 2t \end{cases},$$

a es una constante positiva y $0 \le s \le 2\pi$, $0 \le t \le 2\pi$ se conoce como **botella de Klein**.

a) Use una computadora para graficar esta superficie para $a = 2$.

b) Determine (y describa) la curva en coordenadas s en $t = 0$.

c) Calcule el vector normal estándar $\mathbf{N}$ a lo largo de la curva en coordenadas s en $t = 0$, es decir, encuentre $\mathbf{N}(s, 0)$. Observe que $\mathbf{X}(0, 0) = \mathbf{X}(2\pi, 0)$. Utilizando la comparación de $\mathbf{N}(0, 0)$ y $\mathbf{N}(2\pi, 0)$ comente acerca de la posibilidad de orientar la botella de Klein (véase el ejemplo 8).

7.3 Teoremas de Stokes y de Gauss

A continuación estudiaremos dos resultados importantes: el teorema de Stokes, que relaciona las integrales de superficie con las de línea, y el teorema de Gauss, que relaciona las integrales de superficie con las triples. Junto con el teorema de Green, los de Stokes y Gauss constituyen el núcleo del análisis vectorial integral y, como se explica en la sección siguiente, pueden usarse para establecer otros resultados tanto en matemáticas como en física.

Teorema de Stokes

El teorema de Stokes iguala la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial C^1 sobre una superficie orientable, suave y por partes con la integral de línea del campo vectorial a lo largo de la(s) curva(s) de frontera de la superficie. Como tanto las integrales vectoriales de línea como las de superficie son ejemplos de integrales **orientadas**, es decir, dependen de las orientaciones particulares escogidas, debemos hacer algunos comentarios acerca de la forma en que es necesario tomar las orientaciones.

DEFINICIÓN 3.1 Sea S una superficie orientada, suave, por partes y acotada en $\mathbf{R}^3$. Sea C' cualquier curva cerrada simple que esté en S. Considere el vector normal unitario $\mathbf{n}$ que indique la orientación de S en cualquier punto dentro de C'. Use $\mathbf{n}$ para orientar C' por medio de la regla de la mano derecha, de modo que si el pulgar de dicha mano apunta a lo largo de $\mathbf{n}$, entonces los dedos están doblados en la dirección de la orientación de C' (en forma equivalente, si el lector mira hacia el extremo inferior de $\mathbf{n}$, la dirección de C' debería ser tal que la parte de S acotada por C' está a la *izquierda*). Decimos que C' con la orientación que acabamos de describir está **orientada en forma consistente** con S, o que la orientación es la **inducida** de la de S. Ahora suponga el lector que la frontera ∂S de S consta de un número grande pero finito de curvas cerradas simples y C^1 por partes. Entonces, decimos que ∂S está **orientada en forma consistente** (o que ∂S tiene su **orientación inducida** de la de S) si cada una de sus partes cerradas y simples está orientada en forma consistente con S.

En la figura 7.30 se presentan algunos ejemplos de superficies orientadas con fronteras orientadas en forma consistente. Si la orientación de S se invierte, entonces la orientación de ∂S también debe invertirse si ha de permanecer consistente con la nueva orientación de S.

Ahora plantearemos una versión más general del teorema de Stokes, cuya prueba se bosqueja en el apéndice de esta sección.

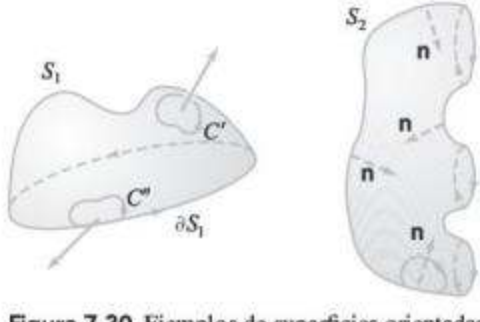


Figura 7.30 Ejemplos de superficies orientadas y curvas que están en ellas con orientaciones consistentes. A la derecha, la frontera de S_2 consta de tres curvas cerradas y simples.

TEOREMA 3.2 (TEOREMA DE STOKES) Sea S una superficie orientada, suave, por partes y acotada en $\mathbf{R}^3$. Suponga que ∂S consta de un número grande pero finito de curvas cerradas simples y de C^1 por partes, cada una de las cuales está orientada en forma consistente con S. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 cuyo dominio incluye S. Entonces,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

El teorema 3.2 dice que la "rotación infinitesimal" total (neta), o torcimiento, de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre una superficie S es igual a la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo solo de la frontera de S.

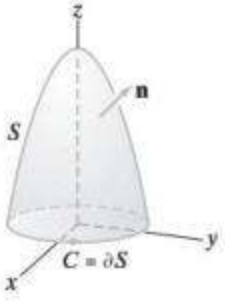


Figura 7.31
El paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ orientado con la normal $\mathbf{n}$ hacia arriba. Advierta que el círculo de la frontera C está orientado en forma consistente con S.

EJEMPLO 1 Sea S el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ definido sobre el disco en el plano xy de radio 3, es decir, S está definido solo por $z \geq 0$. Entonces ∂S consta del círculo

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 9, z = 0\}.$$

Oriente S con el vector normal unitario $\mathbf{n}$ (véase la figura 7.31). Verificaremos el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2z - y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}.$$

Calculamos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2z - y & x + z & 3x - 2y \end{vmatrix}$$

$$= (-2 - 1)\mathbf{i} + (2 - 3)\mathbf{j} + (1 - (-1))\mathbf{k} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Un vector $\mathbf{N}$ normal que apunte hacia arriba es dado por

$$\mathbf{N} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

(Por supuesto, este vector puede ser normalizado para dar una "orientación normal" $\mathbf{n}$). Por lo tanto, utilizando la fórmula (5) de la sección 7.2 tenemos lo siguiente, donde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (-3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (-6x - 2y + 2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D -6x\,dx\,dy - \iint_D 2y\,dx\,dy + \iint_D 2\,dx\,dy.$$

Por la simetría de D y el hecho de que $-6x$ y $2y$ son funciones impares, tenemos que las primeras dos integrales dobles son iguales a cero. La última integral doble da dos veces el área de D. Por consiguiente,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 2 \cdot \pi(3^2) = 18\pi.$$

Por otro lado, podemos parametrizar la frontera de S como

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\,t \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(Esta parametrización da la orientación deseada para ∂S). Entonces,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0 - 3\operatorname{sen} t, 3\cos t + 0, 9\cos t - 6\operatorname{sen} t) \cdot (-3\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 9\, dt = 18\pi,$$

lo que coincide. ◆

EJEMPLO 2 Considere la superficie S definida por la ecuación $z = e^{-(x^2+y^2)}$ para $z \geq 1/e$, es decir, S es la gráfica de $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ definida sobre $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sea

$$\mathbf{F} = (e^{y+z} - 2y)\,\mathbf{i} + (xe^{y+z} + y)\,\mathbf{j} + e^{x+y}\,\mathbf{k}.$$

Entonces no importa de qué manera orientemos a S, podemos ver que $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ parece imposible de calcular. Por lo tanto, supongamos que tomamos el vector normal que apunta hacia arriba

$$\mathbf{N} = 2xe^{-(x^2+y^2)}\,\mathbf{i} + 2ye^{-(x^2+y^2)}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Entonces, puesto que

$$\nabla \times \mathbf{F} = (e^{x+y} - xe^{y+z})\,\mathbf{i} + (e^{y+z} - e^{x+y})\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

(el lector tal vez desee comprobar esto), utilizando la fórmula (5) de la sección 7.2, encontramos que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_D \left[2xe^{-(x^2+y^2)}(e^{x+y} - xe^{y+z}) + 2ye^{-(x^2+y^2)}(e^{y+z} - e^{x+y}) + 2\right] dx\, dy.$$

No intentaremos avanzar más en este cálculo.

En este punto resulta tentador utilizar el teorema de Stokes, ya que la frontera de S es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1/e$ (véase la figura 7.32). Si parametrizamos este círculo por medio de:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

entonces

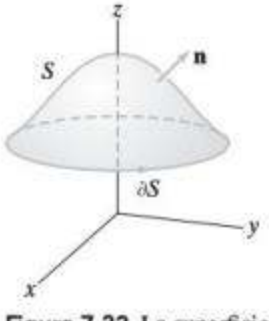


Figura 7.32 La superficie $S = \{(x, y, z) \mid z = e^{-(x^2+y^2)}, z \geq 1/e\}$ tiene la frontera $\partial S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1/e\}$.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \int_0^{2\pi} (e^{\operatorname{sen} t + 1/e} - 2\operatorname{sen} t, \cos t\, e^{\operatorname{sen} t + 1/e} + \operatorname{sen} t, e^{\cos t + \operatorname{sen} t}) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t + 1/e} + \cos^2 t\, e^{\operatorname{sen} t + 1/e} + \cos t \operatorname{sen} t)\, dt.$$

Otra vez estamos en dificultades.

Sin embargo, el poder del teorema de Stokes es que si S' es *cualquier* superficie suave, por partes y orientable, cuya frontera $\partial S'$ es la misma que ∂S, entonces, suje-

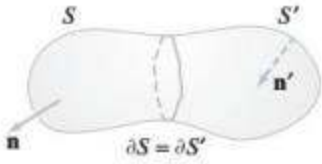


Figura 7.33 Tanto S como S' tienen la misma frontera y están orientadas como se indica. Por lo tanto, según el teorema de Stokes: $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

to a orientar S' en forma apropiada:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S'} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

En consecuencia, ¡podemos evaluar $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ utilizando una superficie diferente! (Véase la figura 7.33).

Para usar este hecho a nuestro favor observamos que $\nabla \times \mathbf{F}$ tiene una componente $\mathbf{k}$ particularmente simple. Por consiguiente, sea S' el disco unitario en $z = 1/e$:

$$S' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1/e\}.$$

En consecuencia, si orientamos S' por medio del vector normal unitario $\mathbf{n} = +\mathbf{k}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S'} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{S'} (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS \\ &= \iint_{S'} 2\, dS = 2 \cdot \text{área de } S' = 2\pi. \end{aligned}$$

◆

Teorema de Gauss

El **teorema de Gauss**, también conocido como el **teorema de la divergencia**, relaciona la integral vectorial de superficie sobre una superficie cerrada, con una integral triple sobre la región sólida encerrada por la superficie. Igual que el teorema de Stokes, el de Gauss ayuda a hacer algunos cálculos, si bien la importancia del resultado va mucho más allá de calcular.

TEOREMA 3.3 (TEOREMA DE GAUSS) Sea D una región sólida acotada en $\mathbf{R}^3$ cuya frontera ∂D consta de un número grande, finito, de superficies orientables, cerradas, suaves y por partes, cada una de las cuales es orientada por una normal unitaria que apunta *hacia afuera de D* (véase la figura 7.34). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 cuyo dominio incluye a D. Entonces,

$$\iiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

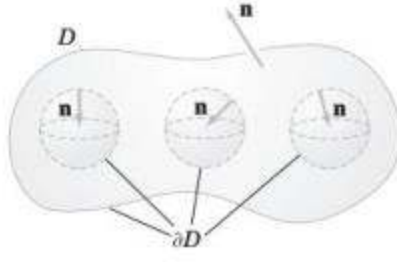


Figura 7.34 Una región sólida D cuyas superficies de frontera están orientadas de modo que se aplica el teorema de Gauss.

Por superficie *cerrada* nos referimos a aquella sin curvas de frontera, como una esfera o un cubo. El símbolo $\iint$ se utiliza para indicar una integral de superficie tomada sobre una superficie cerrada, o superficies cerradas.

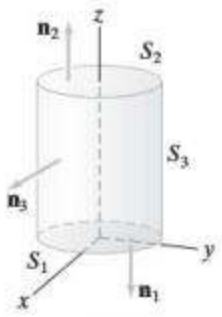


Figura 7.35 El cilindro sólido D del ejemplo 3.

El teorema de Gauss afirma que la "divergencia total" de un campo vectorial en una región acotada en el espacio es igual al flujo del campo vectorial hacia afuera de la región, es decir, el flujo a través de la(s) superficie(s) de frontera.

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial radial $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y sea D el cilindro sólido de radio a y altura b, localizado de manera que el eje del cilindro es el eje z y las partes superior e inferior del cilindro son $z = b$ y $z = 0$ (véase la figura 7.35). Comprobaremos el teorema de Gauss para este campo vectorial y la región sólida.

La frontera de D consta de tres elementos suaves: (1) la superficie inferior S_1 que es parte del plano $z = 0$ y orientada por la normal $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$, (2) la superficie superior S_2 que forma parte del plano $z = b$ y está orientada por el vector normal $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$ y (3) una parte del cilindro lateral S_3 dada por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ y orientada por el vector unitario $\mathbf{n}_3 = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/a$ (el vector $\mathbf{n}_3$ puede obtenerse normalizando el gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ que define a S_3 como un conjunto de nivel). Entonces,

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_{S_1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{k})\, dS + \iint_{S_2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\, dS \\
&\quad + \iint_{S_3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{a}\right) dS \\
&= \iint_{S_1} -z\, dS + \iint_{S_2} z\, dS + \iint_{S_3} \frac{x^2 + y^2}{a}\, dS \\
&= 0 + \iint_{S_2} b\, dS + \iint_{S_3} \frac{a^2}{a}\, dS,
\end{aligned}$$

puesto que a lo largo de S_1, z es igual a 0; a lo largo de S_2, z es igual a b y a lo largo de S_3, $x^2 + y^2 = a^2$. Por consiguiente,

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = b\cdot\text{área de } S_2 + a\cdot\text{área de } S_3 = b\pi a^2 + a(2\pi ab) = 3\pi a^2 b,$$

de fórmulas geométricas conocidas.

Por otro lado,

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

de modo que

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\cdot\text{volumen de } D = 3\pi a^2 b,$$

lo que se comprueba con facilidad. ◆

En general, si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y D es una región a la que se aplica el teorema de Gauss, entonces

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\cdot\text{volumen de } D.$$

Por lo que:

$$\frac{1}{3}\oiint_{\partial D} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot d\mathbf{S} = \text{volumen de } D.$$

Por lo tanto, podemos usar integrales de superficie para calcular volúmenes en forma muy parecida a como utilizamos el teorema de Green para calcular áreas de regiones planas por medio de integrales de línea apropiadas (véase la sección 6.2, en especial los ejemplos 2 y 3).

EJEMPLO 4 Sea

$$\mathbf{F} = e^y \cos z\,\mathbf{i} + \sqrt{x^3 + 1}\,\operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + 3)\,\mathbf{k},$$

y sea S la gráfica de

$$z = (1 - x^2 - y^2)e^{1-x^2-3y^2} \quad \text{para } z \geq 0,$$

orientada por el vector normal unitario que apunta hacia arriba. No es difícil ver que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es imposible de evaluar en forma directa. Sin embargo, veremos la manera en que el teorema de Gauss provee un modo indirecto y elegante de hacerlo.

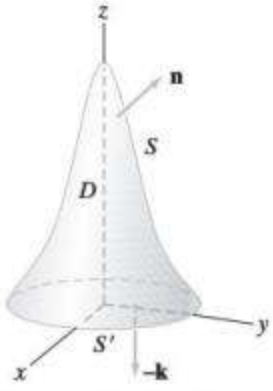


Figura 7.36 La unión de las superficies S y S' encierran una región sólida D en la que se puede aplicar el teorema de Gauss.

Considere la superficie *cerrada*, suave y por partes creada por la unión de S y S', donde S' es la parte del plano $z = 0$ encerrada por ∂S, es decir, el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Se orienta S' con la normal unitaria que apunta hacia abajo, $z = -\mathbf{k}$, como se aprecia en la figura 7.36. Observe que $S \cup S'$ forma la frontera de una región sólida D, y que, además, las orientaciones escogidas nos permiten aplicar el teorema de Gauss. Al hacer lo anterior tenemos:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Ahora es sencillo comprobar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ para todo (x, y, z). Por lo tanto, la integral triple es igual a cero, y se tiene que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

por lo que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

En otras palabras, debido a que $\mathbf{F}$ no tiene divergencias, el teorema de Gauss permite reemplazar la integral de superficie original por una que es considerablemente más fácil de evaluar. Por esto, tenemos:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS = \iint_R (x^2 + y^2 + 3)\, dx\, dy,$$

donde R es el disco unitario $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ en el plano. Ahora cambiamos a coordenadas polares para encontrar que:

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2 + y^2 + 3)\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 3) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{3}{2}r^2\right)\Big|_{r=0}^{1} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{7}{4}\, d\theta = \tfrac{7}{2}\pi.\end{aligned}$$

◆

EJEMPLO 5 Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(Este es un ejemplo de un campo vectorial cuadrado inverso). El flujo a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientada por una normal unitaria $\mathbf{n}$ hacia afuera es dado por $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. La normal unitaria a S puede calcularse como sigue:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2)}{\|\nabla(x^2 + y^2 + z^2)\|} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{a},$$

ya que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sobre la superficie de la esfera. En forma similar, podemos escribir $\mathbf{F}(x, y, z)$ como $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/a^3$, siempre que (x, y, z) sea un punto sobre la esfera. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \left(\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{a^3}\right) \cdot \left(\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{a}\right) dS \\ &= \iint_S \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4}\right) dS \\ &= \iint_S \left(\frac{a^2}{a^4}\right) dS = \frac{1}{a^2}(\text{área superficial de } S) \\ &= \tfrac{1}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi.\end{aligned}$$

Ahora observemos que la derivada parcial de la primera componente de $\mathbf{F}$ con respecto de x es

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Así, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, por lo que cualquier integral triple de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ debe ser igual a cero. Esto parecería contradecir el teorema de Gauss. No obstante, no hay contradicción. Advierta el lector que el campo vectorial $\mathbf{F}$ no está definido en el origen. Por lo tanto, no se satisface la hipótesis de que $\mathbf{F}$ esté definida en la región sólida encerrada por S, por lo que en esta situación no se aplica el teorema de Gauss. ◆

El significado de la divergencia y el rotacional

Parte de la importancia de los teoremas de Stokes y de Gauss es que dan una forma de comprender el significado de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial, además de las definiciones basadas en coordenadas planteadas en la sección 3.4. A manera de explicación ofrecemos los dos resultados siguientes:

Figura 7.37 Esfera de radio a usada para entender la divergencia de un campo vectorial.

PROPOSICIÓN 3.4 Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en cierta vecindad del punto P en $\mathbf{R}^3$. Sea que S_a denote la esfera de radio a con centro en P, orientada con una normal hacia afuera (véase la figura 7.37). Entonces,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{a \to 0^+} \frac{3}{4\pi a^3} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

DEMOSTRACIÓN Por el teorema de Gauss tenemos que

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{3}{4\pi a^3} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{a \to 0^+} \frac{3}{4\pi a^3} \iiint_{D_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV, \tag{1}$$

donde D_a es la esfera sólida de radio a encerrada por S_a. A continuación usamos un resultado conocido como el **teorema del valor medio para integrales triples**, que dice que si f es una función continua de tres variables, y D es una región sólida en el espacio, conectada y acotada, entonces hay algún punto $Q \in D$, tal que

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = f(Q) \cdot \text{volumen de } D.$$

En la situación actual, este resultado implica que debe haber algún punto $Q \in D_a$, tal que

$$\iiint_{D_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) \cdot (\text{volumen de } D_a) = \left(\tfrac{4}{3}\pi a^3\right) \operatorname{div} \mathbf{F}(Q). \tag{2}$$

Al aplicar la fórmula (2) a la (1), tenemos:

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{3}{4\pi a^3} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{a \to 0^+} \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = \operatorname{div} \mathbf{F}(P),$$

ya que cuando $a \to 0^+$, la esfera D_a se hace más pequeña, "reduciendo" a Q en P. ■

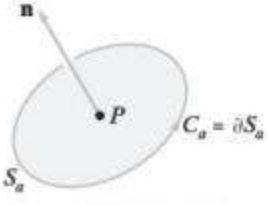


Figura 7.38 Círculo de radio a con centro en P.

PROPOSICIÓN 3.5 Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en una vecindad del punto P en $\mathbf{R}^3$. Sea C_a el círculo de radio a con centro en P situado en el plano que contiene a P y que es perpendicular al vector unitario $\mathbf{n}$ (véase la figura 7.38). Entonces, la componente del rotacional $\mathbf{F}(P)$ en la dirección $\mathbf{n}$ es:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rotacional } \mathbf{F}(P) = \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde C_a es orientada por la regla de la mano derecha con respecto de $\mathbf{n}$.

DEMOSTRACIÓN Sea que S_a denote al disco de radio a en el plano de C_a encerrado por C_a. Por el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \iint_{S_a} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \iint_{S_a} (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \end{aligned} \tag{3}$$

Hay un teorema del valor medio para las integrales de superficie (similar al de las integrales triples que se usó en la demostración de la proposición 3.4), el cual permite concluir que debe haber algún punto Q en S_a para el que:

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS &= (\nabla \times \mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n})(\text{área de } S_a) \\ &= \pi a^2 (\nabla \times \mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \tag{4}$$

ya que S_a es un disco de radio a. Por lo tanto, utilizando las ecuaciones (3) y (4) encontramos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} (\pi a^2 \nabla \times \mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n}) \\ &= \lim_{a \to 0^+} \nabla \times \mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n} \\ &= \nabla \times \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

ya que $Q \to P$ cuando $a \to 0^+$. ■

Las proposiciones 3.4 y 3.5 justifican nuestras afirmaciones hechas en la sección 3.4 acerca de los significados intuitivos de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial. La cantidad $\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ usada en la proposición 3.4 es el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera S_a, por lo que

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{3}{4\pi a^3} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

es precisamente el límite del flujo por unidad de volumen, o la **densidad de flujo de** $\mathbf{F}$ en P. De manera similar,

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

es el límite de la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C_a por unidad de área, o la **densidad de circulación** de $\mathbf{F}$ en el punto P alrededor de $\mathbf{n}$. En particular, la proposición 3.5 demuestra que el rotacional $\mathbf{F}(P)$ es el vector cuya dirección maximiza la densidad de circulación de $\mathbf{F}$ en P y cuya magnitud es igual a la densidad de circulación alrededor de esa dirección (o en otro caso, el rotacional $\mathbf{F}(P)$ es igual a $\mathbf{0}$ si la densidad de circulación es cero).

En realidad podemos cambiar por completo nuestro enfoque para la divergencia y el rotacional, y en lugar de definir estos por medio de coordenadas y el operador del y demostrar las proposiciones 3.4 y 3.5, usamos las fórmulas de las integrales de superficie y línea de dichas proposiciones para *definir* la divergencia y el rotacional y obtener las formulaciones de las coordenadas a partir de las fórmulas de la integral límite.

Escribimos $\mathbf{F}$ como

$$M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

donde M, N y P son funciones de clase C^1 en una vecindad del punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Demostraremos cómo recuperar la fórmula de coordenadas:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

a partir de la fórmula en la proposición 3.5. (Puede plantearse un argumento similar para obtener la fórmula de coordenadas para la divergencia, se invita al lector a desarrollar los detalles). La idea es dejar al vector unitario $\mathbf{n}$ igual, a su vez, a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la fórmula en la proposición 3.5 y, con ello, determinar las componentes del rotacional.

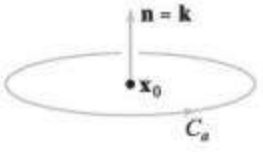


Figura 7.39
Configuración que se necesita para calcular la componente $\mathbf{k}$ del rotacional $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ utilizando la proposición 3.5.

En primer lugar, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, por lo que C_a es el círculo de radio a en el plano horizontal $z = z_0$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de $\mathbf{k}$ (véase la figura 7.39). Entonces, C_a puede parametrizarse con:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + a\,\text{sen}\,t \\ z = z_0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (M(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{i} + N(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{j} + P(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{k}) \cdot (-a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} (-\text{sen}\,t\,M(\mathbf{x}(t)) + \cos t\,N(\mathbf{x}(t)))\,dt. \end{aligned}$$

A continuación se usa la fórmula de Taylor de primer orden (véase la sección 4.1) sobre M y N, que opera cerca de $\mathbf{x}_0$, es decir, para $(x, y, z) \approx (x_0, y_0, z_0)$,

$$M(x, y, z) \approx M(\mathbf{x}_0) + M_x(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + M_y(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + M_z(\mathbf{x}_0)(z - z_0);$$

$$N(x, y, z) \approx N(\mathbf{x}_0) + N_x(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + N_y(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + N_z(\mathbf{x}_0)(z - z_0).$$

A lo largo del pequeño círculo C_a tenemos que $x - x_0 = a \cos t$, $y - y_0 = a \operatorname{sen} t$ y $z - z_0 = 0$, por lo que, utilizando las aproximaciones para M y N, tenemos:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &\approx a \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen} t\,[M(\mathbf{x}_0) + M_x(\mathbf{x}_0) a \cos t + M_y(\mathbf{x}_0) a \operatorname{sen} t\,]\,dt \\
&\quad + a \int_0^{2\pi} \cos t [N(\mathbf{x}_0) + N_x(\mathbf{x}_0) a \cos t + N_y(\mathbf{x}_0) a \operatorname{sen} t\,]\,dt \\
&= -aM(\mathbf{x}_0) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt - a^2 M_x(\mathbf{x}_0) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt \\
&\quad - a^2 M_y(\mathbf{x}_0) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt + aN(\mathbf{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos t\, dt \\
&\quad + a^2 N_x(\mathbf{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt + a^2 N_y(\mathbf{x}_0) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se cumple porque $M(\mathbf{x}_0)$, $M_x(\mathbf{x}_0)$, etc., no involucran a t y por ello pueden sacarse de las integrales apropiadas. El lector puede comprobar que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi.$$

Por lo tanto, la aproximación en (5) se simplifica así:

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \approx -\pi a^2 M_y(\mathbf{x}_0) + \pi a^2 N_x(\mathbf{x}_0).$$

Ahora, el error involucrado en la aproximación para $\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ tiende a cero cuando C_a se vuelve cada vez más pequeño. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \cdot \text{rotacional } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \lim_{a \to 0^+} \left(-M_y(\mathbf{x}_0) + N_x(\mathbf{x}_0)\right) \\
&= N_x(\mathbf{x}_0) - M_y(\mathbf{x}_0).
\end{aligned}$$

Si hacemos $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, de modo que C_a es el círculo parametrizado por

$$\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{sen} t \\ y = y_0 \\ z = z_0 + a \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

entonces un argumento muy similar al que se acaba de dar demuestra que

$$\mathbf{j} \cdot \text{rotacional } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = M_z(\mathbf{x}_0) - P_x(\mathbf{x}_0).$$

Por último, sea $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, de modo que C_a es parametrizado por

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a\cos t \\ z = z_0 + a\,\text{sen}\,t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

para encontrar

$$\mathbf{i} \cdot \text{rotacional } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = P_y(\mathbf{x}_0) - N_z(\mathbf{x}_0).$$

Vemos que las componentes **i**-, **j**- y **k**- del rotacional de **F** son como se establecieron en la sección 3.4.

Apéndice. Demostraciones de los teoremas de Stokes y Gauss

Demostración del teorema de Stokes

Paso 1. Comenzaremos por establecer un caso muy especial del teorema, aquel en que el campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}$ (es decir, **F** solo tiene una componente **i**) y la superficie S es la gráfica de $z = f(x, y)$, donde f es de clase C^1 en un dominio D en el plano que es una región elemental tipo 1 (véase la figura 7.40). Para ser más explícitos, la región D es

$$\{(x, y) \mid \gamma(x) \le y \le \delta(x),\ a \le x \le b\},$$

donde γ y δ son funciones continuas. Supondremos que S es orientada por la normal unitaria que apunta hacia arriba.

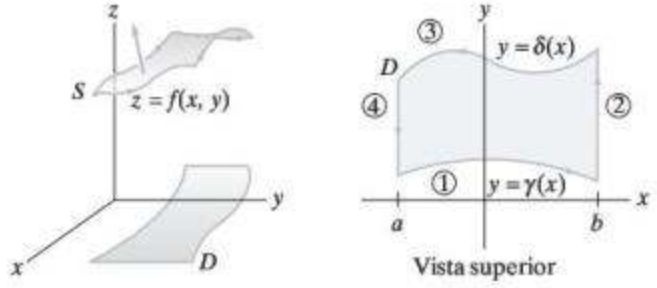


Figura 7.40 La superficie S es la gráfica de $f(x, y)$ para (x, y) en la región D tipo 1 que se ilustra a la derecha.

En primer lugar se evalúa $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. La frontera ∂S consta de (al menos) cuatro elementos suaves parametrizados como sigue (las curvas suscritas corresponden a los números encerrados en un círculo en la figura 7.40).

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \gamma(t) \\ z = f(t, \gamma(t)) \end{cases} \quad a \le t \le b; \qquad C_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t \\ z = f(b, t) \end{cases} \quad \gamma(b) \le t \le \delta(b);$$

$$C_3 : \begin{cases} x = t \\ y = \delta(t) \\ z = f(t, \delta(t)) \end{cases} \quad a \le t \le b; \qquad C_4 : \begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = f(a, t) \end{cases} \quad \gamma(a) \le t \le \delta(a).$$

Las parametrizaciones mostradas para C_3 y C_4 inducen las orientaciones *opuestas* a las indicadas en la figura 7.40. Por lo tanto,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Considere la integral sobre C_1. Como $\mathbf{F}$ solo tiene una componente, la $\mathbf{i}$,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} M\,dx + 0\,dy + 0\,dz = \int_a^b M(t, \gamma(t), f(t, \gamma(t)))\,dt.$$

La integral de línea $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ puede calcularse en una forma similar a la de $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. En particular, se obtiene:

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b M(t, \delta(t), f(t, \delta(t)))\,dt.$$

Para la integral sobre C_2, observe el lector que x se mantiene constante. Entonces,

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} M\,dx = 0.$$

Del mismo modo, $\int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. El resultado es

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b M(t, \gamma(t), f(t, \gamma(t)))\,dt - \int_a^b M(t, \delta(t), f(t, \delta(t)))\,dt$$

$$= \int_a^b [M(x, \gamma(x), f(x, \gamma(x))) - M(x, \delta(x), f(x, \delta(x)))]\,dx. \qquad (6)$$

(En esta última desigualdad hemos hecho un cambio en la variable de integración).

Ahora comparemos la integral de línea con la de superficie $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Para $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}$, tenemos que $\nabla \times \mathbf{F} = M_z\,\mathbf{j} - M_y\,\mathbf{k}$, de modo que la fórmula (5) de la sección 7.2 produce lo siguiente:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (M_z\,\mathbf{j} - M_y\,\mathbf{k}) \cdot (-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \left(-\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy\,dx.$$

La regla de la cadena implica que

$$\frac{\partial}{\partial y}(M(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Así, utilizando el teorema fundamental del cálculo, tenemos:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} -\frac{\partial}{\partial y}(M(x, y, f(x, y)))\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b -M(x, y, f(x, y))\Big|_{y=\gamma(x)}^{y=\delta(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b [-M(x, \delta(x), f(x, \delta(x))) + M(x, \gamma(x), f(x, \gamma(x)))]\,dx,$$

lo que concuerda con la ecuación (6).

Este resultado se extiende con facilidad a superficies que sean las gráficas de $z = f(x, y)$, donde el punto (x, y) varía en una región arbitraria D en el plano xy a través de un proceso de dos etapas: primero se establece el resultado para regiones D que se pueden subdividir en un número grande pero finito de regiones de tipo 1, y luego se aplica un argumento limitante similar al que se mencionó en la demostración del teorema de Green en la sección 6.2.

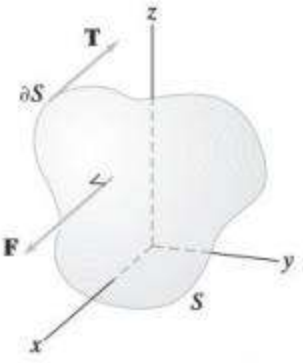


Figura 7.41 La superficie S es una parte del plano $x = c$. Si $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}$, entonces $\mathbf{F}$ siempre es perpendicular a S, en particular a cualquier vector $\mathbf{T}$ tangente a ∂S.

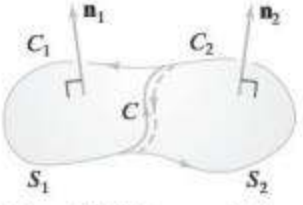


Figura 7.42 Las superficies S_1 y S_2 comparten la curva C como parte de sus fronteras. C recibe una orientación cuando parte de ∂S_1 y la opuesta cuando parte de ∂S_2.

Paso 2. Todavía con $\mathbf{F} = M\mathbf{i}$, observe que el argumento dado en el paso 1 funciona igual de bien para superficies de la forma $y = f(x, z)$, tan solo se cambian los roles de y y z en todo el paso 1.

Tampoco es difícil ver que si S es una parte del plano $x = c$ (donde c es una constante), entonces el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = M\mathbf{i}$ también se cumple para este caso. Por un lado, $\mathbf{n} = \pm\mathbf{i}$ para un plano como ese (lo que depende de la orientación escogida) y $\nabla \times \mathbf{F} = M_z\,\mathbf{j} - M_y\,\mathbf{k}$, como hemos visto. Entonces,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S 0\, dS = 0.$$

Por otro lado, como $\mathbf{F}$ solo tiene una componente $\mathbf{i}$, $\mathbf{F}$ siempre es paralela a $\mathbf{n}$ y, por lo tanto, perpendicular a cualquier vector tangente a S, inclusive a vectores tangentes a cualesquiera curvas de frontera de S. Por consiguiente, también $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ (véase la figura 7.41). Ahora suponga que $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son cada una de las gráficas de $z = f(x, y)$, la gráfica de $y = f(x, y)$ o una parte del plano $x = c$. Suponga que S_1 y S_2 coinciden a lo largo de parte de sus fronteras, como se ilustra en la figura 7.42. Las superficies S_1 y S_2 heredan orientaciones compatibles de S. Si C denota la parte común de ∂S_1 y ∂S_2, entonces podemos escribir ∂S_1 como $C_1 \cup C$, y ∂S_2 como $C_2 \cup C$, donde C_1 y C_2 son disjuntas (excepto en sus extremos). Si ∂S_i está orientado en forma consistente con S_i para $i = 1, 2$, entonces observe que C estará orientado en un sentido como parte de ∂S_1 y en el sentido *opuesto* como parte de ∂S_2. Desde este punto de vista, estaremos de acuerdo con que C denota la curva orientada de modo que concuerda con la orientación de ∂S_1.

Ahora se cumple el teorema de Stokes con $\mathbf{F} = M\mathbf{i}$ tanto para S_1 como para S_2; sobre S_1 tenemos:

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \tag{7}$$

mientras que sobre S_2 tenemos

$$\iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \tag{8}$$

en vista de los comentarios hechos acerca de la orientación de C. Ahora consideremos $S = S_1 \cup S_2$, con la observación de que C *no* es parte de ∂S. Vemos que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Al usar las ecuaciones (7) y (8) y cancelar, encontramos que:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por consiguiente, en este caso se cumple el teorema de Stokes o, en realidad, en el caso en que S pueda escribirse como una unión finita $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ de las superficies especiales que se acaban de describir.

Desde un punto de vista práctico, cualesquiera superficies particulares que sea probable que encuentre el lector serán susceptibles de descomponerse como uniones finitas de los tipos especiales de las superficies descritas previamente. Sin embargo, no todas las superficies suaves por partes son, en realidad, de esta forma. De manera que para realizar una demostración verdaderamente general del teorema de Stokes cuando $\mathbf{F} = M\mathbf{i}$ son necesarios algunos argumentos sobre límites, los cuales omitiremos.

Paso 3. Por último, al permutar las variables en esencia repetimos los pasos 1 y 2 en los casos en que $\mathbf{F} = N(x, y, z)\mathbf{j}$ o $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{k}$. En general, por la aditividad

del rotacional tenemos que:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times (M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_S \nabla \times (M\,\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \nabla \times (N\,\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$+ \iint_S \nabla \times (P\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Al utilizar las versiones del teorema de Stokes que acabamos de establecer, vemos que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} M\,\mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial S} N\,\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial S} P\,\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s},$$

$$= \oint_{\partial S} (M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

como se buscaba. ■

Demostración del teorema de Gauss

Paso 1. Demostraremos un caso muy especial del teorema de Gauss, que es aquel en que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{k}$ (donde $P(x, y, z)$ es de clase C^1 en un dominio que incluye la región sólida D) y donde D es una región elemental de tipo 1, como se ilustra en la figura 7.43. Denotamos la superficie de frontera inferior de D mediante S_1 y la tomamos para que esté dada por la ecuación $z = \varphi(x, y)$, donde φ es de clase C^1 y, de manera similar, hacemos que S_2 denote la superficie de frontera superior y suponemos que es dada por la ecuación $z = \psi(x, y)$, donde ψ también es de clase C^1. La superficie de frontera lateral se denota con S_3; se puede reducir a una curva o ser el vacío, pero de otro modo es un cilindro sobre la curva de frontera de una región R en el plano que forma la sombra de D.

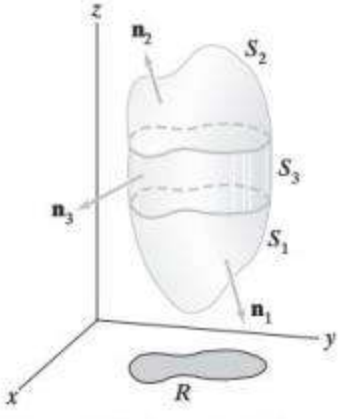


Figura 7.43 La región de tipo 1 D y su región sombra R en el plano xy.

Al orientar $\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con vectores normales que apuntan hacia afuera tenemos:

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

La orientación que es normal a S_1 debe ser la que apunta hacia abajo, por lo que es paralela a $\varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} - \mathbf{k}$, lo opuesto del vector normal obtenido de la parametrización estándar de S_1. Por lo tanto, utilizando la fórmula (5) de la sección 7.2 tenemos que:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R P(x, y, \varphi(x, y))\,\mathbf{k} \cdot (\varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} - \mathbf{k})\,dx\,dy$$

$$= -\iint_R P(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy.$$

En forma similar, la orientación normal a S_2 debe ser la que apunta hacia arriba, por lo que:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R P(x, y, \psi(x, y)) \cdot (-\psi_x\,\mathbf{i} - \psi_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy$$

$$= \iint_R P(x, y, \psi(x, y))\,dx\,dy.$$

Ahora, la superficie lateral S_3, si no es el vacío, es un cilindro sobre una curva en el plano xy. En consecuencia, S_3 es definida por una o más ecuaciones de la forma $g(x, y) = c$.

Se sigue que cualquier vector normal a S_3 puede *no* tener la componente $\mathbf{k}$. Así,

$$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_3} (P\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_3)\, dS = \iint_{S_3} 0\, dS = 0.$$

Al reunir estos resultados encontramos que:

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R [P(x, y, \psi(x, y)) - P(x, y, \varphi(x, y))]\, dx\, dy.$$

Por otro lado, si $\mathbf{F} = P\mathbf{k}$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial P/\partial z$, de modo que según el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned}\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV &= \iint_R \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx\, dy \\ &= \iint_R [P(x, y, \psi(x, y)) - P(x, y, \varphi(x, y))]\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso especial se cumple el teorema de Gauss.

Paso 2. Repetiremos el paso 1 para $\mathbf{F} = M\mathbf{i}$ y D que es una región elemental de tipo 2, y para $\mathbf{F} = N\mathbf{j}$ y D de tipo 3. Si D es una región elemental de tipo 4 (lo que significa que D es simultáneamente de tipos 1, 2 y 3), entonces

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_{\partial D} (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\partial D} M\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\partial D} N\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\partial D} P\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_D \nabla \cdot M\mathbf{i}\, dV + \iiint_D \nabla \cdot N\mathbf{j}\, dV + \iiint_D \nabla \cdot P\mathbf{k}\, dV \\ &= \iiint_D \nabla \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})\, dV \\ &= \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.\end{aligned}$$

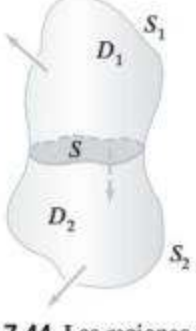


Figura 7.44 Las regiones D_1 y D_2 comparten la superficie S como parte de sus fronteras. Esta superficie común S hereda una orientación como parte de ∂D_1 y la opuesta como parte de ∂D_2.

Paso 3. Suponga el lector que $D = D_1 \cup D_2$, donde cada una de D_1 y D_2 es una región elemental de tipo 4, y que D_1 y D_2 coinciden solo a lo largo de parte de sus fronteras, como se muestra en la figura 7.44. Sea que S denote la parte común de ∂D_1 y ∂D_2. Entonces, escribimos ∂D_1 como $S_1 \cup S$ y ∂D_2 como $S_2 \cup S$, donde S_1 y S_2 son disjuntas (excepto quizás a lo largo de partes de sus fronteras respectivas). Si orientamos ∂D_1 y ∂D_2 con normales hacia afuera de modo que se satisfagan las hipótesis del teorema de Gauss, entonces S estará orientada en un sentido como parte de ∂D_1 y en el sentido *opuesto* como una parte de ∂D_2. Acordaremos que el símbolo S denote la superficie orientada de modo que coincida con la orientación de ∂D_1.

Al aplicar el teorema de Gauss tanto a D_1 como a D_2 obtenemos:

$$\iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\partial D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\partial D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Al combinar estas dos últimas ecuaciones encontramos que:

$$\begin{aligned}\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV &= \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV + \iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},\end{aligned}$$

porque $\partial D = S_1 \cup S_2$.

Paso 4. El resultado del paso 3 puede extenderse a regiones D susceptibles de descomponerse como una unión grande pero finita de muchas regiones tipo 4. Sin embargo, no todas las regiones a las que es aplicable el teorema de Gauss cumplen este criterio. En consecuencia, para llevar a cabo una demostración verdaderamente general, otra vez es necesario un argumento que utilice límites apropiados de regiones y sus integrales, lo cual omitiremos. ■

7.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 compruebe el teorema de Stokes para la superficie y el campo vectorial que se dan.

1. S es definida por $x^2 + y^2 + 5z = 1$, $z \geq 0$, orientada por la normal hacia arriba;
$$\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}.$$
2. S está parametrizada por $\mathbf{X}(s, t) = (s \cos t, s \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi/2$;
$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}.$$
3. S está definida por $x = \sqrt{16 - y^2 - z^2}$;
$$\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$
4. S se define por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \leq 0$, orientada por la normal hacia abajo;
$$\mathbf{F} = (2y - z)\,\mathbf{i} + (x + y^2 - z)\,\mathbf{j} + (4y - 3x)\,\mathbf{k}.$$
5. Sea S la "superficie de un silo", es decir, que S es la unión de dos superficies suaves S_1 y S_2, donde S_1 es definida por
$$x^2 + y^2 = 9, \qquad 0 \leq z \leq 8$$
y S_2 es definida por
$$x^2 + y^2 + (z - 8)^2 = 9, \qquad z \geq 8.$$
Encuentre $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde
$$\mathbf{F} = (x^3 + xz + yz^2)\,\mathbf{i} + (xyz^3 + y^7)\,\mathbf{j} + x^2 z^5\,\mathbf{k}.$$

En los ejercicios 6 a 9 compruebe el teorema de Gauss para la región tridimensional D y el campo vectorial $\mathbf{F}$ que se dan.

6. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$
7. $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$, D es el cubo unitario $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$
8. $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 1 \leq z \leq 5\}$
9. $\mathbf{F} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $D = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$
10. Compruebe que el teorema de Stokes implica el teorema de Green. (Sugerencia: en el teorema de Stokes tome $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$; es decir, suponga que $\mathbf{F}$ es independiente de z y que su componente $\mathbf{k}$ es idéntica a cero).
11. Sea S la superficie definida por $y = 10 - x^2 - z^2$ con $y \geq 1$, orientada con la normal que apunta hacia la derecha. Sea
$$\mathbf{F} = (2xyz + 5z)\,\mathbf{i} + e^x \cos yz\,\mathbf{j} + x^2 y\,\mathbf{k}.$$
Determine
$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$
(Sugerencia: necesitará un enfoque indirecto.)
12. Sea S la superficie definida como $z = 4 - 4x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y orientada por una normal con componente $\mathbf{k}$ no negativa. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + e^{y^2}\,\mathbf{j} + ze^{xy}\,\mathbf{k}$. Encuentre $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. (Sugerencia: argumente que puede integrar sobre una superficie diferente).
13. *a*) Demuestre que la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)$ se encuentra sobre la superficie $z = 2xy$.
b) Evalúe
$$\oint_C (y^3 + \cos x)\,dx + (\operatorname{sen} y + z^2)\,dy + x\,dz,$$
donde C es la curva cerrada parametrizada y orientada por la trayectoria $\mathbf{x}$ del inciso *a*).

14. Sea que S consta de las cuatro caras laterales y la del fondo de un cubo con vértices en $(\pm a, \pm a, \pm a)$. Oriente S con normales que apunten hacia afuera. Evalúe $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $F = x^2yz^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + xe^x \operatorname{sen} yz\,\mathbf{k}$.

15. Use el teorema de Stokes para encontrar el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{F} = (xyz - e^x)\mathbf{i} - xyz\mathbf{j} + (x^2yz + \operatorname{sen} z)\mathbf{k}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de segmentos de recta de (0, 0, 0) a (1, 1, 1), luego a (0, 0, 2) y de regreso a (0, 0, 0).

16. Sea que C es una curva cerrada y simple que está en el plano $2x - 3y + 5z = 17$. Demuestre que la integral de línea

$$\oint_C (3\cos x + z)\,dx + (5x - e^y)\,dy - 3y\,dz$$

depende solo del *área* encerrada por C y su orientación, no de su forma particular ni de su ubicación en el plano.

17. Use el teorema de Gauss para encontrar el volumen de la región sólida acotada por los paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$.

18. Sea S definida por $z = e^{1-x^2-y^2}$, $z \geq 1$, orientada por la normal hacia arriba, y sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (2 - 2z)\mathbf{k}$. Use el teorema de Gauss para calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

19. Dé una prueba del teorema de Stokes para superficies parametrizadas y suaves $S = \mathbf{X}(D)$, donde $\mathbf{X}: D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$. Para hacer más fácil la prueba, suponga que $\mathbf{X}$ es de clase C^2 y que es uno a uno en D (en cuyo caso $\partial S = \mathbf{X}(\partial D)$).

20. Use el teorema de Gauss para evaluar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde $\mathbf{F} = ze^{x^2}\,\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + (2 - yz^7)\mathbf{k}$ y S es la unión de las cinco caras "superiores" del cubo unitario $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Es decir, la cara $z = 0$ *no* es parte de S. (Sugerencia: observe que S *no* es cerrada, por lo que para aplicar el teorema de Gauss tendría que cerrarse).

21. En este problema, sea $f(x, y, z)$ una función de variable escalar de clase C^1, y sea D una región en el espacio para la cual se aplica el teorema de Gauss. Sea $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ el vector unitario normal a $S = \partial D$ hacia afuera.

a) Si $\mathbf{a}$ es cualquier vector constante y $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla f \cdot \mathbf{a}$.

b) Utilice el inciso anterior con $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ para demostrar que $\iint_S f n_1\,dS = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dV$. También obtenga resultados similares haciendo que $\mathbf{a}$ sea igual a $\mathbf{j}$ y a $\mathbf{k}$.

c) Defina una cantidad *vectorial* $\iint_S f\,d\mathbf{S} = \iint_S f\mathbf{n}\,dS$ por medio de $\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \left(\iint_S fn_1\,dS, \iint_S fn_2\,dS, \iint_S fn_3\,dS\right)$.

Utilizando las notaciones y definiciones anteriores demuestre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla f\,dV.$$

(Advierta que el lado derecho es una integral triple de una expresión de variable vectorial, por lo que también se calcula integrando cada función escalar componente).

22. Dado un líquido con densidad δ constante, introduzca coordenadas de modo que la superficie (plana) del líquido sea el plano xy y la coordenada z mida la profundidad a partir de la superficie, es decir, el eje z positivo apunta hacia abajo del líquido. Entonces la presión p dentro del fluido debida a la gravedad es dada por $p(x, y, z) = \delta gz$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Suponga que se sumerge un objeto sólido en el líquido. Si el objeto llena una región D en el espacio, entonces la fuerza de flotación total que actúa sobre el sólido es la presión total del líquido sobre la superficie de frontera $S = \partial D$ y es dada por

$$\mathbf{B} = -\iint_S p\mathbf{n}\,dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S, hacia afuera. (El signo negativo se debe a que la presión causa una fuerza que apunta *hacia dentro* del objeto). Use el ejercicio anterior para demostrar el principio de Arquímedes: la magnitud de la fuerza de flotación total ejercida sobre un objeto es igual al peso del líquido desplazado.

23. Escriba una demostración cuidadosa del caso tridimensional del teorema 3.5 del capítulo 6: si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 cuyo dominio es una región simplemente conectada R en $\mathbf{R}^3$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f (de variable escalar) sobre R si y solo si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de R.

24. Sea que S_r denote la esfera de radio r con centro en el origen, orientada con una normal hacia afuera. Suponga que $\mathbf{F}$ es de clase C^1 en todo $\mathbf{R}^3$ y es tal que

$$\iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = ar + b$$

para ciertas constantes fijas a y b.

a) Calcule

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV,$$

donde $D = \{(x, y, z) \mid 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49\}$. (Responda en términos de a y b).

b) Suponga, en la situación que acaba de describirse, que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ para cierto campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1. ¿Qué condiciones pone esto a las constantes a y b?

25. Sea $\mathbf{n}(x, y, z)$ un vector unitario normal a una superficie S. La derivada direccional de una función diferenciable $f(x, y, z)$ en la dirección de $\mathbf{n}$ se llama **derivada normal** de f, y se denota con $\partial f/\partial n$. Del teorema 6.2 del capítulo 2, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n}.$$

a) Sea que S denote la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante (es decir, donde $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), orientada por la normal unitaria que apunta hacia afuera del origen. Sea $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Evalúe

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dS.$$

b) Sea que D denote la parte de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ en el primer octante; es decir,

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Calcule $\iiint_D \nabla \cdot (\nabla f)\, dV$, donde f es como en el inciso *a*).

c) Aplique el teorema de Gauss a la integral del inciso *b*) y reconcilie su resultado con la respuesta del inciso *a*).

26. Suponga que f es tal que para cualquier superficie S cerrada y orientada,

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dS = 0.$$

(Véase el ejercicio 25 para la definición de la derivada normal $\partial f/\partial n$). Demuestre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

es decir, que f es armónica.

27. Utilice la proposición 3.4 para demostrar que

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es una superficie suave, orientable y cerrada que encierra una región D de volumen V (tome a S como orientada por una normal hacia afuera). Debe suponerse que el proceso limitante es tal que D se contrae al punto P.

28. Utilice el resultado del ejercicio 27 para establecer la fórmula de la divergencia de un campo vectorial de C^1

$$\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Es decir, demuestre que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

de la manera siguiente: sea que P tenga coordenadas (x_0, y_0, z_0) y considere al cubo (pequeño) S, con aristas de longitud a, con centro en P y con caras paralelas a los planos coordenados. Advierta que el volumen V encerrado por S es a^3. Ayudará recordar que si $f(x, y, z)$ es diferenciable, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x}.$$

29. En este problema, el lector empleará el resultado del ejercicio 27 para encontrar una expresión para $\nabla \cdot \mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas (véase el teorema 4.5 del capítulo 3). Comience por escribir

$$\mathbf{F} = F_r\,\mathbf{e}_r + F_\theta\,\mathbf{e}_\theta + F_z\,\mathbf{e}_z,$$

donde $F_r(r, \theta, z)$, $F_\theta(r, \theta, z)$ y $F_z(r, \theta, z)$ denotan las componentes de $\mathbf{F}$ en las direcciones $\mathbf{e}_r$-, $\mathbf{e}_\theta$- y $\mathbf{e}_z$- (respectivamente). Sea que P tenga coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Considere el pequeño "cuboide en coordenadas cilíndricas" S que se ilustra en la figura 7.45. Las parejas de caras opuestas corresponden a los valores

$$r - \Delta r/2 \quad \text{y} \quad r + \Delta r/2;$$
$$\theta - \Delta\theta/2 \quad \text{y} \quad \theta + \Delta\theta/2;$$
$$z - \Delta z/2 \quad \text{y} \quad z + \Delta z/2.$$

Advierta que el volumen del cuboide es aproximadamente $r\,\Delta\theta\,\Delta r\,\Delta z$.

a) Aproxime $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (donde S está orientada por un vector normal unitario hacia afuera) advirtiendo que cada cara de S es más o menos plana con un vector normal unitario "obvio" y que $\mathbf{F}$ es aproximadamente constante en cada cara.

b) Use su respuesta del inciso *a*) para calcular la divergencia en coordenadas cilíndricas como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}.$$

(Esto coincide con la fórmula (4) de la sección 3.4).

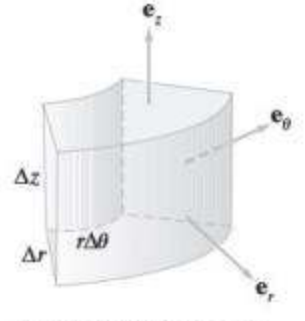


Figura 7.45 Cuboide en coordenadas cilíndricas del ejercicio 29.

30. Use las ideas de los ejercicios 27 y 29 para calcular la divergencia en coordenadas esféricas (véase el teorema 4.6 del capítulo 3). El lector querrá usar el pequeño "cuboide en coordenadas esféricas" S que se muestra en la figura 7.46.

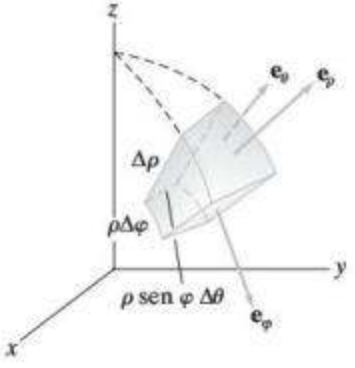


Figura 7.46 El cuboide en coordenadas esféricas del ejercicio 30. El volumen del cuboide es aproximadamente ρ^2 sen $\varphi\ \Delta\theta\ \Delta\varphi\ \Delta\rho$.

Los pares de caras opuestas de S corresponden a los valores

$$\rho - \Delta\rho/2 \quad \text{y} \quad \rho + \Delta\rho/2;$$
$$\varphi - \Delta\varphi/2 \quad \text{y} \quad \varphi + \Delta\varphi/2;$$
$$\theta - \Delta\theta/2 \quad \text{y} \quad \theta + \Delta\theta/2.$$

31. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en una vecindad del punto P en $\mathbf{R}^3$, y sea $\mathbf{n}$ un vector unitario dibujado con su inicio en P. Sea C una curva cerrada y simple, tal que hay una superficie S orientable acotada por C que contiene a P y tal que $\mathbf{n}$ es normal a S en P. Oriente a S utilizando $\mathbf{n}$ y oriente a C en forma consistente con S. Siguiendo la proposición 3.5 demuestre que si A denota el área de S, entonces

$$\mathbf{n} \cdot \text{rotacional}\,\mathbf{F}(P) = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Aquí el proceso limitante se supone que es tal que C se contrae al punto P (véase la figura 7.47).

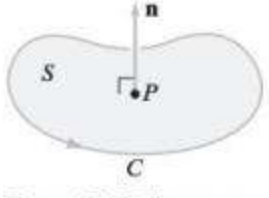


Figura 7.47 Figura para el ejercicio 31.

32. En este problema el lector usará el resultado del ejercicio 31 para determinar una expresión para el rotacional de $\mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas. Comience por escribir

$$\mathbf{F} = F_r\,\mathbf{e}_r + F_\theta\,\mathbf{e}_\theta + F_z\,\mathbf{e}_z.$$

a) Encuentre la componente $\mathbf{e}_z$- del rotacional de $\mathbf{F}$ considerando la trayectoria plana mostrada en la figura 7.48. Los pares de "aristas" opuestas de la trayectoria C aproximadamente rectangular corresponden a los valores

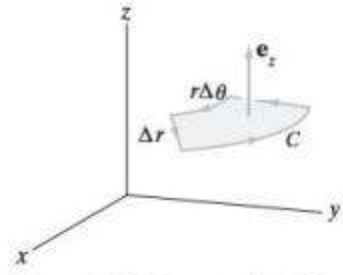


Figura 7.48 Trayectoria C del ejercicio 32(*a*).

$$r - \Delta r/2 \quad \text{y} \quad r + \Delta r/2,$$

y

$$\theta - \Delta\theta/2 \quad \text{y} \quad \theta + \Delta\theta/2$$

(todos con la coordenada z constante). Advierta que el área encerrada por C es aproximadamente $r\ \Delta\theta\ \Delta r$. Aproxime la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizando el hecho de que, para $\Delta\theta$ y Δr pequeños, cada arista de C es aproximadamente recta. Demuestre que

$$\mathbf{e}_z \cdot \text{rotacional}\,\mathbf{F} = -\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta).$$

b) Utilice la trayectoria en la figura 7.49 para demostrar que

$$\mathbf{e}_r \cdot \text{rotacional}\,\mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}.$$

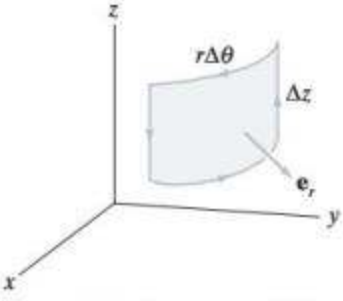


Figura 7.49 Trayectoria C del ejercicio 32(*b*).

c) Use la trayectoria en la figura 7.50 para demostrar que

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \text{rotacional}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}.$$

Combine este resultado con los de los incisos *a*) y *b*) para obtener

$$\text{rotacional}\,\mathbf{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}.$$

(Véase el teorema 4.5 del capítulo 3).

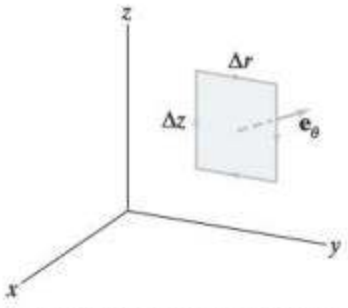


Figura 7.50 La trayectoria C del ejercicio 32(*c*).

33. En este problema el lector determinará una expresión para el rotacional de $\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas. Establezca $\mathbf{F}$ como un campo vectorial de clase C^1 y escriba:

$$\mathbf{F} = F_\rho\,\mathbf{e}_\rho + F_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + F_\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

Demuestre que

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \text{rotacional } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\operatorname{sen}\varphi\, F_\theta) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta}\right],$$

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \text{rotacional } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\theta)\right],$$

y

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \text{rotacional } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right]$$

utilizando el ejercicio 31 y las tres trayectorias mostradas en la figura 7.51. Se concluye que:

$$\text{rotacional } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \rho\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{e}_\theta \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial\theta \\ F_\rho & \rho F_\varphi & \rho\operatorname{sen}\varphi\, F_\theta \end{vmatrix}.$$

(Véase el teorema 4.6 del capítulo 3).

34. De los seis campos vectoriales planos mostrados en la figura 7.52, cuatro tienen una divergencia de cero en las regiones indicadas, y tres tienen un rotacional igual a cero. Considerando integrales apropiadas y utilizando los resultados de los ejercicios 27 y 31, clasifique cada campo vectorial.

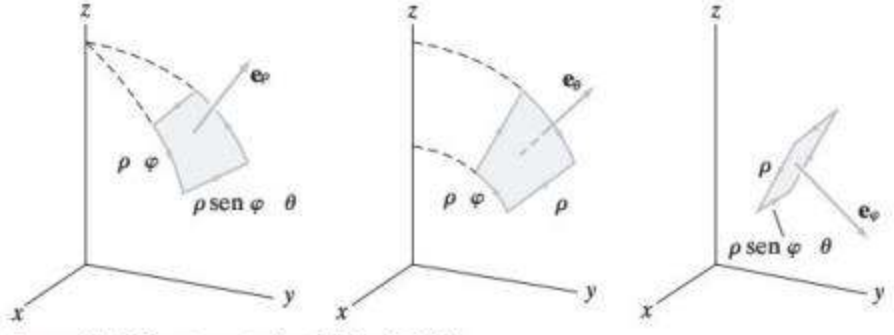


Figura 7.51 Las trayectorias del ejercicio 33.

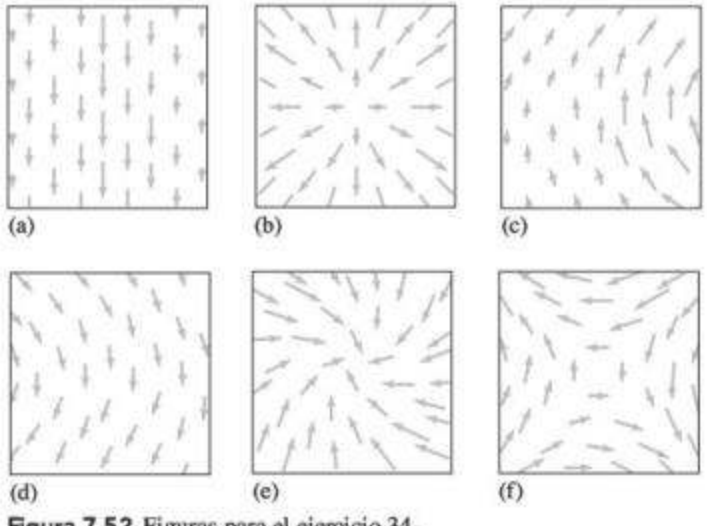


Figura 7.52 Figuras para el ejercicio 34.

7.4 Más sobre análisis vectorial; ecuaciones de Maxwell

En esta sección usaremos los teoremas de Gauss y de Stokes primero para demostrar algunos resultados abstractos del análisis vectorial y después para estudiar las ecuaciones de Maxwell de la electricidad y el magnetismo.

Fórmulas generales de Green

Nuestro propósito en la sección 7.4 es establecer algunos resultados fundamentales del análisis vectorial. A lo largo del análisis todos los campos escalares y vectoriales se definen sobre subconjuntos de $\mathbf{R}^3$.

El siguiente par de resultados se establece con facilidad:

TEOREMA 4.1 (PRIMERA Y SEGUNDA FÓRMULAS DE GREEN) Sean f y g campos escalares de clase C^2, y sea D una región sólida en el espacio, acotada por una superficie, suave y por partes $S = \partial D$, orientada como en el teorema de Gauss. Entonces tenemos:

Primera fórmula de Green:

$$\iiint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \iiint_D f \nabla^2 g \, dV = \oiint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S}.$$

Segunda fórmula de Green:

$$\iiint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \oiint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S}.$$

DEMOSTRACIÓN La primera fórmula se sigue del teorema de Gauss aplicado al campo vectorial $\mathbf{F} = f \nabla g$ (dejamos los detalles para el lector). La segunda fórmula proviene de escribir dos veces la primera:

$$\iiint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \iiint_D f \nabla^2 g \, dV = \oiint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S}; \tag{1}$$

$$\iiint_D \nabla g \cdot \nabla f \, dV + \iiint_D g \nabla^2 f \, dV = \oiint_S g \nabla f \cdot d\mathbf{S}. \tag{2}$$

Ahora, se resta la ecuación (2) de la (1). ■

Demostrar la tercera de las fórmulas de Green requiere mucho más trabajo.

TEOREMA 4.2 (TERCERA FÓRMULA DE GREEN) Suponga que f es una función de clase C^2. Entonces, para $\partial D = S$ orientada como en el teorema de Gauss y puntos $\mathbf{r}$ en el interior de D,

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\nabla^2 f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \, dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left(-f(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \right) + \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

En esta fórmula, dV denota la integración con respecto de las variables en $\mathbf{x} = (x, y, z)$, es decir, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ está fijo en la integración, y el símbolo ∇ significa $\nabla_{\mathbf{x}}$, al diferenciar con respecto de x, y y z.

En el apéndice de esta sección se da una demostración del teorema 4.2.

Una inversión de la fórmula para el Laplaciano

La tercera fórmula de Green es un tipo de **fórmula de inversión** —aquella que permite recuperar los valores de una función f por medio de conocer ciertas integrales que involucran a su gradiente y al Laplaciano. La tercera fórmula de Green es sobre todo de interés técnico en la demostración de otros resultados. Aquí la usamos para obtener una fórmula de inversión para el operador Laplaciano.

Comenzaremos por aplicar el laplaciano $\nabla_{\mathbf{r}}^2$ a la tercera fórmula de Green:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 f(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left[-\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\, dV + \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left(\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} - f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) \right) \cdot d\mathbf{S} \right] \tag{3}$$

El truco es mover $\nabla_{\mathbf{r}}^2$ dentro de la integral de superficie, lo que se justifica porque $\mathbf{x} \neq \mathbf{r}$ cuando $\mathbf{x}$ varía sobre S:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \oiint_S \left(\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} - f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) \right) \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} - f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

Con cálculo directo, $\nabla_{\mathbf{r}}^2 (1/\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|) = 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{r}$, por lo que

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) = \mathbf{0}.$$

De manera similar, como $f(\mathbf{x})$ no involucra a $\mathbf{r}$,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) \right) &= f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{r}}^2 \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) \\ &= f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} \right) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el Laplaciano de la integral de superficie original es 0. De la ecuación (3) podemos concluir que, para $\mathbf{r}$ en el interior de D,

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \iiint_D \frac{\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\, dV,$$

y hemos demostrado lo siguiente:

TEOREMA 4.3 Si $\varphi = \nabla^2 f$ para cierta función f de clase C^2, entonces para $\mathbf{r}$ en el interior de D,

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \iiint_D \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\, dV.$$

El teorema 4.3 da una fórmula de inversión para el Laplaciano en el sentido siguiente: Si $\nabla^2 f = \varphi$, entonces

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\, dV + g(\mathbf{r}),$$

donde g es cualquier función armónica (por ejemplo, g es tal que $\nabla^2 g = 0$). Es decir, si se conoce el Laplaciano de f, se puede recuperar la función f misma, como la suma de una función armónica.

Por último, puede demostrarse que el resultado del teorema 4.3 se cumple con hipótesis considerablemente menos estrictas que hacer que φ sea el Laplaciano de otra función.[1]

Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son resultados fundamentales que gobiernan el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos, así como sus interacciones. Veremos el modo en que surgen las ecuaciones de Maxwell a partir de unos cuantos principios físicos sencillos acoplados con el análisis vectorial que ya estudiamos.

Ley de Gauss para los campos eléctricos Si $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico, entonces el flujo de $\mathbf{E}$ a través de una superficie cerrada S es

$$\text{Flujo de } \mathbf{E} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \tag{4}$$

Al aplicar el teorema de Gauss a la fórmula (4) encontramos que

$$\text{Flujo de } \mathbf{E} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV, \tag{5}$$

donde D es la región encerrada por S.

Si el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es determinado por una sola carga puntual de q coulombs localizada en el origen, entonces $\mathbf{E}$ es dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. En unidades mks, $\mathbf{E}$ se mide en voltios/metro. La constante ϵ_0 se conoce como la **permisividad del espacio libre**; su valor (en unidades mks) es

$$8.854 \times 10^{-12} \text{ coulomb}^2/\text{newton-metro}^2.$$

Para el campo eléctrico en la ecuación (6) podemos comprobar con facilidad que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ siempre que $\mathbf{E}$ esté definido. A partir de las fórmulas (4) y (5), si S es cualquier superficie que *no* encierre al origen, entonces el flujo de $\mathbf{E}$ a través de S es igual a cero.

Pero ahora surge una pregunta: ¿cómo calculamos el flujo del campo eléctrico en la ecuación (6) a través de superficies que *sí* encierren al origen? El truco es encontrar una forma apropiada de excluir al origen de toda consideración. Para ello primero supondremos que S_b denota una esfera de radio b con centro en el origen, es decir, S_b tiene la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Entonces, la normal unitaria hacia fuera de S_b es

$$\mathbf{n} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{b} = \frac{1}{b}\mathbf{x}.$$

(Véase la figura 7.53). A partir de la ecuación (6),

$$\oiint_{S_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_b} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \cdot \frac{1}{b}\mathbf{x}\, dS.$$

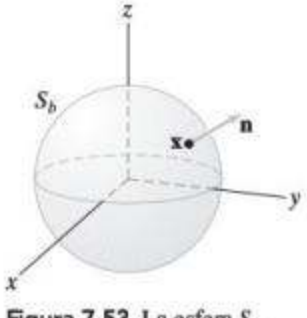


Figura 7.53 La esfera S_b de radio b, con centro en el origen, junto con un vector normal unitario hacia afuera.

Sobre S_b tenemos $\|\mathbf{x}\| = b$, por lo que

$$\begin{aligned}
\oiint_{S_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_b} \frac{\mathbf{x}}{b^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{b}\, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_b} \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{b^4}\, dS \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_b} \frac{b^2}{b^4}\, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \oiint_{S_b} dS \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} (\text{área superficial de } S_b) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} (4\pi b^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.
\end{aligned}$$

[1] Véase, por ejemplo, a O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (Springer, 1928; reimpreso por Dover Publications, 1954), p. 220.

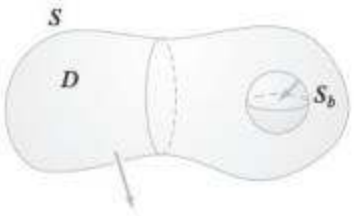


Figura 7.54 La región sólida D es aquella dentro de S y fuera de S_b.

Ahora supongamos que S es *cualquier* superficie que encierre al origen. Sea S_b una esfera pequeña con centro en el origen y contenida dentro de S. Sea D la región sólida en $\mathbf{R}^3$ entre S_b y S (véase la figura 7.54). Advierta que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ a través de D, ya que D no contiene al origen ($\mathbf{E}$ está definido como en la ecuación (6)). Al orientar $\partial D = S \cup S_b$ con normales que apunten hacia afuera de D, obtenemos:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = 0,$$

utilizando el teorema de Gauss. Concluimos que

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{7}$$

para cualquier superficie que encierre al origen. Al modificar la ecuación (6) para $\mathbf{E}$ de manera apropiada, podemos demostrar que la fórmula (7) también se cumple para cualquier superficie cerrada que contenga una sola carga puntual de q coulombs localizada en cualquier sitio. (Nota: los argumentos expuestos se cumplen para *cualquier* campo vectorial que siga la ley del inverso del cuadrado, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$, donde k es una constante. Véase el ejercicio 13 en esta sección para tener más detalles).

Podemos adaptar los argumentos esgrimidos para encuadrar el caso de n cargas puntuales discretas. Para $i = 1, \ldots, n$, suponga que una carga puntual de q_i coulombs se localiza en la posición $\mathbf{r}_i$. El campo eléctrico $\mathbf{E}$ para esta configuración es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i\|^3}. \tag{8}$$

Para $\mathbf{E}$ como se da en la ecuación (8) podemos calcular que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, excepto en $\mathbf{x} = \mathbf{r}_i$. Si S es cualquier superficie orientada hacia afuera, suave, por partes y cerrada, que contenga a las cargas, entonces podemos usar el teorema de Gauss para encontrar el flujo de $\mathbf{E}$ a través de S por medio de tomar n pequeñas esferas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, cada una de las cuales encierra una sola carga puntual (véase la figura 7.55), Si D es la región dentro de S pero fuera de todas las esferas, eligiendo las orientaciones apropiadas y utilizando el teorema de Gauss, tenemos:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = 0,$$

ya que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ en D. En consecuencia,

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \text{(carga total encerrada por } S\text{)}. \tag{9}$$

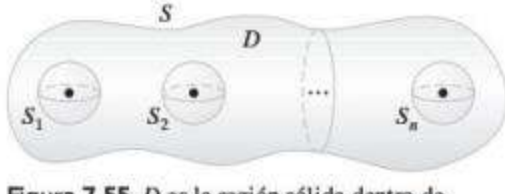


Figura 7.55 D es la región sólida dentro de la superficie S y fuera de las pequeñas esferas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, cada una de las cuales encierra una carga puntual.

Para establecer la ley de Gauss considere el caso no de un campo eléctrico determinado por cargas puntuales discretas sino el determinado por una **distribución continua de cargas** dada por una **densidad de carga** $\rho(\mathbf{x})$. La carga total en una región D en el espacio es

$$\iiint_D \rho(\mathbf{x})\, dV,$$

por lo que, en lugar de la fórmula (8), tenemos un campo eléctrico,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \rho(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^3}\, dV. \tag{10}$$

En la ecuación (10) la integración ocurre con respecto de las variables en $\mathbf{x}$. (Nota: no es obvio en absoluto que la integral usada para definir $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ converja en puntos $\mathbf{r} \in D$, donde $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$, porque en tales puntos la integral triple en la ecuación (10) es impropia. Véase el ejercicio 20 en esta sección para una indicación sobre cómo manejar esta situación).

La forma integral de la ley de Gauss, análoga a la de la fórmula (9), es

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho\, dV, \tag{11}$$

donde $S = \partial D$. Si aplicamos el teorema de Gauss al lado izquierdo de la fórmula (11), encontramos que

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho\, dV.$$

Como la región D es arbitraria, puede ser "contraída a un punto". A partir de esto concluimos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{12}$$

La ecuación (12) es la forma diferencial de la ley de Gauss.

Campos magnéticos Una partícula cargada en movimiento genera un campo magnético. Para ser específicos, si una carga puntual de q coulombs está en la posición $\mathbf{r}_0$ y se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, entonces el campo magnético que induce es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi}\right)\left(\frac{\mathbf{v}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}\right). \tag{13}$$

En unidades mks, $\mathbf{B}$ se mide en teslas. La constante μ_0 se conoce como la **permeabilidad del espacio libre**; en unidades mks:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N/amp}^2 \approx 1.257 \times 10^{-6}\ \text{N/amp}^2.$$

En el caso de un campo magnético que surge de un medio continuo y cargado (como una corriente eléctrica que se mueve por un cable), más que de una sola carga en movimiento, sustituimos q por una función de densidad de carga apropiada, ρ, y la velocidad de una sola partícula por el **campo vectorial de la velocidad** $\mathbf{v}$ de las cargas. Después definimos el **campo J de la densidad de corriente** por medio de

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}). \tag{14}$$

En lugar de la fórmula (13) usamos la definición siguiente para el campo magnético que resulta de cargas en movimiento en una región D en el espacio:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^3}\,dV$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^3}\,dV. \tag{15}$$

Figura 7.56 La corriente total I a través de S es el flujo de la densidad de corriente $\mathbf{J}$ a través de S.

En la ecuación (15), igual que en la (10), la integración es con respecto de las variables que constituyen a $\mathbf{x}$. Como en la ecuación (10), en la (15) no es obvio que las integrales sean convergentes si $\mathbf{r} \in D$, pero sí lo son (véase el ejercicio 21 en esta sección).

Antes de continuar con nuestros cálculos comentaremos algo más acerca del campo $\mathbf{J}$ de densidad de corriente. El campo vectorial $\mathbf{J}$ en cierto punto es tal que su magnitud es la corriente por unidad de área en ese punto, y su dirección es la del flujo de corriente. No es difícil ver entonces que la corriente total I a través de una superficie S orientada es dada por el flujo de $\mathbf{J}$; es decir,

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \tag{16}$$

(Véase la figura 7.56).

Volvamos al campo magnético $\mathbf{B}$ en la ecuación (15); demostramos que puede identificarse como el rotacional de otro campo vectorial $\mathbf{A}$ (por determinar). En primer lugar, mediante cálculo directo:

$$\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^3}.$$

Por lo tanto, la ecuación (15) se convierte en

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) dV. \tag{17}$$

Reescribimos la ecuación (17) utilizando la siguiente identidad estándar (que se comprueba con facilidad), donde f es un campo escalar y $\mathbf{F}$ es uno vectorial (ambos de clase C^2):

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla \times \mathbf{F})f - \mathbf{F} \times \nabla f. \tag{18}$$

La fórmula (18) es equivalente a

$$\mathbf{F} \times \nabla f = (\nabla \times \mathbf{F})f - \nabla \times (f\mathbf{F}).$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) = (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}))\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|} - \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}$$

$$= -\nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|},$$

puesto que $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ es independiente de $\mathbf{r}$. En consecuencia,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\,dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \times \iiint_D \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\,dV,$$

ya que $\mathbf{r}$ no contiene ninguna de las variables de integración. En consecuencia,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

donde

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} dV. \tag{19}$$

Entonces, $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ y así, mediante el teorema 4.4 del capítulo 3, concluimos que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{20}$$

El contenido intuitivo de la ecuación (20) se expresa con frecuencia con la expresión de que no existen "monopolos magnéticos".

El campo vectorial **A** en la ecuación (19) proporciona un ejemplo de un **potencial vectorial** del campo **B** (véanse los ejercicios 33 a 38 en la sección de ejercicios varios para saber más acerca de potenciales vectoriales).

Ley de Ampère de los circuitos Si C es un lazo cerrado que encierra una corriente I, entonces la ley de Ampère dice que, hasta cierta constante, la corriente que pasa por el lazo es igual a la **circulación** del campo magnético alrededor de C. Para ser más precisos,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I. \tag{21}$$

Figura 7.57 El lazo cerrado C está orientado de modo que tiene una relación de la regla de la mano derecha con la dirección del flujo de la corriente que encierra.

En la ecuación (21) suponemos que C está orientada de modo que C e I están relacionadas por la regla de la mano derecha, es decir, que se relacionan de la misma manera que la orientación de C y la normal a cualquier superficie S que C acote se relacionan con el teorema de Stokes (véase la figura 7.57).

De la ecuación (16) para la corriente total, la ecuación (21) puede escribirse como sigue:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es cualquier superficie (suave, por partes, orientada) acotada por C. Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de línea se obtiene:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Como el lazo C y la superficie S son arbitrarios, concluimos que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{22}$$

La ecuación (22) es la **forma diferencial de la ley de Ampère en el caso estático**, es decir, en el caso en que **B** y **E** son constantes en el tiempo. En el caso en que los campos magnético y eléctrico varían con el tiempo, es necesario hacer algunas modificaciones. La llamada **ecuación de continuidad**, establecida en el ejercicio 5 de esta sección, establece lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{23}$$

La dificultad es que si $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ como en la ecuación (22), entonces la ecuación (23) implica que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Sin embargo, si suponemos que **B** es de clase C^2, debemos tener $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$, aun en el caso en que ρ no sea constante en el tiempo.

La solución más sencilla a esta dificultad es modificar la ecuación (22) agregando un término más. A partir de la ley de Gauss, la ecuación (12), debemos tener que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Por consiguiente, si reemplazamos **J** por $\mathbf{J} + \epsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ en la ecuación (22), podemos verificar que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$. (Véase el ejercicio 16 de esta sección). En consecuencia, la ley de Ampère se puede generalizar como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{24}$$

El término $\epsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ en la ecuación (24) se conoce como la **densidad del desplazamiento de corriente** y fue postulado en primer lugar por James Clerk Maxwell con objeto de generalizar la ley de Ampère al caso no estático (en este contexto, al campo **J** original de la densidad de corriente se le conoce como la **densidad de la conducción de corriente**).

La ecuación (24) no es la única generalización posible de la ecuación (22), pero es la más sencilla y es consistente con las observaciones. Véase el ejercicio 17 en esta sección para conocer otras maneras de generalizar la ecuación (22) al caso no estático.

Ley de la inducción de Faraday Michael Faraday observó empíricamente que el cambio en el flujo magnético a través de una superficie S es igual a la fuerza electromotriz alrededor de la frontera C de la superficie. Esta relación puede escribirse como sigue:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \tag{25}$$

donde $\Phi(t) = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, y C y S están orientadas en forma consistente (véase la figura 7.58). Si aplicamos el teorema de Stokes a la integral de línea encontramos que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

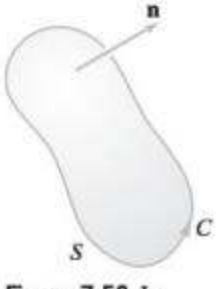


Figura 7.58 La velocidad de cambio del flujo magnético a través de S determina la fuerza electromotriz alrededor de la frontera C.

Ya que

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

tenemos

$$-\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \tag{26}$$

Debido a que la ecuación (26) se cumple para superficies arbitrarias, concluimos que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{27}$$

Resumen Las ecuaciones (12), (20), (24) y (27) se conocen como **ecuaciones de Maxwell**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Ley de Gauss);}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Inexistencia de monopolos magnéticos);}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Faraday);}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Ampère).}$$

Las ecuaciones de Maxwell permiten reconstruir los campos eléctrico y magnético a partir de las densidades de carga y corriente. Son fundamentales en el estudio de la electricidad y el magnetismo y rinden tributo al poderío de los teoremas de Stokes y Gauss.

Apéndice. Demostración del teorema 4.2

La idea más obvia es usar la segunda fórmula de Green con

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|}.$$

Sin embargo, esta función no es continua cuando $\mathbf{x} = \mathbf{r}$, por lo que el teorema de Gauss (y, por lo tanto, la fórmula de Green) no puede aplicarse fácilmente. En su lugar, necesitamos estudiar las integrales con más cuidado.

En todo el análisis que sigue S_b denotará la esfera de radio b con centro en $\mathbf{r}$. En primer lugar estableceremos algunos resultados subsidiarios.

■ **Lema 1** Si h es una función continua, entonces

$$\lim_{b \to 0} \iint_{S_b} \frac{h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \, dS = 0.$$

DEMOSTRACIÓN El valor promedio de h en S_b se define como

$$[h]_{\text{prom}} = \frac{\iint_{S_b} h(\mathbf{x}) \, dS}{\text{área superficial de } S_b} = \frac{1}{4\pi b^2} \iint_{S_b} h(\mathbf{x}) \, dS.$$

(Véase el ejercicio 9 de la sección de ejercicios varios). Entonces,

$$\iint_{S_b} h(\mathbf{x}) \, dS = 4\pi b^2 [h]_{\text{prom}}.$$

Figura 7.59 Si $\mathbf{x}$ es cualquier punto sobre la superficie de la esfera de radio b con centro en $\mathbf{r}$, entonces $\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\| = b$.

Cuando $\mathbf{x}$ varía sobre la superficie S_b, tenemos que $\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\| = b$ (véase la figura 7.59). En consecuencia,

$$\lim_{b \to 0} \iint_{S_b} \frac{h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \, dS = \lim_{b \to 0} \iint_{S_b} \frac{1}{b} h(\mathbf{x}) \, dS = \lim_{b \to 0} 4\pi b \, [h]_{\text{prom}} = 0. \qquad \blacksquare$$

Para aclarar las variables con respecto de las que diferenciamos, sea que $\nabla_{\mathbf{x}}$ denote al operador del con respecto de x, y y z, y $\nabla_{\mathbf{r}}$ al operador del con respecto de $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$.

■ **Lema 2** Con h y S_b como en el lema 1,

$$\lim_{b\to 0} \iint_{S_b} h(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)\cdot d\mathbf{S} = -4\pi h(\mathbf{r}).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{n} = (\mathbf{x}-\mathbf{r})/\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|$, la normalización de $\mathbf{x}-\mathbf{r}$. Cálculos directos producen lo siguiente:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) = -\frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^3},$$

y

$$\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) = -\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^4} = -\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{r}\|^2}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^4} = -\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2} = -\frac{1}{b^2},$$

para $\mathbf{x}$ sobre S_b. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0}\iint_{S_b} h(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)d\mathbf{S} &= \lim_{b\to 0}\iint_{S_b}\left(h(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)\cdot\mathbf{n}\right)dS\\ &= \lim_{b\to 0} -\iint_{S_b}\frac{1}{b^2}h(\mathbf{x})\,dS\\ &= \lim_{b\to 0} -\frac{1}{b^2}\left(4\pi b^2[h]_{\text{prom}}\right)\\ &= -4\pi h(\mathbf{r}).\end{aligned}$$

(Véase la demostración del lema 1). ■

Figura 7.60 La región $D - B$ denota al sólido D con una pequeña esfera con centro en $\mathbf{r}$ retirada.

Al volver a la demostración de la tercera fórmula de Green buscamos una región a la que se *pueda* aplicar la segunda fórmula de Green, que es la región $D - B$, donde B es una pequeña esfera de radio b con centro en $\mathbf{r}$ (véase la figura 7.60). Según la segunda fórmula de Green (puesto que $1/\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|$ no es singular en $D - B$), tenemos:

$$\begin{aligned}&\iiint_{D-B}\left(f(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}^2\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) - \frac{\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)dV\\ &\quad= \iint_{S-S_b}\left(f(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)\cdot d\mathbf{S}.\end{aligned} \tag{28}$$

Con cálculos directos $\nabla_{\mathbf{x}}^2(1/\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|) = 0$, por lo que la ecuación (28) se convierte en:

$$\begin{aligned}&\iiint_{D-B} -\frac{\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\,dV\\ &\quad= \iint_{S-S_b}\left(f(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)\cdot d\mathbf{S}.\end{aligned} \tag{29}$$

Podemos evaluar el lado derecho de la ecuación (29) reemplazando la integral de superficie sobre $S - S_b$ con integrales separadas sobre S y S_b. Ahora obtenemos límites cuando $b \to 0$. De acuerdo con el lema 1, con $h(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$,

$$\iint_{S_b}\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_b}\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\,dS \to 0.$$

Con el lema 2,

$$\iint_{S_b} f(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)\cdot d\mathbf{S} \to -4\pi f(\mathbf{r}).$$

Como B se contrae a un punto cuando $b \to 0$, vemos que la ecuación (29) se transforma en:

$$\iiint_D -\frac{\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\,dV = \iint_S \left(f(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right) - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|}\right)\cdot d\mathbf{S} + 4\pi f(\mathbf{r}),$$

de la cual se infiere de inmediato la tercera fórmula de Green. ■

7.4 Ejercicios

1. Demuestre la primera fórmula de Green enunciada en el teorema 4.1.

*Se dice que una función $g(x, y, z)$ es **armónica** en un punto (x_0, y_0, z_0) si g es de clase C^2 y satisface la ecuación de Laplace:*

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0$$

en cierta vecindad de (x_0, y_0, z_0). Decimos que g es armónica en una región cerrada $D \subseteq \mathbf{R}^3$ si es armónica en todos los puntos interiores de D, es decir, no necesariamente en la frontera de D. Los ejercicios 2 a 4 se refieren al análisis vectorial elemental de las funciones armónicas.

2. Suponga que D es cerrada y acotada, y que ∂D es una superficie suave, por partes, orientada por medio de un campo $\mathbf{n}$ unitario, normal, hacia afuera. Sea que $\partial g/\partial n$ denote a $\nabla g \cdot \mathbf{n}$ (el término $\partial g/\partial n$ se llama **derivada normal** de g). Use la primera fórmula de Green con $f(x, y, z) \equiv 1$ para demostrar que si g es armónica en D, entonces

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial n}\,dS = 0.$$

3. Sea f armónica en una región D que satisface las suposiciones del ejercicio 2.

a) Demuestre que

$$\iiint_D \nabla f \cdot \nabla f\,dV = \iint_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial n}\,dS.$$

b) Suponga que $f(x, y, z) = 0$ para toda $(x, y, z) \in \partial D$. Use el inciso *a*) para demostrar que debemos tener que $f(x, y, z) = 0$ a través de toda la D. (Sugerencia: piense en el signo de $\nabla f \cdot \nabla f$).

4. Sea D una región que satisface las suposiciones del ejercicio 2. Use el resultado del ejercicio 3(*b*) para demostrar que si f_1 y f_2 son armónicas en D, y $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z)$ en ∂D, entonces, en realidad $f_1 = f_2$ en *toda* la D. Así, vemos que las funciones armónicas son determinadas por sus valores de frontera en una región. (Sugerencia: considere $f_1 - f_2$).

5. *a*) Suponga que un fluido de densidad $\rho(x, y, z, t)$ fluye con un campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ en una región sólida W en el espacio, encerrado por una superficie suave S. Use el teorema de Gauss para demostrar que si no hay fuentes o sumideros, entonces

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{F}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

En dinámica de fluidos esta se llama **ecuación de continuidad**. (Sugerencia: la integral triple $\iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV$ es la tasa de fluido que entra a W, y el flujo de $\rho\mathbf{F}$ a través de S da la tasa de fluido que sale de W).

b) Use el argumento del inciso *a*) para establecer la ecuación de continuidad para las densidades de corriente dadas en la ecuación (23):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

*Sea que $T(x, y, z, t)$ denote la temperatura en el punto (x, y, z) de un objeto sólido D en el momento t. Definimos la **densidad de flujo de calor** $\mathbf{H}$ con $\mathbf{H} = -k\nabla T$ (la constante k es la **conductividad térmica**. Advierta que el símbolo ∇ denota diferenciación con respecto de x, y, z, y no con respecto de t). El campo vectorial $\mathbf{H}$ representa la velocidad del flujo de calor en D. Es un hecho de la física que el calor total contenido en un cuerpo sólido D con densidad ρ y calor específico σ es*

$$\iiint_D \sigma\rho T\,dV.$$

Por lo tanto, la cantidad total de calor que sale de D por unidad de tiempo es

$$-\iiint_D \sigma\rho\frac{\partial T}{\partial t}\,dV.$$

(Aquí suponemos que σ y ρ no dependen de t). También sabemos que el flujo de calor puede calcularse como

$$\iint_{\partial D} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}.$$

Los ejercicios 6 a 10 se refieren a estos conceptos de temperatura, calor y densidad de flujo de calor.

6. Use el teorema de Gauss para obtener la **ecuación del calor**,

$$\sigma\rho\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T.$$

7. En el ejercicio 6 suponga que k varía con los puntos en D; es decir, $k = k(x, y, z)$. Demuestre que entonces tenemos

$$\sigma\rho\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \nabla k \cdot \nabla T.$$

8. En la ecuación de calor del ejercicio 6 suponga que σ, ρ y k son constantes, y la temperatura T del sólido D no varía con el tiempo. Demuestre que entonces T debe ser armónica, es decir, que $\nabla^2 T = 0$ en todos los puntos en el interior de D.

9. *a*) Si σ, ρ y k son constantes y la temperatura T del sólido D es independiente del tiempo, demuestre que el flujo de calor (neto) de $\mathbf{H}$ a través de la frontera de D, debe ser igual a cero.

b) Sea D la región sólida entre dos esferas concéntricas de radios 1 y 2. Suponga que la esfera interior se calienta a 120°C y la esfera exterior a 20°C. Use el resultado del inciso anterior para describir la velocidad de flujo de calor a través de las esferas.

10. Considere la ecuación de calor en tres dimensiones:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{30}$$

para las funciones $u(x, y, z, t)$. (Aquí, $\nabla^2 u$ denota el Laplaciano $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2$). En este ejercicio demuestre que cualquier solución $T(x, y, z, t)$ de la ecuación de calor es única en el sentido siguiente: Establezca que D es una región sólida acotada en $\mathbf{R}^3$ y suponga que las funciones $\alpha(x, y, z)$ y $\phi(x, y, z, t)$ están dadas. Entonces existe una solución única $T(x, y, z, t)$ de la ecuación (30) que satisface las condiciones

$$T(x, y, z, 0) = \alpha(x, y, z) \quad \text{para } (x, y, z) \in D,$$

y (31)

$$T(x, y, z, t) = \phi(x, y, z, t) \quad \text{para } (x, y, z) \in \partial D \text{ y } t \geq 0.$$

Para establecer la unicidad, sean T_1 y T_2 dos soluciones de la ecuación (30) que satisfacen las condiciones en (31) y $w = T_1 - T_2$.

a) Demuestre que w debe satisfacer también a la ecuación (30), más las condiciones de que:

$$w(x, y, z, 0) = 0 \quad \text{para toda } (x, y, z) \in D,$$

y

$$w(x, y, z, t) = 0 \quad \text{para toda } (x, y, z) \in \partial D \text{ y } t \geq 0.$$

b) Para $t \geq 0$ defina la "función de energía"

$$E(t) = \frac{1}{2}\iiint_D [w(x, y, z, t)]^2 \, dV.$$

Use la primera fórmula de Green en el teorema 4.1 para demostrar que $E'(t) \leq 0$, es decir, E no se incrementa con el tiempo.

c) Demuestre que $E(t) = 0$ para toda $t \geq 0$. (Sugerencia: demuestre que $E(0) = 0$ y use el inciso *b*)).

d) Demuestre que $w(x, y, z, t) = 0$ para toda $t \geq 0$ y $(x, y, z) \in D$, por lo que concluimos la unicidad de las soluciones para la ecuación (30) que satisfacen las condiciones en (31).

11. Demuestre que la ley de Ampère y la de Gauss implican la ecuación de continuidad para $\mathbf{J}$. (Nota: en el texto usamos la ecuación de continuidad para obtener la ley de Ampère).

12. Suponga que $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico, en particular, un campo vectorial que satisface la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Se dice que una región D en el espacio está **libre de carga** si ρ es cero en todos los puntos de D. Describa las regiones libres de carga de $\mathbf{E} = (x^3 - x)\,\mathbf{i} + \frac{1}{4}y^3\,\mathbf{j} + (\frac{1}{9}z^3 - 2z)\,\mathbf{k}$.

13. Al considerar la obtención de la ley de Gauss para los campos eléctricos demuestre que, para cualquier campo vectorial del inverso del cuadrado $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una superficie S orientada, cerrada, suave y por partes, es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } S \text{ no encierra al origen,} \\ 4\pi k & \text{si } S \text{ encierra al origen.} \end{cases}$$

14. Sea una carga puntual de q coulombs colocada en el origen. Obtenga la fórmula

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

utilizando la ley de Gauss del modo siguiente:

a) En primer lugar explique que en coordenadas esféricas $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x})\mathbf{e}_\rho$, es decir, que $\mathbf{E}$ no tiene componentes en la dirección $\mathbf{e}_\varphi$- o $\mathbf{e}_\theta$-. A continuación, advierta que $E(\mathbf{x})$ puede escribirse como $E(\rho)$, es decir, que $\|\mathbf{E}\|$ tiene la misma magnitud en todos los puntos de una esfera con centro en el origen.

b) Con la ley y el teorema de Gauss demuestre que

$$\iint_S E(\rho)\mathbf{e}_\rho \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

donde S es cualquier superficie cerrada y suave que encierra al origen.

c) Ahora, sea S la esfera de radio a con centro en el origen. Entonces la normal unitaria hacia afuera $\mathbf{n}$ a S en (ρ, φ, θ) es $\mathbf{e}_\rho$. Demuestre que

$$\iint_S E(\rho)\,dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

d) Use el inciso anterior para demostrar que $E(\rho) = q/(4\pi\epsilon_0\rho^2)$. Concluya con el resultado que se busca.

15. *a*) Establezca la identidad siguiente para campos vectoriales $\mathbf{F}$ de clase C^2:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}.$$

(Nota: $\nabla^2\mathbf{F} = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F}$).

b) En el espacio libre, es decir, en ausencia de toda carga y corriente, use las ecuaciones de Maxwell para demostrar que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen la ecuación de onda

$$\nabla^2\mathbf{F} = k\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2},$$

donde k es una constante. ¿Cuál es k en cada caso?

c) Use el inciso *a*), la ley de Faraday y la de Ampère, para demostrar que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{J} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right].$$

d) Demuestre que, en ausencia de cargas, es decir, si $\rho = 0$,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

16. Verifique que si se cumple la versión no estática de la ley de Ampère (ecuación (24)), entonces $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$.

17. Cuando Maxwell postuló la existencia de corrientes de desplazamiento para llegar a una versión no estática de la ley de Ampère, simplemente estaba escogiendo la forma más sencilla de corregir la ecuación (22) de modo que fuera consistente con la ecuación de continuidad (23). Sin embargo, otras posibilidades también son consistentes con esta ecuación.

a) Demuestre que para que la ecuación (22) sea válida en el caso estático, entonces, en general se debe tener:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t}$$

para cierto campo vectorial $\mathbf{F}_1$ (variable en el tiempo) de clase C^2.

b) Por medio de tomar la divergencia en ambos lados de la ecuación del inciso *a*), demuestre que

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

c) Use el inciso anterior para argumentar que, desde un punto de vista enteramente *matemático*, la ley de Ampère también se puede generalizar como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{F}_2,$$

donde $\mathbf{F}_2$ es cualquier campo vectorial libre de divergencia. Como nadie ha observado una evidencia física de $\mathbf{F}_2$ distinto de cero, se supone que es cero, como en la ecuación (24).

18. Suponga que $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. (Esta es una versión de la ley de Ohm que se obtiene en ciertos conductores eléctricos —aquí σ es una constante positiva conocida como **conductividad**). Si $\rho = 0$, demuestre que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen la llamada **ecuación del telegrafista**,

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}.$$

19. Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ campos eléctrico y magnético de estado estable, es decir, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ constantes en el tiempo. El **campo vectorial Poynting** $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ representa la densidad de flujo de radiación. Use las ecuaciones de Maxwell para demostrar que, para una superficie cerrada, orientable y suave S, que limita una región sólida D,

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\mu_0 \iiint_D \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dV.$$

20. Considere el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ definido por la ecuación (10). Advierta que las integrales en la ecuación (10) son impropias en el sentido que se vuelven infinitas en puntos $\mathbf{r} \in D$, donde $\rho(\mathbf{r})$ es distinto de cero. No obstante, en este ejercicio el lector demostrará que las integrales de dicha ecuación (10) convergen cuando D es una región acotada en $\mathbf{R}^3$ y ρ es una función de densidad de carga continua en D.

a) Escriba $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en términos de integrales triples para las componentes individuales. Sea $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ y $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

b) Demuestre que si cada componente de $\mathbf{E}$ se escribe en la forma $\iiint_D f(\mathbf{x})dV$, entonces $|f(\mathbf{x})| \leq K/\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|^2$, donde K es una constante positiva.

c) Del inciso anterior se infiere que si

$$\iiint_D \frac{K}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|^2}\, dV$$

converge, también lo debe hacer $\iiint_D f(\mathbf{x})dV$. Demuestre que

$$\iiint_D \frac{K}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|^2}\, dV$$

converge por medio de considerar una integral iterada en coordenadas esféricas con origen en $\mathbf{r}$. (Sugerencia: analice con cuidado el integrando en coordenadas esféricas).

21. Considere el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ definido por la ecuación (15). Como fue el caso con el campo eléctrico en la ecuación (10), no es obvio que las integrales en (15) converjan en todo $\mathbf{r} \in D$. Siga las ideas del ejercicio 20 para demostrar que $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ está, en efecto, bien definido en toda $\mathbf{r}$, suponiendo un campo $\mathbf{J}$ continuo de densidad de corriente y una región D acotada en $\mathbf{R}^3$.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 7

1. La función $\mathbf{X}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{X}(s, t) = (2s + 3t + 1, 4s - t, s + 2t - 7)$ parametriza al plano $9x - y - 14z = 107$.

2. La función $\mathbf{X}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{X}(s, t) = (s^2 + 3t - 1, s^2 + 3, -2s^2 + t)$ parametriza al plano $x - 7y - 3z + 22 = 0$.

3. La función $\mathbf{X}: (-\infty, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{X}(s, t) = (s^3 + 3\tan t - 1, s^3 + 3, -2s^3 + \tan t)$ parametriza al plano $x - 7y - 3z + 22 = 0$.

4. La superficie $\mathbf{X}(s, t) = (s^2 t, st^2, st)$ es suave.

5. El área de la parte de la superficie $z = xe^{xy}$ que está sobre el disco de radio 2 con centro en el origen es dada por:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + e^{2xy}(x^4 + x^2y^2 + 2xy + 1)}\, dy\, dx.$$

6. Si S es la esfera unitaria con centro en el origen, entonces $\iint_S x^3\, dS = 0$.

7. Si S es el cubo con los ocho vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, entonces $\iint_S (1 + x^3y)\, dS = 0$.

8. Si S denota la caja rectangular con caras dadas por los planos $x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 3$, entonces $\iint_S xyz\, dS = 0$.

9. Si S denota la esfera de radio a con centro en el origen, entonces

$$\iint_S (z^3 - z + 2)\, dS = \iint_S (x - y^5 + 2)\, dS.$$

10. $\iint_S (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} = 0$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 9, 0 \le z \le 5$.

11. Sea que S denote al cilindro cerrado con superficie lateral dada por $y^2 + z^2 = 4$, frontal por $x = 7$ y posterior por $x = -1$, y orientado por normales hacia afuera. Entonces $\int_S x\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = 24\pi$.

12. Si S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 16, -2 \le z \le 7$, entonces $\iint_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{S} = 0$.

13. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 6\pi$, donde S es el hemisferio cerrado $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$, junto con la superficie $x^2 + y^2 \le 1, z = 0$ y $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

14. Si S es el conjunto de nivel de una función $f(x, y, z)$ y $\nabla f \neq \mathbf{0}$, entonces el flujo de ∇f a través de S nunca es igual a cero.

15. Una superficie suave tiene como máximo dos orientaciones.

16. Una superficie conectada y suave siempre es orientable.

17. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 y S es el elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$, entonces $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

18. $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ tiene el mismo valor para todas las superficies S orientadas, suaves y por partes, que tengan la misma curva de frontera C.

19. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial constante, entonces $\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$, donde S es cualquier superficie orientable, cerrada, suave y por partes.

20. $\oiint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$, donde S es cualquier superficie S suave, orientable y cerrada en $\mathbf{R}^3$, y $\mathbf{F}$ es de clase C^1.

21. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 cuyo dominio contiene la región sólida D en $\mathbf{R}^3$ y es tal que $\|\mathbf{F}(x, y, z)\| \le 2$ en todos los puntos de la superficie S de frontera de D. Entonces $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$ es dos veces el área superficial de S.

22. Si S es una superficie suave por partes y orientable, y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 que es tangente en todo lugar a la frontera de S, entonces $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

23. Si S es una superficie suave, por partes y orientable, y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 que es perpendicular en todo lugar a la frontera de S, entonces $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

24. Si $\mathbf{F}$ es tangente a una superficie cerrada S que acota a una región sólida D en $\mathbf{R}^3$, entonces $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = 0$.

25. Sea S una superficie orientable, suave y por partes, y $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es igual a la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de la frontera de S.

26. Sea D una región sólida en $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de D es igual a la integral de la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre D.

27. Suponga que f y g son de clase C^2 y D es una región sólida en $\mathbf{R}^3$ con superficie S de frontera suave y por partes que está orientada hacia fuera de D. Si g es armónica, entonces $\iiint_D \nabla f \cdot \nabla g\, dV = \oiint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S}$.

28. Suponga que f y g son de clase C^2 y D es una región sólida en $\mathbf{R}^3$ con superficie S de frontera suave, por partes y orientada hacia afuera de D. Si f y g son armónicas, entonces $\oiint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_S g \nabla f \cdot d\mathbf{S}$.

29. Si $\nabla^2 f$ es conocida, entonces f está determinada en forma única hasta una constante.

30. Si S es una superficie orientable y cerrada, entonces

$$\oiint_S \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Ejercicios varios para el capítulo 7

1. La figura 7.61 muestra las gráficas de seis superficies parametrizadas $\mathbf{X}$. Relacione cada descripción paramétrica con la gráfica correcta.

   a) $\mathbf{X}(s, t) = (t(s^2 - t^2), s, s^2 - t^2)$

   b) $\mathbf{X}(s, t) = (s\cos t, s\,\text{sen}\,t, s)$

   c) $\mathbf{X}(s, t) = ((2 + \cos s)\cos t, (2 + \cos s)\,\text{sen}\,t, t + \text{sen}\,s)$

   d) $\mathbf{X}(s, t) = (\text{sen}\,s\cos t, s, \text{sen}\,s\,\text{sen}\,t)$

   e) $\mathbf{X}(s, t) = \left(\cos t + 0.1t\left(\cos t\cos s + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{sen}\,t\,\text{sen}\,s\right), \text{sen}\,t + 0.1t\left(\text{sen}\,t\cos s - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos t\,\text{sen}\,s\right), \frac{t}{2} + \frac{0.2t}{\sqrt{5}}\,\text{sen}\,s\right)$

   f) $\mathbf{X}(s, t) = (s\cos t, s\,\text{sen}\,t, t)$

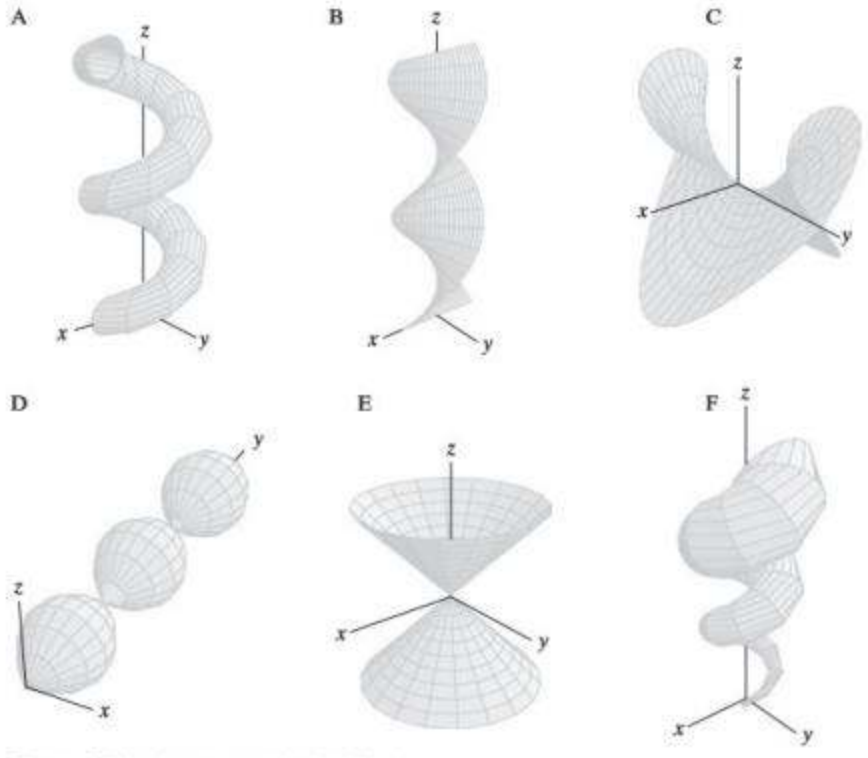


Figura 7.61 Figuras para el ejercicio 1.

2. Considere la esfera unitaria S con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En este problema el lector dará una parametrización para (casi toda) la esfera que es diferente de la que se dio en el ejemplo 2 de la sección 7.1.

a) En primer lugar considere el plano parametrizado en $\mathbf{R}^3$.

$$D = \{(s, t, 0) \mid (s, t) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Advierta que D es tan solo una copia de $\mathbf{R}^2$ que está en $\mathbf{R}^3$ como el plano xy. Para cualquier punto $(s, t, 0) \in D$, argumente, en términos geométricos, que la recta que pasa por $(s, t, 0)$ y $(0, 0, 1)$ interseca a S en un punto distinto a $(0, 0, 1)$. (Véase la figura 7.62).

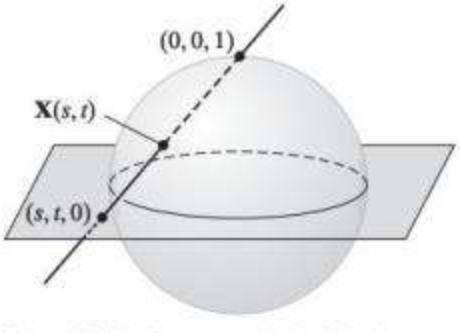


Figura 7.62 Figura para el ejercicio 2.

b) Ahora defina $\mathbf{X}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ haciendo que $\mathbf{X}(s, t)$ sea el punto de intersección de S y la recta que reúne $(s, t, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los dos puntos mencionados y úselas para dar una fórmula para $\mathbf{X}(s, t)$.

c) Demuestre que $\mathbf{X}(s, t)$ es una parametrización suave de casi toda la S. ¿Qué puntos de esta no están incluidos en la imagen de $\mathbf{X}$? Por razones geométricas evidentes el mapa $\mathbf{X}$ definido en este problema tiene un mapa inverso desde (casi toda) la esfera al plano xy llamado **proyección estereográfica** de la esfera hacia el plano.

3. *a*) Proporcione una parametrización del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. (Sugerencia: use las coordenadas cilíndricas z y θ para los parámetros).

b) Modifique su respuesta para el inciso *a*) a fin de dar una parametrización del hiperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

c) Sean x_0 y y_0, tales que $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Demuestre que las rectas

$$\mathbf{l}_1(t) = (a(x_0 - y_0 t), b(x_0 t + y_0), ct)$$

y

$$\mathbf{l}_2(t) = (a(y_0t + x_0), b(y_0 - x_0t), ct)$$

están en el hiperboloide del inciso *b*).

d) Demuestre que las rectas $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$ del inciso *c*) también están en el plano tangente al hiperboloide en el punto $(ax_0, by_0, 0)$.

4. Encuentre el área superficial de la parte del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ entre $z = -a$ y $z = a$ (véase el ejercicio 3(*a*)).

5. *a*) Parametrice el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

b) Use su respuesta del inciso *a*) para plantear una integral del área superficial del elipsoide. No evalúe esta integral pero verifique que indica correctamente el área superficial en el caso en que el elipsoide es una esfera de radio *a*.

6. Sea $y = f(x)$, $a \le x \le b$, una curva en el plano xy. Suponga que esta curva se tuerce alrededor del eje x para generar una superficie de revolución.

a) Explique por qué $\mathbf{X}(s, t) = (s, f(s)\cos t, f(s)\operatorname{sen} t)$ parametriza la superficie así descrita. (Sugerencia: considere la curva en coordenadas t).

b) Verifique que el área de la superficie es:

$$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

7. Sea la curva $y = f(x)$, $0 \le a \le x \le b$, que gira alrededor del eje y para generar una superficie.

a) Encuentre una parametrización de la superficie.

b) Verifique que el área de la superficie es

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

8. Sea que S denote la *superficie* definida por la ecuación $z = f(x)$, $a \le x \le b$. (La superficie es un cilindro generalizado sobre la curva $z = f(x)$ en el plano xz). Sea que C denote una curva cerrada, simple y C^1 por partes, en el plano xy. Sea que D denote la región en el plano xy acotada por C y suponga que cada punto de D tiene una coordenada x entre a y b. Sea que S_1 denote la parte de S que está sobre D.

a) Demuestre que la parte de S que está sobre D es:

$$\iint_D s'(x)\, dA,$$

donde $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$; es decir, s es la función longitud de arco de la curva $z = f(x)$.

b) Use el inciso anterior para demostrar que el área superficial también puede calcularse con la integral de línea

$$\oint_C s(x)\, dy,$$

donde C está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

c) Calcule el área superficial de la parte de

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \le x \le 3,$$

que está sobre el rectángulo en el plano xy que tiene vértices en $(1, \pm 2), (3, \pm 2)$.

Sea f una superficie, suave, por partes en $\mathbf{R}^3$ y f: $X \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una función de variable escalar cuyo dominio X contiene a S. Entonces, el ***valor promedio*** *de f en S es la cantidad*

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iint_S f\, dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S f\, dS}{\text{área de } S}.$$

Los ejercicios 9 a 11 involucran el concepto de valor promedio de una función en una superficie.

9. *a*) Explique por qué la definición de valor promedio tiene sentido.

b) Suponga que la temperatura en los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ es dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z$. Encuentre la temperatura promedio.

10. Calcule el valor promedio de $f(x, y, z) = x^2e^z - y^2z$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 3$.

11. Determine el valor promedio de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3$ sobre la parte del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$, $-2 \le z \le 6$.

12. Una película delgada está hecha en forma del helicoide

$$\mathbf{X}(s, t) = (s\cos t, s\operatorname{sen} t, t),\ 0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 4\pi.$$

Suponga que la densidad de masa (por unidad de área) en cada punto (x, y, z) de la película varía como

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Encuentre la masa total de la película.

Sea S una superficie suave, por partes en $\mathbf{R}^3$. Suponga que la densidad de masa en los puntos (x, y, z) de S es $\delta(x, y, z)$. Utilizando fórmulas análogas a las de la sección 5.6 definimos ***los (primeros) momentos*** *de S como:*

$$\iint_S x\delta(x, y, z)\, dS, \quad \iint_S y\delta(x, y, z)\, dS,$$

y

$$\iint_S z\delta(x, y, z)\, dS.$$

Los ejercicios 13 a 16 involucran primeros momentos y centros de masa de superficies.

13. Encuentre el centro de masa de la parte de esfera que está en el primer octante

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

suponiendo densidad constante.

14. Encuentre el centro de masa del fragmento del cilindro

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad 0 \le y \le a, z \ge 0.$$

Suponga que la densidad de la superficie es constante.

15. Encuentre el centro de masa de una esfera de radio a, donde la densidad δ varía como el cuadrado de la distancia desde el "polo sur" de la esfera.

16. Determine el centro de masa del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, entre $y = 0$ y $y = 2$, si la densidad varía como $\delta = x^2 + y$.

Dada una superficie S suave, por partes, el ***momento de inercia*** *I_z de S con respecto del eje z es definido por la integral de superficie*

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta \, dS,$$

donde $\delta(x, y, z)$ es la densidad de masa. El correspondiente ***radio de giro*** *con respecto del eje z es dado por*

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}},$$

donde $M = \iint_S \delta \, dS$. Del mismo modo, el ***momento de inercia*** *de S con respecto de los ejes x y y son dados, respectivamente, por las integrales de superficie*

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\delta \, dS \qquad y \qquad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\delta \, dS.$$

(Compare estas fórmulas con las de la sección 5.6. Los ejercicios 17 a 19 son sobre momentos de inercia y radios de giro de superficies.

17. *a*) Calcule I_z para la superficie S cortada del cono

$$z^2 = 4x^2 + 4y^2$$

por los planos $z = 2$ y $z = 4$ (esta superficie es conocida como el **tronco** del cono). Suponga que la densidad es igual a 1.

b) Encuentre el radio de giro r_z del tronco.

c) Repita los incisos *a*) y *b*), suponga que la densidad en un punto es proporcional a la distancia de dicho punto al eje del cono.

18. Sea que S denota la superficie cilíndrica con ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, donde $-b \le z \le b$ (a y b son constantes positivas). Suponga que la densidad δ es constante a lo largo de S.

a) Calcule el momento de inercia de S con respecto del eje z.

b) Encuentre el radio de giro de S con respecto del eje z.

19. Sea S igual que en el ejercicio 18.

a) Encuentre el momento de inercia I_x e I_y de S con respecto de los ejes x y y.

b) Determine los radios de giro r_x y r_y.

20. *a*) Demuestre el siguiente teorema del valor medio para las integrales dobles: si f y g son continuas en una región conectada, compacta $D \subseteq \mathbf{R}^2$, entonces existe algún punto $P \in D$ tal que

$$\iint_D fg \, dA = f(P) \iint_D g \, dA.$$

(Sugerencia: considere la razón $\iint_D fg \, dA / \iint_D g \, dA$ y use el teorema del valor intermedio).

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para demostrar lo siguiente: sea S una superficie suave, orientada por una normal unitaria $\mathbf{n}$ y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo en S. Suponga que S puede ser parametrizada por un solo mapa $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$. Entonces existe cierto punto $P \in S$, tal que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = [\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n}(P)](\text{área de } S).$$

21. Sea $\mathbf{a}$ un vector constante y C una curva cerrada, simple y suave. Demuestre que $\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = 0$ en dos formas:

a) directamente;

b) con la suposición de que C es la frontera de una superficie S suave.

22. Evalúe $\int_C (x^2 + z^2)\, dx + y dy + z dz$, donde C es la curva cerrada parametrizada por la trayectoria $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$.

23. Sean f y g funciones de clase C^2, y sea S una superficie orientable, suave y por partes. Demuestre que

$$\oint_{\partial S} (f \nabla g) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}.$$

24. Sean f y g funciones de clase C^2, y sea S una superficie orientable, suave y por partes. Demuestre que

$$\oint_{\partial S} (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(Sugerencia: use el ejercicio 23).

25. Sea f de clase C^2 y sea S una superficie orientable, suave y por partes. Demuestre que

$$\oint_{\partial S} (f \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

26. Sea C una curva *planar* C^1 por partes, cerrada y simple en $\mathbf{R}^3$. Es decir, C está contenida en cierto plano en $\mathbf{R}^3$. Sea $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ que denota un vector unitario normal al plano que contiene a C, y sea C orientada por la regla de la mano derecha con respecto de $\mathbf{n}$.

a) Demuestre que

$$\frac{1}{2} \oint_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$$
$$= \text{área encerrada por } C.$$

b) Ahora demuestre que el resultado del inciso *a*) se reduce a algo conocido en el caso en que C es una curva en el plano xy (véase el ejemplo 2 de la sección 6.2).

27. Suponga que S es una superficie orientable, suave y por partes, con frontera ∂S. Use la ley de Faraday para demostrar que si $\mathbf{E}$ es perpendicular a ∂S en todo lugar, entonces el flujo magnético inducido por $\mathbf{E}$ no varía con el tiempo.

28. Sea $\mathbf{G}$ un campo vectorial de clase C^2. Entonces, por el teorema 4.4 del capítulo 3, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$. Por lo tanto, el teorema de Gauss implica que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G})\, dV = 0.$$

Entonces, el teorema de Stokes produce:

$$0 = \iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

En consecuencia, todos los campos vectoriales $\mathbf{G}$ de clase C^2 son conservativos. ¿Cómo puede ocurrir esto?

Recuerde que medimos un ángulo en radianes como sigue: sitúe el vértice del ángulo en el centro O de un círculo de radio a, de modo que el ángulo subtienda un arco del círculo, cuya longitud sea s. Entonces, la medida del ángulo en radianes es

$$\theta = \frac{s}{a}.$$

Podemos hacer algo similar en el caso de tres dimensiones por medio de definir un ***ángulo sólido*** *como el conjunto de rayos que comienzan en el centro O de una esfera de radio a, de modo que los rayos cortan una porción de la esfera que tiene un área superficial A. Entonces, la medida del ángulo sólido en* ***estereorradianes*** *es*

$$\Omega = \frac{A}{a^2}.$$

(Véase la figura 7.63). Por consiguiente, el ángulo sólido de la esfera completa de radio a es 4π.

Figura 7.63 Ángulo sólido medido en una esfera.

Ahora suponga que S es una superficie orientada y suave, y que se escoge un punto O en $\mathbf{R}^3$ que no está en S de modo que toda recta que pase por O interseque a S al menos una vez. En este caso definimos el ángulo sólido relativo a O subtendido por S como el conjunto de rayos que comienzan en O y pasan por un punto de S. Medimos este ángulo sólido calculando

$$\Omega(S, O) = \iint_S \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \cdot d\mathbf{S}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}$ denota el vector (variante) que va de O a un punto P en S y S está orientada por una normal que apunta hacia afuera de O.

Los ejercicios 29 a 32 desarrollan algunas ideas relacionadas con los ángulos sólidos.

29. En este problema veremos la manera en que la medida del ángulo sólido dado en la ecuación (1) se relaciona con el concepto geométrico general de medir ángulos sólidos utilizando esferas. Para ello, en la situación descrita con anterioridad, construya una esfera S_a de radio a con centro en O. Sea que $\tilde{S}_a$ denote la intersección de S_a con el ángulo sólido de S relativo a O (véase la figura 7.64). Aplicando el teorema de Gauss a la región sólida W entre S y $\tilde{S}_a$, demuestre que:

$$\Omega(S, O) = \frac{\text{área superficial de } \tilde{S}_a}{a^2}.$$

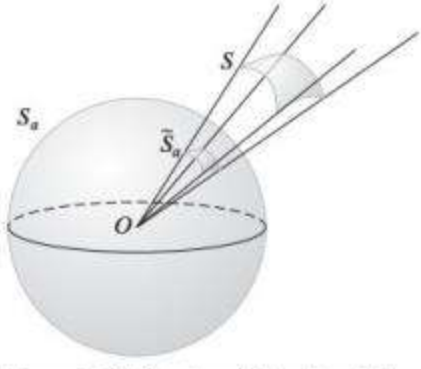


Figura 7.64 Ángulo sólido subtendido por una superficie S.

30. Si S está parametrizada por $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, y O denota al origen en $\mathbf{R}^3$, podemos usar la ecuación (1) para definir la medida del ángulo sólido subtendido por S para todas las superficies en general, inclusive aquellas que tengan intersecciones consigo mismas. Demuestre que para dicha superficie parametrizada $\Omega(S, O)$ puede calcularse como:

$$\Omega(S, O) = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \times \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} ds\, dt.$$

31. Suponga que S es cerrada, orientada y constituye la frontera de una región W sólida, acotada y simplemen-

te conectada en $\mathbf{R}^3$. Utilizando la ecuación (1) para definir la medida del ángulo sólido, demuestre que

$$\Omega(S, O) = \begin{cases} \pm 4\pi & \text{si } S \text{ encierra a } O \\ 0 & \text{si } S \text{ no encierra a } O. \end{cases}$$

32. Suponga que S es el disco circular de radio a que está en el plano xy y cuyo centro está en el origen. Sea O un punto que se desplaza a lo largo del eje z y se denota con $(0, 0, z)$. Use la ecuación (1) para demostrar que $-2\pi \leq \Omega(S, 0) \leq 2\pi$. Además, demuestre que $\Omega(S, 0)$ salta en 4π cuando O pasa por S.

33. Demuestre lo siguiente: sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en $\mathbf{R}^3$. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, entonces hay algún campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1, tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. Este resultado da una conversión del teorema 4.4 del capítulo 3. (Sugerencia: sea

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \int_0^1 t\mathbf{F}(xt, yt, zt) \times \mathbf{r}\, dt,$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Las identidades

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} \\ &\quad + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \\ \frac{d}{dt}[t\mathbf{F}(xt, yt, zt)] &= (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F}(xt, yt, zt) \\ &\quad + \mathbf{F}(xt, yt, zt), \end{aligned}$$

y

$$\frac{d}{dt}\left[t^2\mathbf{F}(xt, yt, zt)\right] = t\left\{\frac{d}{dt}[t\mathbf{F}(xt, yt, zt)] + \mathbf{F}(xt, yt, zt)\right\}$$

probarán ser de utilidad. También, sea $X = xt$, $Y = yt$, $Z = zt$ y observe que, según la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = t\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X},$$

etcétera).

El campo vectorial $\mathbf{G}$ definido en el ejercicio 33 se llama ***potencial vectorial*** *para el campo vectorial $\mathbf{F}$. En los ejercicios 34 a 36 determine un potencial vectorial para el campo vectorial dado o explique por qué no existe dicho potencial.*

34. $\mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$

35. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

36. $\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} - 7x^2y\,\mathbf{k}$

37. El potencial vectorial $\mathbf{G}$ identificado en el ejercicio 33 no es único. En realidad, demuestre que si $\mathbf{G}$ es un potencial vectorial para $\mathbf{F}$, entonces también lo es $\mathbf{G} + \nabla\phi$, donde ϕ es cualquier función de variable escalar de clase C^2 (esto se conoce como **libertad de evaluar** al escoger el potencial vectorial).

38. Suponga que

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

es la fuerza gravitacional definida en $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

a) Demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ por cálculo directo.

b) Demuestre que $\mathbf{F} \neq \nabla \times \mathbf{G}$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de C^1 definido en $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ utilizando el teorema de Stokes. (Sugerencia: tome una esfera S que encierre al origen y descompónga-la en sus hemisferios superior e inferior. Considere $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como la suma de las integrales de superficie sobre los dos hemisferios).

c) ¿Por qué los incisos *a*) y *b*) no contradicen el resultado del ejercicio 33?

En los ejercicios 39 a 44 que siguen, el lector obtendrá un tipo de ecuación de onda y verá cómo se pueden reducir las ecuaciones de Maxwell a dicha ecuación de onda. Suponga que los campos eléctricos y magnéticos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, están definidos en una región simplemente conectada en $\mathbf{R}^3$; asimismo, sea que el símbolo ∇ denote la diferenciación con respecto de x, y, z, es decir, no con respecto de t.

39. Recuerde el lector que la ecuación (20) en la sección 7.4 se obtuvo con la demostración de que el campo magnético $\mathbf{B}$ tenía un potencial vectorial $\mathbf{A}$ de clase C^1 (véase el ejercicio 33); es decir, que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Use la ley de Faraday (ecuación (27)) para demostrar que el campo vectorial $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ es conservativo. Entonces, podemos escribir

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla f$$

para una función apropiada de variable escalar $f(x, y, z, t)$.

40. Use el potencial vectorial $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$ en la ley de Ampère (ecuación (24) de la sección 7.4) para concluir que

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial f}{\partial t}\right). \tag{2}$$

(Sugerencia: véase el inciso *a*) del ejercicio 15 de la sección 7.4).

41. Use la ley de Gauss (ecuación (12) de la sección 7.4) para demostrar que

$$\nabla^2 f = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}). \tag{3}$$

42. Como se expuso en el ejercicio 37, el potencial vectorial $\mathbf{A}$ solo es único en la adición de $\nabla\phi$, donde $\phi(x, y, z, t)$ es una función de variable escalar de clase C^2. Es decir, cualquier campo vectorial $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\phi$ también funciona como un potencial vectorial para $\mathbf{B}$. Sin embargo, la función f que surge en los ejercicios 39 a 41 cambiará.

a) Demuestre que la función $\tilde{f}$ asociada con $\tilde{\mathbf{A}}$ se relaciona con f como

$$\tilde{f} = f + \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

b) Demuestre que la condición

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial t},$$

donde $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\phi$ es equivalente a la existencia de soluciones para la ecuación de onda (no homogénea)

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial f}{\partial t}\right). \quad (4)$$

Dadas $\mathbf{A}$ y f es posible resolver la ecuación (4) para ϕ, por lo que asumiremos que se cumple la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 \partial f / \partial t$.

43. Dada la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 \partial f / \partial t$, demuestre que las ecuaciones (2) y (3) se convierten en:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}; \quad (5)$$

$$\nabla^2 f - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6)$$

44. A la inversa, suponga que $\mathbf{A}$ y f satisfacen la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 \partial f / \partial t$, y las ecuaciones (5) y (6). Demuestre que en ese caso $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t + \nabla f$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell. En consecuencia, las soluciones para (4) nos permiten definir un campo vectorial $\mathbf{A}$ y uno escalar f a partir de los cuales se pueden construir $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ que satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

8 Análisis vectorial en dimensiones superiores

8.1 Introducción a las formas diferenciales

8.2 Variedades e integrales de formas k

8.3 El teorema de Stokes generalizado

Ejercicios tipo verdadero/falso para el capítulo 8

Introducción

En este último capítulo nuestro objetivo es encontrar una manera de unificar y ampliar los tres principales teoremas del análisis vectorial, es decir, el teorema de Green, el de Gauss y el de Stokes. Para llevar a cabo esta tarea necesitamos desarrollar el concepto de **forma diferencial**, cuya integral abarca y generaliza la integral de línea, la de superficie y la de volumen.

8.1 Introducción a las formas diferenciales

En esta sección U denotará un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$, donde $\mathbf{R}^n$, como es habitual, tiene coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Se acepta que es posible diferenciar de manera apropiada cualquier función que aparezca.

Formas diferenciales

Comenzaremos por dar un nuevo nombre a un viejo amigo. Si $f\colon U \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de variable escalar (de clase C^k), también nos referiremos a f como una **forma diferencial 0** o, para abreviar, solo como **forma 0**. Como bien sabemos, las formas 0, además de poder sumarse entre sí, también pueden multiplicarse juntas.

El siguiente paso es describir formas 1 diferenciales. En última instancia, veremos que una forma 1 diferencial es una generalización de $f(x)dx$, es decir, de algo que se puede integrar con respecto de una variable única, como ocurre con una integral de línea. De manera más precisa, en $\mathbf{R}^n$, las **formas 1 diferenciales básicas** se denotan como $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Una **forma 1** general **(diferencial)** ω es una expresión que se construye a partir de las formas 1 básicas como sigue:

$$\omega = F_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + F_2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n,$$

donde, para $j = 1, \ldots, n$, F_j es una función de variable escalar (de clase C^k) en $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Las formas 1 diferenciales se pueden sumar entre sí, y es posible multiplicar una forma 0 f con una forma 1 ω (ambas definidas en $U \subseteq \mathbf{R}^n$) en la forma obvia: Si

$$\omega = F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \cdots + F_n\, dx_n,$$

entonces

$$f\omega = fF_1\, dx_1 + fF_2\, dx_2 + \cdots + fF_n\, dx_n.$$

EJEMPLO 1 En $\mathbf{R}^3$, sea

$$\omega = xyz\,dx + z^2 \cos y\,dy + ze^x\,dz \text{ y } \eta = (y - z)\,dx + z^2 \operatorname{sen} y\,dy - 2\,dz.$$

Entonces

$$\omega + \eta = (xyz + y - z)\,dx + z^2(\cos y + \operatorname{sen} y)\,dy + (ze^x - 2)\,dz.$$

Si $f(x, y, z) = xe^y - z$, entonces

$$f\omega = (xe^y - z)xyz\,dx + (xe^y - z)z^2 \cos y\,dy + (xe^y - z)ze^x dz. \quad \blacklozenge$$

Hasta este momento hemos descrito las formas 1 tan solo como expresiones formales con ciertos símbolos. Pero las formas 1 básicas también pueden concebirse como funciones. Las formas 1 básicas $dx_1, \ldots, dx_n$ toman como argumento un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbf{R}^n$, el valor de dx_i en $\mathbf{a}$ es

$$dx_i(\mathbf{a}) = a_i.$$

En otras palabras, dx_i extrae la i-ésima componente del vector $\mathbf{a}$.

Más en general, para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, la forma 1 ω da lugar a una combinación de formas 1 básicas $\omega_{\mathbf{x}_0}$:

$$\omega_{\mathbf{x}_0} = F_1(\mathbf{x}_0)dx_1 + \cdots + F_n(\mathbf{x}_0)dx_n;$$

$\omega_{\mathbf{x}_0}$ actúa sobre el vector $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ como

$$\omega_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a}) = F_1(\mathbf{x}_0)\,dx_1(\mathbf{a}) + F_2(\mathbf{x}_0)\,dx_2(\mathbf{a}) + \cdots + F_n(\mathbf{x}_0)\,dxn(\mathbf{a}).$$

EJEMPLO 2 Suponga que ω es la forma 1 definida en $\mathbf{R}^3$ por

$$\omega = x^2yz\,dx + y^2z\,dy - 3xyz\,dz.$$

Si $\mathbf{x}_0 = (1, -2, 5)$ y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_{(1,-2,5)}(\mathbf{a}) &= -10\,dx(\mathbf{a}) + 20\,dy(\mathbf{a}) + 30\,dz(\mathbf{a}) \\ &= -10a_1 + 20a_2 + 30a_3,\end{aligned}$$

y si $\mathbf{x}_0 = (3, 4, 6)$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_{(3,4,6)}(\mathbf{a}) &= 216\,dx(\mathbf{a}) + 96\,dy(\mathbf{a}) - 216\,dz(\mathbf{a}) \\ &= 216a_1 + 96a_2 - 216a_3.\end{aligned}$$

La notación sugiere que una forma 1 es una función del vector $\mathbf{a}$, pero que esta función varía de un punto a otro a medida que cambia $\mathbf{x}_0$. Las formas 1 son, en realidad, funciones en campos vectoriales. $\blacklozenge$

Una **forma 2 (diferencial) básica** en $\mathbf{R}^n$ es una expresión de la forma

$$dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

También es una función que requiere *dos* vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como argumentos, y evaluamos esta función como

$$dx_i \wedge dx_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} dx_i(\mathbf{a}) & dx_i(\mathbf{b}) \\ dx_j(\mathbf{a}) & dx_j(\mathbf{b}) \end{vmatrix}.$$

(El determinante representa, sin importar el signo, el área del paralelogramo generado por las proyecciones de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en el plano $x_i\,x_j$). No es difícil ver que para $i, j = 1, \ldots, n$,

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{1}$$

y

$$dx_i \wedge dx_i = 0. \tag{2}$$

La fórmula (1) puede establecerse comparando $dx_i \wedge dx_j$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ con $dx_j \wedge dx_i(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La fórmula (2) se obtiene de la fórmula (1). Dadas las fórmulas (1) y (2), vemos que podemos generar todas las formas 2 básicas, no triviales y linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$ por medio de listar todos los posibles términos $dx_i \wedge dx_j$, donde i y j son enteros entre 1 y n con $i < j$:

$$dx_1 \wedge dx_2,\ dx_1 \wedge dx_3, \ldots,\ dx_1 \wedge dx_n,$$
$$dx_2 \wedge dx_3, \ldots,\ dx_2 \wedge dx_n,$$
$$\vdots$$
$$dx_{n-1} \wedge dx_n.$$

Para contar cuántas formas 2 hay en esta lista observe que existen n elecciones posibles para dx_i y $n - 1$ formas de elegir dx_j (de modo que, de acuerdo con la ecuación (2), $dx_i \neq dx_j$) y, según la ecuación (1), se aplica un factor de "corrección" de 2 para no contar $dx_i \wedge dx_j$ ni $dx_j \wedge dx_i$. En consecuencia, hay $n(n-1)/2$ formas 2 independientes.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Una **forma 2 (diferencial)** general en $U \subseteq \mathbf{R}^n$ es una expresión

$$\omega = F_{12}(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge dx_2 + F_{13}(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge dx_3 + \cdots + F_{n-1n}(\mathbf{x})\, dx_{n-1} \wedge dx_n,$$

donde cada F_{ij} es una función de variable real F_{ij}: $U \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. La idea aquí es generalizar algo que pueda integrarse con respecto de dos variables, igual que con una integral de superficie.

EJEMPLO 3 En $\mathbf{R}^3$, una forma 2 general puede escribirse como

$$F_1(x, y, z)\, dy \wedge dz + F_2(x, y, z)\, dz \wedge dx + F_3(x, y, z)\, dx \wedge dy.$$

La razón para usar esta curiosa manera de ordenar los términos en la suma quedará clara, esperamos, más adelante en este capítulo. ◆

Dado un punto $\mathbf{x}_0 \in U \subseteq \mathbf{R}^n$, para evaluar una forma 2 general en el par ordenado de vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, tenemos

$$\omega_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F_{12}(\mathbf{x}_0)\, dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + F_{13}(\mathbf{x}_0)\, dx_1 \wedge dx_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \cdots + F_{n-1n}(\mathbf{x}_0)\, dx_{n-1} \wedge dx_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

EJEMPLO 4 En $\mathbf{R}^3$, sea $\omega = 3xy\, dy \wedge dz + (2y + z)\, dz \wedge dx + (x - z)\, dx \wedge dy$. Entonces

$$\begin{aligned}\omega_{(1,2,-3)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= 6\, dy \wedge dz(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + dz \wedge dx(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 4\, dx \wedge dy(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= 6\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= 6(a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + 4(a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$ ◆

Por último, generalizaremos los conceptos de las formas 1 y las formas 2 para dar la definición de una **forma *k***.

DEFINICIÓN 1.1 Sea k un entero positivo. Una **forma *k* (diferencial) básica** en $\mathbf{R}^n$ es una expresión de la forma

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

donde $1 \leq i_j \leq n$ para $j = 1, \ldots, k$. Las formas k básicas también son funciones que requieren k vectores como argumentos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ y se evalúan así:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \det \begin{bmatrix} dx_{i_1}(\mathbf{a}_1) & dx_{i_1}(\mathbf{a}_2) & \cdots & dx_{i_1}(\mathbf{a}_k) \\ dx_{i_2}(\mathbf{a}_1) & dx_{i_2}(\mathbf{a}_2) & \cdots & dx_{i_2}(\mathbf{a}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{i_k}(\mathbf{a}_1) & dx_{i_k}(\mathbf{a}_2) & \cdots & dx_{i_k}(\mathbf{a}_k) \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 5 Sea

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 3, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (5, 4, 3, 2, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_3 = (0, 1, 3, -2, 0)$$

tres vectores en $\mathbf{R}^5$. Entonces, tenemos:

$$dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -3. \quad \blacklozenge$$

Utilizando las propiedades de los determinantes puede demostrarse que:

$$\begin{aligned} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ = -dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \wedge \cdots \wedge dx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned} \tag{3}$$

y

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_j} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0. \tag{4}$$

La fórmula (3) dice que, si se intercambian dos términos (digamos dx_{ij} y dx_{il}) en la forma k básica $dx_{i1} \wedge \ldots \wedge dx_{ik}$ se ocasiona un cambio de signo, y la fórmula 4 afirma que una forma k básica que contenga dos términos idénticos es igual a cero. Las fórmulas (3) y (4) generalizan a las fórmulas (1) y (2).

DEFINICIÓN 1.2 Una **forma *k* (diferencial)** general en $U \subseteq \mathbf{R}^n$ es una expresión de la forma

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} F_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

donde cada $F_{i_1 \ldots i_k}$ es una función de variable real $F_{i_1 \ldots i_k}: U \to \mathbf{R}$. Dado un punto $\mathbf{x}_0 \in U$, evaluamos ω en una k-tupla ordenada $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ de vectores como

$$\omega_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} F_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}_0)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Advierta que una forma 0 recibe ese nombre debido a que, para ser consistente con una forma 1 o una 2, ¡debe tomar cero vectores como argumento!

En vista de las fórmulas (3) y (4) escribimos una forma k general como

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} F_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

(Es decir, la suma puede tomarse sobre índices estrictamente crecientes $i_1, \ldots, i_k$). Por ejemplo, la forma 4

$$\begin{aligned}\omega = {} & x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + (x_3 - x_5^2)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_5 \wedge dx_3 \\ & + x_1 x_3\, dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1\end{aligned}$$

se puede escribir en la "forma estándar" con índices crecientes como

$$\omega = (x_2 - x_1 x_3)\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + (x_5^2 - x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5.$$

Es posible agregar dos formas k en la forma obvia, y el producto de una forma 0 f y una forma k, ω, es análogo al producto de una forma 0 por una forma 1.

Producto externo

El símbolo $\wedge$ que hemos estado utilizando denota, en realidad, un tipo de multiplicación llamado **producto externo** (o **cuña**). El producto externo puede extenderse a formas diferenciales generales de la manera siguiente:

DEFINICIÓN 1.3 Sea $U \subseteq \mathbf{R}^n$ abierto. Sea que f denote una forma 0 en U. Sea que $\omega = \sum F_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ denote una forma k en U y $\eta = \sum G_{j_1 \ldots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ sea una forma l. Entonces, se define

$$f \wedge \omega = f\omega = \sum f F_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

$$\omega \wedge \eta = \sum F_{i_1 \ldots i_k} G_{j_1 \ldots j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

Así, el producto cuña de una forma k y una forma l es una forma $(k + l)$.

EJEMPLO 6 Sea

$$\omega = x_1^2\, dx_1 \wedge dx_2 + (2x_3 - x_2)\, dx_1 \wedge dx_3 + e^{x_3}\, dx_3 \wedge dx_4$$

y

$$\eta = x_4\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 + x_6\, dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6$$

una forma 2 y una 3, respectivamente, en $\mathbf{R}^6$. Entonces, la definición 1.3 produce:

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta = {} & x_1^2 x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \\ & + (2x_3 - x_2) x_4\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \\ & + e^{x_3} x_4\, dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \\ & + x_1^2 x_6\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6 \\ & + (2x_3 - x_2) x_6\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6 \\ & + e^{x_3} x_6\, dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6.\end{aligned}$$

Debido a la fórmula (4), la mayoría de términos de esta suma son iguales a cero. En efecto,

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (2x_3 - x_2)x_6\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6 \\ &= (x_2 - 2x_3)x_6\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_6,\end{aligned}$$

utilizando la fórmula (3). ◆

A partir de las diversas definiciones y observaciones hechas hasta este momento estableceremos los resultados siguientes, que son útiles al calcular formas diferenciales:

PROPOSICIÓN 1.4 (PROPIEDADES DEL PRODUCTO EXTERIOR) Suponga que todas las formas diferenciales que siguen están definidas en $U \subseteq \mathbf{R}^n$:

1. **Distributividad.** Si ω_1 y ω_2 son formas k y η es una forma l, entonces
$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta.$$
2. **Anticonmutatividad.** Si ω es una forma k y η es una forma l, entonces
$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$
3. **Asociatividad.** Si ω es una forma k, η una forma l y τ una forma p, entonces
$$(\omega \wedge \eta) \wedge \tau = \omega \wedge (\eta \wedge \tau).$$
4. **Homogeneidad.** Si ω es una forma k, η una forma l y f una forma 0, entonces
$$(f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (f\eta).$$

8.1 Ejercicios

Determine los valores de las siguientes formas diferenciales en los conjuntos ordenados de vectores indicados en los ejercicios 1 a 7.

1. $dx_1 - 3\,dx_2$; $\mathbf{a} = (7, 3)$
2. $2\,dx + 6\,dy - 5\,dz$; $\mathbf{a} = (1, -1, -2)$
3. $3\,dx_1 \wedge dx_2$; $\mathbf{a} = (4, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 0)$
4. $4\,dx \wedge dy - 7\,dy \wedge dz$; $\mathbf{a} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 2)$
5. $7\,dx \wedge dy \wedge dz$; $\mathbf{a} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{c} = (5, 2, 1)$
6. $dx_1 \wedge dx_2 + 2\,dx_2 \wedge dx_3 + 3\,dx_3 \wedge dx_4$; $\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (4, 3, 2, 1)$
7. $2\,dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5$; $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 4, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 9, 1, -1)$, $\mathbf{c} = (5, 0, 0, 0, -2)$
8. Sea ω la forma 1 en $\mathbf{R}^3$ definida por
$$\omega = x^2y\,dx + y^2z\,dy + z^3x\,dz.$$
Encuentre $\omega_{(3,-1,4)}(\mathbf{a})$, donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
9. Sea ω la forma 2 en $\mathbf{R}^4$ dada por
$$\omega = x_1x_3\,dx_1 \wedge dx_3 - x_2x_4\,dx_2 \wedge dx_4.$$
Encuentre $\omega_{(2,-1,-3,1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
10. Sea ω la forma 2 en $\mathbf{R}^3$ dada por
$$\omega = \cos x\,dx \wedge dy - \operatorname{sen} z\,dy \wedge dz + (y^2 + 3)dx \wedge dz.$$
Encuentre $\omega_{(0,-1,\pi/2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.
11. Sea ω como la del ejercicio 10. Encuentre $\omega_{(x,y,z)}((2, 0, -1), (1, 7, 5))$.
12. Sea ω la forma 3 en $\mathbf{R}^3$ dada por
$$\omega = (e^x \cos y + (y^2 + 2)e^{2z})\,dx \wedge dy \wedge dz.$$
Encuentre $\omega_{(0,0,0)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.
13. Sea ω como la del ejercicio 12. Encuentre $\omega_{(x,y,z)}((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$.

En los ejercicios 14 a 19 determine $\omega \wedge \eta$.

14. En $\mathbf{R}^3$: $\omega = 3\,dx + 2\,dy - x\,dz$; $\eta = x^2dx - \cos y\,dy + 7\,dz$.
15. En $\mathbf{R}^3$: $\omega = y\,dx - x\,dy$; $\eta = z\,dx \wedge dy + y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz$.

16. En $\mathbf{R}^4$: $\omega = 2\,dx_1 \wedge dx_2 - x_3\,dx_2 \wedge dx_4$; $\eta = 2x_4\,dx_1 \wedge dx_3 + (x_3 - x_2)\,dx_3 \wedge dx_4$.

17. En $\mathbf{R}^4$: $\omega = x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2 + 3x_3\,dx_3$; $\eta = (x_1 + x_2)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_3 - x_4)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$.

18. En $\mathbf{R}^4$: $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_3 - x_4)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$; $\eta = x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2 + 3x_3\,dx_3$.

19. En $\mathbf{R}^5$: $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 - x_2x_3\,dx_1 \wedge dx_5$; $\eta = e^{x_4x_5}dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 - x_1 \cos x_5\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

20. Demuestre la fórmula (3) evaluando $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, en k vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ en $\mathbf{R}^n$.

21. Pruebe la fórmula (4). (Sugerencia: use la fórmula (3)).

22. Explique por qué una forma k en $\mathbf{R}^n$ con $k > n$ debe ser idéntica a cero.

23. Haga la demostración de la propiedad 1 de la proposición 1.4.

24. Dé la prueba de la propiedad 2 de la proposición 1.4. (Sugerencia: use la fórmula (3)).

25. Demuestre la propiedad 3 de la proposición 1.4.

26. Diga la comprobación de la propiedad 4 de la proposición 1.4.

8.2 Variedades e integrales de formas k

En esta sección investigamos cómo integrar las formas k sobre objetos de k dimensiones (por ejemplo, curvas, superficies y otros análogos de mayor dimensión) en $\mathbf{R}^n$.

Integrales sobre curvas y superficies

Comenzaremos por considerar integrales de forma 1 y forma 2 sobre curvas y superficies parametrizadas.

DEFINICIÓN 2.1 Sea $\mathbf{x}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria C^1 en $\mathbf{R}^n$. Si ω es una forma 1 definida en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbf{R}^n$, que contiene la imagen de $\mathbf{x}$, entonces la **integral de ω sobre $\mathbf{x}$**, denotada como $\int_{\mathbf{x}} \omega$, es

$$\int_{\mathbf{x}} \omega = \int_a^b \omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{x}'(t))\,dt.$$

EJEMPLO 1 Sea $\omega = (x^2 + y)\,dx + yz\,dy + (x + y - z)\,dz$. Integramos ω sobre la trayectoria $\mathbf{x}\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{x}(t) = (2t + 3, 3t, 7 - t)$.

Tenemos $\mathbf{x}'(t) = (2, 3, -1)$, por lo que, empleando la definición 2.1, encontramos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x}} \omega &= \int_0^1 \omega_{(2t+3,3t,7-t)}(2, 3, -1)\,dt \\
&= \int_0^1 [((2t + 3)^2 + 3t)\,dx(2, 3, -1) + 3t(7 - t)\,dy(2, 3, -1) \\
&\qquad + (2t + 3 + 3t - (7 - t))\,dz(2, 3, -1)]\,dt \\
&= \int_0^1 [(4t^2 + 15t + 9) \cdot 2 + (21t - 3t^2) \cdot 3 + (6t - 4) \cdot (-1)]\,dt \\
&= \int_0^1 (-t^2 + 87t + 22)\,dt = \tfrac{391}{6}.
\end{aligned}$$

◆

En general, si

$$\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$$

es una forma 1 en $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ es cualquier trayectoria, entonces

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{x}'(t)) &= F_1(\mathbf{x}(t))\,dx_1(\mathbf{x}'(t)) + F_2(\mathbf{x}(t))\,dx_2(\mathbf{x}'(t)) \\ &\quad + \cdots + F_n(\mathbf{x}(t))\,dx_n(\mathbf{x}'(t)) \\ &= F_1(\mathbf{x}(t))x_1'(t) + F_2(\mathbf{x}(t))x_2'(t) + \cdots + F_n(\mathbf{x}(t))x_n'(t) \\ &= (F_1(\mathbf{x}(t)), F_2(\mathbf{x}(t)), \ldots, F_n(\mathbf{x}(t))) \cdot \mathbf{x}'(t).\end{aligned}$$

De esto se concluye lo siguiente:

PROPOSICIÓN 2.2 Si $\mathbf{F}$ denota el campo vectorial $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ y

$$\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$$

y si $\mathbf{x}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^n$ es una trayectoria C^1, entonces

$$\int_{\mathbf{x}} \omega = \int_a^b \omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{x}'(t))\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\,dt = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Es decir, la integración de una forma 1 sobre una trayectoria (o, en su caso, sobre una curva simple, C^1, por partes) es exactamente igual que el cálculo de una integral de línea vectorial.

Ahora veremos cómo integrar formas 2 sobre superficies parametrizadas en $\mathbf{R}^3$.

DEFINICIÓN 2.3 Sea D una región conectada, acotada, en $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$ una superficie parametrizada, suave, en $\mathbf{R}^3$. Si ω es una forma 2 definida en un conjunto abierto en $\mathbf{R}^3$ que contiene $\mathbf{X}(D)$, entonces definimos $\int_{\mathbf{x}} \omega$, **la integral de ω sobre $\mathbf{X}$**, como

$$\int_{\mathbf{X}} \omega = \iint_D \omega_{\mathbf{X}(s,t)}(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t)\,ds\,dt.$$

(Recuerde el lector que $\mathbf{T}_s = \partial\mathbf{X}/\partial s$ y $\mathbf{T}_t = \partial\mathbf{X}/\partial t$).

Trabajaremos con la integral de la definición 2.3. Escribimos ω como

$$F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy$$

y $\mathbf{X}(s, t)$ como $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} \omega &= \iint_D \omega_{\mathbf{X}(s,t)}(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t)\,ds\,dt \\ &= \iint_D [F_1(\mathbf{X}(s,t))\,dy \wedge dz(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t) + F_2(\mathbf{X}(s,t))\,dz \wedge dx(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t) \\ &\quad + F_3(\mathbf{X}(s,t))\,dx \wedge dy(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t)]\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Mediante la definición de las formas 2 básicas,

$$\begin{aligned}dy \wedge dz(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t) &= \det\begin{bmatrix} dy(\mathbf{T}_s) & dy(\mathbf{T}_t) \\ dz(\mathbf{T}_s) & dz(\mathbf{T}_t) \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \\ \partial z/\partial s & \partial z/\partial t \end{bmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}.\end{aligned}$$

De manera similar, tenemos

$$dz \wedge dx(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t) = \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)} \quad \text{y} \quad dx \wedge dy(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}.$$

Por lo tanto, si $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} \omega &= \iint_D \left[F_1(\mathbf{X}(s,t)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} + F_2(\mathbf{X}(s,t)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)} \right. \\ &\qquad \left. + F_3(\mathbf{X}(s,t)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right] ds\, dt \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right) ds\, dt.\end{aligned}$$

Recuerde el lector, de la fórmula 7 de la sección 7.1, que

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right) = \mathbf{N}(s,t),$$

la normal a $\mathbf{X}(D)$ en el punto $\mathbf{X}(s, t)$. Por lo tanto, hemos establecido la siguiente proposición (véase también la definición 2.2 del capítulo 7):

PROPOSICIÓN 2.4 Si $\mathbf{F}$ denota el campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, y

$$\omega = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy$$

y si $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$ es una superfice parametrizada y suave, tal que ω (o $\mathbf{F}$) se define en un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{X}(D)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} \omega &= \iint_D \omega_{\mathbf{X}(s,t)}(\mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t)\, ds\, dt = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{X}(s,t)) \cdot \mathbf{N}(s,t)\, ds\, dt \\ &= \iint_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

Variedades parametrizadas

A continuación generalizamos los conceptos de las curvas y superficies parametrizadas a objetos de dimensiones mayores en $\mathbf{R}^n$. Para establecer la notación, sea que $\mathbf{R}^k$ tenga coordenadas $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

DEFINICIÓN 2.5 Sea D una región en $\mathbf{R}^k$ que consta de un conjunto conectado y abierto, posiblemente junto con algunos o todos sus puntos de frontera. Una **variedad k parametrizada** en $\mathbf{R}^n$ es un mapa continuo $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^n$, que es uno a uno, excepto, tal vez, a lo largo de ∂D. Haremos referencia a la imagen $M = \mathbf{X}(D)$ como la **variedad subyacente de X** (o la variedad **parametrizada por X**).

Tal variedad k posee k **curvas coordenadas** definidas a partir de $\mathbf{X}$ manteniendo fijas todas las variables $u_1, \ldots, u_k$ excepto una; lo cual significa que la j-ésima curva coordenada es la curva parametrizada mediante

$$u_j \longmapsto \mathbf{X}(a_1, \ldots, a_{j-1}, u_j, a_{j+1}, \ldots, a_k),$$

donde las $a_i\,(i \neq j)$ son constantes fijas. Si $\mathbf{X}$ es diferenciable y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotan las funciones componente de $\mathbf{X}$, entonces el vector tangente a la j-ésima curva coordenada, denotada como $\mathbf{T}_{u_j}$, es

$$\mathbf{T}_{u_j} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \frac{\partial x_2}{\partial u_j}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j}\right).$$

Se dice que una variedad k parametrizada es **suave** en un punto $\mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$ si el mapeo $\mathbf{X}$ es de clase C^1 en una vecindad de $\mathbf{u}_0$, y si los k vectores tangentes $\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}$ son linealmente independientes en $\mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$. (Recuerde el lector que k vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ en $\mathbf{R}^n$ son **linealmente independientes** si se cumple la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ si y solo si $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$). Se dice que una variedad k parametrizada es **suave** si es suave en cada punto de $\mathbf{X}(\mathbf{u}_0)$ con $\mathbf{u}_0$ en el interior de D.

En ocasiones haremos referencia a la variedad subyacente $M = \mathbf{X}(D)$ de una variedad parametrizada $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^n$ como una variedad parametrizada; no esperamos que haya confusión alguna por este abuso de la terminología.

EJEMPLO 2 Sea $D = [0, 1] \times [1, 2] \times [-1, 1]$ y $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^5$ dada por

$$\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 + u_2, 3u_2, u_2u_3^2, u_2 - u_3, 5u_3).$$

Demostraremos que $M = \mathbf{X}(D)$ es una variedad 3 parametrizada y suave en $\mathbf{R}^5$.

En primer lugar, observe el lector que $\mathbf{X}$ es continua (en realidad de clase C^∞), ya que sus funciones componente son polinomios. Para ver que $\mathbf{X}$ es uno a uno, considere la ecuación

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{u}}); \tag{1}$$

demostraremos que $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. La ecuación (1) es equivalente a un sistema de cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \\ 3u_2 = 3\tilde{u}_2 \\ u_2u_3^2 = \tilde{u}_2\tilde{u}_3^2 \\ u_2 - u_3 = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_3 \\ 5u_3 = 5\tilde{u}_3 \end{cases}.$$

La segunda ecuación implica que $u_2 = \tilde{u}_2$, y la última ecuación implica que $u_3 = \tilde{u}_3$. En consecuencia, la primera ecuación se convierte en:

$$u_1 + u_2 = \tilde{u}_1 + u_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u_1 = \tilde{u}_1.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = \tilde{\mathbf{u}}.$$

Para comprobar la suavidad de M, observe el lector que los vectores tangentes a las tres curvas coordenadas son

$$\mathbf{T}_{u_1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_1} = (1, 0, 0, 0, 0);$$

$$\mathbf{T}_{u_2} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_2} = (1, 3, u_3^2, 1, 0);$$

$$\mathbf{T}_{u_3} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_3} = (0, 0, 2u_2u_3, -1, 5).$$

Por lo tanto, para tener $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 = \mathbf{0}$ debemos tener

$$(c_1 + c_2, 3c_2, u_3^2 c_2 + 2u_2u_3c_3, c_2 - c_3, 5c_3) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Se sigue de inmediato que la única posibilidad de solución es que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. En consecuencia, $\mathbf{T}_{u_1}$, $\mathbf{T}_{u_2}$ y $\mathbf{T}_{u_3}$ son linealmente independientes en todo $\mathbf{u} \in D$ y, por consiguiente, M es suave en todos los puntos. ◆

Las variedades parametrizadas, aunque parecen conceptos matemáticos abstractos cuando k es mayor que 3, en realidad son muy útiles para describir diversas situaciones, una de las cuales se ilustra en el ejemplo siguiente.

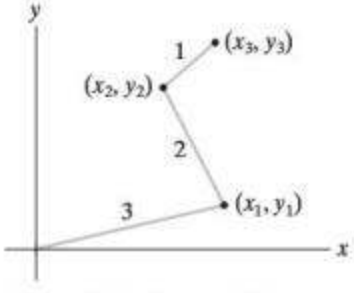


Figura 8.1 El brazo robótico plano del ejemplo 3. Cada cilindro tiene libertad de pivotear con respecto de los puntos de unión apropiados.

EJEMPLO 3 Se construyó un brazo robótico plano que consta de tres cilindros unidos de longitudes 1, 2 y 3 (véase la figura 8.1). El cilindro de longitud 3 se encuentra anclado en el origen de $\mathbf{R}^2$ pero tiene libertad de girar con respecto de este. El cilindro de longitud 2 está unido al extremo libre del cilindro de longitud 3, y el de longitud 1 a su vez se haya unido al extremo libre del de longitud 2. Describiremos el conjunto de posiciones que el brazo puede adoptar como una variedad parametrizada.

Es evidente que cada estado del brazo robótico es determinado por las coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) de los puntos de unión, los que consideraremos que forman un vector $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ en $\mathbf{R}^6$. Sin embargo, no todos los vectores en $\mathbf{R}^6$ representan un estado del brazo robótico. En particular, el punto (x_1, y_1) debe estar en el círculo de radio 3, con centro en el origen, el punto (x_2, y_2) debe ubicarse en el círculo de radio 2 con centro en (x_1, y_1) y el punto (x_3, y_3) debe quedar en el círculo de radio 1 cuyo centro está en (x_2, y_2). Así, para que $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ represente un estado del brazo robótico se requiere que:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 9 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4. \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Podemos parametrizar cada uno de los círculos en el sistema (2) en forma uno a uno usando tres diferentes ángulos θ_1, θ_2 y θ_3. Así, encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (3\cos\theta_1, 3\operatorname{sen}\theta_1), \\ (x_2, y_2) &= (x_1 + 2\cos\theta_2, y_1 + 2\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= (3\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2, 3\operatorname{sen}\theta_1 + 2\operatorname{sen}\theta_2), \end{aligned} \tag{3}$$

y

$$\begin{aligned} (x_3, y_3) &= (x_2 + \cos\theta_3, y_2 + \operatorname{sen}\theta_3) \\ &= (3\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2 + \cos\theta_3, 3\operatorname{sen}\theta_1 + 2\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_3), \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 2\pi$. Por lo tanto, el mapa $\mathbf{X}$: $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^6$ dado por

$$\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3),$$

donde $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ es dado en términos de θ_1, θ_2 y θ_3 por medio de las ecuaciones en (3), muestra el conjunto de estados del brazo robótico como una variedad 3 parametrizada en $\mathbf{R}^6$. Se invita al lector a comprobar que $\mathbf{X}$ define una variedad 3 parametrizada y suave. ◆

Igual que una superficie parametrizada, una variedad k parametrizada $M = \mathbf{X}(D)$ puede o no tener una **frontera** denotada, como es usual, por ∂M. Si M tiene una frontera no vacía, entonces ∂M está contenida en la imagen bajo $\mathbf{X}$ de la parte de la frontera de la región del dominio D que también forma parte de D. Con hipótesis apropiadas (y flexibles), ∂M, si no es el vacío es, a su vez, la unión de un número grande y finito de variedades $(k-1)$ (*sin* fronteras).

EJEMPLO 4 Sea que $B \subset \mathbf{R}^3$ denote la esfera unitaria cerrada $\{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1\}$ y $\mathbf{X}: B \to \mathbf{R}^4$ se defina como

$$\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

Entonces, $M = \mathbf{X}(B)$ es una parte de un "paraboloide generalizado" que tiene la ecuación $w = x^2 + y^2 + z^2$; tenemos que $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid w = x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. En este caso, $\partial M = \{(x, y, z, 1) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Observe que ∂M es una variedad 2 parametrizada en $\mathbf{R}^4$, como se ve con el mapa:

$$\mathbf{Y}: [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}_4, \quad \mathbf{Y}(s, t) = (\operatorname{sen} s \cos t, \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, \cos s, 1). \quad \blacklozenge$$

Integrales sobre variedades k parametrizadas

Ahora veremos cómo definir la integral de una forma k sobre una variedad k parametrizada y suave. Nuestra definición generaliza las definiciones 2.1 y 2.3.

DEFINICIÓN 2.6 Sea D una región conectada y acotada en $\mathbf{R}^k$ y $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^n$ una variedad k parametrizada y suave. Si ω es una forma k definida en un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$ que contiene a $M = \mathbf{X}(D)$, entonces la **integral** de ω se define sobre M (que se denota como $\int_{\mathbf{X}} \omega$) con

$$\int_{\mathbf{X}} \omega = \int \cdots \int_D \omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k})\, du_1 \cdots du_k.$$

(Aquí, $\int \cdots \int$ se refiere a la integral k-dimensional sobre D).

EJEMPLO 5 Sea $\mathbf{X}: [0, 1] \times [1, 2] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}^5$ la variedad 3 parametrizada definida por

$$\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 + u_2, 3u_2, u_2 u_3^2, u_2 - u_3, 5u_3).$$

(Véase el ejemplo 2). Sea ω la forma 3 definida sobre $\mathbf{R}^5$ como

$$\omega = x_1 x_3\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 + (x_3 x_4 - 2x_2 x_5)\, dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5.$$

Calcularemos $\int_{\mathbf{X}} \omega$.

Del ejemplo 2 recuerde que los vectores tangente a las tres curvas coordenadas son

$$\mathbf{T}_{u_1} = (1, 0, 0, 0, 0),$$
$$\mathbf{T}_{u_2} = (1, 3, u_3^2, 1, 0),$$

y

$$\mathbf{T}_{u_3} = (0, 0, 2u_2 u_3, -1, 5).$$

Entonces, a partir de la definición 2.6,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{X}} \omega \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} \{(u_1+u_2)u_2u_3^2\, dx_1\wedge dx_3\wedge dx_5(\mathbf{T}_{u_1},\mathbf{T}_{u_2},\mathbf{T}_{u_3}) \\
&\quad +(u_2u_3^2(u_2-u_3)-30u_2u_3)\, dx_2\wedge dx_4\wedge dx_5(\mathbf{T}_{u_1},\mathbf{T}_{u_2},\mathbf{T}_{u_3})\}\, du_1\, du_2\, du_3 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} \left\{ (u_1+u_2)u_2u_3^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & u_3^2 & 2u_2u_3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + (u_2^2u_3^2 - u_2u_3^3 - 30u_2u_3) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right\} du_1\, du_2\, du_3 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} 5(u_1+u_2)u_2u_3^4\, du_1\, du_2\, du_3 = \tfrac{37}{6}.
\end{aligned}$$

◆

EJEMPLO 6 Si ω es una forma 3 en $\mathbf{R}^3$, entonces ω puede escribirse como sigue:

$$\omega = F(x, y, z)\, dx\wedge dy\wedge dz.$$

(¿Por qué?) Si D^* es una región acotada en $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{X}$: $D^*\to\mathbf{R}^3$ es una variedad 3 parametrizada y suave, entonces la definición 2.6 nos dice que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{X}}\omega &= \iiint_{D^*} \omega_{\mathbf{X}(u_1,u_2,u_3)}(\mathbf{T}_{u_1},\mathbf{T}_{u_2},\mathbf{T}_{u_3})\, du_1\, du_2\, du_3 \\
&= \iiint_{D^*} F(\mathbf{X}(\mathbf{u}))\, dx\wedge dy\wedge dz(\mathbf{T}_{u_1},\mathbf{T}_{u_2},\mathbf{T}_{u_3})\, du_1\, du_2\, du_3 \\
&= \iiint_{D^*} F(\mathbf{X}(\mathbf{u})) \begin{vmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/\partial u_3 \end{vmatrix} du_1\, du_2\, du_3 \\
&= \iiint_{D^*} F(x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\, du_1\, du_2\, du_3 \\
&= \pm\iiint_{D} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,
\end{aligned}$$

del teorema de cambio de variables para las integrales triples (teorema 5.5 del capítulo 5), donde $D = \mathbf{X}(D^*)$. ◆

Orientación de una variedad k parametrizada

Hemos visto que las integrales vectoriales de línea y las integrales vectoriales de superficie pueden definirse, respectivamente, sobre curvas y superficies orientadas de una manera que es en efecto independiente de la parametrización que se utilice.

Figura 8.2 Una orientación de la curva C ilustrada es una elección del vector $\mathbf{T}$ unitario tangente a C que varía continuamente.

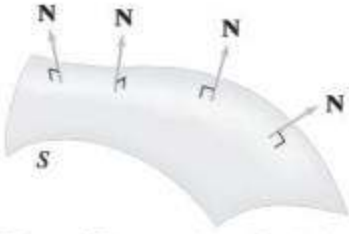


Figura 8.3 Una orientación de la superficie S es una elección de un vector $\mathbf{N}$ unitario, normal a S, que varía continuamente.

Ahora veremos cómo es posible definir la integral de una forma k sobre una variedad k parametrizada $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^n$, por lo tanto, depende mucho de la variedad subyacente $M = \mathbf{X}(D)$ y no del mapa particular $\mathbf{X}$. Para hacer esto debemos considerar cómo afecta a la integral la **reparametrización** de M, y debemos definir lo que queremos decir con **orientación** de M.

En primer lugar, consideremos el concepto de orientación. Ya hemos visto cómo las curvas y superficies parametrizadas pueden orientarse utilizando algunas ideas geométricas muy naturales. Una curva parametrizada y suave recibió implícitamente una orientación del parámetro; lo común es que se oriente una curva indicando la dirección en que se incrementa la variable paramétrica. También podemos pensar que una **orientación** de una curva es una elección de un vector $\mathbf{T}$ unitario tangente a cada punto de la curva, con lo que $\mathbf{T}$ varía continuamente a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva (véase la figura 8.2). Una **orientación** de una superficie parametrizada y suave en $\mathbf{R}^3$, cuando existe, es una elección de un vector $\mathbf{N}$ normal unitario que varía en forma continua en cada punto de la superficie (véase la figura 8.3).

Para definir los conceptos de **orientación** y **orientabilidad** para una variedad k parametrizada, cuando $k > 2$, necesitaremos trabajar de manera más formal.

En primer lugar necesitamos presentar dos ideas relacionadas del álgebra lineal de $\mathbf{R}^n$. Supongamos que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en $\mathbf{R}^n$. Por medio de una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ nos referimos a cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ que pueda escribirse como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

para elecciones apropiadas de los escalares $c_1, \ldots, c_k$. El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, llamado **expansión (lineal)** de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, se denotará como generador $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Es decir,

$$\text{generador}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}\}.$$

DEFINICIÓN 2.7 Sea $M = \mathbf{X}(D)$, donde $\mathbf{X}: D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ es una variedad k parametrizada y suave. Una **orientación** de M es una elección de una forma k distinta de cero y suave, Ω, definida en M. Si tal forma k, Ω, existe, se dice que M es **orientable** y **orientada** una vez que se hace la elección de dicha forma k.

Aunque no es fácil visualizar una orientación Ω de una variedad k parametrizada cuando k es grande, podemos ver la forma en que los vectores tangentes a las curvas coordenadas se relacionan con aquella.

DEFINICIÓN 2.8 Sea $M = \mathbf{X}(D)$ una variedad k parametrizada y suave, orientada por la forma k, Ω. Se dice que los vectores $\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}$ tangentes a las curvas coordenadas de M, son **compatibles** con Ω si

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}) > 0.$$

También decimos que la parametrización $\mathbf{X}$ es **compatible** con la orientación Ω si los vectores tangentes correspondientes $\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}$ lo son.

Advierta que si $\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}$ son incompatibles con la orientación Ω, entonces son compatibles con la orientación *opuesta* $-\Omega$. En forma alternativa, podemos cambiar la parametrización $\mathbf{X}$ de M reordenando las variables $u_1, \ldots, u_k$ a, digamos, $u_2, u_1, u_3, \ldots, u_k$, de modo que $\mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_3}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}$ sean compatibles con Ω.

La definición 2.7, como enseguida veremos, es consistente con las definiciones anteriores de las orientaciones de curvas y superficies. En primer lugar, suponga el lector que $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^n$ es una curva parametrizada y suave en $\mathbf{R}^n$ (donde I es un intervalo en $\mathbf{R}$) y $\mathbf{T}$ es una elección de vector unitario tangente a $C = \mathbf{x}(I)$ que varía continuamente a lo largo de esta. Entonces, definimos una orientación de la forma 1, Ω, en C por medio de

$$\Omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{a}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}.$$

Por el contrario, si se da una orientación de la forma 1, Ω, es posible definir un vector tangente unitario que varía continuamente haciendo que $\mathbf{T}$ sea el único vector unitario paralelo a $\mathbf{x}'(t)$, tal que, para cualquier vector $\mathbf{a}$ distinto de cero, paralelo a $\mathbf{x}'(t)$,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \text{ tiene el mismo signo que } \Omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{a}).$$

Se sigue que $\mathbf{T}$ está determinado en forma única debido a que debe ser igual a $\pm\mathbf{x}'(t)/\|\mathbf{x}'(t)\|$, de modo que, al conocer $\mathbf{a}$ y el valor de $\Omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{a})$, se determina la elección del signo de $\mathbf{T}$.

De manera similar, suponga que $S = \mathbf{X}(D)$ es una superficie parametrizada y suave en $\mathbf{R}^3$, es decir, una variedad 2 parametrizada y suave. Si podemos orientar a S por medio de una normal $\mathbf{N}$ unitaria que varíe en forma continua, entonces podemos definir una orientación de forma 2, Ω, en S por medio de:

$$\Omega_{\mathbf{X}(u_1,u_2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

donde $[\,\mathbf{N}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}\,]$ es la matriz de 3×3 cuyas columnas son, en orden, los vectores $\mathbf{N}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Por el contrario, dada una orientación de forma 2 Ω en S, podemos definir una normal $\mathbf{N}$ unitaria que varía continuamente tomando $\mathbf{N}$ como el vector unitario *único* perpendicular a $\mathbf{T}_{u_1}$ y $\mathbf{T}_{u_2}$ (y, por lo tanto, a cada vector en generador$\{\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}\}$), tal que, para cualquier pareja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ de vectores linealmente independientes en generador$\{\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}\}$,

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ tiene el mismo signo que } \Omega_{\mathbf{X}(u_1,u_2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Para ver que $\mathbf{N}$ está determinado de manera única, observe que, dados los vectores linealmente independientes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en generador$\{\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}\}$, las únicas posibilidades para $\mathbf{N}$ son

$$\pm\frac{\mathbf{T}_{u_1} \times \mathbf{T}_{u_2}}{\|\mathbf{T}_{u_1} \times \mathbf{T}_{u_2}\|}.$$

Entonces, escogemos el signo del vector normal $\mathbf{N}$ de modo que $\det[\,\mathbf{N}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}\,]$ tenga el mismo signo que $\Omega_{\mathbf{x}(u_1,u_2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

EJEMPLO 7 Considere el paraboloide generalizado $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid w = x^2 + y^2 + z^2\}$, el cual puede considerarse como una variedad 3 parametrizada y suave por medio de:

$$\mathbf{X}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4, \quad \mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

Mostraremos cómo orientar a M.

Advierta que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - w = 0$ indica que M es el conjunto de nivel a la altura 0 de la función $F(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w$. Entonces, el gradiente $\nabla F = (2x, 2y, 2z, -1)$ es un vector normal a M. Si empleamos la parametrización $\mathbf{X}$ y normalizamos el gradiente (parametrizado), vemos que

$$\mathbf{N}(u_1, u_2, u_3) = \frac{(2u_1, 2u_2, 2u_3, -1)}{\sqrt{4u_1^2 + 4u_2^2 + 4u_3^2 + 1}}$$

es una normal unitaria que varía de manera continua. Además, la forma 3 Ω definida en M como

$$\Omega_{\mathbf{X}(u)}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

da una orientación para M. Observe que

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3}) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{N} & \mathbf{T}_{u_1} & \mathbf{T}_{u_2} & \mathbf{T}_{u_3}\end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \dfrac{2u_1}{\sqrt{4u_1^2+4u_2^2+4u_3^2+1}} & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2u_2}{\sqrt{4u_1^2+4u_2^2+4u_3^2+1}} & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2u_3}{\sqrt{4u_1^2+4u_2^2+4u_3^2+1}} & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{4u_1^2+4u_2^2+4u_3^2+1}} & 2u_1 & 2u_2 & 2u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{4u_1^2+4u_2^2+4u_3^2+1}.$$

Como esta última expresión es estrictamente positiva, vemos que $\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3}$ son compatibles con Ω. ◆

EJEMPLO 8 Podemos generalizar el ejemplo 7 como sigue:

Suponga que $M \subseteq \mathbf{R}^n$ es la gráfica de una función f: $U \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$; es decir, imagine que M es definida por la ecuación $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Entonces M puede parametrizarse como una variedad $(n-1)$ por medio de

$$\mathbf{X}: U \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{X}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, f(u_1, \ldots, u_{n-1})).$$

Como M también es el conjunto de nivel a la altura 0 de la función

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_n,$$

un vector normal a M es producido por el gradiente $\nabla F = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_{n-1}}, -1)$. Si normalizamos ∇F y usamos la parametrización $\mathbf{X}$, vemos que tenemos una normal unitaria que varía de manera continua:

$$\mathbf{N}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \frac{(f_{u_1}, \ldots, f_{u_{n-1}}, -1)}{\sqrt{f_{u_1}^2 + \cdots + f_{u_{n-1}}^2 + 1}},$$

a partir de la cual definimos nuestra orientación forma $(n-1)$ Ω para M por medio de:

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{N} & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{n-1}\end{bmatrix}.$$ ◆

Ahora suponga que M es una variedad k parametrizada y suave en $\mathbf{R}^n$ con frontera ∂M no vacía. Si M está orientada por la forma k, Ω, entonces hay un modo de obtener de ella una orientación para ∂M, lo cual describimos en la definición 2.9. Para establecer la notación, determine que $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ denota la parametrización de M y suponga que $\mathbf{Y}$: $E \subseteq \mathbf{R}^{k-1} \to \mathbf{R}^n$ da una parametrización de un elemento conectado de ∂M como una variedad $(k-1)$ suave. Puesto que ∂M es parte de M, si $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_{k-1}) \in E$, entonces hay algún $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in D$, tal que $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{X}(\mathbf{u})$.

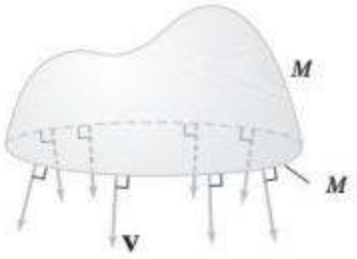


Figura 8.4 El vector unitario **V** que apunta hacia afuera de la definición 2.9.

DEFINICIÓN 2.9 Sea M una variedad k parametrizada y suave en $\mathbf{R}^n$ con frontera ∂M. Suponga que M está orientada por la forma k Ω. Entonces se dice que los elementos conectados de ∂M están **orientados de manera consistente** con M, o que ∂M tiene su **orientación inducida** a partir de la de M, si la orientación de la forma $(k-1)$ $\Omega^{\partial M}$ es determinada a partir de Ω como sigue. Sea $\mathbf{V}$ el único vector unitario que apunta hacia afuera en $\mathbf{R}^n$, definido y con variación continua a lo largo de ∂M, que es tangente a M y normal a ∂M (véase la figura 8.4). Entonces, $\Omega^{\partial M}$ se define como

$$\Omega^{\partial M}_{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) = \Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{V}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}),$$

donde el mapa $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ parametriza a M, el mapa $\mathbf{Y}$: $E \subseteq \mathbf{R}^{k-1} \to \mathbf{R}^n$ parametriza un elemento conectado de ∂M y $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{X}(\mathbf{u})$.

Observe que, en particular, el vector $\mathbf{V}$ de la definición 2.9 debe ser tal que

- $\mathbf{V} \in$ generador$\{\mathbf{T}_{u_1}, \ldots, \mathbf{T}_{u_k}\}$, es decir, $\mathbf{V}$ es tangente a M;
- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_{s_i} = 0$ para $i = 1, \ldots, k-1$, es decir, $\mathbf{V}$ es normal a ∂M;
- $\mathbf{V}$ apunta hacia afuera de M.

En la práctica es frecuente que estas condiciones no sean difíciles de alcanzar. La definición 2.9 será muy importante cuando, en la sección siguiente, se considere una generalización del teorema de Stokes.

EJEMPLO 9 Considere la superficie S en $\mathbf{R}^3$ que consta de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, con $2 \leq z \leq 5$. Advierta que la frontera de S consta de los dos círculos $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, z = 2\}$ y $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, z = 5\}$. Investigaremos cómo orientar ∂S de manera consistente con una orientación de S.

El cilindro puede parametrizarse como una variedad 2 en $\mathbf{R}^3$ por medio de:

$$\mathbf{X}: [0, 2\pi) \times [2, 5] \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{X}(u_1, u_2) = (2 \cos u_1, 2 \operatorname{sen} u_1, u_2).$$

Entonces, los vectores tangentes a las curvas coordenadas son

$$\mathbf{T}_{u_1} = (-2 \operatorname{sen} u_1, 2 \cos u_1, 0)$$

y

$$\mathbf{T}_{u_2} = (0, 0, 1).$$

Como S es una parte del conjunto de nivel a la altura 4 de la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2$, una normal unitaria $\mathbf{N}$ a S es dada por

$$\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right).$$

En términos de la parametrización $\mathbf{X}$, la normal $\mathbf{N}$ también es dada por

$$\mathbf{N} = (\cos u_1, \operatorname{sen} u_1, 0).$$

Entonces, podemos definir una orientación forma 2 en S con:

$$\Omega_{\mathbf{X}(u_1, u_2)}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\Omega_{\mathbf{X}(u_1,u_2)}(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}) = \det \begin{bmatrix} \cos u_1 & -2 \operatorname{sen} u_1 & 0 \\ \operatorname{sen} u_1 & 2 \cos u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 > 0.$$

Así, $\mathbf{T}_{u_1}$, $\mathbf{T}_{u_2}$ son compatibles con Ω.

Podemos parametrizar ∂S usando dos mapeos:

Círculo inferior: $\mathbf{Y}_1\colon [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{Y}_1(s) = (2 \cos s, 2 \operatorname{sen} s, 2)$

y

Círculo superior: $\mathbf{Y}_2\colon [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{Y}_2(s) = (2 \cos s, 2 \operatorname{sen} s, 5)$

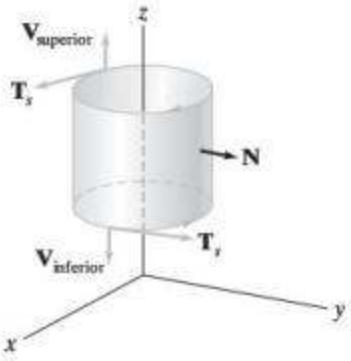


Figura 8.5 Orientación de la frontera de la superficie S del ejemplo 9. Advierta los vectores tangentes que apuntan hacia afuera, $\mathbf{V}_{\text{superior}}$ y $\mathbf{V}_{\text{inferior}}$.

Para usar la definición 2.9 con la finalidad de orientar ∂S debemos identificar vectores que apunten hacia afuera, y que sean tangentes a S y normales a ∂S. En la figura 8.5 se observa que a lo largo del círculo superior funciona $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{superior}} = (0, 0, 1)$, mientras que a lo largo del círculo inferior es suficiente con $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{inferior}} = (0, 0, -1)$. Entonces, la definición 2.9 nos dice que, a lo largo del círculo inferior,

$$\Omega^{\partial S}_{\mathbf{Y}_1(s)}(\mathbf{a}) = \Omega_{\mathbf{X}(s,2)}(\mathbf{V}_{\text{inferior}}, \mathbf{a}) = \det\left[\, \mathbf{N} \;\; \mathbf{V}_{\text{inferior}} \;\; \mathbf{a} \,\right],$$

mientras que, a lo largo del círculo superior,

$$\Omega^{\partial S}_{\mathbf{Y}_1(s)}(\mathbf{a}) = \Omega_{\mathbf{X}(s,5)}(\mathbf{V}_{\text{superior}}, \mathbf{a}) = \det\left[\, \mathbf{N} \;\; \mathbf{V}_{\text{superior}} \;\; \mathbf{a} \,\right].$$

Para ambos mapas, $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$, tenemos que el vector tangente coordenado es $\mathbf{T}_s = (-2 \operatorname{sen} s, 2 \cos s, 0)$. Entonces, en el círculo inferior,

$$\Omega^{\partial S}_{\mathbf{Y}_1(s)}(\mathbf{T}_s) = \det \begin{bmatrix} \cos s & 0 & -2 \operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s & 0 & 2 \cos s \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

por lo que $\mathbf{T}_s$ es compatible con la orientación forma 1 $\Omega^{\partial S}$. Sin embargo, a lo largo del círculo superior,

$$\Omega^{\partial S}_{\mathbf{Y}_2(s)}(\mathbf{T}_s) = \det \begin{bmatrix} \cos s & 0 & -2 \operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s & 0 & 2 \cos s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -2,$$

por lo que $\mathbf{T}_s$ es incompatible con $\Omega^{\partial S}$. Por lo tanto, debemos orientar el círculo superior *en el sentido de las manecillas del reloj* alrededor del eje z, y el círculo inferior *en sentido contrario al de las manecillas del reloj.* ◆

El ejemplo siguiente es el análogo en tres dimensiones del ejemplo 9.

EJEMPLO 10 Considere el subconjunto $M \subseteq \mathbf{R}^4$, dado por $M = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 2 \le w \le 5\}$. Este conjunto M es una parte del cilindro sobre una esfera de radio 2. Advierta que la frontera de M consta de las dos esferas $S_{\text{inferior}} = \{(x, y, z, 2) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ y $S_{\text{superior}} = \{(x, y, z, 5) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Investigaremos M y ∂M como variedades parametrizadas, orientaremos M y estudiaremos la orientación inducida en ∂M.

En primer lugar, observe que M puede parametrizarse como una variedad 3 en $\mathbf{R}^4$ por

$$\mathbf{X}\colon [0, \pi] \times [0, 2\pi) \times [2, 5] \to \mathbf{R}^4,$$

$$\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (2 \operatorname{sen} u_1 \cos u_2, 2 \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, 2 \cos u_1, u_3).$$

(Esta es la parametrización usual de una esfera utilizando coordenadas esféricas $\varphi = u_1, \theta = u_2$, con un parámetro adicional u_3 para el eje w "vertical".) Los vectores

tangentes a las curvas coordenadas son dados por

$$\mathbf{T}_{u_1} = (2\cos u_1 \cos u_2, 2\cos u_1 \operatorname{sen} u_2, -2\operatorname{sen} u_1, 0),$$

$$\mathbf{T}_{u_2} = (-2\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, 2\operatorname{sen} u_1 \cos u_2, 0, 0),$$

y

$$\mathbf{T}_{u_3} = (0, 0, 0, 1).$$

Observe que esta parametrización no es suave cuando u_1 vale 0 o π, ya que entonces $\mathbf{T}_{u_2} = \mathbf{0}$ en dichos valores para u_1. El lector puede comprobar que la parametrización es suave en todos los demás valores de $\mathbf{X}(\mathbf{u})$, es decir, para $\mathbf{u}$ en $(0, \pi) \times [0, 2\pi) \times [2, 5]$).

Debido a que M es una parte del conjunto de nivel en la altura 4 de la función $F(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2$, una normal unitaria $\mathbf{N}$ a M es dada por

$$\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(2x, 2y, 2z, 0)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}, 0\right).$$

En términos de la parametrización $\mathbf{X}$, la normal $\mathbf{N}$ también es dada por

$$\mathbf{N} = (\operatorname{sen} u_1 \cos u_2, \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, \cos u_1, 0).$$

Una orientación Ω de forma 3 para M es definida por

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3}) = \det\begin{bmatrix} \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 & 2\cos u_1 \cos u_2 & -2\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 & 0 \\ \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 & 2\cos u_1 \operatorname{sen} u_2 & 2\operatorname{sen} u_1 \cos u_2 & 0 \\ \cos u_1 & -2\operatorname{sen} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 4\operatorname{sen} u_1 > 0$$

para $0 < u_1 < \pi$ (que es donde la parametrización $\mathbf{X}$ es suave). Entonces $\mathbf{T}_{u_1}$, $\mathbf{T}_{u_2}$, $\mathbf{T}_{u_3}$ son compatibles con Ω.

Parametrizamos las dos partes de ∂M con dos mapeos:

Esfera "inferior" S_{inferior}:

$$\mathbf{Y}_1: [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^4,$$

$$\mathbf{Y}_1(s_1, s_2) = (2\operatorname{sen} s_1 \cos s_2, 2\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, 2\cos s_1, 2),$$

y

Esfera "superior" S_{superior}:

$$\mathbf{Y}_2: [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^4,$$

$$\mathbf{Y}_2(s_1, s_2) = (2\operatorname{sen} s_1 \cos s_2, 2\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, 2\cos s_1, 5).$$

Observe que ambas parametrizaciones, $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$, dan los mismos vectores tangentes a las curvas coordenadas correspondientes, que son

$$\mathbf{T}_{s_1} = (2\cos s_1 \cos s_2, 2\cos s_1 \operatorname{sen} s_2, -2\operatorname{sen} s_1, 0)$$

y

$$\mathbf{T}_{s_2} = (-2\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, 2\operatorname{sen} s_1 \cos s_2, 0, 0),$$

y, considerando estos vectores tangentes, vemos que las parametrizaciones son suaves siempre que $s_1 \neq 0, \pi$.

Para dar a ∂M la orientación inducida de la de M, identificamos vectores unitarios tangentes a M que apunten hacia afuera, y que sean normales a ∂M. Así, necesitamos $\mathbf{V}$, tal que

- $\mathbf{V} \in \text{generador}\{\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3}\} \iff \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$;
- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_{s_1} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_{s_2} = 0$;
- $\mathbf{V}$ apunta hacia afuera de M.

No es difícil ver que debemos tomar $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{superior}} = (0, 0, 0, 1)$ a lo largo de S_{superior} y $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{inferior}} = (0, 0, 0, -1)$ a lo largo de S_{inferior}. Entonces, la definición 2.9 nos dice que en S_{inferior},

$$\Omega^{\partial M}_{\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{s},2)}(\mathbf{V}_{\text{inferior}}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2).$$

En particular,

$$\Omega^{\partial M}_{\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})}(\mathbf{T}_{s_1}, \mathbf{T}_{s_2}) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{N} & \mathbf{V}_{\text{inferior}} & \mathbf{T}_{s_1} & \mathbf{T}_{s_2}\end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 & 0 & 2\cos s_1 \cos s_2 & -2\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 \\ \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 & 0 & 2\cos s_1 \operatorname{sen} s_2 & 2\operatorname{sen} s_1 \cos s_2 \\ \cos s_1 & 0 & -2\operatorname{sen} s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 4\operatorname{sen} s_1 > 0$$

para $0 < s_1 < \pi$, es decir, donde la parametrización $\mathbf{Y}_1$ es suave. Entonces, $\mathbf{Y}_1$ es compatible con $\Omega^{\partial M}$. Sin embargo en S_{superior}, tenemos que

$$\Omega^{\partial M}_{\mathbf{Y}_2(\mathbf{s})}(\mathbf{T}_{s_1}, \mathbf{T}_{s_2}) = \det\begin{bmatrix}\mathbf{N} & \mathbf{V}_{\text{inferior}} & \mathbf{T}_{s_1} & \mathbf{T}_{s_2}\end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 & 0 & 2\cos s_1 \cos s_2 & -2\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 \\ \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 & 0 & 2\cos s_1 \operatorname{sen} s_2 & 2\operatorname{sen} s_1 \cos s_2 \\ \cos s_1 & 0 & -2\operatorname{sen} s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -4\operatorname{sen} s_1 < 0$$

para $0 < s_1 < \pi$, por lo que $\mathbf{Y}_2$ es incompatible con $\Omega^{\partial M}$. Cuando consideremos la versión general del teorema de Stokes hemos de tener cuidado con esta distinción. ◆

A continuación estudiaremos la manera en que la integral de una forma k, ω, puede variar cuando se toma sobre dos parametrizaciones diferentes $\mathbf{X}: \mathbf{D}_1 \to \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{Y}: \mathbf{D}_2 \to \mathbf{R}^n$ para la misma variedad k $M = \mathbf{X}(D_1) = \mathbf{Y}(D_2)$.

DEFINICIÓN 2.10 Sea $\mathbf{X}: D_1 \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{Y}: D_2 \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ variedades k parametrizadas. Decimos que $\mathbf{Y}$ es una **reparametrización** de $\mathbf{X}$ si existe una función sobreyectiva que sea uno a uno $\mathbf{H}: D_2 \to D_1$ con inversa $\mathbf{H}^{-1}$ $D_1 \to D_2$, tal que $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{X}(\mathbf{H}(\mathbf{s}))$, es decir, tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \circ \mathbf{H}$. Si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son suaves y tanto $\mathbf{H}$ como $\mathbf{H}^{-1}$ son de clase C^1, entonces decimos que $\mathbf{Y}$ es una reparametrización **suave** de $\mathbf{X}$.

Como $\mathbf{H}$ es uno a uno, puede demostrarse que el jacobiano $\det D\mathbf{H}$ no puede cambiar de signo positivo a negativo (o viceversa). Entonces, decimos que tanto $\mathbf{H}$ como $\mathbf{Y}$ **preservan la orientación** si el jacobiano $\det D\mathbf{H}$ es positivo, y que **invierten la orientación** si $\det D\mathbf{H}$ es negativo.

El resultado siguiente es una generalización del teorema 2.5 del capítulo 7 al caso de variedades k.

TEOREMA 2.11 Sea $\mathbf{X}$: $D_1 \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ una variedad k parametrizada y suave, y ω una forma k definida en $\mathbf{X}(D_1)$. Si $\mathbf{Y}$: $D_2 \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ es cualquier reparametrización suave de $\mathbf{X}$, entonces se cumple cualquiera de las igualdades siguientes:

$$\int_{\mathbf{Y}} \omega = \int_{\mathbf{X}} \omega,$$

si $\mathbf{Y}$ preserva la orientación, o bien,

$$\int_{\mathbf{Y}} \omega = -\int_{\mathbf{X}} \omega,$$

si $\mathbf{Y}$ invierte la orientación.

Al tener en cuenta el teorema 2.11 podemos definir lo que queremos decir con la expresión $\int_M \omega$, donde M es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ que puede parametrizarse como una variedad k orientada y ω es una forma k definida en M. Sencillamente hacemos que

$$\int_M \omega = \int_{\mathbf{X}} \omega,$$

donde $\mathbf{X}$: $D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ es *cualquier* parametrización suave de M que es compatible con la orientación elegida.

EJEMPLO 11 Evaluaremos $\int_C \omega$, donde C es el segmento de recta (orientado) en $\mathbf{R}^3$ que va de $(0, -1, -2)$ a $(1, 2, 3)$ y $\omega = z\,dx + x\,dy + y\,dz$.

Usando el teorema 2.11 podemos parametrizar C en cualquier forma que preserve la orientación. Por consiguiente,

$$\mathbf{x}\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{x}(t) = (1 - t)(0, -1, -2) + t(1, 2, 3) = (t, 3t - 1, 5t - 2)$$

es una forma de hacer dicha parametrización. Entonces, $\mathbf{x}'(t) = (1, 3, 5)$ y, por lo tanto, a partir de la definición 2.1 tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_C \omega = \int_{\mathbf{x}} \omega &= \int_0^1 \omega_{\mathbf{x}(t)}(\mathbf{x}'(t))\,dt \\ &= \int_0^1 \{(5t - 2)\cdot 1 + t \cdot 3 + (3t - 1)\cdot 5\}\,dt \\ &= \int_0^1 (23t - 7)\,dt = \left(\frac{23}{2}t^2 - 7t\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Observe el lector que si parametrizamos C en la dirección opuesta utilizando, por ejemplo, el mapa:

$$\mathbf{y}\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{y}(t) = t(0, -1, -2) + (1 - t)(1, 2, 3) = (1 - t, 2 - 3t, 3 - 5t),$$

entonces tendríamos:

$$\int_{\mathbf{y}} \omega = \int_0^1 \omega_{\mathbf{y}(t)}(\mathbf{y}'(t))\,dt$$

$$= \int_0^1 \{(3-5t)(-1)+(1-t)(-3)+(2-3t)(-5)\}\,dt$$

$$= \int_0^1 (23t-16)\,dt = \left(\frac{23}{2}t^2 - 16t\right)\Big|_0^1 = -\frac{9}{2}.$$

A la luz del teorema 2.11, este resultado hubiera podido anticiparse a partir del cálculo que hicimos anteriormente de $\int_{\mathbf{x}} \omega$. ◆

Nota sobre las variedades *k*

El objeto geométrico principal estudiado en esta sección, que es la variedad *k* parametrizada, en realidad es un caso especial de un concepto más general de una variedad *k*. En general, una **variedad *k*** en $\mathbf{R}^n$ es un subconjunto conectado $M \subseteq \mathbf{R}^n$, tal que para cada punto $\mathbf{x} \in M$, existe un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbf{R}^k$ y un mapa continuo uno a uno $\mathbf{X}$: $U \to \mathbf{R}^n$ con $\mathbf{x} \in \mathbf{X}(U) \subset M$ (una variedad *k* con fronteras no vacías requiere una definición algo modificada). Es decir, *M* es una variedad *k* (general) si *localmente* es una variedad *k* parametrizada en la vecindad de cada punto. Es posible ampliar los conceptos de orientación e integración de formas *k* a este planteamiento más general, aunque se requiere algo de habilidad para hacerlo. Sin embargo, para los tipos de ejemplos que hemos estudiado bastan nuestras definiciones más restrictivas.

8.2 Ejercicios

1. Compruebe que la variedad 3 parametrizada del ejemplo 3 es en realidad una variedad 3 parametrizada y suave.
2. Un brazo robótico plano se construyó utilizando dos cilindros, como se muestra en la figura 8.6. Suponga el lector que cada rodillo puede actuar como *telescopio*, es decir, que sus longitudes respectivas l_1 y l_2 varían entre 1 y 3 unidades. Demuestre que el conjunto de estados del brazo puede describirse por medio de una variedad 4 parametrizada y suave en $\mathbf{R}^4$.

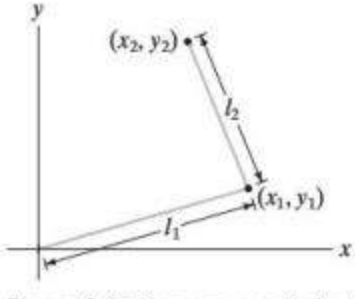


Figura 8.6 Diagrama para el ejercicio 2.

3. Un brazo robotizado plano se construyó usando un cilindro de longitud 3 anclado en el origen, y con dos cilindros que operan como telescopios cuyas longitudes respectivas l_2 y l_3 varían entre 1 y 2 unidades, como se ilustra en la figura 8.7. Demuestre que es posible describir al conjunto de estados de este brazo por medio de una variedad 5 parametrizada y suave en $\mathbf{R}^6$ (consulte el ejercicio 2).

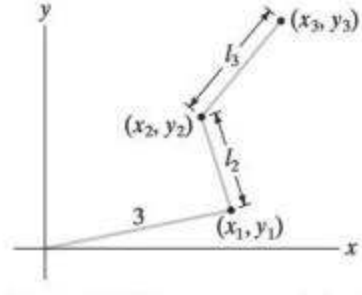


Figura 8.7 Diagrama para el ejercicio 3.

4. Se construyó un brazo robotizado en $\mathbf{R}^3$ anclando un cilindro de longitud 2 al origen (utilizando una articulación esférica de modo que el brazo pueda girar libremente) y uniendo su extremo libre con el del otro cilindro de longitud 1 (que también gira con entera libertad; véase la figura 8.8). Demuestre que el conjunto de estados de este brazo puede ser descrito mediante una variedad 4 parametrizada y suave en $\mathbf{R}^6$.
5. Suponga que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en $\mathbf{R}^n$. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es ortogonal a $\mathbf{v}_i$ para $i = 1, \ldots, k$, demuestre que $\mathbf{x}$ también es ortogonal a cualquier vector en generador $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

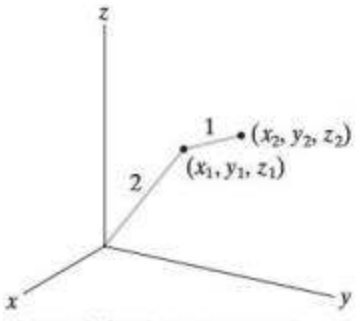


Figura 8.8 Diagrama para el ejercicio 4.

6. Sean a, b y c constantes positivas, y $\mathbf{x}: [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ la trayectoria suave dada por $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t, ct)$. Si $\omega = b\,dx - a\,dy + xy\,dz$, calcule $\int_{\mathbf{x}} \omega$.

7. Evalúe $\int_C \omega$, donde C es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y $\omega = y\,dx - x\,dy$.

8. Calcule $\int_C \omega$, donde C es el segmento de recta en $\mathbf{R}^n$ de $(0, 0, \ldots, 0)$ a $(3, 3, \ldots, 3)$ y $\omega = x_1 dx_1 + x_2^2 dx_2 + \cdots + x_n^n dx_n$.

9. Evalúe la integral $\int_{\mathbf{X}} \omega$, donde $\mathbf{X}$ es la helicoide parametrizada

$$\mathbf{X}(s, t) = (s \cos t, s \operatorname{sen} t, t), \quad 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 4\pi$$

y

$$\omega = z\,dx \wedge dy + 3\,dz \wedge dx - x\,dy \wedge dz.$$

10. Considere la helicoide parametrizada como

$$\mathbf{X}(u_1, u_2) = (u_1 \cos 3u_2, u_1 \operatorname{sen} 3u_2, 5u_2), \quad 0 \le u_1 \le 5, 0 \le u_2 \le 2\pi.$$

Sea que S denote la superficie subyacente de la helicoide, y sea Ω la orientación de la forma 2 definida en términos de $\mathbf{X}$ como

$$\Omega_{\mathbf{X}(u_1,u_2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det \begin{bmatrix} -5 \operatorname{sen} 3u_2 & a_1 & b_1 \\ 5 \cos 3u_2 & a_2 & b_2 \\ -3u_1 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

a) Explique por qué la parametrización $\mathbf{X}$ es incompatible con Ω.

b) Modifique la parametrización $\mathbf{X}$ para convertirla en una que tenga la misma superficie subyacente S, pero que sea compatible con Ω.

c) De manera alternativa, modifique la orientación de la forma 2, Ω, a Ω' de manera que la parametrización original $\mathbf{X}$ sea compatible con Ω'.

d) Calcule $\int_S \omega$, donde $\omega = z\,dx \wedge dy - (x^2 + y^2)\,dy \wedge dz$ y S se orientó utilizando Ω.

11. Sea M el subconjunto de $\mathbf{R}^3$ dado por $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 6 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$. Entonces M puede parametrizarse como una variedad 3 por medio de

$$\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3; \mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 \cos u_2, u_1 \operatorname{sen} u_2, u_3),$$

donde

$$D = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le u_1 \le \sqrt{5},\ 0 \le u_2 < 2\pi,\ u_1^2 - 6 \le u_3 \le 4 - u_1^2\}.$$

(Los parámetros u_1, u_2 y u_3 corresponden, respectivamente, a las coordenadas cilíndricas r, θ y z. Entonces es fácil obtener la parametrización mencionada).

a) Oriente M utilizando la forma 3, Ω, donde

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det[\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}].$$

Demuestre que la parametrización, cuando es suave, es compatible con esta orientación.

b) Identifique ∂M y parametrícela como la unión de dos variedades 2, es decir, como una superficie suave y por partes.

c) Describa el vector $\mathbf{V}$ unitario que apunta hacia afuera, que varía de manera continua a lo largo de cada parte suave de ∂M y que es normal a ∂M. Dé fórmulas para él en términos de la parametrización utilizada en el inciso *b*).

12. Calcule $\int_S \omega$, donde S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le 4$, orientado por un vector normal que apunta hacia arriba $(-2x, -2y, 1)$ y $\omega = e^z\,dx \wedge dy + y\,dz \wedge dx + x\,dy \wedge dz$.

13. Calcule $\int_S \omega$, donde S es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ con $-1 \le y \le 3$, orientado por un vector normal que apunta hacia afuera $(x, 0, z)$ y $\omega = z\,dx \wedge dy + e^{y^2} dz \wedge dx + x\,dy \wedge dz$.

14. Considere la variedad 2 parametrizada

$$\mathbf{X}: [1, 3] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^4, \quad \mathbf{X}(s, t) = (\sqrt{s} \cos t, \sqrt{4 - s} \operatorname{sen} t, \sqrt{s} \operatorname{sen} t, \sqrt{4 - s} \cos t).$$

Encuentre

$$\int_{\mathbf{X}} (x_2^2 + x_4^2)\,dx_1 \wedge dx_3 - (2x_1^2 + 2x_3^2)\,dx_2 \wedge dx_4.$$

15. Considere la variedad 3 parametrizada

$$\mathbf{X}: [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}^4, \quad \mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, (2u_1 - u_3)^2).$$

Encuentre

$$\int_{\mathbf{X}} x_2\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + 2x_1 x_3\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

8.3 El teorema de Stokes generalizado

Concluimos con el estudio de la generalización del teorema de Stokes que relaciona la integral de una forma k sobre una variedad k con la integral de una forma $(k-1)$ sobre la frontera de la variedad. Sin embargo, antes de establecer el resultado, necesitamos introducir el concepto de **derivada exterior** de una forma k.

La derivada exterior

La derivada exterior es un operador que se denota con d, que toma formas k diferenciales a formas $(k+1)$ y se define como sigue:

DEFINICIÓN 3.1 La **derivada exterior** df de una forma 0, f, en $U \subseteq \mathbf{R}^n$ es la forma 1

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Para $k > 0$, la **derivada exterior** de una forma k

$$\omega = \sum F_{i_1 \ldots i_k}\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

es la forma $(k+1)$

$$d\omega = \sum (dF_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

donde $dF_{i_1 \ldots i_k}$ se calcula como la derivada exterior de una forma 0.

EJEMPLO 1 Si

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6,$$

entonces

$$df = x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3 + x_5x_6\,dx_4 + x_4x_6\,dx_5 + x_4x_5\,dx_6. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 2 Si ω es la forma 1

$$\omega = x_1x_2\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2 + (2x_1 - x_2)\,dx_3,$$

entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x_1x_2) \wedge dx_1 + d(x_2x_3) \wedge dx_2 + d(2x_1 - x_2) \wedge dx_3 \\ &= (x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2) \wedge dx_1 + (x_3\,dx_2 + x_2\,dx_3) \wedge dx_2 + (2dx_1 - dx_2) \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad distributiva en la proposición 1.4 y los hechos de que $dx_i \wedge dx_i = 0$ y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, tenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= x_1\,dx_2 \wedge dx_1 + x_2\,dx_3 \wedge dx_2 + 2\,dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_3 \\ &= -x_1\,dx_1 \wedge dx_2 + 2\,dx_1 \wedge dx_3 - (x_2 + 1)\,dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Teorema de Stokes para formas k

Ahora estamos en posibilidad de dar una generalización del teorema de Stokes de variedades k parametrizadas y suaves en $\mathbf{R}^n$.

TEOREMA 3.2 (TEOREMA DE STOKES GENERALIZADO) Sea $D \subseteq \mathbf{R}^k$ una región conectada, acotada y cerrada, y sea $M = \mathbf{X}(D)$ una variedad k parametrizada y orientada en $\mathbf{R}^n$. Si $\partial M \neq \emptyset$, sea que a ∂M se dé la orientación inducida por la de

M. Sea que ω denote una forma $(k-1)$ definida en un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$ que contenga a M. Entonces,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Si $\partial M = \emptyset$, entonces tomamos a $\int_{\partial M} \omega$ como 0 en la ecuación anterior.

No intentaremos demostrar el teorema 3.2.[1] De momento nos conformaremos con comprobar que es correcto en un caso particular.

EJEMPLO 3 Comprobaremos el teorema de Stokes generalizado (teorema 3.2) para la forma 2 $\omega = zw\, dx \wedge dy$, donde M es la variedad 3 $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid w = x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ orientada por la forma 3, Ω, correspondiente a la normal unitaria

$$\mathbf{N} = \frac{(2x, 2y, 2z, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 1}}.$$

La variedad M es una parte de la variedad 3 dada en el ejemplo 7 de la sección 8.2 y puede parametrizarse como

$$\mathbf{X}: B \to \mathbf{R}^4, \quad \mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

donde $B = \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1\}$. Utilizando esta parametrización tenemos:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{u_1} = (1, 0, 0, 2u_1) \\ \mathbf{T}_{u_2} = (0, 1, 0, 2u_2) \\ \mathbf{T}_{u_3} = (0, 0, 1, 2u_3) \\ \mathbf{N} = \dfrac{(2u_1, 2u_2, 2u_3, -1)}{\sqrt{4u_1^2 + 4u_2^2 + 4u_3^2 + 1}} \end{cases},$$

por lo que la orientación de la forma 3, Ω, es dada por

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}.$$

El ejemplo 7 de la sección 8.2 demuestra que la parametrización $\mathbf{X}$ es compatible con esta orientación. Entonces, podemos utilizar esta parametrización sin hacer ningún ajuste cuando calculemos $\int_M d\omega$.

La frontera de M es $\partial M = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 = w = 1\}$ y puede parametrizarse como

$$\mathbf{Y}: [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^4, \quad \mathbf{Y}(s_1, s_2) = (\operatorname{sen} s_1 \cos s_2, \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, \cos s_1, 1).$$

Entonces

$$\mathbf{T}_{s_1} = (\cos s_1 \cos s_2, \cos s_1 \operatorname{sen} s_2, -\operatorname{sen} s_1, 0)$$

y

$$\mathbf{T}_{s_2} = (-\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, \operatorname{sen} s_1 \cos s_2, 0, 0).$$

---

[1] Para un estudio completo y riguroso de formas diferenciales y del teorema de Stokes generalizado, véase J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds* (Addison-Wesley, 1991), capítulos 6 y 7.

Un vector $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ unitario, que apunta hacia afuera, tangente a M y normal a ∂M debe satisfacer a

- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$ a lo largo de ∂M;
- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_{s_1} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_{s_2} = 0$.

A lo largo de ∂M tenemos que:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \operatorname{sen} s_1 \cos s_2, 2 \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, 2 \cos s_1, -1).$$

Por consiguiente, $\mathbf{V}$ debe satisfacer al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (2 \operatorname{sen} s_1 \cos s_2)v_1 + (2 \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2)v_2 + (2 \cos s_1)v_3 - v_4 = 0 \\ (\cos s_1 \cos s_2)v_1 + (\cos s_1 \operatorname{sen} s_2)v_2 - (\operatorname{sen} s_1)v_3 = 0 \\ -(\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2)v_1 + (\operatorname{sen} s_1 \cos s_2)v_2 = 0 \end{cases}.$$

Después de algunos arreglos se encuentra que el vector unitario que satisface estas ecuaciones y también apunta hacia afuera de M es

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{sen} s_1 \cos s_2, \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2, \cos s_1, 2).$$

Entonces, la orientación inducida de forma $2\,\Omega^{\partial M}$ para ∂M es dada por:

$$\Omega^{\partial M}_{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{V}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),$$

donde $\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \mathbf{Y}(\mathbf{s})$. En particular, tenemos:

$$\Omega^{\partial M}_{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}(\mathbf{T}_{s_1}, \mathbf{T}_{s_2}) = \det\left[\mathbf{N}\ \mathbf{V}\ \mathbf{T}_{s_1}\ \mathbf{T}_{s_2}\right]$$

$$= \det\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 & \cos s_1 \cos s_2 & -\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 & \cos s_1 \operatorname{sen} s_2 & \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s_1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \cos s_1 & -\operatorname{sen} s_1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{sen} s_1 > 0$$

para $0 < s_1 < \pi$. Entonces, la parametrización $\mathbf{Y}$ de ∂M, cuando es suave, es compatible con la orientación inducida, de modo que podemos usar dicha parametrización para calcular $\int_{\partial M} \omega$.

Ahora estamos listos para integrar. Primero calcularemos $\int_M d\omega$. Como $\omega = zw\,dx \wedge dy$, tenemos:

$$d\omega = d(zw) \wedge dx \wedge dy = (z\,dw + w\,dz) \wedge dx \wedge dy$$
$$= z\,dw \wedge dx \wedge dy + w\,dz \wedge dx \wedge dy.$$

Entonces,

$$\int_M d\omega = \iiint_B d\omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3})\,du_1\,du_2\,du_3$$

$$= \iiint_B \{u_3\,dw \wedge dx \wedge dy(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3})$$

$$+ (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\,dz \wedge dx \wedge dy(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3})\}\,du_1\,du_2\,du_3$$

$$= \iiint_B \left\{ u_3 \underbrace{\begin{vmatrix} 2u_1 & 2u_2 & 2u_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=2u_3} + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=1} \right\} du_1\, du_2\, du_3$$

$$= \iiint_B (u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2)\, du_1\, du_2\, du_3.$$

Como B es una esfera unitaria sólida, la manera más fácil de evaluar esta integral iterada es usar coordenadas esféricas ρ, φ y θ. De modo que:

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 2\rho^2 \cos^2\varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^4 (\operatorname{sen}\varphi + 2\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{5} (\operatorname{sen}\varphi + 2\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi\, d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{10}{3}\, d\theta = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi)} \omega_{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}(\mathbf{T}_{s_1}, \mathbf{T}_{s_2})\, ds_1\, ds_2 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos s_1\, dx \wedge dy(\mathbf{T}_{s_1}, \mathbf{T}_{s_2})\, ds_1\, ds_2 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos s_1 \begin{vmatrix} \cos s_1 \cos s_2 & -\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 \\ \cos s_1 \operatorname{sen} s_2 & \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos s_1 (\cos s_1 \operatorname{sen} s_1)\, ds_1\, ds_2 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 s_1 \operatorname{sen} s_1\, ds_1\, ds_2 \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\cos^3 s_1 \right) \Big|_{s_1=0}^{\pi} ds_2 = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\, ds_2 = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso se comprueba el teorema de Stokes generalizado. ◆

Además de tener una notación elegante, la fórmula de la integral en el teorema 3.2 engloba de un modo estético los tres principales resultados del análisis vectorial, como enseguida lo demostraremos.

En primer lugar, sea ω una forma 1 definida en un conjunto abierto U en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

$$\omega = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned} d\omega &= dM \wedge dx + dN \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial x}\,dx + \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x}\,dx + \frac{\partial N}{\partial y}\,dy\right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

El teorema de Stokes generalizado (teorema 3.2) establece que si D es una variedad 2 contenida en U y a ∂D se da la orientación inducida (véase la figura 8.9), entonces,

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

o bien, en este caso, que

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial D} M dx + N dy,$$

que es el teorema de Green.

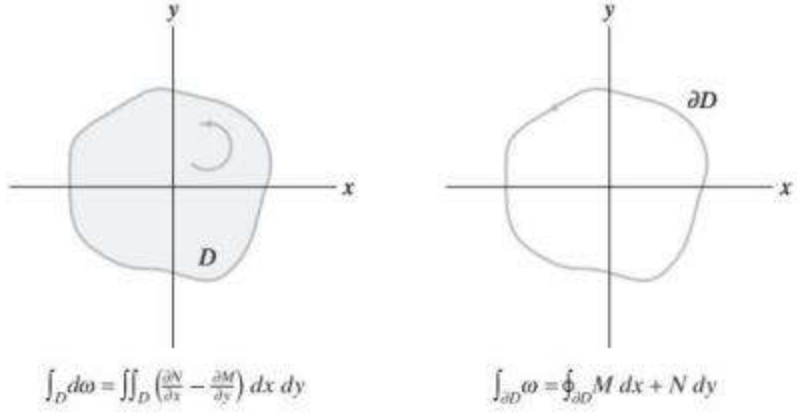


Figura 8.9 El teorema de Stokes generalizado implica al teorema de Green.

A continuación, suponga que ω es una forma 1 definida en un conjunto abierto U en $\mathbf{R}^3$. Entonces,

$$\omega = F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} d\omega = &\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Recuerde el lector, a partir de la proposición 2.2, que si S es una variedad 2 parametrizada (superficie en $\mathbf{R}^3$), entonces

$$\int_{\partial S} \omega = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$. De la proposición 2.4,

$$\int_S d\omega = \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S},$$

donde

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

El teorema 3.2 dice que si S está orientada y a ∂S se le da la orientación inducida, entonces

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega,$$

o, de manera equivalente, que

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

que es el teorema de Stokes clásico (véase la figura 8.10).

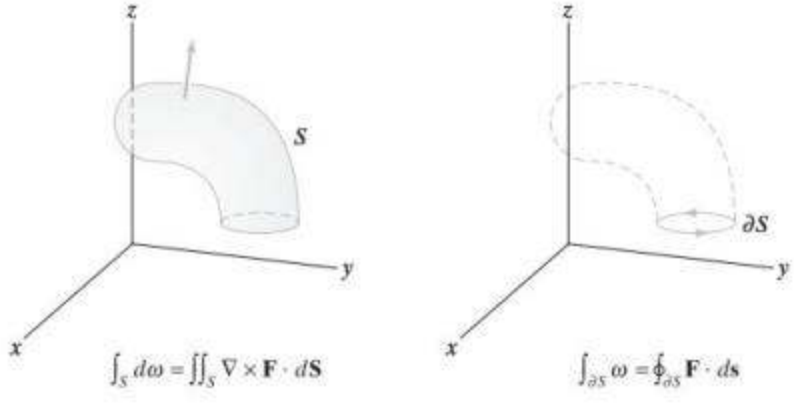


Figura 8.10 El teorema de Stokes generalizado da el teorema de Stokes clásico.

Por último, sea ω una forma 2 definida en un conjunto abierto en $\mathbf{R}^3$. Entonces,

$$\omega = F_1(x, y, z)\, dy \wedge dz + F_2(x, y, z)\, dz \wedge dx + F_3(x, y, z)\, dx \wedge dy.$$

Se puede demostrar que

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Si D es una región en $\mathbf{R}^3$, entonces D es automáticamente una variedad 3 parametrizada, ya que el mapa $\mathbf{X}$: $D \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{X}(x, y, z) = (x, y, z)$ parametriza a D. (En este caso puede demostrarse que D también siempre es orientable). Si D está acotada y a ∂D (que es una superficie) se le da la orientación inducida, es decir, normal

que apunta hacia afuera, entonces la proposición 2.4 establece que

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$. Del ejemplo 6 de la sección 8.2,

$$\int_D d\omega = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

El teorema 3.2 indica que $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$, o bien,

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV,$$

el cual es, por supuesto, el teorema de Gauss (véase la figura 8.11).

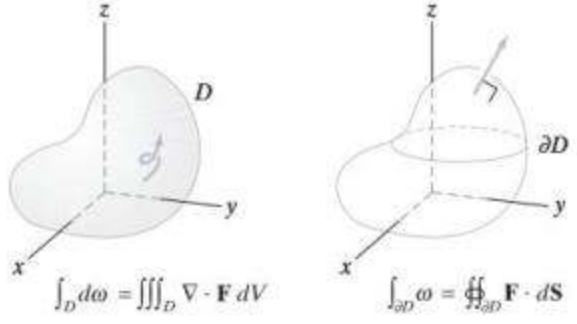


Figura 8.11 El teorema de Stokes generalizado da lugar al teorema de Gauss.

En los comentarios siguientes se establece en forma implícita una especie de "diccionario" entre el lenguaje de las formas diferenciales y las derivadas exteriores, y el de los campos escalares y vectoriales. Para ser explícito, consulte la tabla de correspondencias que aparece en la figura 8.12.

Los teoremas de Green, Stokes y Gauss surgen del teorema 3.2 aplicado a formas 1 y formas 2. La pregunta siguiente es: ¿el "diccionario" y el teorema 3.2 pueden dar un resultado correspondiente para las formas 0? El teorema de Stokes generalizado (teorema 3.2) plantea que, para una forma 0, ω, y una curva parametrizada orientada C:

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

k	Forma k diferencial	Campo	Derivada
0	ω	Campo escalar f	$d\omega \leftrightarrow \nabla f$
1	$\omega = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$	Campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$	$d\omega \leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F}$
2	$\omega = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy$	Campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$	$d\omega \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{F}$

Figura 8.12 Diccionario entre formas diferenciales y campos vectoriales.

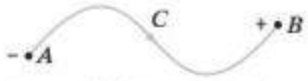


Figura 8.13 La orientación de la curva C induce una orientación de su frontera, es decir, los puntos extremos A y B.

Ahora, si C es cerrada, entonces ∂C es el vacío (y por ello $\int_{\partial C} \omega = 0$). Pero si C no es cerrada, entonces ∂C consta de solo dos puntos. En ese caso, ¿qué significado debería tener $\int_{\partial C} \omega$? En particular, para aplicar el teorema 3.2 debemos orientar ∂C de una manera consistente con la orientación de C, lo que puede hacerse si se asigna un signo "$-$" al punto inicial A de C, y un signo "$+$" al punto terminal B (véase la figura 8.13). Entonces, $\int_{\partial C} \omega$ tan solo es $f(B) - f(A)$, donde f es la función (campo escalar) correspondiente a ω en la tabla. Como $d\omega$ corresponde a ∇f, el teorema 3.2 dice que

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A), \tag{1}$$

que es el resultado del teorema 3.3 en el capítulo 6.

Por último, para el caso en que $n = 1$, es decir, el caso de las formas 0 (funciones) en $\mathbf{R}$, la forma 0 ω corresponde a una función f de una sola variable, y ∇f es la derivada ordinaria f'. Además, una curva parametrizada en $\mathbf{R}$ es tan solo un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, la ecuación (1) se reduce a

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

que es una versión del teorema fundamental del cálculo. Así, podemos apreciar que el teorema de Stokes en su forma general es una generalización elegante y poderosa del teorema fundamental del cálculo a un número arbitrario de dimensiones.

8.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 7 determine $d\omega$, donde ω es como la que se indica.

1. $\omega = e^{xyz}$
2. $\omega = x^3y - 2xz^2 + xy^2z$
3. $\omega = (x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy$
4. $\omega = x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 + x_3x_4\,dx_4 - x_4x_5\,dx_5$
5. $\omega = xz\,dx \wedge dy - y^2z\,dx \wedge dz$
6. $\omega = x_1x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_2x_3x_4\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$
7. $\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$. (Nota: $\widehat{dx_i}$ significa que se omite el término dx_i).
8. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario y f una función diferenciable. Demuestre que $df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0)$. (Recuerde el lector que $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0)$ denota la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección de $\mathbf{u}$).
9. Si $\omega = F(x, z)dy + G(x, y)dz$ es una forma 1 (diferenciable) en $\mathbf{R}^3$, ¿cuáles pueden ser F y G de manera que $d\omega = z\,dx \wedge dy + y\,dx \wedge dz$?
10. Verifique el teorema de Stokes generalizado (teorema 3.2) para la variedad 3, M, del ejercicio 11 de la sección 8.2, donde $\omega = 2x\,dy \wedge dz - z\,dx \wedge dy$.
11. Verifique el teorema de Stokes generalizado (teorema 3.2) para la variedad 3

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x = 8 - 2y^2 - 2z^2 - 2w^2, x \geq 0\}$$

y la forma 2, $\omega = xy\,dz \wedge dw$. (Sugerencia: primero calcule $\int_{\partial M} \omega$. *Para calcular* $\int_M d\omega$ estudie el ejemplo 3 de esta sección).

12. *a*) Sea M una variedad 3 parametrizada en $\mathbf{R}^3$, es decir, un sólido. Demuestre que

$$\text{Volumen de } M = \frac{1}{3}\int_{\partial M} x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy.$$

b) Sea M una variedad n parametrizada en $\mathbf{R}^n$. Explique por qué deberíamos tener

$$\begin{aligned}&\text{volumen } n\text{-dimensional de } M\\ &= \frac{1}{n}\int_{\partial M} x_1\,dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n\\ &\quad - x_2\,dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n\\ &\quad + x_3\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots\\ &\quad + (-1)^{n-1}x_n\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}.\end{aligned}$$

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 8

1. $(dx \wedge dy + dy \wedge dz)((1, 0, 1), (0, -1, 3)) = 0$.

2. $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3$.

3. Hay 21 formas 5 básicas en $\mathbf{R}^7$.

4. $dx_1 \wedge dx_2 = dx_2 \wedge dx_1$.

5. $(dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 = dx_3 \wedge (dx_1 \wedge dx_2)$.

6. Si ω es una forma 3 en $\mathbf{R}^6$ y η es una forma 5 en $\mathbf{R}^6$, entonces $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$.

7. Si ω es una forma 2 en $\mathbf{R}^8$ y η es una forma 3 en $\mathbf{R}^8$, entonces $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$.

8. $dx \wedge dy \wedge dz(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -dz \wedge dy \wedge dx(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$.

9. $dx_i \wedge dx_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -dx_i \wedge dx_j(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

10. Sea $D = [0, 2] \times [-1, 1]$ y sea $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^4$ dada por

$$\mathbf{X}(s, t) = (s - t,\ st^2,\ se^t, 4t).$$

Entonces $M = \mathbf{X}(D)$ es una variedad 2 parametrizada y suave en $\mathbf{R}^4$.

11. Sea $D = [-2, 2] \times [0, 5] \times [-3, 3]$ y sea $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^4$ dada por

$$\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 u_3^2,\ u_2^2 \cos u_3,\ u_1 - u_2,\ u_2^3 u_3^4).$$

Entonces $M = \mathbf{X}(D)$ es una variedad 3 parametrizada y suave en $\mathbf{R}^4$.

12. Si $D = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces las variedades subyacentes de $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{X}(s, t) = (s \cos 2\pi t,\ s \operatorname{sen} 2\pi t,\ s^2)$$

y $\mathbf{Y}: D \to \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{Y}(s, t) = (t \cos 2\pi s,\ t \operatorname{sen} 2\pi s,\ t^2)$$

son iguales.

13. Sea $\omega = dx \wedge dy$ y $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Entonces $\int_{\mathbf{X}} \omega = \int_{\mathbf{Y}} \omega$, donde $\mathbf{X}: D \to \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{X}(s, t) = (s \cos 2\pi t,\ s \operatorname{sen} 2\pi t,\ s^2),$$

y $\mathbf{Y}: D \to \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{Y}(s, t) = (t \cos 2\pi s,\ t \operatorname{sen} 2\pi s,\ t^2).$$

14. Sea $B = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1\}$. El paraboloide generalizado $\mathbf{X}: B \to \mathbf{R}^4$ definido por

$$\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2)$$

tiene como su frontera al elipsoide $\mathbf{Y}: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^4$,

$$\mathbf{Y}(s, t) = (\operatorname{sen} s \cos t,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t,\ \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cos s,\ 1).$$

15. Sea $M \subseteq \mathbf{R}^n$ la gráfica de una función $f: U \subseteq \to \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ parametrizada por $\mathbf{X}: U \to \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{X}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, f(u_1, \ldots, u_{n-1})).$$

Si

$$\mathbf{N}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \frac{(f_{u_1}, \ldots, f_{u_{n-1}}, -1)}{\sqrt{f_{u_1}^2 + \cdots + f_{u_{n-1}}^2 + 1}}$$

es una normal unitaria, entonces la parametrización $\mathbf{X}$ es compatible con la forma $(n - 1)$, Ω, definida por

$$\Omega_{\mathbf{X}(u)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{N} \end{bmatrix}.$$

16. Si $\omega = x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_4$, entonces $d\omega = x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

17. Si $\omega = x_1\, dx_3 - x_2\, dx_1 + x_1 x_2 x_3\, dx_3$, entonces

$$d\omega = (x_2 x_3 + 1)\, dx_1 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_3.$$

18. Si $\omega = x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_3 + x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_3$, entonces

$$d\omega = 2x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

19. Si ω es una forma n en $\mathbf{R}^n$, entonces $d\omega = 0$.

20. Si M es una variedad k parametrizada sin frontera en $\mathbf{R}^n$ y ω es una forma $(k - 1)$ definida en un conjunto abierto que contiene a M, entonces $\int_M d\omega = 0$.

Ejercicios varios para el capítulo 8

1. Sea ω una forma k y η una forma l. Demuestre que

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Esto se logra con los siguientes pasos:

a) Demuestre que el resultado es verdadero cuando $k = l = 0$, es decir, cuando $\omega = f$ y $\eta = g$. (Aquí f y g son funciones de variable escalar).

b) Establezca el resultado cuando $k = 0$ y $l > 0$.

c) Diga el resultado cuando $k > 0$ y $l = 0$.

d) Proporcione el resultado cuando k y l son positivas.

2. Sea M el subconjunto de $\mathbf{R}^5$ descrito como $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4,\ \ 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1\}$.

a) Dé una parametrización para M (como una variedad 4) y compruebe que su parametrización es compatible con la orientación forma 4, $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

b) Calcule $\int_M x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5$.

3. *a*) Sea C la curva en $\mathbf{R}^2$ dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Suponga que f es de clase C^1. Si C está orientada por la dirección en que se incrementa x, demuestre que si $\omega = y\,dx$, entonces

$$\int_C \omega = \text{área bajo la gráfica de } f.$$

b) Sea S la superficie en $\mathbf{R}^3$ dada por la ecuación $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Suponga que f es de clase C^1. Si S es orientada por una normal que apunta hacia arriba, demuestre que si $\omega = z\,dx \wedge dy$, entonces

$$\int_S \omega = \text{volumen bajo la gráfica de } f.$$

c) Ahora generalizaremos los incisos *a*) y *b*) como sigue: suponga que $f: D \to \mathbf{R}$ es una función de clase C^1 definida en una región conectada $D \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$. Sea M la hipersuperficie de $(n-1)$ dimensiones en $\mathbf{R}^n$ definida por la ecuación $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$, donde $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D$. Si $\omega = x_n\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$, demuestre que

$$\int_M \omega = \pm(\text{volumen } n\text{-dimensional bajo la gráfica de } f).$$

¿Cómo puede garantizarse que en la ecuación anterior el signo sea "+"?

4. Sea M la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 1$, $0 \leq y \leq 3$, orientado por la normal unitaria $\mathbf{N} = (x, 0, z)$.

a) Use $\mathbf{N}$ para dar una orientación forma 2, Ω, para M. Encuentre una parametrización para M que sea compatible con Ω.

b) Identifique ∂M y parametrícela.

c) Determine la orientación forma $\Omega^{\partial M}$ para ∂M inducida de Ω del inciso *a*).

d) Verifique el teorema de Stokes generalizado (teorema 3.2) para M y $\omega = z\,dx + (x + y + z)\,dy - x\,dz$.

5. Use el teorema de Stokes generalizado para calcular $\int_{S^4} \omega$, donde S^4 denota la esfera 4 unitaria $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1\}$ y $\omega = x_3\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + x_4\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5$.

6. *a*) Sea ω una forma 0 (es decir, una función), de clase C^2. Demuestre que $d(d\omega) = 0$.

b) Ahora suponga que ω es una forma k de clase C^2, lo que significa que cuando se escribe ω como

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} F_{i_1 \ldots i_k}\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

cada $F_{i_1,\ldots,i_k}$ es de clase C^2. Use el inciso *a*) y el resultado del ejercicio 1 para demostrar que $d(d\omega) = 0$.

7. En este problema demuestre que la ecuación $d(d\omega) = 0$ implica dos resultados bien conocidos acerca de los campos escalares y vectoriales.

a) En primer lugar, sea ω una forma 0 (de clase C^2). Lo que significa que ω corresponde a un campo escalar f. Use la tabla de la página 559 para interpretar la ecuación $d(d\omega) = 0$.

b) A continuación, suponga que ω es una forma 1 (otra vez de clase C^2). Entonces ω corresponde a un campo vectorial. Interprete para este caso la ecuación $d(d\omega) = 0$.

8. Sea

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

a) Evalúe $\int_S \omega$, donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada por una normal hacia afuera.

b) Calcule $d\omega$.

Figura 8.14 Figura para el ejercicio 8.

c) Compruebe el teorema 3.2 sobre la región $M = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, donde $a \neq 0$.

d) Ahora, sea M la esfera unitaria sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. ¿Se cumple el teorema 3.2 para M y ω? Explique su respuesta.

e) Suponga que S es cualquier superficie acotada y cerrada que se encuentra por completo fuera de la esfera $S_\epsilon = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2\}$. (Véase la figura 8.14). Argumente que si S está orientada por una normal hacia afuera, entonces $\int_S \omega = 4\pi$.

9. Sea M una variedad $(k + l + 1)$ orientada en $\mathbf{R}^n$; sea ω una forma k y η una forma l definida en un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ que contiene a M. Si $\partial M = \emptyset$, use el teorema 3.2 y el ejercicio 1 para demostrar que

$$\int_M d\omega \wedge \eta = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\eta.$$

10. Sea M una variedad k orientada. Use el ejercicio 1 y la versión general del teorema de Stokes para establecer la "integración por partes" para formas k, ω, y formas 0, f:

$$\int_M f\,d\omega = \int_{\partial M} f\omega - \int_M df \wedge \omega.$$

Sugerencias para lecturas adicionales

Generales

Francis J. Flanigan y Jerry L. Kazdan, *Calculus Two: Linear and Nonlinear Functions*, 2a ed., Springer, 1990. Se presenta lo esencial del cálculo de vectores desde el punto de vista del álgebra lineal.

John H. Hubbard y Barbara Burke Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms: A Unified Approach*, 2a ed., Prentice Hall, 2002. Trata los temas principales del cálculo con varias variables, más una cantidad significativa de álgebra lineal. Tiene un enfoque más complejo que el libro que el lector tiene en sus manos, pues usa formas diferenciales para abordar la integración.

Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba, *Vector Calculus*, 5a ed., W. H. Freeman, 2003. Este libro es probablemente el más parecido al libro que el lector tiene en sus manos, tanto en alcance como en enfoque, ya que usa matrices y vectores para tratar el cálculo con varias variables en $\mathbf{R}^n$.

Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba y Alan Weinstein, *Basic Multivariable Calculus*, Springer/W.H. Freeman, 1993. Algo parecido a *Vector Calculus*, de Marsden y Tromba, pero con menos énfasis en el desarrollo riguroso del tema. Es una buena guía hacia las ideas principales.

George B. Thomas y Ross L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 9a ed., Addison-Wesley, 1996. Es un tratamiento completo de las técnicas del cálculo tanto con una variable como con varias. No se necesita álgebra lineal. Se trata de una buena referencia para los métodos principales del cálculo de vectores de funciones de dos y tres variables.

Richard E. Williamson, Richard H. Crowell y Hale F. Trotter, *Calculus of Vector Functions*, 3a ed., Prentice Hall, 1972. Es un tratamiento suave y cuidadoso del cálculo con varias variables y el análisis de vectores utilizando álgebra lineal.

Textos más avanzados

Los siguientes libros ofrecen desarrollos relativamente rigurosos y teóricos de los principales resultados del cálculo con varias variables. En ese sentido son útiles en especial para estudiar los fundamentos de la materia.

Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus*, 1a ed., Addison Wesley, 1957. Consulte la primera edición, ya que la segunda contiene muchos menos temas acerca de variables múltiples.

R. Creighton Buck, *Advanced Calculus*, 3a ed., McGraw-Hill, 1978. Trata los temas fundamentales del cálculo con una y varias variables. Usa la notación de las formas diferenciales para estudiar los teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Richard Courant y Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. 2, Wiley-Interscience, 1974. Una obra famosa y enciclopédica sobre el análisis de funciones de más de una variable (el volumen uno trata las funciones de una variable) con ejemplos fascinantes.

Wilfred Kaplan, *Advanced Calculus*, 3a ed., Addison-Wesley, 1984. Un tratamiento completo del cálculo avanzado con funciones de dos y tres variables, más otros materiales sobre el cálculo de funciones con n variables (incluyendo un análisis de tensores). Además, tiene capítulos acerca de series infinitas, ecuaciones diferenciales y funciones con una variable compleja.

O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, publicado originalmente por Springer, 1929. Reimpreso por Dover Publications, 1954. Una obra clásica que va mucho más allá que el presente libro. El estilo en que está redactado puede parecer anticuado, pero Kellogg incluye detalles de ciertos argumentos que son difíciles de encontrar en otro sitio.

James R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley, 1991. Es un tratamiento avanzado del cálculo en $\mathbf{R}^n$ que está extremadamente bien escrito. Requiere cierto conocimiento del álgebra lineal. Incluye un desarrollo completo de las formas diferenciales y álgebra exterior para el estudio de la integración. Es un texto para estudiantes de matemáticas avanzadas.

David V. Widder, *Advanced Calculus*, 2a ed., publicado originalmente por Prentice-Hall en 1961 y reimpreso por Dover Publications, 1989. Es un tratamiento cuidadoso de la diferenciación e integración de funciones de una y varias variables. También incluye capítulos sobre geometría diferencial.

Textos orientados a la física

Mary L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2a ed., Wiley, 1983. Incluye una amplia variedad de temas que van mucho más allá del cálculo vectorial. Para estudiantes interesados tanto en física como en matemáticas.

Harry F. Davis y Arthur D. Snider, *Introduction to Vector Analysis*, 6a ed., William C. Brown, 1991. Es un tratamiento detallado y relativamente avanzado de temas de variables múltiples. Incluye apéndices sobre mecánica clásica y electromagnetismo.

Edward M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, 2a ed., McGraw-Hill, 1985. Este es un libro de física, no de matemáticas. Hace un excelente análisis intuitivo del significado de las integrales de línea y superficie, operaciones diferenciales sobre campos vectoriales y escalares, y de la importancia del análisis vectorial.

Otros

Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica®*, 2a ed., CRC Press, 1998. De ninguna manera es un texto de cálculo vectorial, es más bien una colección deliciosa de objetos geométricos y cómo entenderlos con el software *Mathematica*. Algunos de los temas de geometría diferencial están algo alejados del tema del libro que el lector tiene en sus manos, pero es útil apreciar las abundantes ilustraciones. Se trata de una ayuda extraordinaria para desarrollar las habilidades de visualización.

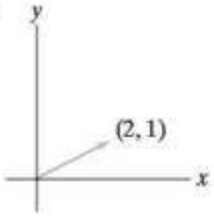
H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus*, 3a ed., W. W. Norton, 1997. Es un libro clásico "alternativo" sobre análisis vectorial dirigido a estudiantes de electricidad y magnetismo. Breve, pero bien elaborado, tiene un enfoque intuitivo del análisis vectorial.

Respuestas a los ejercicios seleccionados

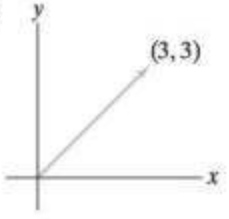
Capítulo 1

Sección 1.1

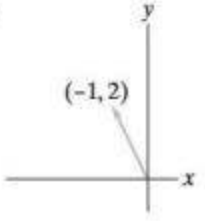
1. *a)*



b)

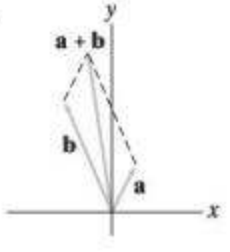


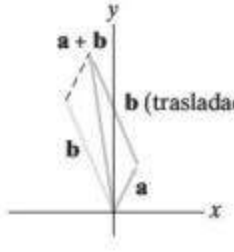
c)



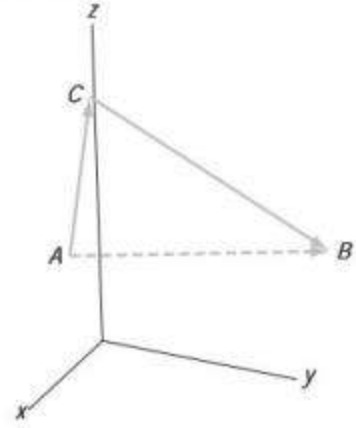
3. *a)* (2, 8)
   b) (−16, −24)
   c) (5, 15)
   d) (−19, 25)
   e) (8, −26)

5.





7. *a)* $\overrightarrow{AB} = (-4, 3, -1)$, $\overrightarrow{BA} = (4, -3, 1)$
   b) $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (5, -2, 4)$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (-4, 3, -1)$
   c) En general, tenemos



9. $x = 14, y = 16, z = 8$
11. Porque $\mathbf{b} = 5\mathbf{a}$.
13. $(1, 2, 3, 4) + (5, -1, 2, 0) = (6, 1, 5, 4)$
    $2(7, 6, -3, 1) = (14, 12, -6, 2)$
    $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$; $k\mathbf{a} = (ka_1, \ldots, ka_n)$
15. $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -4, -1, 1)$
17. Si el vector de desplazamiento del lector es **a** y el de su amigo es **b**, entonces **b** − **a** es el vector de desplazamiento desde usted hacia su amigo.
21. *b)* Los vectores de posición de los puntos en el paralelogramo determinados por (2, 2, 1) y (0, 3, 2).
23. *a)* $\sqrt{5}$ unidades por minuto
    b) (0, −4)
    c) 7 minutos
    d) No
25. *a)* (5, 5, 4)
    b) (−5, −5, −4)
27. $\mathbf{F}_1 = (4, -4, 2)$ y $\mathbf{F}_2 = (-4, 4, 8)$

Sección 1.2

1. $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
3. $3\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
5. $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
7. $(9, -2, \sqrt{2})$

9. $(\pi, -1)$
11. *a)* $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$
    b) $\mathbf{b} = -1\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2$
    c) Tome $c_1 = (b_1 + b_2)/2$, $c_2 = (b_1 - b_2)/2$.
13. $x = t + 2, y = 3t - 1, z = 5 - 6t$
15. $x = t + 2, y = -7t - 1$
17. $x = t + 1, y = 4, z = 5 - 6t$
19. $x_1 = 1 - 2t, x_2 = 5t + 2, x_3 = 3t, x_4 = 7t + 4$
21. *a)* $x = 2t - 1, y = 7 - t, z = 5t + 3$
    b) $x = 5 - 5t, y = 4t - 3, z = 5t + 4$
    c) Una alternativa para *a)*: $x = -2t - 1, y = t + 7, z = 3 - 5t$; una alternativa para *b)*: $x = 5t, y = 1 - 4t, z = 9 - 5t$
    d) Para *a)*: $(x + 1)/2 = (y - 7)/(-1) = (z - 3)/5$; para *b)*: $(x - 5)/(-5) = (y + 3)/4 = (z - 4)/5$; para *c)*: $(x + 1)/(-2) = (y - 7)/1 = (z - 3)/(-5)$ y $x/5 = (y - 1)/(-4) = (z - 9)/(-5)$.
23. $(x - 7)/1 = (y + 9)/3 = (z - 6)/(-8)$
25. $x = 3t - 5, y = 7t + 1, z = -2t - 10$
27. Multiplique la primera forma simétrica por $-\frac{1}{2}$. Después sume $-\frac{1}{2}$ a cada "lado".
29. No. Al hacer $t = 0$ en las ecuaciones para l_1 se obtiene el punto $(2, -7, 1)$. Para tener $x = 2$ en l_2 debemos tomar $t = \frac{1}{2}$. Pero $t = \frac{1}{2}$ da el punto $(2, -7, 2)$ en l_2, no $(2, -7, 1)$.
31. No. Observe que $x \geq -1$, $y \geq 3$ y $z \leq 1$, solamente. Las ecuaciones paramétricas definen un *rayo* con punto terminal $(-1, 3, 1)$.
33. $(-14, 5, -18)$
35. Con $x = 0$: $(0, \frac{13}{2}, \frac{7}{2})$; con $y = 0$: $(-\frac{13}{3}, 0, \frac{17}{3})$; con $z = 0$: $(7, 17, 0)$.
37. No
43. No
45. *a)* Círculo $x^2 + y^2 = 4$, trazado una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si $0 \leq t \leq 2\pi$, el círculo se traza tres veces.
    b) Círculo $x^2 + y^2 = 25$, trazado una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
    c) Círculo $x^2 + y^2 = 25$, trazado una vez en el sentido de las manecillas del reloj.
    d) Elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$, trazado una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
47. $x = (a + a\theta)\cos\theta, y = (a + a\theta)\operatorname{sen}\theta$

Sección 1.3

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 13$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{26}$; $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{13}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -44$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{50}$; $\|\mathbf{b}\| = 2\sqrt{14}$
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{26}$; $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$
7. $2\pi/3$
9. $\cos^{-1}\left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)$
11. $\pi/2$
13. $\frac{5}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
15. $2\mathbf{k}$
17. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{6}$
19. $\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$
21. Sí, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ o bien $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
25. *a)* Trabajo = (componente de $\mathbf{F}$) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$
$$= \|\mathbf{F}\| \cos\theta \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$
    b) 2
27. 10,000 pies − libras
29. $\cos\alpha = 3/5, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 4/5$
33. Sugerencia: las diagonales son dadas por $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{d}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ determinan los lados adyacentes del paralelogramo.

Sección 1.4

1. 2
3. -5
5. $(31, -5, 8)$
7. $5\mathbf{k}$
9. $-6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
11. $5\sqrt{30}$
13. $\mathbf{c}$ es paralelo al plano determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (o, en otro caso, $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b}$).
15. $\sqrt{1002}/2$
17. $3\sqrt{34}/2$
19. 53
21. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,
$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.
Expanda los determinantes para ver que son iguales.
23. *b)* $\frac{1}{2}$
25. *a)* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
    b) $2\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}/\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$
    c) $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right)\mathbf{a}$
    d) $\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$
    e) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
    f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
35. *a)* $20\sqrt{3}$ pies-libras
    b) $30\sqrt{3}$ pies-libras
37. $75\sqrt{3}$ pies-libras
39. $400\pi/3$ pulg/min
41. La rotación con respecto de un eje que pase por el cuerpo rígido es muy diferente de aquella con respecto de un eje paralelo que no pase por el cuerpo.

Sección 1.5

1. $x - y + 2z = 8$
3. $5x - 4y + 3z = 25$
5. $5x - 4y + z = 12$
7. $x - y + 7z = 5$
11. $3x - 2y - z = 3$

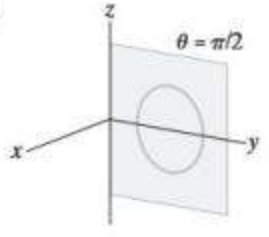
13. $x = 13t - \frac{23}{5}, y = -14t + \frac{24}{5}, z = -5t$
15. $-4/3$
17. $x = 2s + t - 1, y = 2 - 3s, z = s - 5t + 7$
19. $x = 2s + 5t - 1, y = 10t - 3s + 3, z = 4s + 7t - 2$
21. $x = 3s + 3t - 5, y = 10 - 3s - 6t, z = 2s - 2t + 9$
23. $19x - 16y + 7z = 59$
25. $31/\sqrt{34}$
27. $25/\sqrt{641}$
29. *a*) 0 *b*) Las rectas deben intersecarse.
31. $\sqrt{14}/2$
35. $x + 3y - 5z = 2 \pm 3\sqrt{35}$
37. Sugerencia: considere el ejemplo 8 de la sección 1.5 con A como P_1 y B como P_2.

Sección 1.6

1. *a*) $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + \cdots + n\mathbf{e}_n$
   b) $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_6 + \cdots + \mathbf{e}_{n-2} - \mathbf{e}_n$
3. $(1, -2, 3, -4, \ldots, (-1)^{n+1}n)$
5. *a*) $(3, -1, 11, -1, \ldots, 2n + (-1)^{n+1}2n - 1)$
   b) $(-1, 7, -1, \ldots, 2n + (-1)^n 2n - 1)$
   c) $(-3, -9, -15, \ldots, -6n + 3)$
   d) $\sqrt{1 + 9 + 25 + \cdots + (2n-1)^2}$
   e) $2 - 12 + 30 + \cdots + (-1)^{n+1}2n(2n - 1)$
9. Sugerencia: use la desigualdad del triángulo.
11. Sugerencia: eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación y escríbalos como productos punto.
13. Hiperplano en $\mathbf{R}^5$ que pasa por $(1, -2, 0, 4, -1)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (2, 3, -7, 1, -5)$
15. *a*) Costo total = $(200, 250, 300, 375, 450, 500) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
   b) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6 \mid (200, \ldots, 500) \cdot (x_1, \ldots, x_6) \leq 100{,}000\}$. El presupuesto del hiperplano es $200x_1 + \cdots + 500x_6 = 100{,}000$
17. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 8 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 15 & -9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$
21. -42
23. -240
25. *a*) Una matriz triangular inferior es de orden $n \times n$ cuyos elementos arriba de la diagonal principal son ceros.
   b) Para una matriz triangular superior utilice expansión en cofactores con respecto de la primera columna o el último renglón.
27. -289
31. $\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
37. $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{14} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$
39. $(32, 46, 19, -35)$

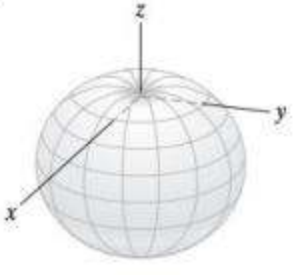
Sección 1.7

1. $(1, 1)$
3. $(3, 0)$
5. $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$
7. $(2\cos 2, 2\operatorname{sen} 2, 2)$
9. $\left(-1/2, \sqrt{3}/2, -2\right)$
11. $\left(0, 3\sqrt{3}/2, 3/2\right)$
13. $(0, 0, -2)$
15. $(2, 2\pi/3, 13)$
17. $(2\sqrt{2}, \pi/6, 7\pi/4)$
19. *a*)



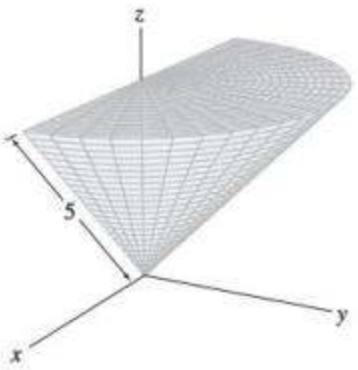
b)

21.

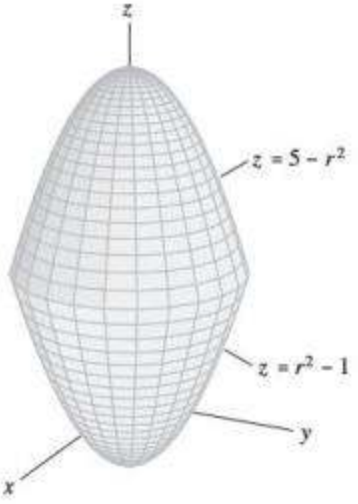


23. Cartesianas: $y = 2$; cilíndricas: $r \operatorname{sen} \theta = 2$; la superficie es un plano vertical.
25. Cartesianas: $x = y = 0$; esféricas: $\varphi = 0$ o π; el objeto es el eje z.

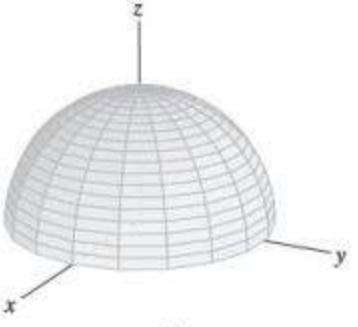
27.



29.



31.



33.

35. Nota: la región buscada es aquella entre las dos esferas que se ilustran.

37. *a*) $r = -f(\theta)$ es la reflexión que pasa por el origen de $r = f(\theta)$.
b) $\rho = -f(\varphi, \theta)$ es la reflexión que pasa por el origen de $\rho = f(\varphi, \theta)$.
c) $r = 3f(\theta)$ es una ampliación de tres hojas de $r = f(\theta)$.
d) $\rho = 3f(\varphi, \theta)$ es una ampliación de tres hojas de $\rho = f(\varphi, \theta)$.

41. $\mathbf{i} = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\theta$
$\mathbf{j} = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\varphi + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$
$\mathbf{k} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\varphi$

45. *a*) Sugerencia: use el inciso *a*) del ejercicio anterior.

47. Sugerencia: use el inciso *a*) del ejercicio anterior.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 1

1. Falso (las componentes correspondientes deben ser iguales).
3. Falso ($(-4, -3, -3)$ es el vector de desplazamiento de P_2 a P_1).
5. Falso (la velocidad es un vector, pero la rapidez es un escalar).
7. Falso (la partícula estará en $(2, -1) + 2(1, 3) = (4, 5)$).
9. Falso (a partir de las ecuaciones paramétricas es posible leer un vector paralelo a la recta para que sea $(-2, 4, 0)$. Este vector no es paralelo a $(-2, 4, 7)$).
11. Falso (la recta tiene forma simétrica $\dfrac{x-2}{-3} = y - 1 = \dfrac{z+3}{2}$).
13. Falso (las ecuaciones paramétricas describen un *semicírculo* debido a la restricción para t.
15. Falso ($\|k\mathbf{a}\| = |k|\,\|\mathbf{a}\|$).
17. Falso (sea $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{j}$).
19. Verdadero.
21. Verdadero (compruebe que cada punto satisface la ecuación).
23. Falso (el producto BA no está definido).
25. Falso ($\det(2A) = 2^n \det A$).
27. Falso (la superficie con ecuación $\rho = 4\cos\varphi$ es una esfera).
29. Verdadero.

Ejercicios varios para el capítulo 1

3. $x = 63t + 1, y = 148t, z = 847t - 2$

5. *a)* $x = 5t + 2, y = 3t - 2$
   b) $x = (b_2 - a_2)t + (a_1 + b_1)/2, \quad y = (a_1 - b_1)t + (a_2 + b_2)/2$

7. *a)* $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 5$
   b) $(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_n - a_n)x_n = \frac{1}{2}(b_1^2 - a_1^2 + \cdots + b_n^2 - a_n^2)$

9. *a)* No *b)* No

11. a) $\pi/3$
    b) $x = t, y = 1 - t, z = t$

13. Los planos *a)* y *d)* son paralelos; *b)* y *e)* son iguales; *c)* es perpendicular a *b)*.

15. El producto punto mide la coincidencia de las respuestas.

17. Sugerencia: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es normal al plano determinado por **a** y **b**.

19. *a)* $5\sqrt{21}$ *b)* 10

21. *b)* 1

25. Sugerencia: note que para determinar **x** basta determinar $\|\mathbf{x}\|$ y el ángulo entre **a** y **x**. Considere por separado los casos en que $c = 0$ y $c \neq 0$.

29. *a)* Sugerencia: sea que **a** y **b** denoten dos lados adyacentes del paralelogramo.
    b) Sugerencia: el lector solamente debe dar una ecuación vectorial.

31. *b)* $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. *a)* $H_6 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$;

$$\det H_2 = \frac{1}{12}, \det H_3 = \frac{1}{2160},$$

$$\det H_4 = \frac{1}{6048000}, \det H_5 = \frac{1}{266716800000},$$

$$\det H_6 = \frac{1}{186313420339200000}$$

b) $\det \mathrm{H}_{10} \approx 2.16418 \times 10^{-53}$
c) Lo más probable es que *AB* y *BA no* serán iguales a I_{10}.

35. $x = (a + b)\cos t - b\cos\left(\frac{a + b}{b}t\right)$,

$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a + b}{b}t\right)$

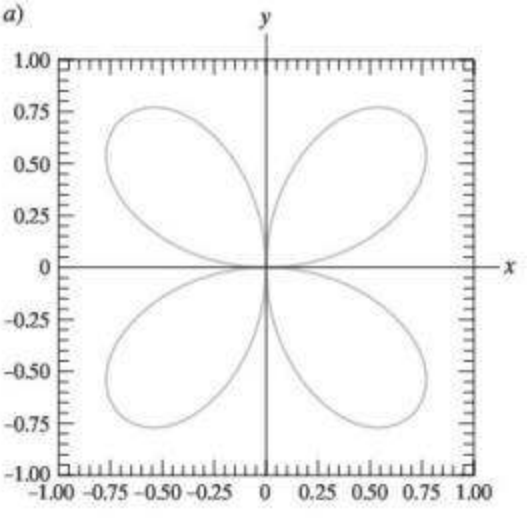
37. Hipotrocoide: $x = (a - b)\cos t + c\cos\left(\frac{a - b}{b}t\right)$,

$y = (a - b)\operatorname{sen} t - c\operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{b}t\right)$;

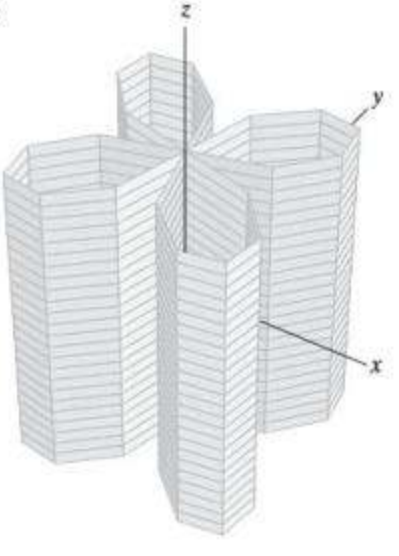
Epitrocoide: $x = (a + b)\cos t - c\cos\left(\frac{a + b}{b}t\right)$,

$y = (a + b)\operatorname{sen} t - c\operatorname{sen}\left(\frac{a + b}{b}t\right)$

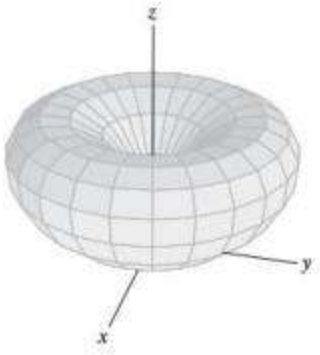
39. *a)*



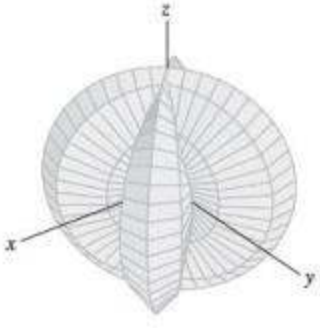
b)



c)

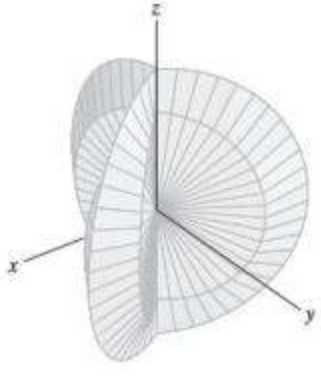


d)

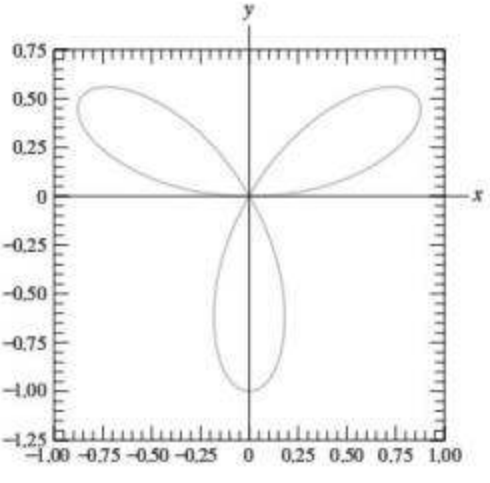


c)

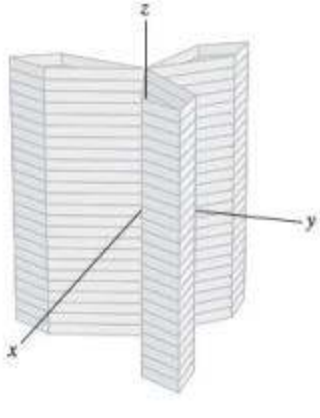
d)



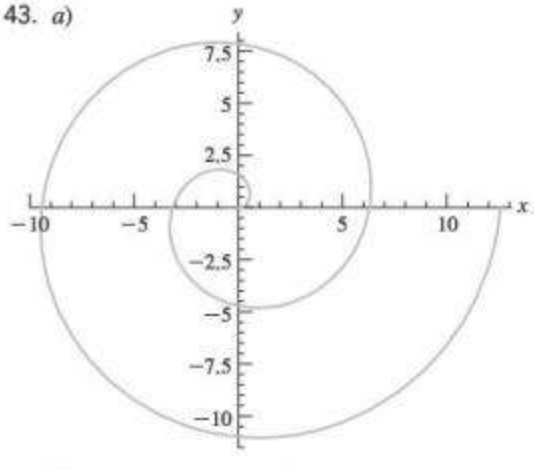
41. *a*)



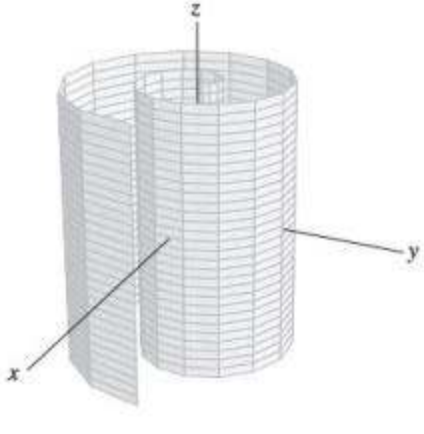
b)



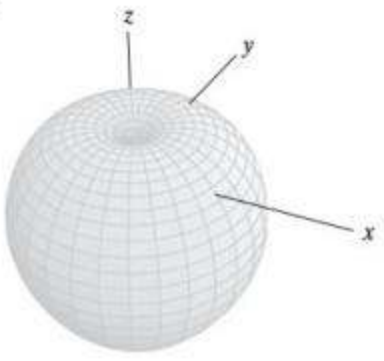
43. *a*)



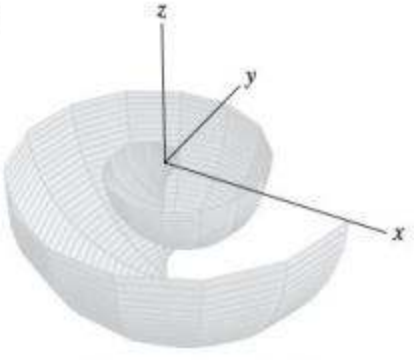
b)



c)



d)



45. *a)* $\{(r, \theta, z) \mid 0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 3\}$ si el cilindro se coloca de modo que el centro de su parte inferior esté en el origen y su eje es el eje z.

b) Con el mismo posicionamiento que el del inciso *a)*, $\{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \le \rho \le 3 \sec \varphi, 0 \le \varphi \le \pi/4, 0 \le \theta \le 2\pi\} \cup \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \le \rho \le 3 \csc \varphi, \pi/4 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

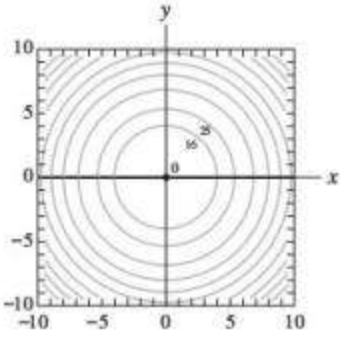
Capítulo 2

Sección 2.1

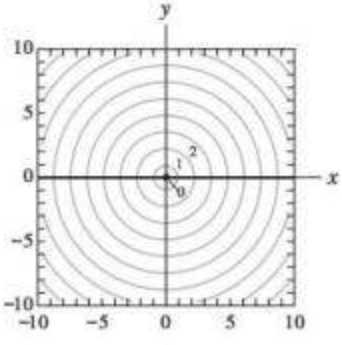
1. *a)* Dominio = $\mathbf{R}$; rango = $\{y \mid y \ge 1\}$
   b) No
   c) No
3. Dominio = $\{(x, y) \mid y \ne 0\}$; rango = $\mathbf{R}$
5. Dominio = $\mathbf{R}^3$; rango = $[0, \infty)$
7. Dominio = $\{(x, y) \mid y \ne 1\}$; rango = $\{(x, y, z) \mid y \ne 0, y^2 z = (xy - y - 1)^2 + (y + 1)^2\}$
9. $v_1(x, y, z, t) = xyzt$,
   $v_2(x, y, z, t) = x^2 - y^2$,
   $v_3(x, y, z, t) = 3z + t$

11. *a)* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$
    b) $f_1(x, y, z) = -2x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
    $f_2(x, y, z) = -2y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
    $f_3(x, y, z) = -2z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
13. *a)* $f_1(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_3 - x_4$,
    $f_2(\mathbf{x}) = 3x_2$,
    $f_3(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_3 - x_4$
    b) Rango = $\{(y_1, y_2, y_3) | y_1 = y_3\}$

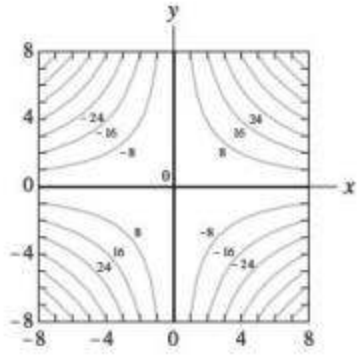
15.



17.

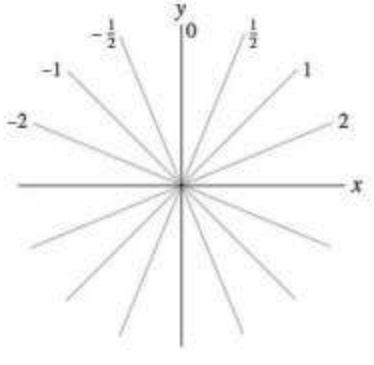


19.


y
x
8
4
0
−4
−8
−8
−4
0
4
8
24
16
8
0
8
16
24
34
16
8
8
16
24
−8
−16
−24

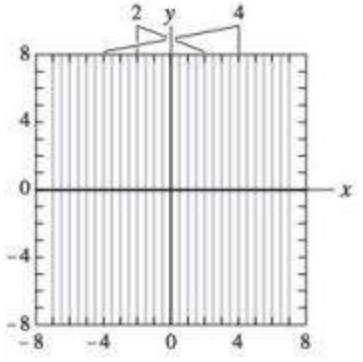
z
y
x

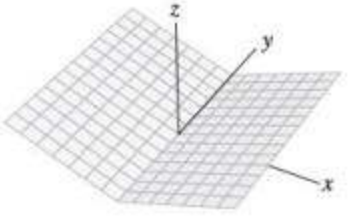
21.


y
x
0
1
2
−1
−2
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$

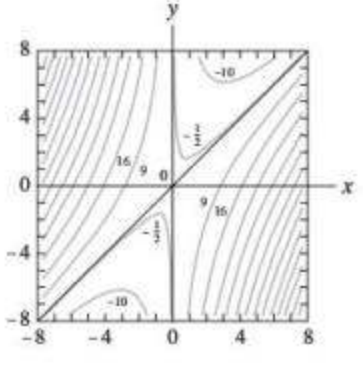
z
y
x

23.


2
y
4
x
8
4
0
−4
−8
−8
−4
0
4
8

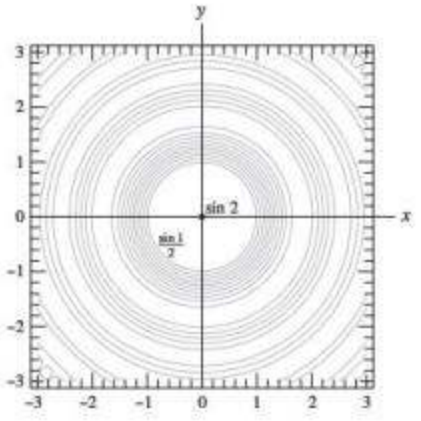

z
y
x

25.

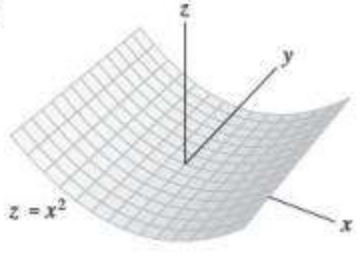

y
x
8
4
0
−4
−8
−8
−4
0
4
8
−10
$-\frac{1}{2}$
16
9
0
9
16
$-\frac{1}{2}$
−10

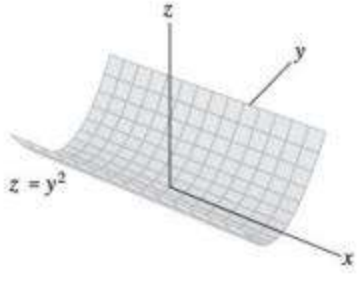
z
y
x

27.

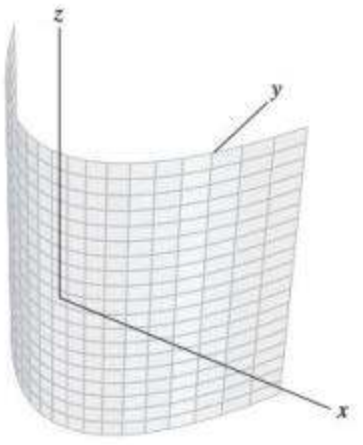


29. *a*)



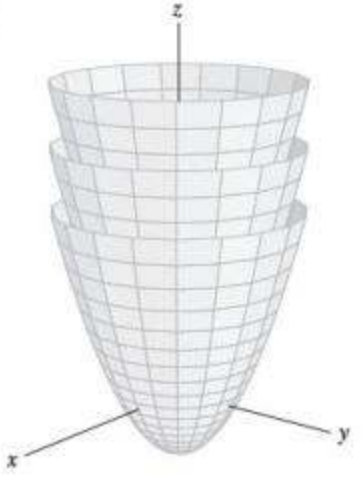


c)

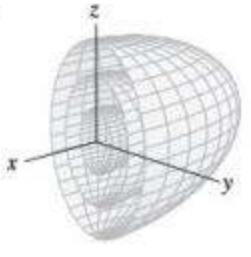


31. No

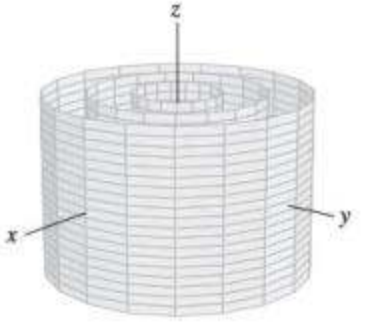
33.



35.

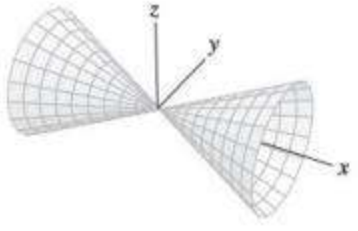


37. *a*)

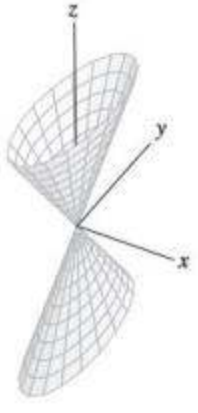


39.

41.

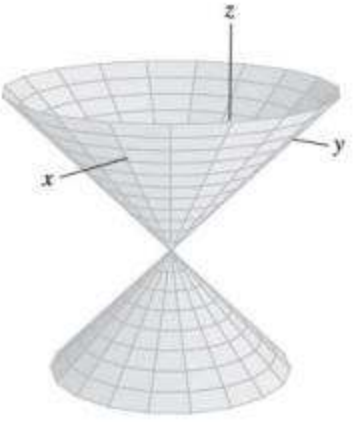


43.



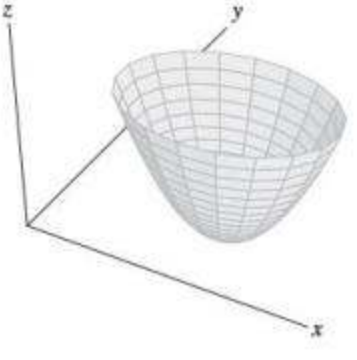
45.

47. Cono con vértice en $(1, -1, -3)$.



49. Elipsoide con centro en $(-1, 0, 0)$.

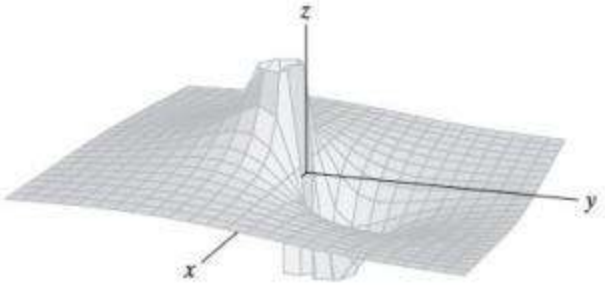
51. Paraboloide con vértice en $(3, 0, 1)$.



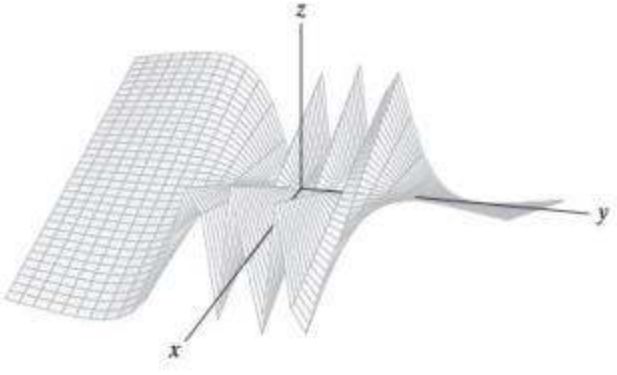
Sección 2.2

1. Abierto
3. Ninguno
5. Ninguno
7. 2
9. No existe
11. No existe
13. 0
15. 0
17. 0
19. -1

21. El límite no existe.
23. El límite no existe.
25. El límite no existe.



27. El límite es igual a 0.



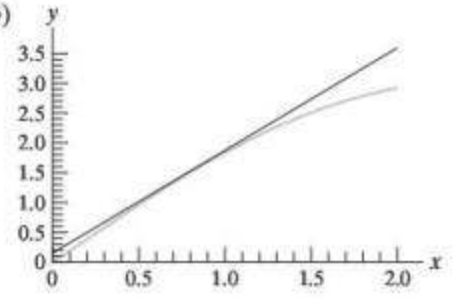
29. El límite no existe.
31. 2
33. El límite no existe.
35. 0
37. El límite no existe.
39. Continuo
41. Continuo
43. No es continuo en (0, 0)
45. Continuo
47. Sugerencia: escriba $f(\mathbf{x})$ en términos de los componentes de $\mathbf{x}$.

Sección 2.3

1. $f_x(x, y) = y^2 + 2xy$, $f_y(x, y) = 2xy + x^2$
3. $f_x(x, y) = y\cos xy - y\operatorname{sen} xy$,
   $f_y(x, y) = x\cos xy - x\operatorname{sen} xy$
5. $f_x(x, y) = 4xy^2/(x^2 + y^2)^2$,
   $f_y(x, y) = -4x^2y/(x^2 + y^2)^2$
7. $f_x(x, y) = -3x^2y\operatorname{sen} x^3y$,
   $f_y(x, y) = -x^3\operatorname{sen} x^3y$
9. $f_x(x, y) = e^y + 2xy\cos(x^2 + y)$,
   $f_y(x, y) = xe^y + \operatorname{sen}(x^2 + y) + y\cos(x^2 + y)$
11. $F_x = 1/(y + z)$,
    $F_y = -(x + z)/(y + z)^2$,
    $F_z = (y - x)/(y + z)^2$
13. $F_x = x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
    $F_y = y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
    $F_z = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
15. $F_x = \dfrac{1 - 2x^2 - 3xy + y^2 - 3xz + z^2}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$,
    $F_y = \dfrac{1 + x^2 - 3xy - 2y^2 - 3yz + z^2}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$,
    $F_z = \dfrac{1 + x^2 + y^2 - 3xz - 3yz - 2z^2}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$
17. $F_x = \dfrac{x^4 - 2xyz + 3x^2z^2 + 3x^2}{(x^2 + z^2 + 1)^2}$,
    $F_y = \dfrac{z}{x^2 + z^2 + 1}$,
    $F_z = \dfrac{x^2y - 2x^3z - yz^2 + y}{(x^2 + z^2 + 1)^2}$
19. $-\frac{1}{6}\mathbf{i}$
21. $-\mathbf{i} + (2\pi + 1)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
23. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
25. $\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{1}{9}\mathbf{k}$
27. $[-4 \quad -3/e \quad -3/e]$
29. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$
31. $\begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -17 & 3 \end{bmatrix}$
33. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
37. *a*) La función tiene derivadas parciales continuas.
    b) $z = 3x + 8y + 3$
39. $z = e(x + y)$
41. $x_5 = -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 28$
43. *a*) $h(0.1, -0.1) = 1$
    b) $f(0.1, -0.1) = 1$
45. *a*) $h(1.01, 1.95, 2.2) = 21.76$
    b) $f(1.01, 1.95, 2.2) = 21.6657$
47. *a*) $f_x(x, y) = (3x^4 + 8x^2y^2 + y^4)/(x^2 + y^2)^2$,
    $f_y(x, y) = -(x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + y^4)/(x^2 + y^2)^2$
    b) $f_x(0, 0) = 3$, $f_y(0, 0) = -1$

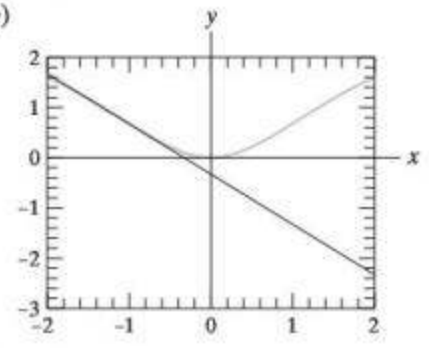
49. *a*) $(8 + 4\sqrt{2})x - 8y = \sqrt{2}(\pi - 4)$

b)



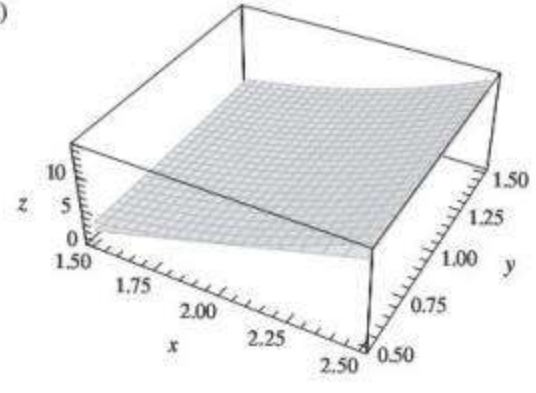
51. *a*) $x + y = \ln 2 - 1$

b)



53. *a*) $z = 11x - 15$

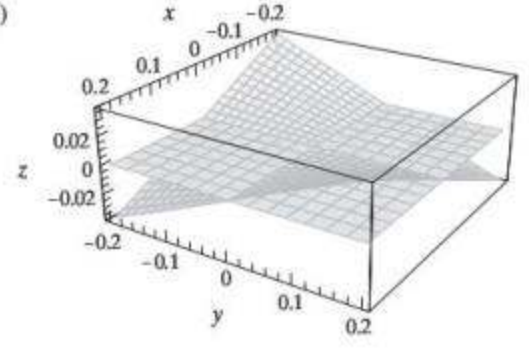
b)



c) Las derivadas parciales son polinomios, por consiguiente, continuas, de modo que f es diferenciable en $(2, 1)$.

55. *a*) $z = 0$

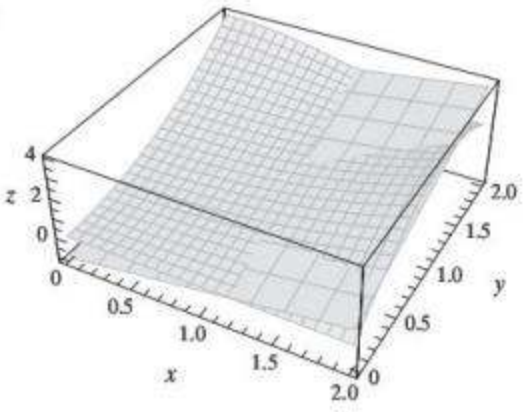
b)



c) Las derivadas parciales son funciones racionales definidas en $\mathbf{R}^2$, —por consiguiente, son continuas—, de modo que f es diferenciable en $(0, 0)$.

57. *a*) $z = -\frac{\pi}{288}[(9\sqrt{3}\pi - 96\sqrt{2})x - (16\sqrt{2}\pi + 72)y + (4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\pi^2 + (16\sqrt{2} + 9)\pi]$

b)



c) Las derivadas parciales son productos de polinomios y funciones seno y coseno, por consiguiente, son continuas. De manera que f es diferenciable en $(\pi/3, \pi/4)$.

59. $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A$. Observe que $f'(x) = a$ en el caso de una variable.

Sección 2.4

1. $D(f + g)$
$= \begin{bmatrix} y - \operatorname{sen} x + y\cos(xy) & x + 3y^2 + x\cos(xy) \end{bmatrix}$

3. $D(\mathbf{f} + \mathbf{g})$
$= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} y + 3x^2\cos x - x^3 \operatorname{sen} x & x\cos y & 1 \\ -6x + yz & e^z + xz & ye^z + xy \end{bmatrix}$

5. $D(fg) = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \end{bmatrix}$,

$D(f/g) = \begin{bmatrix} y^2 - y^4/x^2 & 2xy + 4y^3/x \end{bmatrix}$

7. $D(fg)$
$= \begin{bmatrix} 12x^3y + 3x^2y^5 - 12xy^3 - 2y^7 \\ 3x^4 + 5x^3y^4 - 18x^2y^2 - 14xy^6 \end{bmatrix}$,
$D(f/g)$
$= \begin{bmatrix} \dfrac{y(2y^6 - 6x^3 - 3x^2y^4)}{x^2(x^2 - 2y^2)^2} & \dfrac{3x^3 + 6xy^2 + 5x^2y^4 - 6y^6}{x(2y^2 - x^2)^2} \end{bmatrix}$

9. $f_{xx} = 6xy^7$, $f_{yy} = 42x^3y^5 + 6x$,
$f_{xy} = f_{yx} = 21x^2y^6 + 6y - 7$

11. $f_{xx} = -ye^{-x} + 2yx^{-3}e^{y/x} + y^2x^{-4}e^{y/x}$, $f_{yy} = x^{-2}e^{y/x}$,
$f_{xy} = f_{yx} = e^{-x} - x^{-2}e^{y/x} - yx^{-3}e^{y/x}$

13. $f_{xx} = \dfrac{2[\operatorname{sen}^2 2x - \cos 2x(\operatorname{sen}^2 x + 2e^y)]}{(\operatorname{sen}^2 x + 2e^y)^3}$,
$f_{yy} = \dfrac{2e^y(2e^y - \operatorname{sen}^2 x)}{(\operatorname{sen}^2 x + 2e^y)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{4e^y \operatorname{sen} 2x}{(\operatorname{sen}^2 x + 2e^y)^3}$

15. $f_{xx} = -y\operatorname{sen} x$, $f_{yy} = x\cos y$, $f_{xy} = f_{yx} = \cos x + \operatorname{sen} y$

17. $f_{xx} = 2e^y$, $f_{yy} = x^2e^y$, $f_{zz} = 4e^{2z}$, $f_{xy} = f_{yx} = 2xe^y$, $f_{xz} = f_{zx} = 0$, $f_{yz} = f_{zy} = 0$

19. $f_{xx} = 2yz$, $f_{yy} = 2xz$, $f_{zz} = 2xy$, $f_{xy} = f_{yx} = 2xz + 2yz + z^2$, $f_{xz} = f_{zx} = 2xy + y^2 + 2yz$, $f_{yz} = f_{zy} = x^2 + 2xy + 2xz$

21. $f_{xx} = b^2e^{bx}\cos z + a^2e^{ax}\operatorname{sen} y$, $f_{yy} = -e^{ax}\operatorname{sen} y$, $f_{zz} = -e^{bx}\cos z$, $f_{xy} = f_{yx} = ae^{ax}\cos y$, $f_{xz} = f_{zx} = -be^{bx}\operatorname{sen} z$, $f_{yz} = f_{zy} = 0$

23. $\partial^n f/\partial x^n = 3^n ye^{3x}$, $\partial^n f/\partial y^n = 0$, para $n \geq 2$

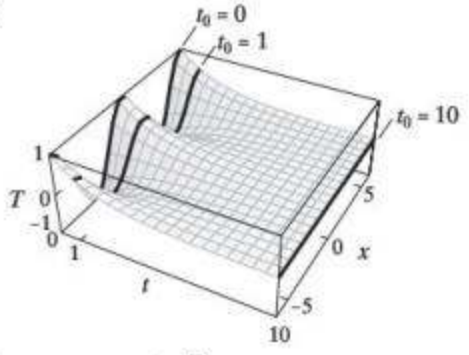
25. $\partial^n f/\partial x^n = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$, $\partial^n f/\partial y^n = (-1)^{n-1}(n-1)!/y^n$, $\partial^n f/\partial z^n = (-1)^n(n-1)!/z^n$. Todas las derivadas parciales mixtas son iguales a cero.

27. *a*) p_x y p_y tienen grado 16; p_{xx}, p_{yy} y p_{xy} tienen grado 15.

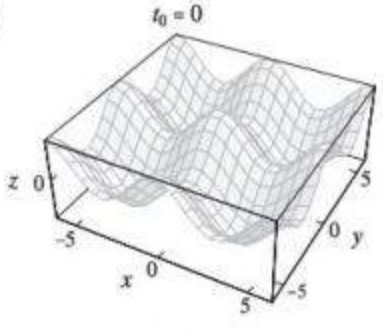
b) p_x y p_y tienen grado 3; p_{xx} tiene grado 2; p_{yy} tiene grado indefinido: p_{xy} tiene grado 2.

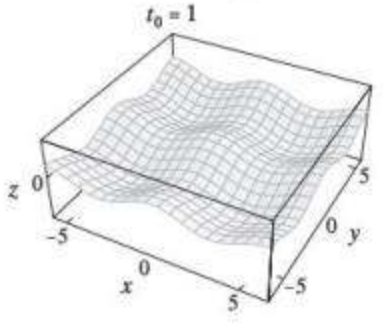
c) El grado de $\partial^k p/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}$ es $d-k$, donde d es el grado más alto de un término de p de la forma $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ tal que, para $j = 1, 2, \ldots, n$, d_j es al menos el número de veces que ocurre x_j en la derivada parcial. Si p no tiene dicho término, entonces el grado de $\partial^k p/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}$ es indefinido.

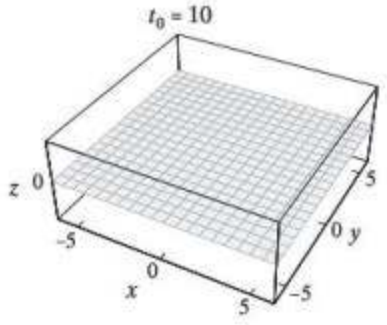
29. *a*)



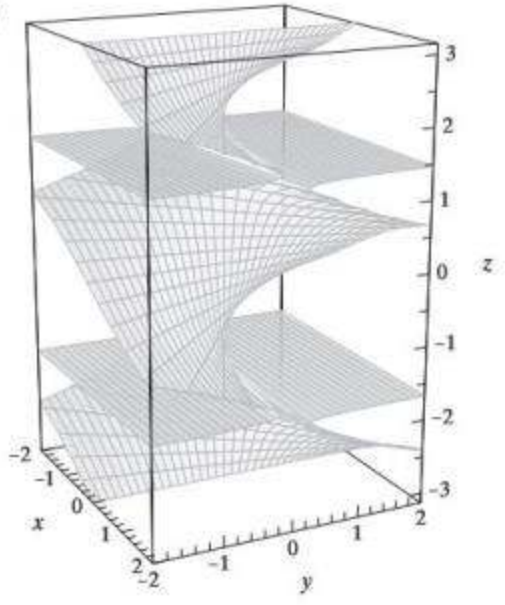
b)







33. *a*)



Sección 2.5

1. $df/dt = (18t^2 + 14t)\operatorname{sen} 2t - 6\cos 2t\operatorname{sen}^2 2t + (12t^3 + 14t^2)\cos 2t + 72t + 84$

2. $\partial f/\partial s = (3s^2 + t^2 + 2st)\cos((s+t)(s^2+t^2))$, $\partial f/\partial t = (s^2 + 3t^2 + 2st)\cos((s+t)(s^2+t^2))$

3. *a*) $dP/dt = (36 - 27\pi)/\sqrt{2}$ atm/min

c) Aproximadamente $(.36 + (9 - .27)\pi)/\sqrt{2} \approx 19.6477$ atm.

5. -6 in^3/min. Decreciente.

7. 0.766 unidades/mes

9. 0.2244 cm/min

13. Sugerencia: $\partial w/\partial u = 2u(\partial w/\partial x) - 2u(\partial w/\partial y)$, de la regla de la cadena.

15. Sugerencia: $\partial w/\partial x = (dw/du)((y^3 - x^2y)/(x^2 + y^2)^2)$, de la regla de la cadena.

17. Sugerencia: $\partial w/\partial x = -1/x^2(\partial w/\partial u + \partial w/\partial v)$ de la regla de la cadena.

19. $D(\mathbf{f}\circ g) = \begin{bmatrix} 15(s-7t)^4 & -105(s-7t)^4 \\ 2e^{2s-14t} & -14e^{2s-14t} \end{bmatrix}$

21. $D(f \circ \mathbf{g}) = [(1+s+t)e^{s-t} \quad (1-s-t)e^{s-t}]$

23. $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} 3s^2 - t^2 & -2st \\ 6s^5t^3 - s^{-2}t^{-2} & 3s^6t^2 - 2s^{-1}t^{-3} \end{bmatrix}$

25. $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} e^{2t}(2\operatorname{sen} t + \cos t) \\ e^t(\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t) \\ 3(\operatorname{sen}^2 t \cos t + e^{3t}) \end{bmatrix}$

27. $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$

$$= \begin{bmatrix} t+u & s+u & s+t \\ 3s^2t^3 - tu^2e^{stu^2} & 3s^3t^2 - su^2e^{stu^2} & -2stue^{stu^2} \end{bmatrix}$$

29. *a)* $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 31 & 44 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 31 \end{bmatrix}$

31. *a)* $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\theta \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}$

$$+ \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}$$

$$- \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

33. *a)* $\dfrac{\partial}{\partial r} = \operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$

35. $dy/dx = (2xy^7 - y\cos xy)/(x\cos xy - 7x^2y^6 + e^y)$

37. $\partial z/\partial x = 3x^2z^3/(yz^2\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} y - x^3z^2)$, $\partial z/\partial y = (z^2\cos z + z\cos y)/(yz^2\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} y - x^3z^2)$

39. *a)* $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 1, \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z} = 7, \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

$= -10; \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{y} = 1 - 20x, \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{x} = 7 - 20y$

b) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{y} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}\left(\dfrac{\partial x}{\partial x}\right)_{y}$

$+ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{y} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{y}$

$= (1)(1) + (7)(0) + (-10)(2x)$

41. $\left(\dfrac{\partial s}{\partial z}\right)_{x,y,w} = xw - 2z;$

$\left(\dfrac{\partial s}{\partial z}\right)_{x,w} = xw - 2z + \dfrac{x^2y^3 - x^3}{xw - 3y^2z}$

Sección 2.6

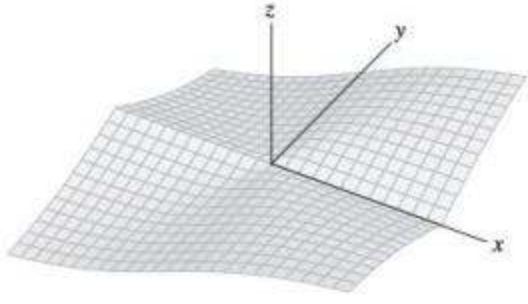
1. *a)* La derivada direccional de f en (x, y, z) en la dirección del eje z negativo.
b) $\nabla f(x, y, z)\cdot(-\mathbf{k}) = -\partial f/\partial z$

3. $8\sqrt{5}/5$

5. $(2e - 9)\sqrt{5}/5$

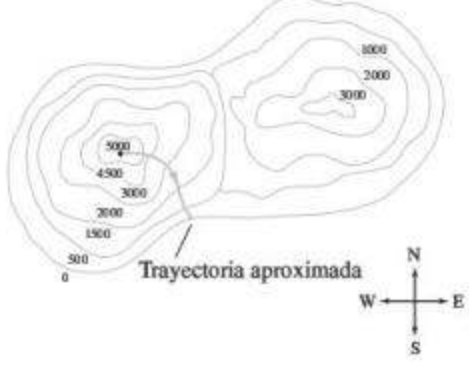
7. $-4\sqrt{3}\,e^{-14}$

9. *a)* $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
b) $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = v|w|$ para todos los vectores unitarios $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i} + w\,\mathbf{j}$.
c)



11. *a)* En la dirección $(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{5}$.
b) En la dirección $\pm(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$.

13.



15. Se mueve a lo largo de $y^3 = 27x$ (hacia el origen).

17. $y - z = 1$ 19. $x - 2y - 2z = 2$

21. El plano tangente tiene por ecuación: $x - \pi z = 2$.

23. $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{2}{2}\right)$ y $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{2}\right)$

27. *a)* $3x + 12y + 2z + 10 = 0$
b) No hay plano tangente en (0, 0, 0).

29. La recta tangente es $5x - 3\sqrt[4]{4}\,y = -1$.

31. Ecuaciones paramétricas: $x = 5t + 5$, $y = 4t - 4$. La ecuación cartesiana es: $4x - 5y = 40$.

33. Ecuaciones paramétricas: $x = 14t + 2$, $y = t - 1$. La ecuación cartesiana es: $x - 14y = 16$.

35. $x = -2t - 1, y = t - 1, z = t - 1$

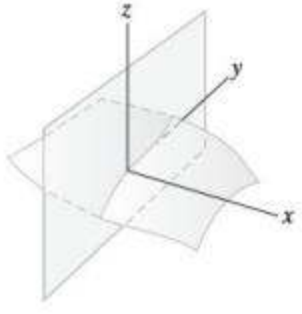
37. $x_5 - x_1 = \pi$

39. $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n = \sqrt{n}$

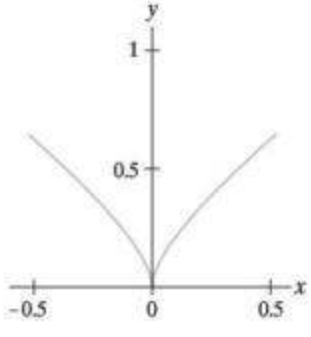
41. *a*) Cerca de todos los puntos de S tales que $x \neq 0$. En dichos puntos $f(x, y) = \ln(1 - \operatorname{sen} xy - x^3y)/x$.

b) Todos los puntos $(0, y, z)$, es decir, el plano yz.

c)



43. *b*) Sí, $y = x^{2/3}$.



c) El teorema de la función implícita sugiere que necesitamos no poder resolver para y en términos de x. Observe que en este caso sí se puede pero la función no es de clase C^1 en $x = 0$.

45. *a*) $G(-1, 1, 1) = F(-2, 1) = 0$

b) Sugerencia: use la regla de la cadena para encontrar $G_z(-1, 1, 1) = 30 \neq 0$.

47. *a*) $\Delta(1, 0, -1, 1, 2) = -120 \neq 0$; se aplica el teorema de la función implícita general.

b) $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(1, 0) = -\dfrac{7}{5}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(1, 0) = -\dfrac{1}{5}, \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}(1, 0) = -1$

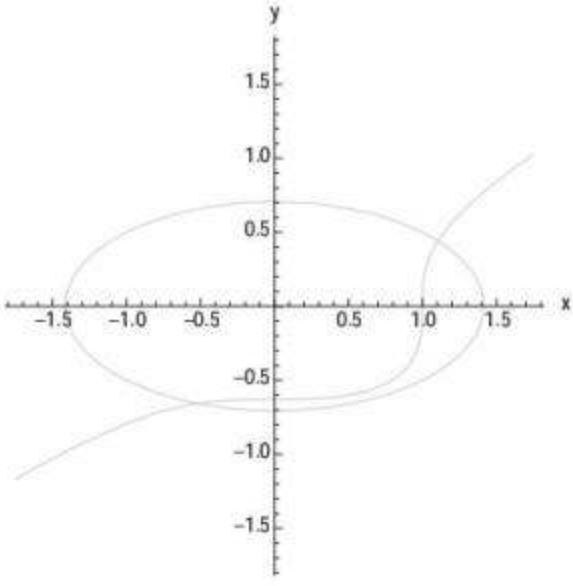
49. *a*) En cualquier sitio excepto donde $\varphi = 0$ o π.

b) Podemos resolver en cualquier parte, excepto sobre el eje z, que es donde θ puede tener cualquier valor.

Sección 2.7

1. (1.302942538, −0.902880451)

3. *a*) Estime puntos de intersección cerca de (1, 1/2) y (−1/2, −3/4).



b) (1.103931711, 0.441965716) y (−0.518214315, −0.657923613)

5. *a*) $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$ conduce a (−1.2649111, 1.54919334).

b) $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$ conduce a (1.26491106, −1.5491933), en tanto que $\mathbf{x}_0 = (-1, -1)$ conduce a (−1.2649111, −1.5491933).

c) Parece que un vector inicial lleva a un punto de intersección que está en el mismo cuadrante.

9. (−0.9070154, −0.9070154)

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 2

1. Falso
3. Falso (el rango también requiere que $v \neq 0$).
5. Verdadero
7. Falso (la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ es un solo punto).
9. Falso
11. Falso ($\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 \neq 2$).
13. Falso
15. Falso ($\nabla f(x, y, z) = (0, \cos y, 0)$).
17. Verdadero
19. Falso (las derivadas parciales deben ser continuas).
21. Falso ($f_{xy} \neq f_{yx}$).
23. Verdadero (escriba la regla de la cadena para esta situación).
25. Falso (la ecuación correcta es $x + y + 2z = 2$).
27. Verdadero
29. Falso

Ejercicios varios para el capítulo 2

1. *a)* $f_1(\mathbf{x}) = -x_2, f_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_3, f_3(\mathbf{x}) = x_2$

   b) El dominio es $\mathbf{R}^3$; el rango consta de todos los vectores en $\mathbf{R}^3$ que tengan la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - a\mathbf{k}$.

3. *a)* Dominio: $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$
   Rango: $[0, \infty)$

   b) El dominio es cerrado.

5.

$f(x, y) =$	Gráfica	Curvas de nivel
$\dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$	D	d
$\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$	B	e
$(3y^2 - 2x^2)e^{-x^2-2y^2}$	A	b
$y^3 - 3x^2y$	E	c
$x^2y^2e^{-x^2-2y^2}$	F	a
$ye^{-x^2-y^2}$	C	f

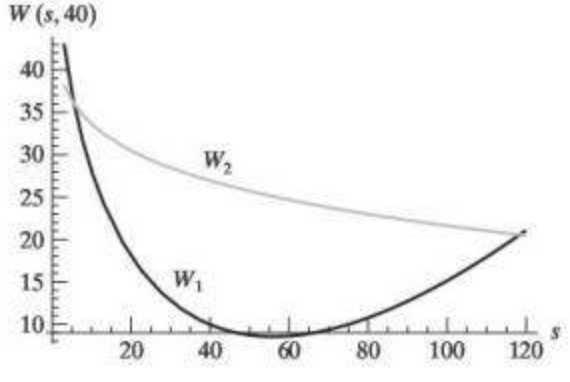
7. 0

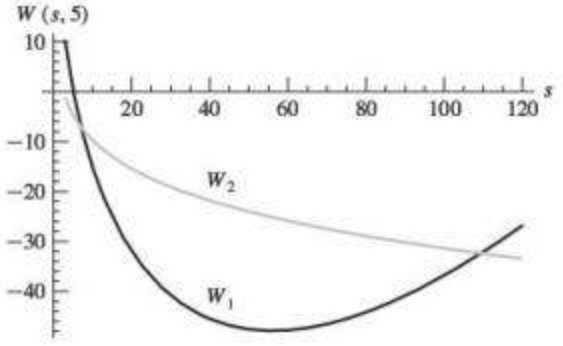
11. *a)* 15°F
    b) 5°F

13. 1.3

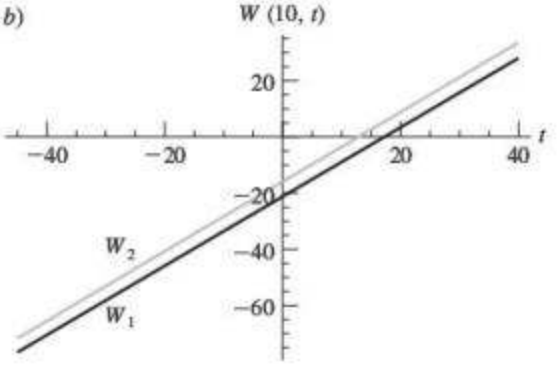
15. *a)* 9.57°F; 16.87°F; 8.39 mph
    b) El efecto de la velocidad del viento es mayor en la fórmula de Siple que en la tabla.
    c) Si $t < 91.4$°F o $s \geq 4$ mph, la fórmula de Siple da valores del enfriamiento por viento que son mayores que la temperatura del aire, lo que no es realista.

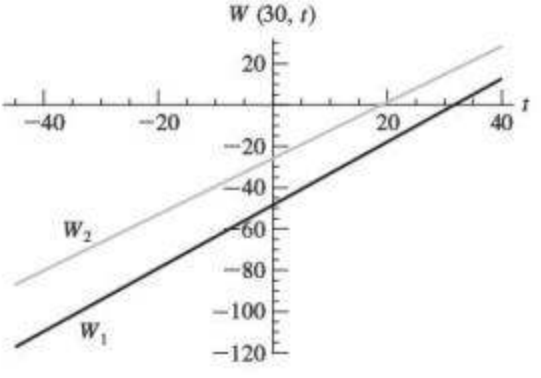
17. *a)*



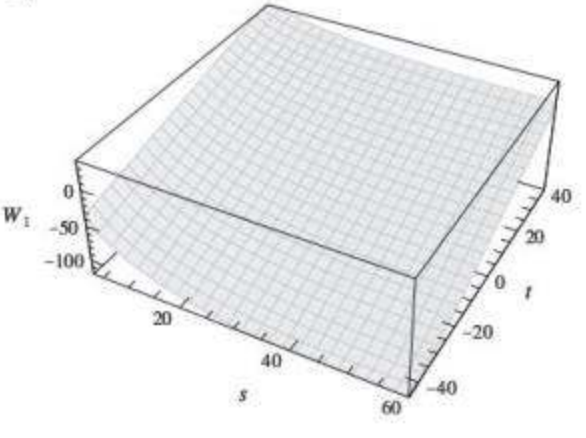


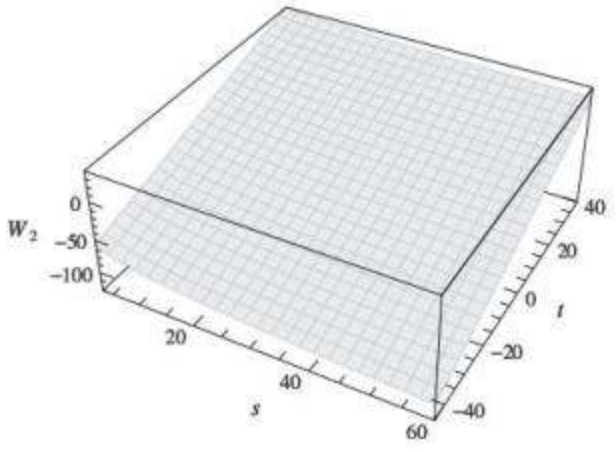
b)





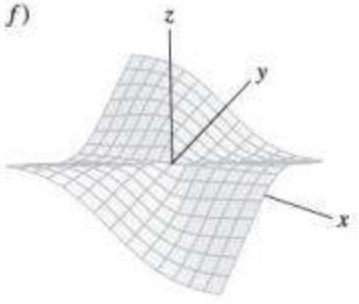
c)





19. Sugerencia: compare el vector normal al plano tangente con el vector $\overrightarrow{OP}$.
21. *a*) $3x - 4y - 5z = 0$
    b) $ax + by - cz = 0$
23. *a*) $2x - 8y - z = 5$
    b) $x = 1, y = t - 1, z = 5 - 8t$
25. 12, 201.4 unidades/mes
27. *a*) $\partial w/\partial \rho = 2\rho$, $\partial w/\partial \varphi = \partial w/\partial \theta = 0$
29. *a*) $\partial z/\partial r = e^r(\cos\theta(\partial z/\partial x) + \operatorname{sen}\theta(\partial z/\partial y))$,
    $\partial z/\partial \theta = e^r(-\operatorname{sen}\theta(\partial z/\partial x) + \cos\theta(\partial z/\partial y))$;
    $\partial z/\partial x = e^{-r}(\cos\theta(\partial z/\partial r) - \operatorname{sen}\theta(\partial z/\partial \theta))$,
    $\partial z/\partial y = e^{-r}(\operatorname{sen}\theta(\partial z/\partial r) + \cos\theta(\partial z/\partial \theta))$
    b) Sugerencia:
    $$\begin{aligned}\partial^2 z/\partial x^2 = e^{-2r}(&\cos^2\theta(\partial^2 z/\partial r^2)\\ &+(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)(\partial z/\partial r)\\ &+2\cos\theta\operatorname{sen}\theta(\partial z/\partial\theta)\\ &-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta(\partial^2 z/\partial r\partial\theta)\\ &+\operatorname{sen}^2\theta(\partial^2 z/\partial\theta^2)),\end{aligned}$$
    $$\begin{aligned}\partial^2 z/\partial y^2 = e^{-2r}(&\operatorname{sen}^2\theta(\partial^2 z/\partial r^2)\\ &+(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(\partial z/\partial r)\\ &-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\partial z/\partial\theta)\\ &+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\partial^2 z/\partial r\partial\theta)\\ &+\cos^2\theta(\partial^2 z/\partial\theta^2))\end{aligned}$$
31. $u^u\left[u^{(u^u-1)} + u^{u^u}\ln u + u^{u^u}(\ln u)^2\right]$
35. *a*) $z = f(x, y)$, donde $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2)/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$
    b) Sí
    c) $\partial f/\partial x = (x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4)/(x^2 + y^2)^2$,
    $\partial f/\partial y = -8x^3y/(x^2 + y^2)^2$ (si $(x, y) \neq (0, 0)$);
    $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$
    d) $D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = (\partial f/\partial r)|_{r=0} = \cos 3\theta$
    e) $f_y(0, 0) = 0$ del inciso *c*), pero a lo largo de $y = x$, $f_y(x, x) = -2$, la cual no tiene un límite de 0.

f)

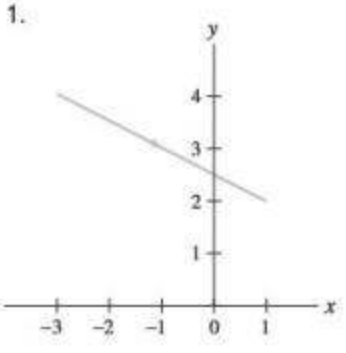


37. Homogénea de grado 3.
39. Homogénea de grado 3.
41. Homogénea de grado 0.

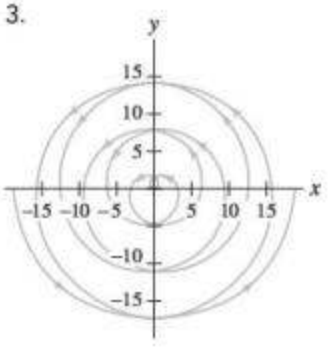
Capítulo 3

Sección 3.1

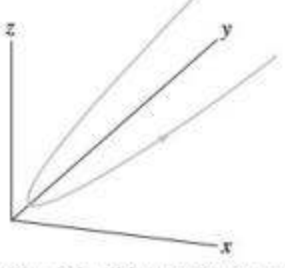
1.



3.



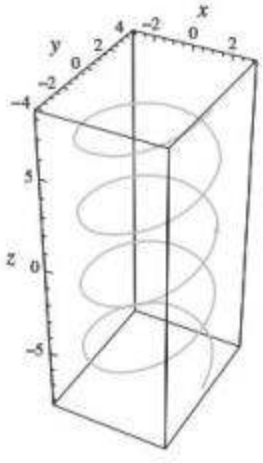
5.



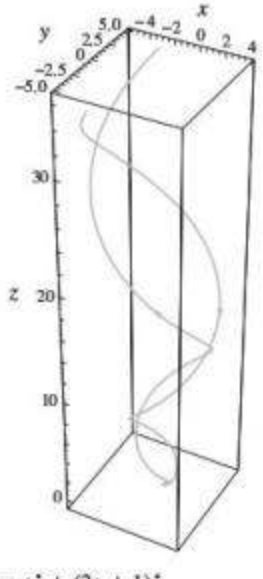
7. $\mathbf{v}(t) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, velocidad $= \sqrt{13}$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$

9. $\mathbf{v}(t) = (\operatorname{sen} t + t\cos t, \cos t - t\operatorname{sen} t, 2t)$,
velocidad $= \sqrt{5t^2 + 1}$,
$\mathbf{a}(t) = (2\cos t - t\operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t - t\cos t, 2)$

11. *a*)



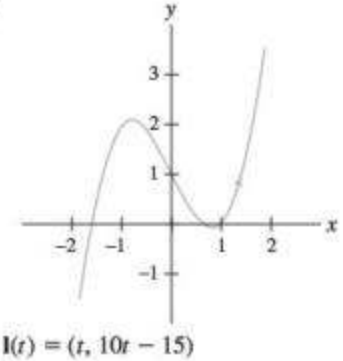
13. *a*)



15. $\mathbf{l}(t) = t\,\mathbf{i} + (3t + 1)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{l}(t) = (4t - 4, 12t - 16, 80t - 128)$

19. *a*)



b) $\mathbf{l}(t) = (t, 10t - 15)$

c) $y = x^3 - 2x + 1$

d) $y - 5 = 10(x - 2)$. (Sea $x = t$ para verificar que coinciden).

21. 117.1875 pies

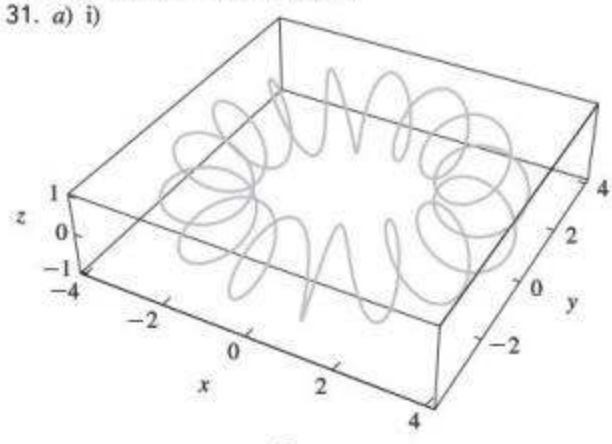
23. 25.09° o bien, 64.91°

25. No

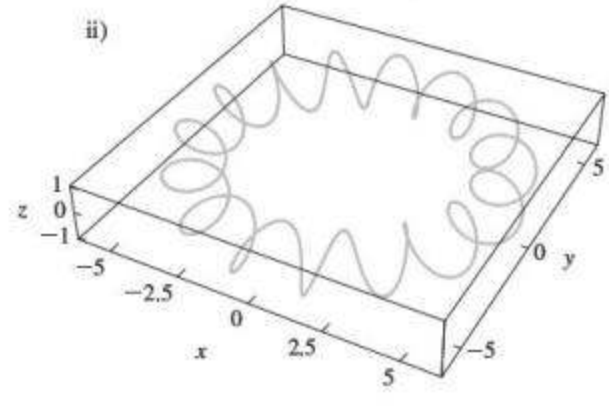
27. Escriba ambos lados en términos de las funciones componente.

29. Sugerencia: diferencie $\|\mathbf{x}(t)\|^2$.

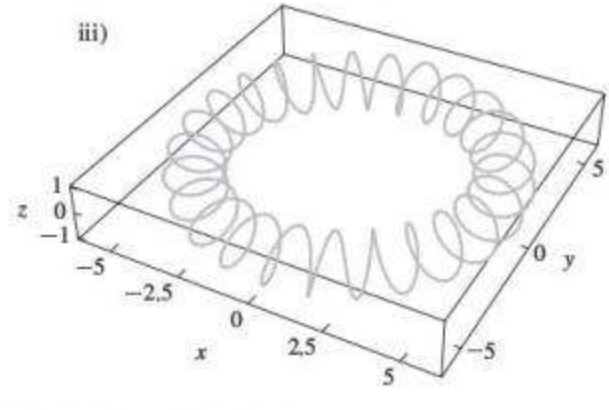
31. *a*) i)



ii)



iii)

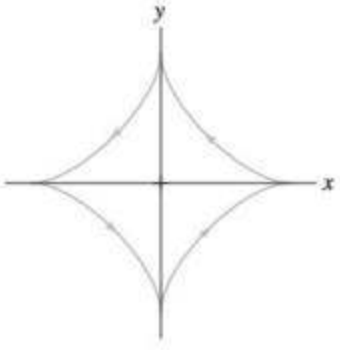


33. *a*) $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(-1) = (1, 0)$

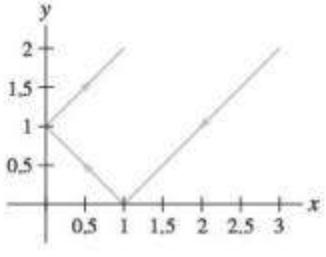
b) $\pi/2$

Sección 3.2

1. $3\sqrt{13}$
3. $6\sqrt{3} - 2$
5. 27
7. $\frac{15}{2} + \ln 4$
9. $6a$



11. $\sqrt{m^2 + 1}\,|x_0 - x_1|$
13. *a*)



b) La trayectoria consta de tres partes C^1; una para $-2 \le t \le 0$, otra para $0 \le t \le 1$ y otra para $1 \le t \le 2$,

c) $4\sqrt{2}$

15. Sugerencia: comience con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$.
17. $\mathbf{T} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(-5\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\cos 3t\,\mathbf{k})$,

$\mathbf{N} = -\cos 3t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,3t\,\mathbf{k}$,

$\mathbf{B} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(-2\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\cos 3t\,\mathbf{k})$,

$\kappa = \frac{5}{29}$, $\tau = -\frac{2}{29}$

19. $\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(1, \frac{1}{2}\sqrt{t+1}, -\frac{1}{2}\sqrt{1-t})$,

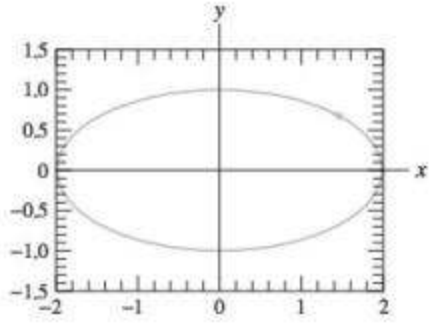
$\mathbf{N} = 2\sqrt{2}\,(0, \frac{1}{4}\sqrt{1-t}, \frac{1}{4}\sqrt{t+1})$,

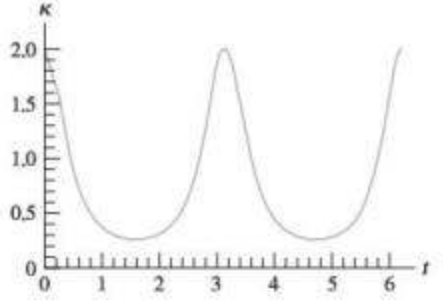
$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1, -\sqrt{t+1}, \sqrt{1-t})$,

$\kappa = \sqrt{2}/(6\sqrt{1-t^2})$, $\tau = 1/\left(3\sqrt{1-t^2}\right)$

21. *b*) $\kappa = |\text{sen}\,x|$
23. *a*) $\dfrac{ab}{(a^2\,\text{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$

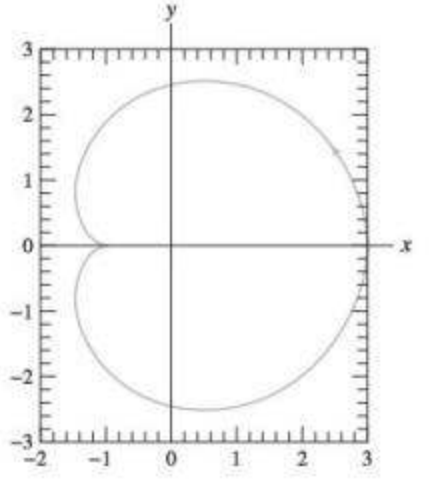
b)

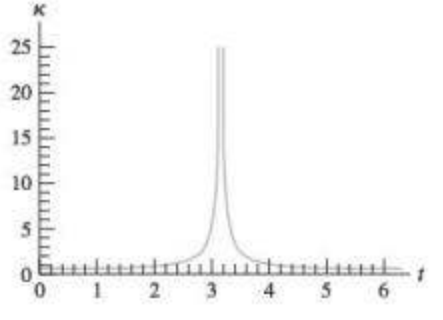




25. *a*) $\dfrac{3}{4a\sqrt{2 + 2\cos t}}$

b)

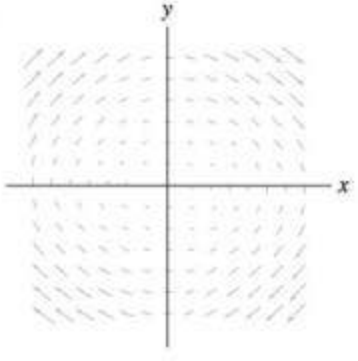




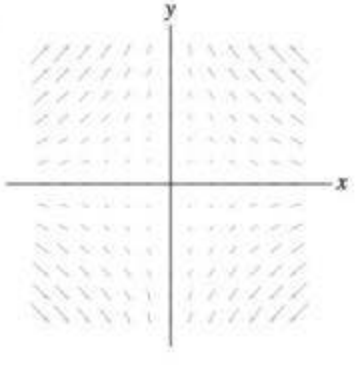
27. $a_{\text{tang}} = 4t/\sqrt{4t^2+1}$, $a_{\text{norm}} = 2/\sqrt{4t^2+1}$
29. $a_{\text{tang}} = \sqrt{5}e^t$, $a_{\text{norm}} = 2\sqrt{5}e^t$
31. $a_{\text{tang}} = 4t/\sqrt{2+4t^2}$, $a_{\text{norm}} = 2/\sqrt{1+2t^2}$
33. *b)* $a_{\text{tang}} = 4t/\sqrt{4t^2+10}$, $a_{\text{norm}} = 2\sqrt{10}/\sqrt{4t^2+10}$
35. Sugerencia: escriba **v** y **a** en términos de **T** y **N** y utilice las fórmulas de Frenet-Serret.
37. Sugerencia: use la fórmula (17) y el ejercicio 35.
39. Sugerencia: recuerde que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.
41. Sugerencia: calcule **T** y demuestre que $(\mathbf{x}(t) - (1, 0, 0)) \cdot \mathbf{T} = 0$.

Sección 3.3

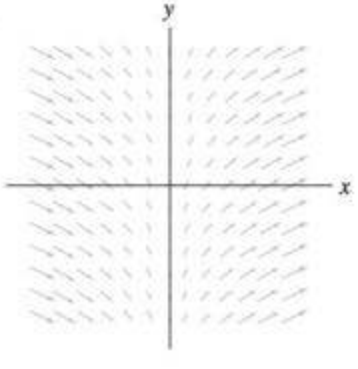
1.



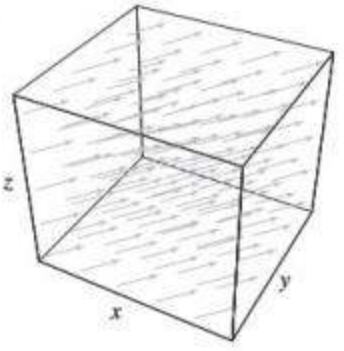
3.



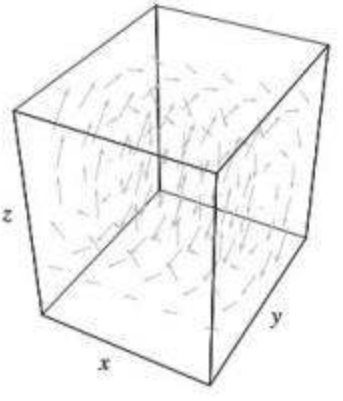
5.



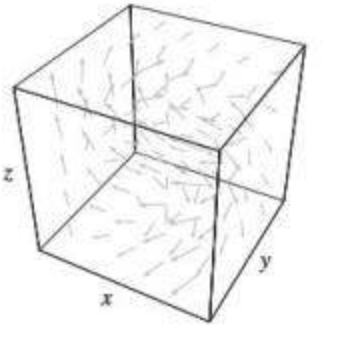
7.



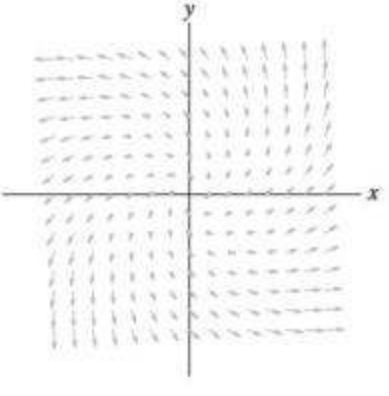
9.



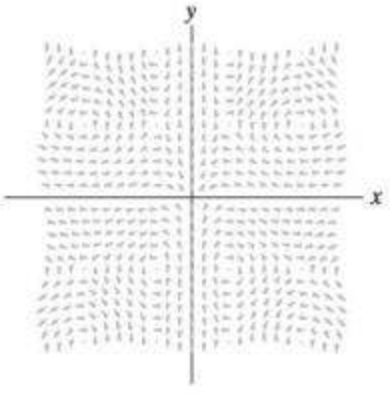
11.



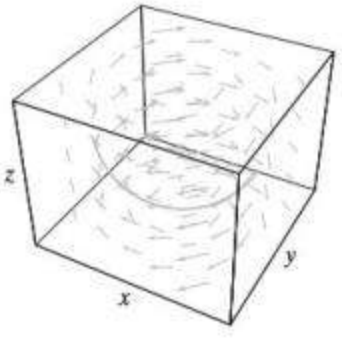
13.



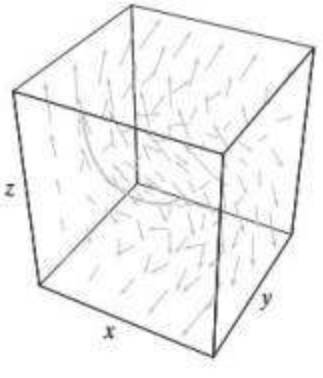
15.



17. $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0) = \mathbf{x}'(t)$



19. $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 2e^{2t}) = \mathbf{x}'(t)$



21. $\left(\frac{1}{2-t}, e^t\right)$

23. *a*) $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$.

b) Las superficies equipotenciales son planos paralelos que tienen por ecuación $3x - 2y + z = c$, es decir, planos con normal $(3, -2, 1)$.

25. Sugerencia: use la regla de la cadena y los hechos de que $\nabla f = \mathbf{F}$ y $\mathbf{x}$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$.

31. Sugerencia: diferencie la definición de ecuación diferencial para el flujo con respecto de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Sección 3.4

1. $2x + 2y$
3. 3
5. $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \cdots + 2nx_n$
7. $2xz\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} - e^y\,\mathbf{k}$
9. $\mathbf{0}$
11. $(x^2 - xye^{xyz})\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (yze^{xyz} - 2yz)\mathbf{k}$
13. *a*) div $\mathbf{F} > 0$ sobre todo de $\mathbf{R}^2$
    b) div $\mathbf{F} < 0$ sobre todo de $\mathbf{R}^2$
    c) div $\mathbf{F} > 0$ en $\{(x, y) \mid x > 0\}$, div $\mathbf{F} < 0$ en $\{(x, y) \mid x < 0\}$
    d) div $\mathbf{F} > 0$ en $\{(x, y) \mid y < 0\}$, div $\mathbf{F} < 0$ en $\{(x, y) \mid y > 0\}$
21. Escríbala en términos de las funciones componente de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$.
23. Escríbala en términos de las funciones componente de $\mathbf{F}$.
25. Escríbala en términos de las funciones componente de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$.
27. En primer lugar use la regla de la cadena para reemplazar las ocurrencias de los operadores diferenciales cartesianos en ∇ por medio de combinaciones de los operadores diferenciales esféricos. Después calcule ∇f. Por último, sustituya $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ mediante combinaciones apropiadas de $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\theta$ (véase la sección 1.7).
29. Escriba las componentes de $f\nabla f$.
33. $(1/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 3

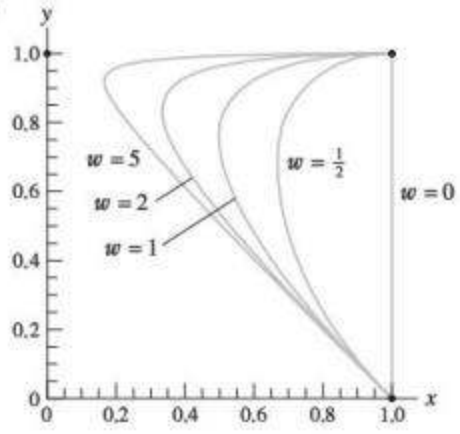
1. Verdadero
3. Verdadero
5. Falso (debe haber un signo negativo en el segundo término del lado derecho).
7. Verdadero
9. Falso
11. Verdadero
13. Verdadero
15. Falso (es un campo escalar).
17. Verdadero
19. Falso (es una expresión sin significado).
21. Verdadero (compruebe que $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}'(t)$).
23. Falso ($\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$).
25. Falso (considere $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$).
27. Verdadero
29. Falso ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \neq 0$).

Ejercicios varios para el capítulo 3

1 *a*) D *b*) F *c*) A
d) B *e*) C *f*) E

3. Sugerencia: diferencie $(ds/dt)^2 = \|\mathbf{x}'(t)\|^2$.

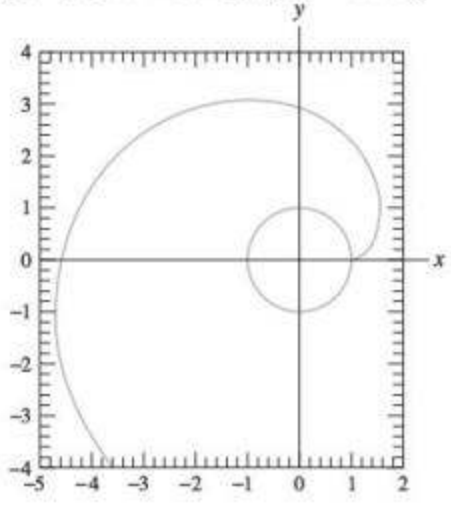
7.



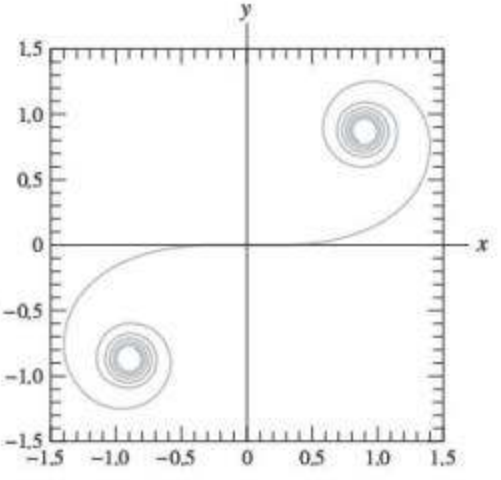
9. *a*) Sugerencia: calcule $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{x}(1)$.
   b) Sugerencia: demuestre que

$$\mathbf{x}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{w}{1+w}(x_2, y_2) + \tfrac{1}{1+w}(\tfrac{x_1+x_3}{2}, \tfrac{y_1+y_3}{2}).$$

11. *a*) $\frac{1}{2(1+w)}\sqrt{(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (y_1 - 2y_2 + y_3)^2}$
    b) $\frac{w}{2(1+w)}\sqrt{(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (y_1 - 2y_2 + y_3)^2}$
13. *a*) Sugerencia: encuentre donde $\mathbf{x}'(t) = (0, 0)$.
    b) Sugerencia: la recta tangente en $\mathbf{x}(t_0)$ está dada por $\mathbf{l}(s) = \mathbf{x}(t_0) + s\mathbf{x}'(t_0)$. Encuentre la intersección de esta recta con el eje y.
15. Sugerencia: comience con $\mathbf{x}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta)$.
17. *a*) $\mathbf{y}(t) = (a(\cos t + t \operatorname{sen} t), a(\operatorname{sen} t - t\cos t))$
    b)



19. *a*) Demuestre que $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = s(t)$.
    b) La diferencia vectorial $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$ es un vector tangente (a $\mathbf{x}$), de $s(t)$ unidades de longitud.
23. $\mathbf{e}(t) = (a(t + \operatorname{sen} t), a(\cos t - 1))$, que es otro tipo de cicloide.
25. Sugerencia: use las fórmulas de Frenet-Serret.
27. *a*) Demuestre que $(x'(s))^2 + (y'(s))2 = 1$ por medio del teorema fundamental del cálculo.
    b) $\kappa = |g'(s)|$
    c) Sea $g(s) = \kappa(s)$. Encuentre g por medio de antidiferenciación y haga $x(s) = \int_0^s \cos g(t)\,dt$, $y(s) = \int_0^s \operatorname{sen} g(t)\,dt$.
    d) $x(s) = \int_0^s \cos(t^2/2)\,dt$, $y(s) = \int_0^s \operatorname{sen}(t^2/2)\,dt$
    e)



29. *a*) Calcule $\mathbf{B}$ y recuerde que es un vector unitario.
    b) $\mathbf{B}$ es constante, de modo que $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$. A continuación use la fórmula de Frenet-Serret.
31. *a*) $\dfrac{a^2 + h^2/4\pi^2}{a}$ *b*) 8.2771 pies
35. $\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$. Argumente que $\mathbf{N}' \neq \mathbf{0}$.
37. *a*) $2\sqrt{2}\,\pi$ *b*) $\mathbf{F} = \sqrt{2}(y\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k})$
41. Sugerencia: use la proposición 1.4.
43. No

Capítulo 4

Sección 4.1

1. $p_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3/3 + 2x^4/3$
3. $p_4(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + 5(x-1)^4$
5. $p_3(x) = 3 + (x-9)/6 - (x-9)^2/216 + (x-9)^3/3888$
7. $p_5(x) = 1 - (x - \pi/2)^2/2 + (x - \pi/2)^4/24$
9. $p_1(x, y) = \frac{1}{3} - 2(x-1)/9 + 2(y+1)/9$,
   $p_2(x, y) = \frac{1}{3} - 2(x-1)/9 + 2(y+1)/9 + (x-1)^2/27 - 8(x-1)(y+1)/27 + (y+1)^2/27$
11. $p_1(x, y) = -1 - 2x$,
    $p_2(x, y) = -1 - 2x - 2x^2 + 9(y - \pi)^2/2$
13. $p_1(x, y, z) = 1 + x + 8y + 4z$, $p_2(x, y, z) = xy - 3y^2 + 2xz$
15. $p_1(x, y, z) = p_2(x, y, z) = 0$
17. $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 12 \end{bmatrix}$

21. $p_2(x, y) = 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

23. $p_2(x, y, z) = 2 + \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y & z-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{bmatrix}$

25. *a*) $Df(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$,

$$Hf(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

b) $p_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 + x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$

$p_2(x_1, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} ix_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} ijx_ix_j$

27. *a*) $2 - z + 3xy + x^2y - xz^2 + 2y^3$

b) $-4 - 4(x-1) + 11(y+1) - z + \frac{1}{2}[4(x-1)^2 + 16(x-1)(y+1) - 12(y+1)^2 - 2z^2] + \frac{1}{6}[18(x-1)^3 + 24(x-1)^2(y+1) - 6(x-1)z^2 + 12(y+1)^3]$

29. $2x\,dx + 6y\,dy - 6z^2dz$

31. $e^x \cos y\,dx + (e^y \operatorname{sen} z - e^x \operatorname{sen} y)\,dy + e^y \cos z\,dz$

33. *a*) 388.08 *b*) 0.24625 *c*) 1.1

35. El elemento (1, 1) (arriba a la izquierda).

37. 2.4 cm

39. 0.0068 m

41. *a*) $p_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}[x^2 + (y - \frac{\pi}{2})^2]$

b) Exacta al menos hasta 0.0360.

43. *a*) $p_2(x, y) = \frac{\pi}{2} - y - 2x(y - \frac{\pi}{2})$

b) Exacta al menos hasta 0.0311.

Sección 4.2

1. *a*) (2, 3)

b) $\Delta f = -h^2 - k^2$

c) Hay un máximo local en (2, 3).

3. Máximo local en $(\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$.

5. Mínimo local en $(\frac{27}{2}, 5)$; punto silla en $(\frac{3}{2}, 1)$.

7. Mínimo en $(4, \frac{1}{2})$.

9. Punto silla en (0, 0); mínimo en (0, 2).

11. Punto silla en $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$; mínimo local en $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

13. Máximo local en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

15. Punto silla en (0, 6, −3).

17. Mínimo local en (0, 0,0).

19. Punto silla en $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

21. *a*) (0, −2) y (0, 3)

b) Máximo local en (0, −2); mínimo local en (0, 3).

23. *a*) Mínimo si $a, b > 0$; máximo si $a, b < 0$; punto silla en otro caso.

b) Mínimo si $a, b, c > 0$; máximo si $a, b, c < 0$; en otro caso, punto silla.

c) Mínimo si $a_1, \ldots, a_n > 0$; máximo si $a_1, \ldots, a_n < 0$; punto silla en otro caso.

25. Puntos silla en (0, 0), $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$; máximo local en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

27. Puntos silla en (0, 0, 0, 0), $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$

29. $(\frac{36}{13}, -\frac{48}{13}, -\frac{12}{13})$

31. 1 100 unidades del modelo X y 700 unidades del modelo Y.

33. Máximo de 8 en (0, 0, 2); mínimo de $-\frac{191}{7}$ en $(-\frac{32}{7}, 3, \frac{8}{7})$.

35. Máximo de 1 en $(\pi/2, 0), (\pi/2, 2\pi), (3\pi/2, \pi)$; mínimo de −1 en $(3\pi/2, 0), (3\pi/2, 2\pi), (\pi/2, \pi)$.

37. Máximo de 11 en (2, 0), mínimo de $\frac{5}{2}$ en $(\frac{1}{2}, 1)$.

39. Máximo de e^6 en (0, 1, −2); mínimo de e en todos los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 0$.

41. *b*) Máximo

43. *b*) Ninguno de los dos

45. *b*) Máximo

47) *a*) Máximo local en (0, 0, 0).

b) $f(0, 0, 0) = e^2$ es un máximo global.

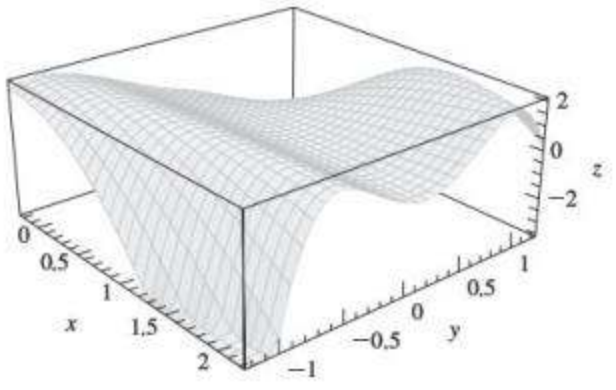
49. Mínimo global en $2 + \ln 2$, en $(2, \frac{1}{2})$. No hay máximo global.

51. *a*) $\{(1, y) | y \in \mathbf{R}\} \cup \{(x, 2) | x \in \mathbf{R}\}$

b) Máximos de 3 a lo largo de los puntos críticos del inciso *a*).

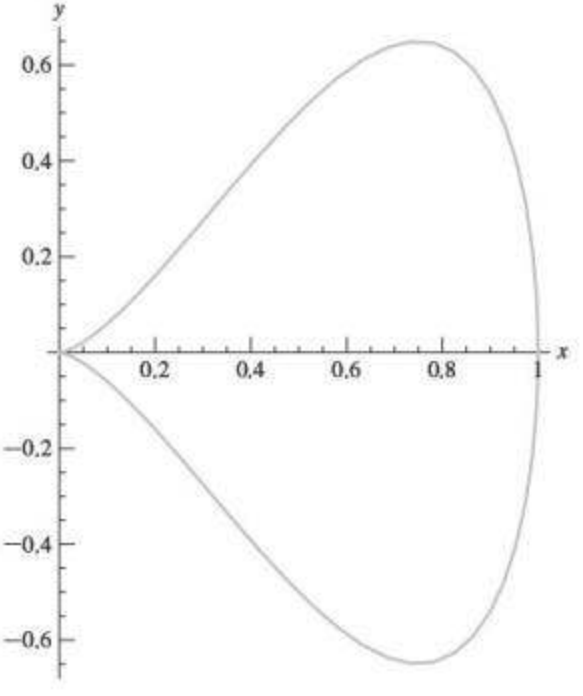
53. *b*) Los puntos críticos son (2, 1) y (0, −1).

c)



Sección 4.3

1. *a)* Minimice $f(x, y) = x^2 + y^2 + (2x - 3y - 4)^2$ para encontrar que el punto más cercano es $(\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7})$.
   b) Minimice $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $2x - 3y - z = 4$.
3. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
5. $(1, \frac{2}{3}, 2)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 6)$
7. $(\frac{8}{11}, \frac{2}{11}, \frac{4}{11})$
9. $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$
11. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$
13. *a)* $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4}\right), \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
    b) $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4}\right)$ da máximos; $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ da mínimos.
15. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}, \frac{12-\sqrt{6}}{8}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}, \frac{12+\sqrt{6}}{8}\right)$
17. $(\pm1, 0, 0), (0, \pm1, 0), (0, 0, \pm1), (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}),$
    $\left(\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}\right), \left(-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}\right)$
19. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$
21. Los números son 6, 6, 6.
23. Valor máximo: 6. Valor mínimo: 0.
25. La altura debe ser igual al diámetro.
27. Se localiza ya sea en (–2, 2, 1) o en (–2, –2, 1).
29. La esfera más grande tiene por ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
31. $(\frac{9}{2}, 2, \frac{5}{2})$
33. El punto más alto es (–1, –1, 2); el punto más bajo es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
35. *a)* $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ y $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$
39. Los puntos más cercanos son $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; los puntos más lejanos son (5, 5) y (–5, –5).
41. *a)* Punto crítico en (1, 0).
    b) Hay un mínimo de 0 en (0, 0) y un máximo de 1 en (1, 0).



   c) $\nabla g = \mathbf{0}$ en (0, 0)
43. *a)* Sugerencia: compruebe que $\partial L/\partial l_i = c_i - g_i(\mathbf{x})$ para $i = 1, \ldots, k$ y

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{k} l_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Sección 4.4

1. $5x - 7y + 14 = 0$
3. *a)* $D(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$
   b) Minimice D con respecto de a y b.
5. Sugerencia: sea $D(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$.
7. *b)* Hay un punto único en equilibrio estable en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.
9. Único punto de equilibrio en $(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. No hay equilibrio estable.

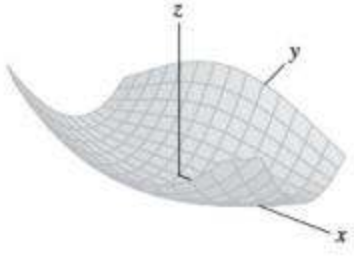
11. Producir 50,000 de cada uno de los modelos estándar y ejecutivo, y 100,000 del modelo de lujo.
13. Solo irrigar; comprar $3333.\overline{3}$ galones de agua.
15. *a*) Invertir \$120,000 para requerimientos de capital y \$240,000 para trabajo.
    b) Sugerencia: note que $L/K = 2$.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 4

1. Verdadero
3. Verdadero
5. Verdadero
7. Falso (f es más sensible a cambios en y).
9. Falso
11. Verdadero
13. Falso (considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2$).
15. Verdadero
17. Falso (no es un punto crítico de la función).
19. Verdadero
21. Falso (el punto crítico es un punto silla).
23. Falso (los extremos pueden ocurrir en puntos donde $g = c$ y $\nabla g = \mathbf{0}$).
25. Falso (el lector tendrá que resolver un sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas).
27. Verdadero
29. Falso (los puntos de equilibrio son los puntos críticos de la función potencial).

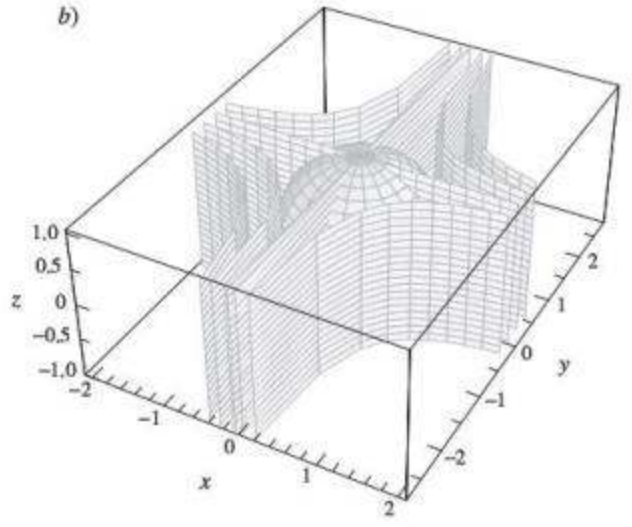
Ejercicios varios para el capítulo 4

1. $r_0 = 2h_0$
3. El precio del moka es \$2.70 por libra y el del kona es de \$5 por libra.
5. Valor máximo de 4 en $(-1, \sqrt{3}, 0)$. Valor mínimo de -4 en $(-1, \sqrt{3}, 0)$.
7. *e*)



9. *a*) $(0, 0, \pm 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

b)



c) Máximo en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; mínimo en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; puntos silla en $(0, 0, \pm 1)$

11. $1/(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$
13. Las dimensiones son 4 (dirección x) mediante $2\sqrt{2}$ (dirección y) mediante 2 (dirección z).
15. 1
17. $a/3$ mediante $b/3$ mediante $c/3$
19. $3\sqrt{5}/8$
21. Sugerencia: minimice $D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, donde (x, y) denota un punto sobre la recta $ax + by = d$.
23. *a*) Sugerencia: demostrar que el valor máximo ocurre cuando $x^2 = y^2 = z^2 = a^2/3$.
    b) Como $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ es maximizada cuando $x^2 = y^2 = z^2 = a^2/3$, debemos tener $x^2y^2z^2 \le (a^2/3)^3 = ((x^2 + y^2 + z^2)/3)^3$.
    c) Sugerencia: como $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se suponen positivas, podemos escribir $x_i = y_i^2$ para $i = 1, \ldots, n$. Maximice $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^2y_2^2 \cdots y_n^2$ sujeta a $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = a^2$.
25. *a*) $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}$
    b) Reescriba como $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$.

Capítulo 5

Sección 5.1

1. $\frac{40}{3}$
3. $6(e - 1)$

5. $e^3 - 2e^2 + e + 2\ln 2 - \frac{2}{3}$

7. *a*) Volumen $= \int_{-1}^{2}\int_{0}^{2}(x^2 + y^2 + 2)\,dy\,dx = 26$

   b) Volumen $= \int_{0}^{2}\int_{-1}^{2}(x^2 + y^2 + 2)\,dx\,dy$

9. $\int_{0}^{1}\int_{-1}^{2}(2x^2 + y^4 \operatorname{sen} \pi x)\,dy\,dx = 2 + 66/5\pi$

11. La integral iterada da el volumen de la región acotada por la gráfica de $z = 16 - x^2 - y^2$, el plano xy y los planos $x = 1, x = 3, y = -2\ y = 2$. El valor de la integral es $\frac{248}{3}$.

13. La integral iterada da el volumen de la región acotada por la gráfica de $z = 4 - x^2$, el plano xy y los planos $x = -2$, $x = 2\ y = 0, y = 5$. El valor de la integral es $\frac{160}{3}$.

15. La integral iterada da el volumen de la región acotada por la gráfica de $z = 5 - |y|$, el plano xy y los planos $x = -1$, $x = 2, y = -5, y = 5$. El valor de la integral es 75.

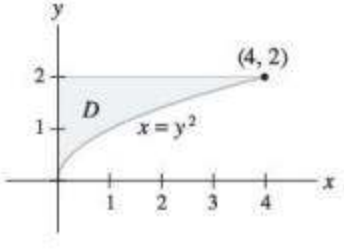
Sección 5.2

1. 0

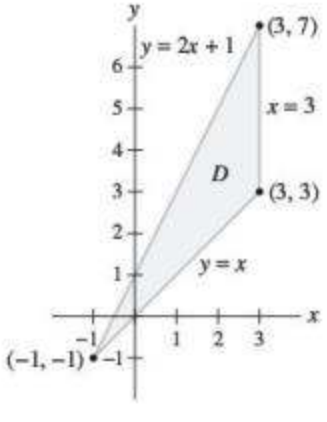
3. *a*) Compruebe que $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} x^3\,dy\,dx = 0$.

   b) Sugerencia: la región D es simétrica con respecto del eje y y x^3 es una función impar.

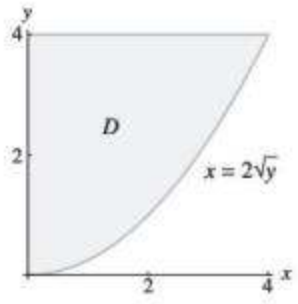
5. 4



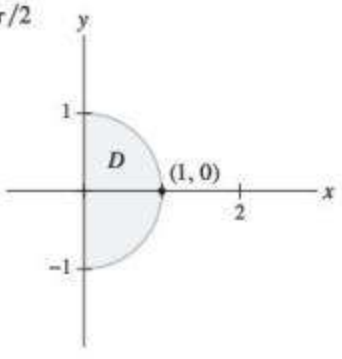
7. $\frac{152}{3}$



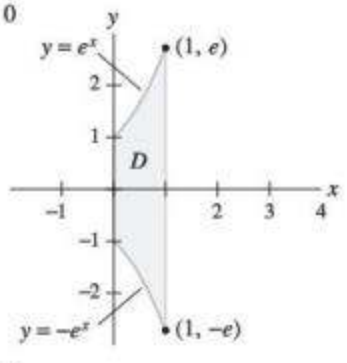
9. $1 - \cos 16$



11. $3\pi/2$



13. 0



15. $\frac{4}{3}$

17. $\frac{99}{20}$

19. $\frac{1}{2}(e - 1)$

21. $-\frac{128}{5}$

23. Sugerencia: escriba $\iint_R cf\,dA$ y $\iint_R f\,dA$ como los límites de sumas de Riemann apropiadas.

25. Sugerencia: use el hecho de que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

27. $\frac{1}{12}$

29. El área es πab.

31. $\frac{7}{6}$

33. 18

35. $\frac{50}{3}$

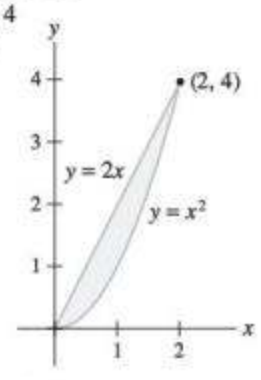
37. 11,664

39. $\frac{16}{3}$

41. *a*) $\int_0^2 f(x, y)\,dy = 2$ sin importar si x es racional o irracional.
b) El valor es 2.
c) 2
d) Converge a 3.
e) La suma de Riemann no tiene un límite determinado en forma única.

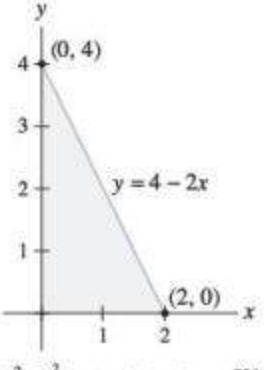
Sección 5.3

1. *a*) 4
b)

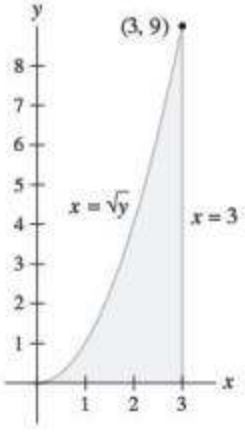


c) $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (2x + 1)\,dx\,dy = 4$

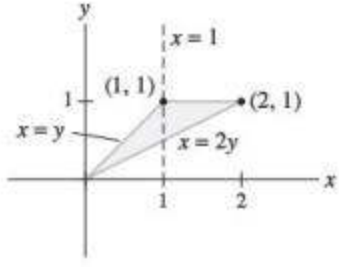
3. $\int_0^4 \int_0^{2-y/2} y\,dx\,dy = \frac{16}{3}$



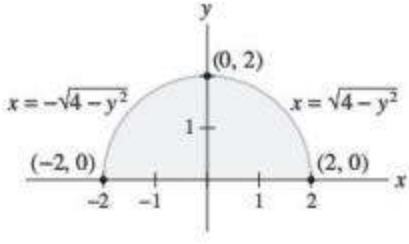
5. $\int_0^3 \int_0^{x^2} (x + y)\,dy\,dx = \frac{891}{20}$



7. $\int_0^1 \int_{x/2}^{x} e^x\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} e^x\,dy\,dx = \frac{1}{2} + e^2/2 - e$



9. $\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{16}{3}$



11. $\frac{625}{12}$
13. $\frac{896}{15}$
15. $(1 - \text{sen } 1)/2$
17. $(e^{27} - 1)/6$

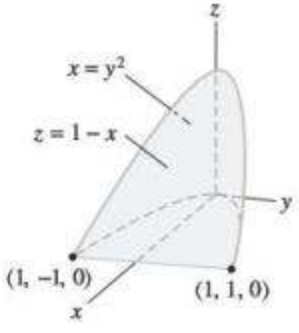
19. *a*) Si su sistema de álgebra por computadora puede dar una respuesta simplificada, debe ser $\frac{1}{4}(1 - \cos 2)$.
b) La integral con respecto de y requiere dos aplicaciones de la integración por partes.
c) A la computadora solo le toma un instante encontrar que $\int_0^1 \int_0^{2y} y^2 \cos(xy)\,dx\,dy = \frac{1}{4}(1 - \cos 2)$, mucho más rápido que la evaluación efectuada en el inciso *a*).

21. *a*) Es muy posible que la computadora no pueda efectuar la evaluación.
b) Con el orden invertido, la computadora encuentra con facilidad que $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\text{sen } x} e^{\cos x}\,dy\,dx = e - 1$.

Sección 5.4

1. 0
3. 1
5. $\frac{1539}{16}$
7. $-\frac{5}{24}$
9. Volumen $= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$
11. $\frac{176}{15}$
13. 0
15. $\frac{1}{10}$
17. $81\sqrt{3}\,\pi/8$

19. $\frac{13}{60}$
21. $\frac{20}{3}$
23. $\sqrt{2}\,\pi/2$
25. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$
$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$
$= \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} \int_{y^2}^{1-z} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$
$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{y^2}^{1-z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$



27. $\int_0^2 \int_y^2 \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$
$= \int_0^2 \int_0^x \int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$
$= \int_0^2 \int_z^2 \int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$
$= \int_0^2 \int_0^y \int_y^2 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$
$= \int_0^2 \int_z^2 \int_y^2 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
29. *a*) La superficie inferior es $z = x^2 + 3y^2$, la superficie superior es $z = 4y^2$ la sombra en el plano xy es $x^2/4 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$.
b) $\int_0^1 \int_{-2}^2 \int_{x^2+3y^2}^{4-y^2} (x^3 + y^3)\,dz\,dx\,dy$
c) $\int_0^1 \int_{3y^2}^{4-y^2} \int_{-\sqrt{z-3y^2}}^{\sqrt{z-3y^2}} (x^3 + y^3)\,dx\,dz\,dy$
d) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{z/3}} \int_{-\sqrt{z-3y^2}}^{\sqrt{z-3y^2}} (x^3 + y^3)\,dx\,dy\,dz +$
$\int_3^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \int_{-\sqrt{z-3y^2}}^{\sqrt{z-3y^2}} (x^3 + y^3)\,dx\,dy\,dz$
e) $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^{3+x^2/4} \int_0^{\sqrt{(z-x^2)/3}} (x^3 + y^3)\,dy\,dz\,dx +$
$\int_{-2}^2 \int_{3+x^2/4}^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} (x^3 + y^3)\,dy\,dz\,dx$

Sección 5.5

1. *a*) $\mathbf{T}(u,v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$
b) $D = [0,3] \times [-1,0]$
3. D es el paralelogramo con vértices en $(0,0)$, $(11,2)$, $(4,3)$, $(15,5)$.
5. $\mathbf{T}$ toma W^* sobre el paralelepípedo con vértices en $(0,0,0)$, $(3,1,5)$, $(-1,-1,3)$, $(0,2,-1)$, $(2,0,8)$, $(3,3,4)$, $(-1,1,2)$ y $(2,2,7)$.
7. *a*) $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$
b) $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x, y, z \ge 0\}$
c) $D = \{(x,y,z) \mid \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x, y, z \ge 0\}$
9. $\int_0^2 \int_0^2 u^5 v e^{v^2} \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = 8(e^4 - 1)/3$
11. $7(e - 1/e)$
13. 3π
15. $486\pi/5$
17. $31\ln(\sqrt{2} + 1)$
19. $(16 - 3\pi)/12$
21. $\pi a^2/4$ si n es impar,
$\pi a^2/2$ si n es par.
23. $2 + \pi/4$
25. $(\pi \operatorname{sen} 1)/3$
27. $\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} - 1)$
29. $\pi(e^4 - e + 1)$
31. 48π
33. $\frac{2\pi}{3}[a^3 - (a^2 - b^2)^{3/2}]$
35. $2\pi((1 - a^2)e^{a^2} + (b^2 - 1)e^{b^2})$
37. $8505\pi/32$
39. $4\sqrt{2}\,\pi(5\sqrt{5} - 8)/3$
41. $656\pi/5$

Sección 5.6

1. *a*) 80 casos
b) \$1.60
3. $e^2 - 2e + 1$
5. *a*) c, donde c es la constante de proporcionalidad.
b) $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
7. $\dfrac{30 - 3\pi}{30 - 5\pi}$
9. 90 segundos
11. Si la placa se localiza en $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0\}$, entonces $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4a/3\pi)$.
13. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{27}{4}, \frac{12}{7})$
15. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left((7\sqrt{3} + 8\pi)/(3\sqrt{3} + 4\pi), 15/(\sqrt{3} + 4\pi)\right)$
17. $(\bar{x}, \bar{y}) = (21/20, 0)$
19. *a*) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{5})$
b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{43}{56}, 0, \frac{99}{49})$
21. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, -\frac{17}{12})$
23. $3a/8$
25. *a*) $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30}$
b) $r_x = r_y = r_z = 1/\sqrt{5}$
27. *a*) $I_z = 6561\pi/4$; $r_z = (3\sqrt{3})/(2\sqrt{2})$
b) $I_z = 8748\pi/35$; $r_z = (3\sqrt{3})/\sqrt{7}$

29 1496/135

31 $116\pi/3$

33 $V = -3GMm(b^2 - a^2)/(2(b^3 - a^3))$

Sección 5.7

1. *a*) $T_{2,3} = -0.621375$
   b) El valor exacto es -0.619.
3. *a*) $T_{2,3} = 0.19825$
   b) El valor exacto es 0.197402.
5. *a*) $T_{2,3} = 0.336123$
   b) El valor exacto es 0.331642.
7. *a*) $S_{2,2} = 0.00010125$
   b) El valor exacto es 0.0000972.
9. *a*) $S_{2,2} = 0.331871$
   b) El valor exacto es 0.331642.
11. *a*) $S_{2,2} = 0.414325$
    b) El valor exacto es 0.414214
13. *a*) $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{4x^2 + 36y^2 + 1}\, dy\, dx$
    b) $T_{4,4} = 3.52366$
15. $S_{2,2}$ es más exacto que $T_{4,4}$.
17. *a*) n debe ser al menos 19.
    b) n debe ser al menos 1.
19. *a*) $S_{2,2} = -0.00390625$
    b) El valor exacto es $-1/256$.
    c) Las respuestas son las mismas porque $E_{2,2} = 0$ según el teorema 7.4.
21. $T_{3,3} = 0.190978$
23. $T_{3,3} = 0.412888$
25. $T_{3,3} = 0.724061$

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 5

1. Falso (no todos los rectángulos deben tener lados paralelos a los ejes coordenados).
3. Verdadero
5. Falso
7. Falso
9. Verdadero
11. Verdadero
13. Falso (el valor de la integral es 3).
15. Verdadero
17. Verdadero (la integral interior es igual a cero debido a la simetría).
19. Verdadero
21. Falso (las integrales son opuestas).
23. Falso (en el integrando debe aparecer un factor de r).
25. Falso (en el integrando desaparece un factor de ρ).
27. Verdadero
29. Verdadero

Ejercicios varios para el capítulo 5

1. 72π
3. *a*) $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{9-3x^2}}^{\sqrt{9-3x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{9-x^2} 3\, dz\, dy\, dx$
   y $\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{(9-y^2)/3}} \int_{2x^2+y^2}^{9-x^2} 3\, dz\, dx\, dy$ son dos posibilidades.
   b) 81 $\sqrt{3}\pi/4$
5. a) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$
   b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\text{sen}^{-1}\, 1/3} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta +$
   $\int_0^{2\pi} \int_{\text{sen}^{-1}\, 1/3}^{\pi/2} \int_0^{\csc\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$. El valor es
   $2\pi\left(9 - \dfrac{16\sqrt{2}}{3}\right)$.
7. $8\int_0^a \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{a}{2}\sec\theta} r\, dr\, d\theta\, dz = a^3$
9. $(\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} 2)/6$
11. *a*) $\int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy\, dx$
    b) $E^* = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1\}$
    c) Área $= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr\, dr\, d\theta$
13. El área es igual a π.
15. $-\frac{3}{5}\ln 4$
17. $(\ln 2)(\tan^{-1} 4 - \frac{\pi}{4})$
19. *a*) $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dw\, dz\, dy\, dx$
    b) $\pi^2 a^4/2$
    c) Una esfera de cinco dimensiones tiene un volumen de $8\pi^2 a^5/15$, una de seis dimensiones lo tiene de $\pi^3 a^6/6$. El patrón no está muy claro a partir de esta información.
25. Dentro de un disco de radio $\sqrt{5}a/3$ con respecto del centro, donde a es el radio del hemisferio.
27. *a*) $4(\sqrt{1-\epsilon} - \sqrt{\epsilon})(\sqrt{1-\delta} - \sqrt{\delta})$
    b) 4
29. La integral no converge.
31. $-4\pi/9$
33. Converge cuando $p > 1$ y $q > 1$; el valor es
    $\dfrac{1}{(p-1)(q-1)}$.
35. La integral no converge.
37. *a*) Sugerencia: descomponga la integral en una suma de integrales de 0 a 1 y de 1 a ∞. Demuestre la convergencia de la integral impropia de 1 a ∞ mediante la comparación con $\int_1^\infty e^{-x}\, dx$.

b) Sugerencia: comience con $\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}dA$ y use las leyes de los exponentes.

c) $\pi(1-e^{-a^2})$

d) π

e) $\sqrt{\pi}$

39. *b*) $\frac{3}{280}$

41. $C = ab/4$

43. *a*) $C = \frac{4}{a^2b^2}$

b) $\frac{1}{2}$

45. $1 - e^{-1/4} \approx 0.2212$

Capítulo 6

Sección 6.1

1. *a*) 50 *b*) 4

3. $(35\sqrt{35} - 17\sqrt{17})/27$

5. $5\sqrt{17}$

7. $(5^{3/2} + 87)/12$

9. 2 11. $\frac{4}{5}$ 13. $(3e^3 - 5)/3$

15. $4\pi + 16\pi^2/3$

17. 3π 19. $1 - e^{-4\pi}$

21. *a*) $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}$, $\int_{\mathbf{y}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$

b) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(1-2t)$. Por consiguiente, las imágenes de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son iguales, aunque $\mathbf{y}$ traza la imagen en la dirección opuesta a la de $\mathbf{x}$. Por esta razón, los resultados del inciso *a*) hubieran podido anticiparse.

23. 0

25. $-\frac{137}{12}$ 27. 9 29. 0

31. $-\frac{11}{3}$

33. Sugerencia: use la fórmula (3).

35. *a*) 2500 $\sqrt{13}$ pies-libras

b) 7500 pies-libras

43. *a*) 7.65625 *b*) 7.5

Sección 6.2

1. $\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy = \iint_D (N_x - M_y)\,dA = 8\pi$

3. $\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy = \iint_D (N_x - M_y)\,dA = -4$

5. $\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy = \iint_D (N_x - M_y)\,dA = -14\sqrt{2}\pi$

7. *a*) 0

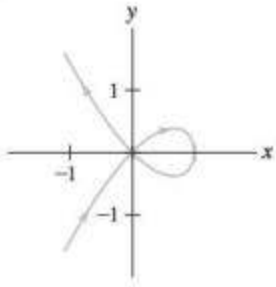
b) Necesitará calcular cuatro distintas integrales de línea, una por cada lado del cuadrado.

9. -2

11. Sugerencia: calcule $\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$, donde C es la frontera de R, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

13. -45

15. *a*)



b) $\frac{8}{15}$

19. Sugerencia: parametrice cada segmento de recta del perímetro.

21. -12π

23. *a*) Sugerencia: demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

25. Aplique directamente el teorema de Green.

27. La integral de línea es ± 3 veces el área del rectángulo, donde el signo depende de la orientación de la frontera.

29. Sugerencia: $u\nabla v = (u\,\partial v/\partial x,\ u\,\partial v/\partial y)$. Después use el teorema de Green.

31. Sugerencia: comience con $\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\,ds$ y después utilice el teorema de Green.

Sección 6.3

1. *a*) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{11}{7}$

c) No. Las integrales de línea no dependen de la trayectoria.

3. No conservativo

5. No conservativo

7. Conservativo; $f(x, y) = xe^{-y} + \cos xy$

9. Conservativo; $f(x, y) = 3x^2y^2 - x^3 + \frac{1}{3}y^3$

11. Conservativo; $f(x, y, z) = 2x^2yz^3 - x^2y + y^2z$

13. Conservativo; $f(x, y, z) = x^2 + xy + \operatorname{sen} yz$

15. Conservativo; $f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y + z^3 + 2z$

17. No conservativo

21. $N(x, y) = \frac{1}{2}e^{2x} + x^3e^y + u(y)$, donde u es cualquier función de y de clase C^2.

23. $N(x, y, z) = \frac{1}{4}x^4 + z^2 + h(y)$, h de clase C^1.

25. *a*) Compruebe que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Puesto que $\mathbf{F}$ es de clase C^1 en todo $\mathbf{R}^3$, según el teorema 3.5, $\mathbf{F}$ es conservativo. Un potencial escalar es $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$.

b) $\frac{7}{3} + \operatorname{sen} e \operatorname{sen} e^2 - (\operatorname{sen} 1)^2$

27. 0

29. 6

31. -480

33. *a*) Conservativo en $\{(x, y) \mid y > 0\}$ y en $\{(x, y) \mid y < 0\}$.

b) $f(x, y) = (x^2y^2 + x^2 + 1)/(2y^2)$
c) 1

35. *a*) **F** es conservativo. *b*) -2

37. Trabajo $= GMm\left(\dfrac{1}{\|\mathbf{x}_1\|} - \dfrac{1}{\|\mathbf{x}_0\|}\right)$

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 6

1. Verdadero
3. Falso (es negativo).
5. Falso (la integral es 0).
7. Falso (hay igualdad solo en el signo).
9. Verdadero
11. Verdadero
13. Verdadero
15. Falso (la integral de línea podría ser $\pm \int_C \|\mathbf{F}\|\, ds$, en función de si **F** apunta en la misma dirección o en la opuesta que C).
17. Falso (sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y considere el teorema de Green).
19. Falso (en condiciones apropiadas la integral es $f(B) - f(A)$).
21. Verdadero
23. Falso (para que el campo vectorial sea conservativo, la integral de línea debe ser igual a cero para *todas* las curvas cerradas, no solo para una en particular).
25. Falso (el campo vectorial ($e^x \cos y \operatorname{sen} z$, $e^x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$, $e^x \cos y \cos z$) no es conservativo).
27. Falso (el dominio no está simplemente conectado).
29. Falso (f solo está definida como máximo para una constante).

Ejercicios varios para el capítulo 6

1. Descomponga C en n segmentos, cada uno de longitud Δs_k. Por razones de continuidad, f será casi constante en cada segmento, por lo que $[f]_{\text{prom}} \approx \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{c}_k)\Delta s_k / \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$. (Aquí $\mathbf{c}_k$ es cualquier punto en el k-ésimo segmento.) La fórmula se infiere después de tomar límites cuando todos $\Delta s_k \to 0$.
3. $2a/\pi$
5. 2
7. $\bar{x} = \bar{y} = \left(\frac{8-\sqrt{2}\pi-2\sqrt{3}}{4(\pi-2\sqrt{2})}\right)a$
9. *a*) $\frac{36\pi-32}{3}$ *b*) 2
11. $I_x = \frac{7769\sqrt{17}-1}{840}$, $r_x = \sqrt{\frac{7769\sqrt{17}-1}{1190\sqrt{17}-70}}$
13. $I_z = 27\sqrt{11}$, $r_z = \frac{9\sqrt{22}}{22}$
15. *a*) $\int_a^b g(f(\theta)\cos\theta,\ f(\theta)\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$
b) $\sqrt{10}\,[(e^{18\pi} - 1)/9 + 12(1 - e^{12\pi})/37]$
17. 6π
19. $K = 2\pi$
21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$
23. Sugerencia: use la fórmula área $= \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy$.
25. Sugerencia: $\bar{x} = \iint_D x\, dA$/área de D, $\bar{y} = \iint_D y\, dA$/área de D. Ahora aplique el teorema de Green a $\int_{\partial D} x^2\, dy$ y $\int_{\partial D} xy\, dy$.
27. $\bar{x} = \bar{y} = -\frac{1}{34}$
29. Sugerencia: use el resultado del ejercicio 28 dos veces.
35. *a*) Tanto la integral de línea como la integral doble son iguales a cero.
b) No. La integral doble no está definida propiamente sobre el disco debido a que **F** es indefinida en el origen.
c) $\iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2})]\, dA = 0 = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. Como $\int_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -2\pi$, se infiere el resultado.
37. *a*) 0
b) Aplique el teorema de la divergencia.
39. $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}} -\nabla V \cdot d\mathbf{s} = -V(B) + V(A)$. Ahora use el ejercicio 38.

Capítulo 7

Sección 7.1

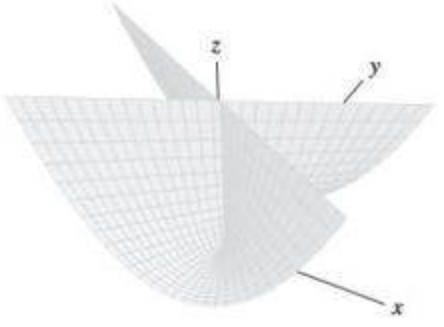
1. *a*) $-\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
b) $x + 4y - 2z = 5$
3. $y + 4z = 4$
5. *a*)

b) Sí
c) $4x - 2y - z = 3$

7. *a*) Suave, excepto en (0, 0, 0). El plano tangente en $(1, \sqrt{3}, 4)$ tiene por ecuación $2x + 2\sqrt{3}y - z = 4$.
b) S es un paraboloide.
c) $z = x^2 + y^2$
d) Sí. En (0, 0, 0) el plano tangente tiene por ecuación $z = 0$.
9. Sugerencia: considere $x^2 + y^2$.
11. Incisos *a*) – *c*) Todas las versiones dan la ecuación $-x + y + \sqrt{2}z = 1$.
13. $\mathbf{X}(s, t) = (2\cos s, t, 2\operatorname{sen} s)$, $0 \le s \le 2\pi$, $-1 \le t \le 3$
15. $\mathbf{X}_1(s, t) = \left(s, t, \sqrt{s^2 + t^2 + 1}\right)$,
$\mathbf{X}_2(s, t) = \left(s, t, -\sqrt{s^2 + t^2 + 1}\right)$, $(s, t) \in \mathbf{R}^2$
17. *a*) $y^2z = t^2s^2 = x^2$

b) No

c)



d) Puntos en el eje z positivo.

e) $-4x + 8y + z = 4$

f) $(0, 0, 1) = \mathbf{X}(\pm 1, 0)$; los planos tangentes tienen ecuaciones $x \pm y = 0$.

19. *a*) En el punto $(a, g(a, c), c)$, el plano tangente tiene por ecuación $g_x(a, c)(x - a) - (y - g(a, c)) + g_z(a, c)(z - c) = 0$.

b) En el punto $(h(b, c), b, c)$, el plano tangente tiene por ecuación $-(x - h(b, c)) + h_y(b, c)(y - b) + h_z(b, c)(z - c) = 0$.

21. $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} = (1, 0, 1) + (s - 1)(1, 2, 0) + (t + 1)(0, 1, -2)\}$ o $x = s$, $y = 2s + t - 1$, $z = -2t - 1$. Para verificar la consistencia con el ejercicio 5(*b*), compruebe que los puntos dados por las ecuaciones paramétricas están en el plano determinado por la ecuación en el ejercicio 5(*b*).

23. $\sqrt{6}\pi$

25. $4\pi a\sqrt{a^2 - b^2}$

27. $(65^{3/2} - 17^{3/2})\pi/24$

29. $\sqrt{1 + a} \cdot$ área de D

31. $16a^2$

Sección 7.2

1. $26\sqrt{3}/3$

3. 1

5. $\frac{640}{3}$

7. *a*) $4\pi a^4$ *b*) $4\pi a^4/3$

a) Parametrice el cilindro como $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = s$ con $-2 \le s \le 2$, $0 \le t < 2\pi$. La integral evalúa a -64π.

b) La integral es $-4 \cdot$ (área superficial de S) $= -64\pi$.

11. 0

13. $297\pi/2$

15. 36π

17. 0

19. $2\pi a^3/3$

21. $-\pi a^2$

23. $8\pi^4$

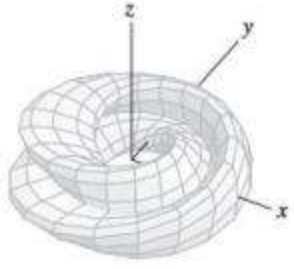
25. $13/12 - e^2/12 + e/2$

27. *a*)

b) $\mathbf{n}_1 = \left(x/(\sqrt{2}z), y/(\sqrt{2}z), -1/\sqrt{2}\right)$, $\mathbf{n}_2 = (x, y, 0)$

c) $-1456\pi/3$

29. *a*)



b) $(a\cos s, a\operatorname{sen} s, 0)$

c) $\mathbf{N}(s, 0) = (a\cos s\,(2\cos(s/2) + \operatorname{sen}(s/2)),$
$a\operatorname{sen} s\,(2\cos(s/2) + \operatorname{sen}(s/2)),$
$a(2\operatorname{sen}(s/2) - \cos(s/2)))$.

A partir de esto se observa que $\mathbf{N}(0, 0) = (2a, 0, -a)$, en tanto que $\mathbf{N}(2\pi, 0) = (-2a, 0, a)$. Por lo tanto, la botella de Klein no puede ser orientable, ya que el vector normal a lo largo de la curva en coordenadas s en $t = 0$ cambia de dirección.

Sección 7.3

1. 0
3. 0
5. 0
7. 0

9. $4\pi(b^2 - a^2)$

11. 45π

13. *a*) Sugerencia: use la fórmula de los ángulos dobles.
b) $-\frac{3\pi}{4}$

15. 1/2

17. $625\pi/8$

25. *a*) πa
b) πa
c) Las respuestas en los incisos *a*) y *b*) son las mismas; los tres cuartos de círculos planos que forman parte de ∂D no contribuyen en nada a $\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, dS$.

29. *a)* $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$
$\approx F_z(r, \theta, z + \Delta z/2) r \, \Delta\theta \, \Delta r$
$- F_z(r, \theta, z - \Delta z/2) r \, \Delta\theta \, \Delta r$
$+ F_r(r + \Delta r/2, \theta, z)(r + \Delta r/2) \Delta\theta \, \Delta z$
$- F_r(r - \Delta r/2, \theta, z)(r - \Delta r/2) \Delta\theta \, \Delta z$
$+ F_\theta(r, \theta + \Delta\theta/2, z) \Delta r \, \Delta z$
$- F_\theta(r, \theta - \Delta\theta/2, z) \Delta r \, \Delta z$

Sección 7.4

1. Sugerencia: use el teorema de Gauss y la regla del producto para $\nabla \cdot (f \nabla g)$.
3. *a)* Sugerencia: utilice la primera fórmula de Green con $f = g$.
   b) Sugerencia: emplee el inciso *a)* y el hecho de que $\nabla f \cdot \nabla f = \|\nabla f\|^2$.
7. Sugerencia: use el argumento en el ejercicio 6 y la regla del producto para $\nabla \cdot (k \nabla T)$.
9. *a)* Sugerencia: use el teorema de Gauss y el ejercicio 8.
   b) El calor fluye a la misma tasa hacia D desde la esfera interior y hacia afuera a través de la esfera exterior.
11. Sugerencia: use las leyes de Ampère y de Gauss.
15. *b)* En cada caso $k = \mu_0 \epsilon_0$.
19. Sugerencia: aplique el teorema de Gauss a $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ y después las leyes de Faraday y Ampère.
21. Sugerencia: aplique el argumento usado en el ejercicio 20 a cada integral componente de $\mathbf{B}$.

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 7

1. Verdadero
3. Verdadero (sea $u = s^3$ y $v = \tan t$).
5. Falso (los límites de integración no son correctos).
7. Falso (el valor de la integral es 24).
9. Verdadero
11. Falso (la integral tiene valor de 32π).
13. Falso (el valor es 0).
15. Falso (la superficie debe estar conectada).
17. Verdadero (el resultado se infiere del teorema de Stokes).
19. Verdadero (use el teorema de Gauss).
21. Falso (el teorema de Gauss implica que la integral es *como máximo* dos veces el área superficial).
23. Verdadero
25. Falso (debería ser el flujo del *rotacional* de $\mathbf{F}$).
27. Verdadero (aplique la primera fórmula de Green).
29. Falso (f está determinada como la suma de una función armónica).

Ejercicios varios para el capítulo 7

1. *a)* C *b)* E *c)* A
   d) D *e)* F *f)* B
3. *a)* $(\sqrt{z^2 + 1} \cos\theta, \sqrt{z^2 + 1} \operatorname{sen}\theta, z)$
   b) $(a\sqrt{s^2 + 1} \cos t, b\sqrt{s^2 + 1} \operatorname{sen} t, cs)$
5. *a)* $(a \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, b \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \; c \cos\varphi)$
   b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{b^2c^2 \operatorname{sen}^4\varphi \cos^2\theta + a^2c^2 \operatorname{sen}^4\varphi \operatorname{sen}^2\theta + a^2b^2 \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi} \, d\varphi \, d\theta$
7. *a)* $(s \cos t, f(s), s \operatorname{sen} t)$
9. *b)* $\frac{98}{3}$
11. $\frac{11}{10}$
13. $(a/2, a/2, a/2)$
15. $(0, 0, a/3)$
17. *a)* $15\sqrt{5}\pi/2$
   b) $\sqrt{5/2}$
   c) $I_z = 62\sqrt{5}\pi k/5, r_z = \sqrt{93/35}$
19. *a)* $I_x = I_y = 2\pi ab\delta(3a^2 + 2b^2)/3$
   b) $r_x = r_y = \sqrt{(3a^2 + 2b^2)/6}$
23. Sugerencia: use el teorema de Stokes.
25. Utilice el ejercicio 24.
31. Sugerencia: demuestre que $\nabla \cdot (\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3) = 0$ donde está definido.
35. $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$, de modo que no hay potencial vectorial.
39. Sugerencia: calcule $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t)$.

Capítulo 8

Sección 8.1

1. -2 3. 6 5. 182
7. -370
9. $-6a_1b_3 + 6a_3b_1 + a_2b_4 - a_4b_2$
11. $14 \cos x - 7 \operatorname{sen} z + 11y^2 + 33$
13. $6(e^x \cos y + (y^2 + 2)e^{2z})$
15. $2xy \, dx \wedge dy \wedge dz$
17. $3x_3(x_3 - x_4) \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$
19. $(x_1 e^{x_4 x_5} - x_1 x_2 x_3 \cos x_5) \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5$

Sección 8.2

1. Sugerencia: demuestre la independencia lineal de $\mathbf{T}_{\theta_1}, \mathbf{T}_{\theta_2}, \mathbf{T}_{\theta_3}$ por medio de resolver la ecuación vectorial $c_1\mathbf{T}_{\theta_1} + c_2\mathbf{T}_{\theta_2} + c_3\mathbf{T}_{\theta_3} = \mathbf{0}$ para c_1, c_2, c_3.
3. $\mathbf{X}: [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times [1, 2] \times [1, 2] \to \mathbf{R}^6$, $\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, l_2, l_3) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, donde $x_1 = 3 \cos\theta_1$, $y_1 = 3 \operatorname{sen}\theta_1$, $x_2 = 3 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$, $y_2 = 3 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2$, $x_3 = 3 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3$, $y_3 = 3 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 + l_3 \operatorname{sen}\theta_3$
7. -2π
9. $4\pi^2$
11. *a)* $\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}, \mathbf{T}_{u_3}) = u_1 > 0$ para $0 < u_1 \leq \sqrt{5}$ que es donde la parametrización es suave.

b) Parametrice ∂M en dos partes como
$\mathbf{Y}_1$: $[0, \sqrt{5}] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$,
$\mathbf{Y}_1(s_1, s_2) = (s_1 \cos s_2, s_1 \operatorname{sen} s_2, s_1^2 - 6)$ y
$\mathbf{Y}_2$: $[0, \sqrt{5}] \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$,
$\mathbf{Y}_2(s_1, s_2) = (s_1 \cos s_2, s_1 \operatorname{sen} s_2, 4 - s_1^2)$.

c) $\mathbf{V}_1 = \dfrac{(2s_1 \cos s_2, 2s_1 \operatorname{sen} s_2, -1)}{\sqrt{4s_1^2 + 1}}$,

$\mathbf{V}_2 = \dfrac{(2s_1 \cos s_2, 2s_1 \operatorname{sen} s_2, 1)}{\sqrt{4s_1^2 + 1}}$

13. 32π
15. $\frac{3}{2}$

Sección 8.3

1. $d\omega = e^{xyz}(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$
3. $d\omega = -y\,dx \wedge dy$
5. $d\omega = (x + 2yz)\,dx \wedge dy \wedge dz$
7. $d\omega = 2(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{n+1}x_n)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$
9. $F(x, z) = xz + Cz + D_1$, $\quad G(x, y) = xy + Cy + D_2$, donde C, D_1 y D_2 son constantes arbitrarias.
11. $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = 0$

Ejercicios verdadero/falso para el capítulo 8

1. Verdadero
3. Verdadero
5. Verdadero
7. Verdadero
9. Verdadero
11. Falso ($\mathbf{X}(1, 1, -1) = \mathbf{X}(1, 1, 1)$, por lo que $\mathbf{X}$ no es uno a uno en D).
13. Falso (el argumento solo depende del signo).
15. Falso (esto solo es verdadero si n es par).
17. Verdadero
19. Verdadero ($d\omega$ sería una forma $(n + 1)$ y no hay otras distintas de cero en $\mathbf{R}^n$).

Ejercicios varios para el capítulo 8

5. 0
7. *a*) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$
   b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
9. Sugerencia: considere $\int_M d(\omega \wedge \eta)$.

Índice analítico

∩, xv
∪, xv
∇ (operador del), 227-228
⊂, xv
⊆, xv

A

Aceleración, 190
  componente
    normal de la, 215
    tangencial de la, 215
Aleta, 241
Ampère, ley de, 516-518
  caso
    estático, 516
    variable en el tiempo, 517-518
Ángulo(s)
  entre vectores, 21, 49
  sólido, 527
Antiderivada, xvii
Aproximación por mínimos cuadrados, 293, 297
Área
  cero, 319
  de una superficie, 464-467
  superficial, 464-467
Astroide, 219

B

Base estándar, 9
Bernoulli, Johann, 194
Bisector perpendicular, 76
BMI, 155
Brahe, Tycho, 193

C

C^∞, 138
Caja cerrada, 337
Cambio
  de variables
    en integrales dobles, 357, 370
    en integrales triples, 365, 371
  incremental, 249
Campo(s)
  eléctrico
    de una distribución de carga continua, 514
    de una sola carga puntual, 512
  escalar, 222
  gradiente, 223
  magnético
    de una carga puntual en movimiento, 514
    de una distribución de carga en movimiento, 515
  vectorial, 189, 221
    con simetría radial, 453
    conservativo, 297, 441
    divergencia de un, 228-229
    gradiente, 223, 297, 441
    incompresible, 229
    irrotacional, 231
    que apunta, 522
    rotacional, 229-231
    solenoidal, 229
Centro de masa
  continuo(a), 379, 383
    en $\mathbf{R}$, 380
    en $\mathbf{R}^2$, 380
    en $\mathbf{R}^3$, 382
  discreto, 377-379
Centroide, 383
Cicloide
  ordinaria, 17
  negativa, 17-18
Circulación, 413, 476
C^k, 138
Clairaut, Alexis, 137
Clase
  C^∞, 138
  C^k, 138
Clotoide, 241
Codominio de una función, 82
Cofactor, 57
Combinación lineal, 543
Conductividad, 522
  térmica, 520
Conectada, región, 441
Conjunto(s)
  abierto, 102
  cerrado, 102
  compacto, 271
  de artículos, 56
  equipotencial, 224
  frontera de un, 102
Cono elíptico, 94
Continuidad por partes, 318
Coordenadas
  cartesianas, 62
  cilíndricas, 65
  conversiones
    entre cartesianas y cilíndricas, 65
    entre cartesianas y esféricas, 68
    entre cartesianas y polares, 64
    entre cilíndricas y esféricas, 68
  en la recta de los reales, xv
  en $\mathbf{R}^2$, xv
  en $\mathbf{R}^3$, xv
  esféricas, 66
  hiperesféricas, 72-73
  polares, 62
  rectangulares, 62
Copérnico, Nicolás, 193
Cosenos directores, 26
Criterio del hessiano
  para extremos, 265-270
    restringidos, 286-290
Cuadrante, xv
Curva(s), 419
  Bézier, 239
  cerrada, 419
  convexa, 452
  coordenadas, 538
  de Bézier, 239
  de contorno, 87
    definición de, 88
  de nivel, 87
    definición de, 88
  en coordenadas s, 458
  en coordenadas t, 458
  simple, 419
Curvatura, 209-210, 216-217
  radio de, 240
  total, 452

D

Darboux, fórmulas de, 221
De dos lados, superficie, 479
De un lado, superficie, 479
Definida positivamente, forma cuadrática, 267, 309
Densidad
  de carga, 514
  de circulación, 498

de conducción de corriente, 517
de corriente, 514
de conducción, 517
del desplazamiento, 517
de flujo, 498
de probabilidad, 406
conjunta, 406
del flujo de calor, 489, 520
Derivada
direccional, 160
exterior, 553
de una forma 0, 553
de una forma k, 553
normal, 453, 507, 520
parcial, 117
de f con respecto de x_i, 117
de orden superior, 136-138
mixta, 136
Desigualdad
aritmética-geométrica, 308
de Cauchy-Schwarz, 50, 293
del triángulo, 51
Determinante, 30, 56
propiedades del, 60
Diferenciabilidad
de una función de dos variables, 120-123
de una función de tres o más variables, 123-127
definición de, 121
en general, 126
y continuidad, 122, 127
Diferencial total, 249
Diferenciar bajo el signo de la integral, 405
Distancia
entre líneas oblicuas, 46-47
entre planos paralelos, 46
entre un punto
y un plano, 77
y una recta, 45-46, 77
Distribución de carga, 514
Divergencia, 228-229, 496
en coordenadas
cilíndricas, 233, 507
esféricas, 235, 508
Dominio de una función, 82

E

Ecuación(es)
de Cauchy-Riemann, 242
de continuidad, 516, 520
en dinámica de fluidos, 520
para densidades de corriente, 520
de la primera variación, 227
de onda, 187
de restricción, 278
del calor, 142, 520, 521
unicidad de las soluciones de la, 521
del telegrafista, 522
paramétricas, 10
de una cicloide, 14-15
de una involuta, 15
de una recta, 9-13
Eigenvalor, 309
Eigenvector, 309
Ejes coordenados
en $\mathbf{R}^2$, xv
en $\mathbf{R}^3$,xv
Elemento
de área
cartesiano, 364, 370
general, 370
polar, 364, 370
superficial, 485
de integral de superficie vectorial, 486
de volumen
cartesiano, 371
en coordenadas cilíndricas, 367, 371
en coordenadas esféricas, 369, 371
general, 365, 371
Elipsoide, 94
parametrizado, 468, 525
Energía
cinética, 297
potencial, 297
Enfriamiento por viento, 84, 185
Epiciclo, 193
Epicicloide, 80, 437
Epitrocoide, 80
Escalares, 1
Esfera, 92
abierta, 101
cerrada, 101
Espiral de Cornu, 241
Espirógrafo, 79
Esterradianes, 527
Euler, fórmula de, 188
Evoluta, 240
Expansión lineal, 543
Extensión (f^{ext}), 322, 343
Extremos
absolutos, 264
globales, 264, 270-274
en regiones compactas, 270-274
locales, 263
prueba de la segunda derivada, 268
restringidos, 288

F

Faraday, ley de, 517-518
Fenchel, teorema de, 452
Flujo, 432, 476
de un campo vectorial, 227
Forma
0, 530
1
básica, 530
general, 530
2
básica, 531
general, 532
cuadrática, 267, 309
definida negativamente, 267, 309
definida positivamente, 267, 309
k
básica, 533
general, 533
Frenet-Serret, fórmulas de, 217-219
Fresnel, integrales de, 241
Frontera
de un conjunto, 102
de una variedad, 541
Fubini, teorema de, 314, 319, 339
Fuerza
de flotación, 506
electromotriz, 517
neta, 8
resultante, 8
Función(es), 82-94
armónica, 142, 243, 453, 511, 520
biarmónica(s), 187
codominio, 82
componente, 85
continuas, 109
propiedades algebraicas de las, 111
de longitud de arco, 205, 217
de más de una variable, 84-94
graficación de, 87-94
superficies cuadráticas, *véase* superficies cuadráticas, 93
de producción Cobb-Douglas, 302
de variable escalar, 84
dominio de, 82
extensión de (f^{ext}), 322, 343
homogénea(s), 187, 309
inyectivas, 83
lineales, 55
parciales, 116
polinomiales, 106
potencial(es), 223, 441
rango de, 83
sobre, 83
suave(s), 138
suprayectivas, 83
uno a uno, *véase* funciones, inyectivas, 83
utilidad, 186
valor medio de, 374
a lo largo de una curva, 451

G

Gauss
ley de, 512-514, 518

forma diferencial, 514
forma integral, 514
teorema de, 433, 493-496
demostración del, 503-505
implicado por el teorema de Stokes generalizado, 558-559
Generador, 543
lineal, 543
Geometría diferencial, 202
Giro, radio de, 385, 451, 526
Gradiente, 124, 158, 227-228
en coordenadas
cilíndricas, 233
esféricas, 235
Grado
de un polinomio, 141
de un término, 141
Green
teorema de, 429
demostración del, 433-436
implicado por el teorema de Stokes generalizado, 557
reformulación vectorial del, 431
fórmulas de, 510
primera, 510
segunda, 510
tercera, 510
identidad de, 453
primera, 453
segunda, 453

H

Hélice, 85, 190
circular, 190
Helicoide, 142, 468
Hessiano, de una función, 255
Hilbert, matriz de, 79
Hiperboloide
de dos láminas, 94-95
de una lámina, 94
parametrizado, 524
Hiperesfera, 73, 167, 293, 308
Hiperplano
presupuestal, 56
tangente, 124, 166
Hipersuperficie, 73, 124
Hipocicloide, 80
Hipotrocoide, 80

I

Imagen esférica
binormal, 242
normal, 242
tangente, 242
Independencia
de la trayectoria, 439, 440
lineal, 284, 539
Índice de masa corporal, 155
Integrabilidad, 316, 319
Integración numérica
método de Monte Carlo de, 399
para funciones
de dos variables, 391-400
de una variable, 388-391
por partes para formas diferenciales 562
Integral(es)
de forma 2, 537
de línea
aproximación numérica de una, 421-426
escalar, 409
forma diferencial, 415
independiente de la trayectoria, 439-440
vectorial, 411
de superficie, 469-488
escalar, 470, 485
vectorial, 474, 486
de una forma
diferencial, 536-542
k sobre una variedad k, 541
definida, xvi
doble, 316
en coordenadas polares, 360-362
impropia, 405
impropia, 405-406
iterada, 311
propiedades de la
linealidad, 320
monotonicidad, 320
triple, 338
en coordenadas cilíndricas, 366-368
en coordenadas esféricas, 368-370
impropia, 405, 522
Intersección de conjuntos, xv
Involuta, 15, 240
Inyectiva, función, 83
Isobaras, 224
Isocuantas, 302
Isotermas, 224

J

Jacobi, identidad de, 39, 78
Jacobiano, 172, 356, 365
Judo, 6-7

K

Kepler, Johannes, 193
Klein, botella de, 489

L

Lagrange, multiplicadores de, 280-290
Lámina, 380
Laplace, ecuación de, 141, 453
Laplaciano, operador, 157, 187, 236
fórmula de la inversión para obtener el, 511
Leibniz, regla de, 405
Ley
de la conservación de la energía, 454
de los gases ideales, 96, 158
del paralelogramo, 4
Libertad para evaluar, 528
Límite(s), 97-111
definición
intuitiva, 98
rigurosa, 99-100
interpretación geométrica, 103-104
propiedades algebraicas de los, 106
unicidad, 106
Línea
de flujo, 225
equipotencial, 224
Longitud, 204
Lorentz, fuerza de, 428

M

Mapeo lineal, 55
Marco móvil, 211, 217
Matriz(ces), 30-32, 51-58
adjunta, 61
cofactor, 57
de derivadas parciales, 125
de Hilbert, 79
determinante, 56
expansión en cofactores, 57
identidad, 59, 177
inversa, 61
invertible, 61, 177
menor, 57
multiplicación por un escalar, 53
propiedades de la, 53
no singular, 61
operaciones elementales en un renglón, 60
producto de matrices, 53
propiedades del, 54
simétrica, 267, 309
sin potencia, 79
transpuesta, 54
triangular, 60
Máximo, local, 263
Maxwell, ecuaciones de, 512-518
Media
aritmética, 308
geométrica, 308
Menor(es), 57
principales, secuencia de, 268
Método de los mínimos cuadrados, 293
Mínimo, local, 263
Möbius, banda de, 480

Momento, 377
angular, 243
de inercia, 384-386, 451, 526
primero, 377, 525
segundo, 384-386
total, 377
Monopolos magnéticos, 516, 518
Movimiento planetario, leyes de Kepler del, 193-200
Multiplicación por un escalar, 2, 4, 36
en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, 2
en $\mathbf{R}^n$, 49
propiedades, 3

N

Nefroide, 81
Negativo definido, 257, 309
Newton, Isaac, 194
método de, 176-181
No orientable, superficie, 479
Normalización, 23

O

Octante, xv
Operador(es)
del (∇), 227-228
diferenciales, 152
Orientable, 479, 543
Orientación, 420, 479, 543
compatible, 543
consistente, 490, 546
inducida, 490, 546
Orientada, curva, 420, 543
Origen
en $\mathbf{R}^2$, xv
en $\mathbf{R}^3$, xv
Ortogonal, 21
Ostrogradsky, Mikhail, 436
Ostrogradsky, teorema de, 436

P

Par, 34, 243, 385
Paraboloide
elíptico, 94
hiperbólico, 90, 94
Paralelogramo, 7
Parametrización, 419
Parámetro de la longitud de arco, 205-207
Partición, xvi, 314, 338
Permeabilidad del espacio libre, 514
Permisividad del espacio libre, 512
Perpendicular u ortogonal, 21
Pitágoras, teorema de, 59
Plano(s)
ecuación(es)
para coordenadas del, 40-43
paramétricas del, 43-45
normal, 221
osculante, 211, 220
rectificador, 221
tangente, 118, 164-168
a una superficie parametrizada suave, 462
ecuación del, 166
ecuaciones paramétricas del, 469
Polinomio, 106-107
Potencial(es), 441
escalares, 445-447
gravitacional, 388
vectorial, 516, 528
Primera variación, ecuación de la, 227
Principio
de Arquímedes, 506
de Cavalieri, 310
Producto(s)
cruz, 27-36
aplicaciones del, 32-35
definición del, 28
en $\mathbf{R}^n$, 61
propiedades del, 29
y el determinante, 31
cuña 534
escalar, 19
externo, 534-535
propiedades del, 535
interno, 19
en $\mathbf{R}^n$, 49
punto, 18-25, 36
definición de, 19
propiedades del, 19
vectorial, 28
Proyección
de un vector, 21-24
estereográfica, 524
vectorial, 21-24
Prueba de la segunda derivada
para extremos, 265-270
restringidos, 286-290
Punta, 80
Punto
aislado, 103
crítico, 182, 265
degenerado, 268, 288
restringido, 279
de acumulación, 103
de equilibrio, 298
estable, 298
inestable, 298
silla, 265

R

Radio
de curvatura, 240
de giro, 385, 451, 526
Rango de una función, 83
Recta(s)
ecuaciones paramétricas de una, 13
normal
a una curva plana, 175
a una superficie en el espacio, 175
oblicuas, 46
tangente a una trayectoria, 191
Rectángulo cerrado, 310, 314
Región elemental
en el espacio, 340-343
definición de, 340
en el plano, 321-327
definición de, 321
Región conectada simplemente, 442
Regla(s)
de la cadena, 142, 153
con una variable, 143-144
con varias variables, 144-153
de la mano derecha, 28, 36
de Simpson
para funciones de dos variables, 394
para funciones de una variable, 390
del cociente
no existencia de una forma general, 135
para funciones de variable escalar, 135
del producto
de una función de variable escalar y variable vectorial, 136
no existencia de una forma general, 135
para funciones de variable escalar, 135
del trapecio
para funciones de dos variables, 392
para funciones de una variable, 388
Regresión
lineal, 293
múltiple, 297
Reparametrización, 416
de una superficie, 477
de una trayectoria, 205-207
de una variedad, 543
k, 549
que invierte la orientación, 416, 418, 478, 549
que preserva la orientación, 416, 418, 478, 549
Restricción, 279
Rotacional, 227, 229-231, 497
en coordenadas
cilíndricas, 233, 508
esféricas, 235, 509

S

Scherk, superficie de, 142
Sección de una superficie, 88
Segmento de recta, 76
Sistema de la mano derecha, xv
Snell, ley de la refracción de, 308
Sobre, función, 83
Stokes, teorema de, 431, 490-493
  demostración del, 500-503
  generalizado, 553
    y el teorema fundamental del cálculo, 560
  implicado por el teorema de Stokes generalizado, 557-558
Subconjunto, xv
Suma
  de la punta a la cola, 4
  de Riemann, xvi, 315, 338
  de los vectores, 2
Superficie(s)
  cuadrática(s), 93-95
    cono elíptico, 94
    elipsoide, 94
    hiperboloide de dos ramas, 94-95
    hiperboloide de una rama, 94
    paraboloide elíptico, 94
    paraboloide hiperbólico, 94
  de dos lados, 479
  de revolución, 525
  equipotencial, 224
  mínima, 142
  orientada, 481
  parametrizadas, 455-467
    área de, 464-467
    definición de, 455
    suaves, 460, 463
  subyacente, 455
Suprayectividad, 83

T

Taylor, polinomio de, 244, 246
  de orden superior, 256
  de primer orden, 248
  de segundo orden, 254
Taylor, teorema de
  con una variable, 244-247
  con varias variables
    fórmula de primer orden, 247-248
    fórmula de segundo orden, 252-254
    fórmulas para polinomios de orden mayor que dos, 256
  fórmula del residuo de Lagrange, 257
Teorema
  de divergencia, 493
    en el plano, 432
  de la función
    implícita, 168-170
    inversa, 172
  de los ejes paralelos, 407
  de Stokes generalizado, 553
  del valor
    extremo, 271
    medio, 260, 329
  fundamental del cálculo, xvii
Teoría del potencial, 142
Tofu, 263, 340
Topología, 101
Toro, 202, 459
Torsión, 212-214, 217-219
Trabajo, 26, 411
Tractriz, 240
Transformaciones de coordenadas, 349-355
Transpuesta, 54
Trayectoria(s), 189
  cantidades
    intrínsecas, 217
    no intrínsecas, 216
  cerrada, 419
  línea de flujo, 225
  no rectificable, 205
  opuesta, 417
  puntos extremos, 189
  recta tangente, 191
  rectificable, 205
  simple, 419
  vector de velocidad, 190
Tronco, 526

U

Unión de conjuntos, xv
Uno a uno, función, 83
Utilidad, 301

V

Valor promedio, 373-377
  de una función en una superficie, 525
Variables aleatorias independientes, 407
Variedad, 202, 538
  frontera de una, 541
  general, 551
  suave, 539
  subyacente, 538
Vecindad, 102, 122
Vector(es), 1
  ángulo entre, 21
    en $\mathbf{R}^n$, 49
  básicos estándar, 9
    en $\mathbf{R}^n$, 50
    para coordenadas cilíndricas, 71-72
    para coordenadas esféricas, 71-72
  binormal, 212, 217
  cero, 2
  columna, 52
  concepto
    algebraico, 1-3
    geométrico, 3-7
  de abasto, 56
  de desplazamiento, 5
  de posición, 3
  de rotación de Darboux, 221
  de velocidad angular, 221
  diferencia de, 4
  distancia, 49
  fila, 52
  gradiente, 158
  igualdad de
    en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, 1
    en $\mathbf{R}^n$, 49
  longitud, 19, 49
  magnitud, 19
  multiplicación por un escalar, 2, 4, 36
    en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, 2
    en $\mathbf{R}^n$, 49
    propiedades, 3
  norma de, 19
  normal
    estándar, 460
    principal, 211, 217
    unitario, hacia afuera, 432
  notación, 1
  producto cruz
    aplicaciones del, 32-35
    definición de, 28
    en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, 1
    en $\mathbf{R}^n$, 49
    propiedades del, 29
    producto cruz, 27-36
    y el determinante, 31
  producto interno
    en $\mathbf{R}^n$, 49
  producto punto, 18-25, 36
    definición de, 19
    propiedades del, 19
  proyección de un, 21-24
  suma de, 4
    en $\mathbf{R}^n$, 49
    propiedades de la, 2
  tangente unitaria, 207, 412
  unitario, 22, 23
Velocidad, 190
  angular, 34
Volumen, 310
  cero, 339
  n-dimensional, 560

W

Whitney, sombrilla de, 468

El cálculo vectorial es una herramienta matemática esencial para el análisis de fenómenos físicos y naturales que dependen de un conjunto de factores complejo. También es, de muchas formas, una materia ideal para que los estudiantes comiencen a explorar las relaciones entre el análisis, la geometría y el álgebra matricial.

El objetivo de este libro es desarrollar en los estudiantes la comprensión profunda de los conceptos del cálculo vectorial y ayudarlos a hacer la transición del cálculo de primer año a las técnicas matemáticas más avanzadas.

Una herramienta didáctica importante de esta obra es el razonamiento, que utiliza analogías con el cálculo de una variable y va de la mano con el desarrollo de una buena intuición geométrica. Aunque muchos resultados están planteados para el caso de n variables, la mayoría de los ejemplos importantes y motivadores ocurren con funciones de dos y tres variables para explicar la teoría general. Los ejercicios de cada sección varían de los cálculos relativamente rutinarios a problemas difíciles y motivadores de mayor dificultad.

Esta edición incluye métodos numéricos para aproximar integrales múltiples, así como demostraciones para las propiedades de los límites, la regla de la cadena general para variables múltiples, y el teorema de Taylor en las versiones de una y varias variables.

En la página Web podrá encontrar archivos de Microsoft® PowerPoint® y Wolfram Mathematica® de notas que se coordinan con el texto y que los profesores pueden usar en sus clases. Consulte los recursos en:

www.pearsonenespañol.com/colley

ISBN 978-607-32-2056-9
90000
9 786073 220569

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com